

Asszonyi Csaba
Ván Péter
Szarka Zoltán

Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota



Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 5



IZOTRÓP KONTINUUMOK
RUGALMAS ÉS KÉPLÉKENY
ÁLLAPOTA

*Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007 Konferencia
Budapest*

IZOTRÓP KONTINUUMOK RUGALMAS ÉS KÉPLÉKENY ÁLLAPOTA

SZERKESZTETTE

ASSZONYI CSABA
Montavid Research Group, Budapest

IRTA

ASSZONYI CSABA, VÁN PÉTER, SZARKA ZOLTÁN



MŰEGYETEMI KIADÓ
2007

SZERKESZTETTE

DR. ASSZONYI CSABA
Montavid Research Group, Budapest

IRTA

DR. ASSZONYI CSABA, DR. VÁN PÉTER, DR. SZARKA ZOLTÁN

LEKTORÁLTA

DR. BÉDA GYULA
a műszaki tudomány doktora

DR. MATOLCSI TAMÁS
a matematikai tudomány kandidátusa

A KUTATÁST AZ ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS KUTATÁSI ALAP (TD 48489),
EU-12HP PROJEKTJE, A BOLYAI ÖSZTÖNDÍJ ÉS
A MONTAVID RESEARCH GROUP TÁMOGATÁSA TETTE LEHETŐVÉ

ISBN 978-963-420-932-4
ISSN 1789-0454

Megjelent a **Műegyetemi Kiadó** gondozásában

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 15,00 (A/5) ív

Nyomdai Munkák:

Hungarian Printing House

Felelős vezető:

Kovács-Sebestény Szabolcs

©2007 ASSZONYI CSABA, VÁN PÉTER, SZARKA ZOLTÁN

IZOTRÓP KONTINUUMOK RUGALMAS ÉS KÉPLÉKENY ÁLLAPOTA

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó	9
Bevezetés	13
Jelölések jegyzéke	16

1. FEJEZET

A MÉRLEGEGYENLETEK ÉS ANYAGI FORMÁIK

Az anyagfüggvények	19
Az anyagi objektivitás	19
1. A KONTINUUM MOZGÁSA, ALAKVÁLTOZÁSOK KINEMATIKÁJA	20
Lokális mennyiség	20
Szubsztanciális mennyiség	20
Anyagi mennyiség	21
A mozgásfüggvény	21
A mozgásgradiens	22
Az elmozdulásgradiens	22
Poláris dekompozíció	23
Az alakváltozási tenzor	23
A deformációtenzor	23
A sebességgradiens	24
Leírások közötti átjárás	24
2. A MÉRLEGEGYENLETEK	26
A tömegmérleg	28
A differenciális mérleg általános formája	29
A tömegmérleg	30
Az impulzusról	30
A belső energia mérlege	30
Az entrópia mérlege	30

2. FEJEZET.

AZ ÁLTALÁNOS ANYAGTÖRVÉNY

1. AZ ANYAGTÖRVÉNY VÁLTOZÓI ÉS AZ ENTRÓPIAFÜGGVÉNY	33
2. KÉPLÉKENYSÉG – TAPASZTALAT	34
3. IRREVERZIBILITÁS FOGALMAK	36
Az állapothatározók tulajdonságai – a fejlődési egyenlet fényében	37
Speciális folyamatok – a fejlődési egyenlet fényében	37
Az anyagcsalád (közeg) az állapothatározók kiválasztása szerint	38
Az anyag osztályozása – a folyamatok irányíthatósága, azaz a fejlődési egyenlet szerint	38
Az anyag – fejlődési egyenletének stabilitási tulajdonságai szerint	38
Anyagok állapotának osztályozása kontinuummechanikai (vagy anyagszerkezeti)	37

szempontból	39
További megjegyzések	40
4. MECHANIKAI ÁLLAPOTHATÁROZÓK ÉS KÉPLÉKENYSÉG	41
A képlékenységi határfeltétel	45
5. NEMEGYENSÚLYI KÖZEG – ÁLTALÁNOS REOLÓGIAI-PLASZTIKUS VISELKEDÉS VÉGES DEFORMÁCIÓK ESETÉN	47
Dinamikai állapothatározó	47
6. AZ ENTRÓPIA MÉRLEGE	48
7. ÁLTALÁNOS ANYAGFÜGGVÉNYEK	49
8. AZ ANYAGTÖRVÉNY ÉS AZ ANYAGI OBJEKTIVITÁS ELVE	52
Az anyagi objektivitás elve	53
9. IZOTRÓP, RUGALMAS-KÉPLÉKENY KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE	56
9.1. Disszipációmentes anyagtörvény - a képlékenységi feltétel szerepe	57
9.2. Izotróp, disszipatív, egyszerű képlékeny anyag - túl az egyensúlyon	60

3. FEJEZET.

EGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY A RUGALMAS DEFORMÁCIÓK TARTOMÁNYÁBAN

1. AZ ANYAGTÖRVÉNY RUGALMAS NEMDISSIPATÍV ESETRE KORLÁTOZOTT ALAKJA.....	66
2. A RUGALMAS EGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY KONKRÉT ALAKJA	67
Anyagtörvény a Cayley-Hamilton tétel alapján	67
Az anyagtörvény torzulási- és térfogatváltozási egyenlete	68
3. A RUGALMAS EGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY LINEÁRIS ALAKJA	70
Egytengelyű feszültségállapot	72
4. A LINEÁRIS ÉS MÁSODFOKÚ ALAK ÖSSZEHASONLÍTÁSA	74
Az egytengelyű eset	74
Térbeli állapot	78

4. FEJEZET

NEMEGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY A RUGALMAS DEFORMÁCIÓK TARTOMÁNYÁBAN

Nemegyensúlyi helyzet	81
Torzulási egyenlet	83
Térfogatváltozási egyenlet	83
Az általánosság szűkítése	85
Anyagtörvény kis deformációk esetén	86
Az anyagviselkedés ábrázolása	87
Állandó feszültségváltozási sebesség	88
Állandó deformáció sebesség	88
Állandó feszültség (kúszás)	88
Állandó deformáció (relaxáció)	88
Periodikus terhelés	90
Az anyagtörvény reverzibilis és irreverzibilis része a rugalmas tartományban	91
Megjegyzések	92

5. FEJEZET

EGYTENGELYŰ ÁLLAPOT KÍSÉRLETI ADATOK ALAPJÁN

Egy mérési eredmény	94
Következtetések	97
1. A KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓK TARTOMÁNYÁBAN ÉRVÉNYES ÖSSZEFÜGGÉS MEGHATÁROZÁSÁNAK LÉPÉSEI, EGYTENGELYŰ ÁLLAPOTBAN	98
1.1. Az anyagtörvény $P_{\min} = 0$ deformációs teljesítmény esetén	98

A reverzibilis deformáció	100
A plasztikus (vagy képlékeny) deformáció	100
Az irreverzibilis (vagy maradó) deformáció	100
A rugalmassági modulus látszólagos megváltozása	101
1.2. Az anyagtörvény $P_{\max}$ deformációs teljesítmény esetén	104
1.3. Az anyagtörvény $0 < P < P_{\max}$ deformációs teljesítmény esetén	105
1.4. A reverzibilis és irreverzibilis feszültségek	106
2. A KÉPLÉKENYSÉGI- ÉS TÖNKREMENTELI HATÁROK AZ EGYTENGELYŰ KÍSÉRLETEK ALAPJÁN ...	107
2.1. Energia- és munka összefüggések	107
2.2. Határfeltétel a mérési adatok tükrében	109
A képlékenységi határfeltétel a W deformációs munkával kifejezve	110
A határértékek a Φ potenciális energiával kifejezve	112
Az $\mathcal{L}$ disszipációs munka	113
A képlékenységi határfeltétel a W' torzulási deformációs munkával kifejezve	115
A képlékenységi határfeltétel a W_o deformációs munkával kifejezve	115
A határfeltételekben szereplő kifejezések összehasonlítása	116
Záró megjegyzések	118

6. FEJEZET

EGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY A KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓK TARTOMÁNYÁBAN

A fejlődési egyenlet	119
Egyensúly	119
A reverzibilis feszültségtenzor	120
Az általános egyensúlyi feszültségtenzor konkrét alakja	122
Egytengelyű feszültségállapot	126

7. FEJEZET

NEMEGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY A KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓK TARTOMÁNYÁBAN

A fejlődési egyenlet	130
Mechanikai egyensúly	130
Egyensúlyon túli állapot	131
Anyagtörvény lineáris közelítésben	133
Egytengelyű feszültségállapot	134

8. FEJEZET

A HATÁRFELTÉTELEKRŐL

1. ELŐZETES MEGJEGYZÉSEK	136
A W térfogategységre jutó deformációs munka felbontása	136
A lehetséges képlékenységi határfeltételek	137
Következmény	138
A tönkremeneteli határfeltétel	139
2. A KÉPLÉKENY ÁLLAPOT LÉTREJÖTTE ÉS A TÖRÉS KIALAKULÁSA	140
3. A KÉPLÉKENYSÉGI HATÁRFELTÉTEL A DEFORMÁCIÓS HULLÁM ALAPJÁN	141
A $\psi = W_o - W_{of} = 0$ FELTÉTEL KIZÁRÁSÁRA TETT KÍSÉRLET	142
A $\psi = W - W_f = 0$ FELTÉTEL KIZÁRÁSÁRA TETT KÍSÉRLET	142
A maximális torzulási deformációs munka elve	142
4. A TÖNKREMENTELI HATÁRFELTÉTEL	143
A maximális torzulási disszipációs munka elve	143
5. NÉHÁNY GONDOLATI KÍSÉRLET: AZ ANYAG A KÉPLÉKENYSÉGI HATÁRON TÚL ÉS A TÖRÉSI HATÁRON INNEN	143

Tökéletesen kifejlődött képlékenységi tartomány	143
Tönkremenetel - képlékeny állapot nélkül	144

9. FEJEZET

ÖSSZEFoglalás: Izotróp Kontinuumok Egységes Elmélete

1. ANYAGTÖRVÉNY LINEÁRIS KÖZELÍTÉSben A D DEFORMÁCIÓTENZORRAL KIFEJEZVE	148
2. ANYAGTÖRVÉNY EGYTENGELYŰ FeszültségÁllapotban	149
3. ÁLTALÁNOS ANYAGTÖRVÉNY ALKALMAZÁSA MÉRNÖKI FELADATOK MEGOLDÁSÁNÁL	151
Következmény	152
A reológiai megoldás a rugalmas tartományon	152
A mechanikai mező egyensúly esetén	155
Az általános eset	158

FÜGGELÉK

KÖRSZELVÉNYŰ VÁGAT KÖRÜLI MECHANIKAI MEZŐ

1. A FELADAT ELŐKÉSZÍTÉSE ÉS MEGFOGALMAZÁSA	160
Kiindulási feltételek	160
Egyensúlyi egyenletek	161
Geometriai egyenletek	161
Anyagegyenletek	161
Első feladat [az ösfeszültségi, vagy primer állapot számítása]	162
Második feladat [az üregnyitás hatásának számítása]	163
2. A PRIMER FELADAT MEGOLDÁSA	164
3. A MÁSODIK FELADAT MEGOLDÁSA RUGALMAS TARTOMÁNYON	165
Sikalakváltozási állapot	166
Síkfeszültségi állapotot	167
4. AZ EREDETI FELADAT MEGOLDÁSA RUGALMAS TARTOMÁNYON	169
5. A 2. FELADAT MEGOLDÁSA RUGALMAS-KÉPLÉKENY TARTOMÁNYON	
KONVENCIONÁLIS FELTÉTELEZÉS ESETÉN	170
5.1. Két konvencionális képlékenységi feltétel	171
5.2. Megoldás a rugalmas zónában	172
5.3. Megoldás a képlékeny zónában	173
5.4. Megjegyzések a képlékeny zónabeli megoldáshoz	178
6. A TÉNYLEGES MEGOLDÁS A RUGALMAS-KÉPLÉKENY TARTOMÁNYON	179
7. RUGALMAS TARTOMÁNY, RUGALMAS BIZTOSÍTÁSSAL	184
7.1. Megoldás a biztosításban ($R \leq r \leq R_0$)	185
7.2. Megoldás a közetben ($r \geq R_0$)	187
7.3. Az ismeretlen p_b meghatározása	188
8. A POYNTING-THOMSON-MODELL ALKALMAZÁSA	189
IRODALOM	194
SZERZŐK	199

ELŐSZÓ

A kötetben található előadások a MONTAVID RESEARCH GROUP keretében végzett kutatási projekt újabb kutatási eredményeinek egy részét ismertetik, és a Nemzetközi Kőzetmechanikai Társaság (ISRM – INTERNATIONAL SOCIETY FOR ROCK MECHANICS) Magyar Nemzeti Bizottsága által szervezett hazai konferenciára készült előadások alapján kerülnek – szerkesztve - jelen kötetbe.

Kutatásunk célkitűzése az *izotróp kontinuumok anyagtörvényének meghatározása* volt, amely egyaránt érvényes

- kis és nagy deformációkra,
- rugalmas és képlékeny deformációkra,
- a kezdetektől a tönkremenetelig (a törésig), vagyis egészen a kontinuitás részleges, vagy teljes megszűnéséig,
- egyensúlyban és nemegyensúlyi állapotban.

Ehhez válaszolni kellett azokra a kérdésekre, hogy

- mi is az anyagtörvény?
- az anyagtörvény mely termodinamikai (mechanikai) változók függvénye?
- mi lehet az anyagtörvény konkrét formája?
- mitől függ a képlékeny alakváltozási állapot kialakulása?
- mi lehet a képlékenységi feltétel (az a határ, ahol a maradó deformációk megjelennek)?

A teljesség kedvéért – bár az anyagtörvényt nem befolyásolja -, arra is választ kell adni, hogy mi okozza a törést: mi a tönkremeneteli határfeltétel? Ennek a részletes tárgyalása azonban már nem fért be a jelen keretekbe, egyrészt terjedelmi korlátok miatt, másrészt főleg azért, mert a részeredmények még nem álltak össze egységes elméletté. Ennek ellenére a lehetséges mozgástér lerögzítésre került, s kiindulási alapot ad a további kutatásokhoz.

Felépítésünk feltételezi, hogy az izotróp anyagok konstitutív egyenletének ismeretében láthatunk neki az *anizotróp* kontinuumok anyagtörvényének meghatározásának. Természetesen lehet, hogy naiv feltételezés, hogy ha ismerjük, hogyan függ össze a reverzibilis állapotváltozásnál (és egyensúlyi állapotban) az izotróp és anizotróp anyagtörvény, akkor az segít majd az általánosításhoz. Mindenesetre az

anizotróp kontinuumok anyagtörvényének határesetben tartalmaznia kell az izotróp kontinuumok egyenletét is.

A közölt eredmények egységes elvi (fizikai) alapokra épülnek. Előző kötetünkhöz hasonlóan ezt anyagstabilitási szempontból úgy jellemezzük, hogy az elszigetelt anyagi rendszer egyensúlyában az entrópiának maximuma kell legyen. Az entrópiánövekedést FARKAS GYULA a „változások mértékének” nevezte. Ugyanis az entrópia a megtörtént változásokat méri, ezért mindig nő, minden változás növeli az entrópiát.

A termodinamika alapul vett második főtétele a matematikai megfogalmazhatóság érdekében három részre bontjuk:

- (i) létezik entrópia, ami az állapotváltozók elég sokszor (legalább egyszer szakaszosan folytonosan) differenciálható függvénye,
- (ii) az entrópia konkáv függvénye változóinak, és végül
- (iii) a fejlődési (evolúciós) egyenletek által meghatározott folyamatok esetén, elszigetelt (zárt) rendszerben az összentrópia nem csökkenhet.

Ennek megfelelően az anyagtörvény meghatározása a II. főtétel alapján, vagy pontosabban a II. főtétele is kifejező entrópiamérleg alapján történik.

A kapott eredmények módfelett érdekesek, mert eddig általában az az álláspont uralkodott, hogy fizikai törvényekből az anyagegyenlet nem határozható meg, csupán az mondható ki, hogy anyagtörvény köteles figyelembe venni a fizikai törvényeket, azokat nem sértheti. Ezzel valójában a spekuláció területére utalták az anyagtörvény felírását, ui. a kísérletek alapján különböző modell-konstrukciókat hoztak rá, majd leellenőrizték, hogy viselkedése belefér-e a fizikai törvények adta tartományba. Márpedig ilyen összefüggés végtelen sok konstruálható.

A kiindulásunkból következik az is, hogy az anyagtörvény csak azoknak a mechanikai kölcsönhatásoknál jelentkező extenzív változóknak lehet a függvénye, amelyek a mérlegegyenleteinkben szerepelnek, helyesebben: amelyektől az entrópia függ.

Sokáig uralkodott az a nézet is, hogy külön törvénye van az anyagnak a rugalmas alakváltozások tartományában, és külön törvénye a képlékenyen. Ez abból a gyakorlati tényből táplálkozott, hogy az anyag (pl. egy laboratóriumi próbatest) felterhelés során más utat követ, mint tehermentesítés során, ha már megjelentek a maradó alakváltozások.

A természettől idegen feltevések elvetésével – még ha azokat a feltevéseket kísérleti adatokból vonták is le – jelen kötetben sikerül igazolnunk, hogy az anyagnak csak egyetlen anyagtörvénye van. Az említett terhelés-tehermentesítésbeli különbség egy látszólagos tulajdonságváltozás. Ezt az esetet a tudományos megismerés folyamatában úgy hívjuk, hogy *a látszat elfedi a lényeget*, s ezáltal az igazi összefüggés

felismerése ellen hat. Példaképpen: a klasszikus rugalmasságtan-képlékenységtanban eddig azt hittük, hogy adottság az E rugalmassági modulus és a képlékenységi határ túllépése utáni E_{pl} képlékenységi modulus, szintén adottságnak véelve ezek egymáshoz viszonyított arányát. Holott ez nem igaz. Ha az E modulus anyagállandó, akkor E_{pl} nem az, hanem valójában E megváltozása (mely a maradó alakváltozások miatt következik be), és pontosan megadható összefüggésben van E -vel. Így lehetséges, hogy ugyanaz az anyagtörvény érvényes - a már említett példánál - terhelésnél és tehermentesítésnél egyaránt, noha az alakváltozási útvonal különbözik.

Ennek egy *nagyszerű következménye*, hogy a képlékenységtan, mint a rugalmasságtantól különböző tudományág, feleslegessé (vagy okafogyottá) válik, annak ellenére, hogy van rugalmas és van képlékeny viselkedés, de mindkettőhöz csak egyetlen konstitutív egyenlet tartozik. Egységes módszerekkel oldhatók meg a feladatok olyankor is, amikor kivezetnek a rugalmas alakváltozások tartományából. Egyszerűbben: a rugalmas-képlékeny feladatok a rugalmasságtan szokásos összefüggéseivel és módszereivel oldhatók meg. Ennek illusztrálására a Függelékben körszelvényű folyosók, alagutak, vágatok esetére bemutatjuk, hogy a rugalmas megoldásból mi módon áll elő akár a rugalmas-képlékeny megoldás, akár a reológiai megoldás.

Már ennek felismerése is örömmel tölthet el bennünket. Azonban a további következmények szinte végig sem követhetők. Egy hídon végigrobogó vonat hatását különböző feltételezésekkel és hatásabrákkal szokták reprezentálni, amelynél a legtöbbször a HOOKE-modell, vagy valamilyen más egyszerű – de időtől független – modell alkalmazása történik. Ez a megközelítés azon a hiedelmen alapszik, hogy nehézséget okoz a reológiai feltevések használata. Ha azonban tudjuk, hogy pl. a (gyakorlati alkalmazásnál a legáltalánosabbnak tekinthető) POYNTING-THOMSON-féle anyagmodellhez tartozó megoldás két HOOKE-megoldásból felépíthető, akkor már nem kell ódzkodni a pontosabb megoldás alkalmazásától. Arról nem is beszélve, hogy az eddig alkalmazott módszerek túlméretezéshez vezetnek, mert a terheléshez azt a maximális deformációt rendelik, amely csak $t \rightarrow \infty$ esetben jelentkezik. Ez az alkalmazott szerkezeti anyagjainknál akár 100%-os túlméretezést is jelenthetett.

A kapott eredményekből evidensen következik, hogy az a határ, ahol elválik egymástól a rugalmas és képlékeny alakváltozás, maga sem lehet kísérleti eredményekből levonható matematikai összefüggés. Az entrópia evolúciós egyenletéből következnie kell a képlékenységi és a tönkremeneteli határfeltételnek. A spekuláció birodalmából ennél a kérdésnél is át kell térni a fizikai elvekre és következményeikre.

Az itt ismertetett kutatások természetszerűen nem lezártak, hanem számos új lehetőséget villantanak fel, amelyeket a kutatóknak érdemes szisztematikusan végigvizsgálni, ugyanis gyakorlati hatásuk szinte felmérhetetlen. Ezen az úton még csak az első lépéseket tettük meg.

A tavalyi konferencián közöltek az itt olvasható újabb és frissebb tudományos eredményeink ártértékelik, sőt módosítják is néhány esetben. Ezek a következők:

- Az *alakváltozás kinematikája* fejezetben nem voltunk következetesek a jelölésekkel, a szubsztanciális fizikai jellemzők mellől lemaradt a megkülönböztető alsó t index, ami félreértéseket eredményezhet.

- Ez a félreértés esetünkben is jelentkezett, így a *mérlegegyenletek* fejezetében közölt szubsztanciális mérlegek voltaképpen szintén lokális mérlegek olyan átírásai voltak, amelynél felhasználtuk a közvetett függvények differenciálásából adódó $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla$ összefüggést, ami csupán a lokális mérlegek egy másik felírását eredményezte. Lehetne azzal védekezni, hogy a műszaki feladatok megoldásánál mindig mezőfüggvényekkel dolgozunk, amelyekhez a lokális mérlegek tartoznak, tehát gyakorlatilag nincs is szükségünk a szubsztanciális mérlegekre. Az anyagtörvény elvi meghatározásánál van szükségünk azonban a szubsztanciális mennyiségekre. Lehetne azzal is védekezni, hogy ugyanaz a „hibás” felírás található GYARMATI, FÉNYES, stb. könyveiben is. Azonban mindez nem változtat azon, hogy végül valakiknek fel kell írniuk a helyes összefüggést.

- A *reológiai anyagmodellek* című rész először mutatta be, hogy nem spekulatív konstrukciókból épül fel egy anyagmodell, hanem a termodinamika II. főtételeinek következményeként. Azonban szükségtelenül felhasználtunk egy, a deformációtenzorra vonatkozó megszorítást, így a kapott eredmények felhasználhatóságát a kis deformációk esetére korlátoztattuk. Ezt most korrigáljuk, és e korlátozás nélkül írjuk fel az anyagtörvényt, amely a deformációk tetszőleges véges tartományára igaz.

- Ugyanott bemutattuk, hogy a legáltalánosabb anyagtörvény az ÁLTALÁNOS POYNTING-THOMSON-féle (standard) reológiai test, ha a deformációk időszerinti másodrendű deriváltjának hatásától eltekintünk. Az eredmény levezetése az entrópia-növekedés tényéből következő egyenlőtlenségből történt, az $\mathbf{L}$ impulzusvezetési mátrix alapján. Itt elkövettük azt a hibát, hogy a feszültségtenzor helyett a vele ekvivalens deviátoros és gömbi tenzorral dolgoztunk anélkül, hogy bemutattuk volna, hogyan esik szét két részre a vezetési mátrix. Az eredmény korrekt, de a vezetési mátrixok felírása kinyilatkoztatásszerű volt.

A felsorolt hibák, pontatlanságok, sőt egyes esetekben tévedések miatt ebbe a kötetbe kénytelenek voltunk a 2006-os kötetben közöltek egy részét ismét beépíteni, hogy a témával kapcsolatos minden ismeret megtalálható legyen egyetlen kötetben, s a kétségtelen hiányosságok pótlására és a pontatlanságok pedig korrigálásra kerülhessenek. Tudatában vagyunk azonban annak is, hogy – tekintve kutatásaink, megértésünk, és általában a terület nem lezárt mivoltát, – az itt közreadott anyag is tartalmazhat kérdéses, téves, illetve később meghaladottnak bizonyuló részeket. Ezért azon kedves Olvasóinktól, akik a tavalyi kötetben – talán nem is mindig kis nehézségek árán –

átrágták magukat, illetve azoktól, akik jelen munkánkban fedeznek fel hiányosságokat vagy problémákat, szíves elnézést kérnek a Szerzők.

A kötet szerzői ezúton fejezik ki őszinte tisztelettel köszönetüket és hálájukat MATOLCSI TAMÁS és BÉDA GYULA professzoroknak részletes és aprólékos észrevételeikért, a kötet anyagának lektorálása során tett értékes figyelemre méltó megjegyzéseikért és átdolgozásra tett javaslataikért. Köszönjük FÜLÖP TAMÁS kollégánk igen értékes közreműködését egy-egy kérdés új megvilágításba helyezéséért, a felismert hibák kijavításában és stílusunk csiszolásában nyújtott segítségéért.

Budapest, 2007. szeptember 20.

A SZERZŐK

BEVEZETÉS

A „Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2006” ISRM Konferencián tartott korábbi előadásunkban [VÁN P. - ASSZONYI, Cs. (2006)], meghatároztuk az izotróp kontinuumok anyagtörvényét a *rugalmas deformációk* tartományában. Emlékeztetnénk arra, hogy a termodinamika (energodinamika) második főtételeből indultunk ki, amely többek mellett azt mondja ki, hogy „a világban minden folyamat *irreverzibilis*”. Ha egy folyamat lezajlik, akkor az, újabb „munkabefektetés nélkül” már nem tehető meg nem történtté. Csak külső forrás felhasználásával lehet a termodinamikai rendszert visszavinni a kezdeti állapotba - ha az egyáltalán lehetséges. A folyamatok irreverzibilitása azt is jelenti, hogy minden irreverzibilis folyamat ugyanolyan módon irreverzibilis, vagyis a valóságos folyamatok a reverzibilis folyamat *ugyanazon oldalán* (ld. konkrétan az ábrán) helyezkednek el.¹

A pusztán reverzibilis folyamat csak látszólag sérti az irreverzibilitás tényét, valójában azonban nem, mert az irreverzibilis folyamatok terében egy *korlátot*, egy *elérhetetlen határesetet* jelent, amely mentén, és amelynek másik oldalán már nincs reális folyamat.

Ha egy testen W mechanikai (deformációs) munkát² végzünk, akkor a test, illetve annak tartományain az energiaszint növekszik, attól függően, hogy a munkavégzés milyen

$$P_{def} := P = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

deformációs teljesítménnyel zajlik. Minél nagyobb teljesítménnyel történik a munkavégzés, annál nagyobb a veszteség, amelyet a befektetett és a visszanyerhető munka különbségével, illetve arányával jellemezhetünk. Ez a deformációs teljesítmény két határ között változhat:

$$(1) \quad 0 = P_{\min} \leq P \leq P_{\max} .$$

Ez önmagában egy triviális megállapítás lenne, ha fizikailag nem tudnánk meghatározni ezt a két határt. A $P \rightarrow 0$ teljesítmény adja a $P_{\min}$ alsó határt, amelyhez egy

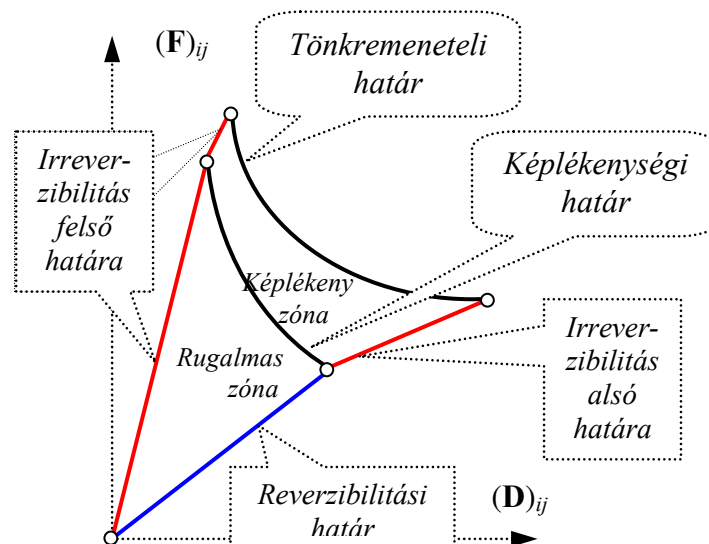
¹ Ha egyes folyamatok ellentétes értelemben lennének irreverzibilisek, akkor elképzelhető, hogy megfelelő arányban vegyítve őket az irreverzibilitásuk „kikompenzálná” egymást, s így végül is reverzibilis folyamathoz juthatnánk, „másodfajú örökmozgók” lennének lehetségesek .

² Térfogategységre jutó deformációs munkáról van szó.

dV térfogatnyi kontinuum elemhez $dW_0 = dW_{\min}$ elemi (infinitesimális) deformációs munka tartozik, amely az irreverzibilitás egyik határát jelöli ki, a reverzibilis állapotváltozást. Ez akkor valósulhat meg, ha a deformációs sebesség nagyon kicsi, vagyis zérushoz tart. dW_0 tehát egy elemi térfogatban tárolt „rugalmas”, vagy „potenciális” energiának fogható fel.

Ebből következően a lehetséges legnagyobb $P_{\max}$ teljesítményt a lehető legnagyobb deformációs sebesség adja, azaz amikor ez a sebesség a végtelenhez tart. Vagyis az állapotváltozások tartományának nemcsak egy alsó korlátja, burkolója van (a reverzibilis állapotváltozás; lásd az ábrát), hanem egy felső is, amelyen kívül már nincsenek állapotváltozások, ez pedig az irreverzibilitás maximuma. Vagyis a termodinamikai állapottér *alulról és felülről egyaránt korlátos*.

Az állapottérnek azonban csupán egy - pontosan meghatározott - pontjáig tart a *reverzibilis alsó határ*. Ezen túl van egy *irreverzibilis alsó határ* is. Vagyis az állapottérnek a folytonos deformációk függvényében lévő alsó határa két részre oszlik: egy reverzibilis részre, majd egy irreverzibilis részre. A két szakaszt elválasztó pont a rugalmas és a képlékeny deformációkat elválasztó görbe metszéspontja az alsó határgörbével. Valójában az $\mathbf{F}$ feszültség és $\mathbf{D}$ deformáció által kifeszített állapottérben két felület létezik: az egyik elválasztja egymástól a rugalmas és képlékeny (maradó) deformációk tartományát, a másik pedig az a határ, ahol az anyagi kontinuitás megszűnik. Az első felületet leíró összefüggést *képlékenységi határfeltételnek*, a második felületet leíró pedig *tönkremeneteli határfeltételnek* nevezzük.



Ha a deformációsebesség zérushoz tart ($\dot{\mathbf{D}} \rightarrow 0$), az tehát nem jelent mindig reverzibilis állapotváltozást. Ugyanis ha az ezáltal létrejött $\mathbf{D}$ deformációk és a hozzájuk tartozó $\mathbf{F}$ feszültségek munkája túllépi azt a W_f küszöbértéket, melyet az anyag belső szerkezetének megváltozása nélkül képes elviselni, vagyis meghaladja azt a

munkát, amelyet az anyag rugalmas v. potenciális energiaként képes tárolni, akkor már maradó deformációk is megjelennek, melyek egy „visszaút” során nem szüntethetők meg. Vagyis a $P_{\min} = 0$ teljesítményhez a deformációk folytonos tartományán létezik egy W_f határ, amelyen túl az alakváltozás már irreverzibilis. Ezt kifejezhetnénk – közelítőleg – úgyis, hogy a határig a feszültség (amely a konduktív impulzusáram sűrűsége) és a létrejövő konduktív deformáció integrálja szolgáltatja a deformációs munkát. A határon túl ehhez még hozzáadódik a $\mathbf{D}^{\text{maradó}}$ deformációkhoz – az ún. *konvektív* deformációkhoz – tartozó deformációs munka, amely tökéletesen irreverzibilis, tehát semmilyen része sem nyerhető vissza egy fordított folyamat során.

Ez a körülmény nagy segítséget jelent az anyagtörvény képlékeny állapotbeli viselkedése leírásához, ui. megteremti a lehetőségét, hogy a reverzibilis folyamatok anyagtörvénye alapján is megalkothassuk az általános anyagtörvényt, amely reverzibilis és irreverzibilis folyamatokra, rugalmas és képlékeny deformációkra egyaránt érvényes.

Ezek alapján matematikailag általános formában levezethetnénk az anyagtörvényt, azonban előbb összefoglaljuk a szükséges összefüggéseket a következő két fejezetben. Erre azért van szükség, hogy pontosan érzékeljük, azoknak a fizikai mennyiségeknek a belső összefüggéseit, amelyektől az anyagtörvény függhet. A szokásos mezőfelírás mellett meg kell adni anyagi leírásukat is, amelynél a fizikai mennyiség csak az anyag tulajdonságaitól függ, s független minden egyéb körülménytől, mint pl. a vonatkoztatási rendszertől. A teljességre való törekvés megkívánja, hogy minden fizikai paraméter szerepeljen az összefüggésben, ami hatással van az anyag mechanikai tulajdonságaira. Ezért összefoglaljuk az irreverzibilitás-fogalmakat közegre, állapotra, folyamatra egyaránt. Csak mindezek után vezetjük le az anyagtörvény általános alakját. Az általános formula megadása után, fokozatosan konkretizáljuk az eredményeket. Előbb még az egytengelyű állapot esetén is végigkövetjük a változásokat: elsősorban a mélyebb megértés érdekében, másodsorban pedig mert ebben az esetben kísérleti eredményeink is vannak, amelyek ütköztethetők az elméleti megfontolásokkal.

JELÖLÉSEK JEGYZÉKE

- A** - alakváltozási tenzor (másodrendű szimmetrikus),
- a_i - ($i = 1, 2, 3$) - az alakváltozási tenzor sajátértékei (a tenzor főátlójában lévő elemek a sajátvektorok által kifeszített koordinátarendszerben),
- A_i - ($i = 1, 2, 3$) - az alakváltozási tenzor skalár invariánsai,
- D** - deformációtenzor (másodrendű szimmetrikus),
- D_i - ($i = 1, 2, 3$) - a deformációtenzor skalár invariánsai,
- E** - deformációs deviátortenzor,
- e - a belsőenergia-sűrűsége (fajlagos belső energia)
- E - rugalmassági (Young-féle) modulus,
- E**₀ - deformációs gömbtenzor,
- ε_0 - átlagos (vagy közepes) deformáció,
- ε^m - maradó, vagy irreverzibilis deformáció,
- ε^{plast} - plasztikus (v. képlékeny deformáció),
- ε^{rev} - reverzibilis (v. rugalmas egyensúlyi) deformáció,
- η - viszkozitási együttható,
- F** - feszültségtenzor (másodrendű, szimmetrikus) lokális leírásban, az impulzus konduktív áramsűrűsége (időegység alatt egységnyi felületen konduktíve – diffúz úton - átáramló impulzus mennyisége),
- f_i - ($i = 1, 2, 3$) az egyensúlyi feszültségfüggvény A_i skalár invariánsoktól függő együtthatói,
- F**_t - feszültségtenzor szubsztanciális leírásban,
- Φ - rugalmas deformációs munka, a deformációs munka potenciálos (reverzibilis) része,
- Φ' - rugalmas torzulási deformációs munka,
- Φ_0 - rugalmas térfogatváltozási deformációs munka,
- φ_i - ($i = 1, 2, 3$) az egyensúlyi feszültségfüggvény D_i skalár invariánsoktól függő együtthatói,
- ψ - képlékenységi függvény ($\psi = 0$ képlékenységi határfeltétel),
- G - csúsztató (torzulási) rugalmassági modulus,
- H** - mozgásgradiens (másodrendű tenzor), lokális, és **H**_t szubsztanciális,
- J** - a termodinamikai erők tenzora,
- $\mathbf{j}_a$ - az a extenzív mennyiség konduktív áramsűrűség vektora,
- $\bar{\mathbf{j}}_a$ - az a extenzív mennyiség konvektív áramsűrűség vektora,
- K - kompresszibilitási (térfogatváltozási) modulus,

- χ_t - mozgásfüggvény anyagi leírásban [$\chi_t(\mathbf{R})$],
- χ^{-1} - mozgásfüggvény inverze [lokális leírás: $\chi^{-1}(\mathbf{r}, t)$],
- $\mathbf{L}$ - impulzusvezetési tenzor (másodrendű, szimmetrikus, pozitív definit),
- $\mathcal{L}$ - disszipációs munka, a deformációs munka irreverzibilis részre,
- $\mathcal{L}'$ - torzulási disszipációs munka,
- $\mathcal{L}_0$ - térfogatváltozási disszipációs munka,
- λ - lineáris viszkózitási tényező (vagy kúszási tényező),
- $\mathbf{M}$ - mechanikai mező,
- m - Poisson-féle szám,
- $\mathbf{\Omega}$ - örvénytenzor, vagy szögsebességtenzor (másodrendű antiszimmetrikus),
- P - deformációs teljesítmény (térfogategységre jutó),
- Ψ - HEAVISIDE-féle egységugrás-függvény,
- $\mathbf{Q}$ - elfordulástenzor (másodrendű antiszimmetrikus),
- $\mathbf{R}$ - az anyagi pont jelölése (Lagrange-leírásban),
- $\mathbf{r}$ - térkoordináta,
- ρ - tömegsűrűség (lokális leírásban), ρ_t - tömegsűrűség (szubsztanciális leírásban)
- S - entrópia,
- s - fajlagos (tömegegységre jutó) entrópia,
- $\tilde{s}$ - egyensúlyi fajlagos entrópia (fajlagos entrópia egyensúly esetén),
- $\hat{s}$ - fajlagos entrópia egytengelyű feszültségállapot esetén,
- σ_0 - átlagos (vagy közepes) feszültség,
- $\mathbf{T}$ - feszültségi deviátortenzor,
- $\mathbf{T}_0$ - feszültségi gömbtenzor,
- T - hőmérséklet °K-ben,
- t - idő,
- ϑ - relaxációs állandó (lineáris relaxációs idő),
- τ - relaxációs idő,
- $\mathbf{u}$ - elmozdulásvektor (lokális),
- $\mathbf{V}$ - alakváltozási sebességtenzor (másodrendű szimmetrikus),
- $\mathbf{v}$ - sebesség [lokális sebességmező: $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, szubsztanciális sebesség: $\mathbf{v}_t(\mathbf{R})$],
- W - deformációs munka (térfogategységre jutó),
- W' - torzulási deformációs munka,
- W_0 - térfogatváltozási deformációs munka,
- $\mathbf{X}$ - a termodinamikai áramok tenzora,
- ξ - belső dinamikai változó (szimmetrikus másodrendű tenzor), z egyensúlytól való eltérés kifejezője.

1. FEJEZET
A MÉRLEGEGYENLETEK ÉS ANYAGI FORMÁIK

AZ ANYAGFÜGGVÉNYEK. Egy konkrét mechanikai feladat megoldása során az alapegyenleteknek – a mérlegegyenleteknek és a megfelelő anyagtörvényeknek – a lokális formáját szoktuk használni, azaz a feszültség-, deformáció-, elmozdulás-, stb.-mezőket keressük, az adott térrészben, adott kezdeti és kerületi feltételek mellett, minden t időpontban. Az előzőekben [VÁN-ASSZONYI, 2006, 37-42. old.] összefoglaltuk a kontinuumok és diszkontinuitások mérlegegyenleteit lokális és szubsztanciális formában. A *mérlegek* a lokális fizikai mennyiségek között mondanak ki viszonyokat. Olyan alapvető fizikai törvényeket fogalmazunk meg segítségükkel, mint például az impulzus vagy az energia megmaradása. Ezek a törvények anyagtól függetlenül, azaz mindenféle anyagfüggvényre érvényesek, általános formában tartalmazzák az anyagfüggvényeket. Az *anyagfüggvények* viszont az anyagra, és csak az anyagra vonatkoznak, bennük a kontinuumot felépítő részek (elemi részecskék, atomok, molekulák, mikrorepedések, diszlokációk, egyéb mezoszkópikus kontinuumelemek, stb.) közötti viszonyok tükröződnek.

AZ ANYAGI OBJEKTIVITÁS. Az anyagtörvények és a mérlegek *objektív viszonyokat* fejeznek ki, ezért függetlenek a leírásukra használt koordináta- és vonatkoztatási rendszer választásától. Az első tulajdonság azonnal teljesül, ha korrekt tenzoriális fizikai mennyiségekkel és a rájuk vonatkozó egyenletekkel dolgozunk. A második tulajdonság, a vonatkoztatási rendszertől való függetlenség sokkal összetettebb, és pontos formája máig vitatott. Véleményünk szerint a problémakör kezelése csak a relativisztikus elméletek tapasztalatainak segítségével, a fizikai viszonyokat pontosan tükröző megfelelő nemrelativisztikus téridőmodell segítségével lehetséges. A nemrelativisztikus téridő modell esetén a négydimenziós leírás fogalmi kereteit MATOLCSI-VÁN, 2006, MATOLCSI-VÁN, 2007 írásai tartalmazzák. Ezeknek a vizsgálatoknak az eredményeit fel fogjuk használni a kinematika és a mérlegegyenletek tekintetében. Ilyen eredmény például, hogy a szubsztanciális időderivált általában nem egyezik meg az anyagi, vonatkoztatási rendszertől független időderiválttal, de skalár fizikai mennyiségekre, illetve a mozgással kapcsolatos bizonyos mennyiségekre (mint például a mozgásgradiens) viszont igen. A kontinuumfizika teljes 4-es nemrelativisztikus átfogalmazása – bár kétségtelenül fontos tanulságokkal járna - nem célunk ebben az

írásban. Ennek az is oka, hogy a mérnöki alkalmazásoknál úgyis a már megszokott mezőleírással dolgozunk, a 4-es rendszer alkalmazása ahhoz a kutatásokhoz kell, amelyek az alkalmazáshoz korrektül felhasználható anyagmodell meghatározását könnyíti meg.

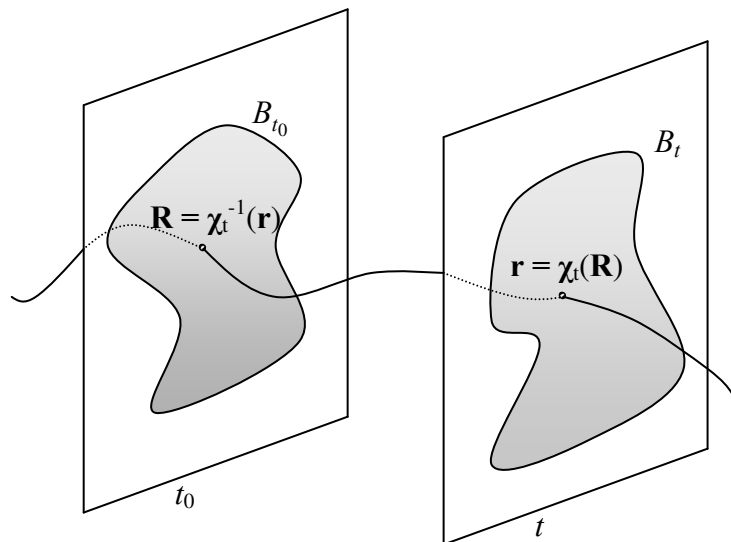
A kontinuumfizikában általánosan a lokális és szubsztanciális mérlegek használatával véljük megkülönböztetni az anyaghoz kötött és a külső vonatkoztatási rendszerben érvényes leírást. A szubsztanciális időderivált használata a mérlegekben erre többnyire elegendő, de bizonyos esetekben más alakoknak is jelentősége van. Ebben a fejezetben vázlatosan ismételtlen összefoglaljuk a kontinuumok kinematikáját, és megadjuk a megfelelő fizikai mennyiségek és mérlegek lokális, szubsztanciális és az ún. anyagi formáját is.

1. A KONTINUUM MOZGÁSA, ALAKVÁLTOZÁSOK KINEMATIKÁJA

A megfigyelt test (közeg) pontjai változtatják a mi terünkben (egy választott inerciális megfigyelő, vonatkoztatási rendszer terében) elfoglalt helyüket az idő múlásával. Miután a t_0 referencia-időpontban választottunk egy térorigót, egy általános t időpontban a terünk egy pontját egy $\mathbf{r}$ helyvektorral jellemezzük, a megfigyelt közeg egy pontját, testpontot vagy közegpontot pedig t_0 -kori $\mathbf{R}$ helyvektorával.

LOKÁLIS MENNYISÉG. *Lokálisnak* nevezünk egy fizikai mennyiséget, ha a téridő – választott jellemzésünkben a mi terünk és az idő – függvényeként adtuk meg. Például a tömegsűrűség lokális alakja $\rho(\mathbf{r}, t)$, mely a t időpontban és (a vonatkoztatási rendszerünk szerinti) $\mathbf{r}$ helyvektorú helyen, tehát a t és $\mathbf{r}$ által kijelölt téridőpontban az anyag tömegsűrűsége. A lokális fizikai mennyiségeket *mezőknek* is nevezzük.

SZUBSZTANCIÁLIS MENNYISÉG. *Szubsztanciálisnak* nevezünk egy fizikai mennyiséget, ha a testpont és az idő függvényeként adtuk meg. Például a tömegsűrűség szubsztanciális alakja $\rho_t(\mathbf{R})$, mely az $\mathbf{R}$ által jelölt anyagi pontnál található tömegsűrűség a t időpillanatban.



1. ábra

ANYAGI MENNYISÉG. *Anyagi* egy fizikai mennyiség, ha csak a test, az anyag tulajdonságaitól függ. Egy mező sosem anyagi, mert az $\mathbf{r}$ helyzet vonatkoztatási rendszer-függő. Egy szubsztanciális mennyiség lehet vonatkoztatási rendszer-független, ilyenek a skaláris mennyiségek, de nem automatikusan az.

A MOZGÁSFÜGGVÉNY. A lokális és anyagi leírás közötti átmenetet az $\mathbf{r} = \chi_t(\mathbf{R})$ (szubsztanciális) *mozgásfüggvény*, illetve ennek inverze az $\mathbf{R} = \chi_t^{-1}(\mathbf{r})$ (lokális) *anyagmező* írja le (1. ábra). Pontosabban $\chi: B_{t_0} \times I \rightarrow B_t \times I$, $(\mathbf{R}, t) \mapsto (\chi_t(\mathbf{R}), t)$, ahol I az időpontok egydimenziós vektortere, B_t a kontinuum által elfoglalt térrész adott t időpontban (és vonatkoztatási rendszerben), B_{t_0} pedig a kontinuum által elfoglalt térrész egy kiválasztott kezdeti t_0 időpontban. Ennek megfelelően $\mathbf{R} = \chi_{t_0}(\mathbf{R})$.

Tehát az anyagot magát a kezdeti időpontban elfoglalt helyzetével, a *referenciahelyzettel* (alaphelyzettel) jellemezzük. Elmozdulását, alakváltozását, deformációját, illetve az összes nem mechanikai tulajdonságát is ehhez a referenciahelyzethez képest vizsgáljuk. Általában feltételezzük, hogy az anyag a referenciahelyzetben teljes termodinamikai egyensúlyban van (lásd a következő fejezetet). A referenciahelyzet nem azonos magával az anyaggal, viszont a legtöbb esetben a megkülönböztetés nem lényeges. A továbbiakban mi is megteesszük ezt az azonosítást, és ennek megfelelően a referenciahelyzetet *anyagi sokaságnak* is nevezzük.

Szubsztanciális mennyiségeket kapunk a mezőfüggvények és a mozgásfüggvény (χ_t) kompozíciójával. Mezőket, azaz lokális alakot kapunk szubsztanciális mennyiségek és az anyagmező (χ_t^{-1}) kompozíciójával. Például $\rho_t(\mathbf{R}) = \rho(\chi_t(\mathbf{R}), t)$, illetve $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{r}), t)$.

A szubsztanciális mennyiségek tehát az anyagi sokaságon értelmezettek, de – ahogy az előbb említettük, – ez nem biztosítja automatikusan a vonatkoztatási rendszertől való függetlenséget, ezért egy szubsztanciális formában megadott mennyiség nem feltétlenül anyagi is.

A továbbiakban a mozgás jellemzésében a χ mozgásfüggvény deriváltjai alapvető szerepet játszanak. A mozgásfüggvény idő szerinti deriváltja a *sebesség*, annak lokális formája pedig a *sebességmező*, azaz

$$(1) \quad \mathbf{v}_t(\mathbf{R}) := \frac{\partial \chi_t(\mathbf{R})}{\partial t} = \frac{d}{dt} \chi_t(\mathbf{R}) = \dot{\chi}_t(\mathbf{R}), \quad \text{és} \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{r}), t) = \frac{\partial \chi_t}{\partial t}(\chi_t^{-1}(\mathbf{r}), t).$$

Itt bevezettük a szubsztanciális mennyiségekre ható parciális időderiváltra a szokásos pont jelölést.

A MOZGÁSGRADIENS. A *mozgásgradiens*t, mint függvényt a mozgásfüggvény $\mathbf{R}$ szerinti deriváltjaként értelmezzük:

$$(2) \quad \mathbf{H}_t(\mathbf{R}) := \frac{\partial \chi_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = \chi_t(\mathbf{R}) \circ \nabla_{\mathbf{R}}.$$

Itt bevezettük az anyagi sokaságon ható $\nabla_{\mathbf{R}}$ anyagi térderiváltat és a hagyományos jelölésektől kissé eltérően nem feltétlenül az elé a függvény elé írjuk, amire hat, hanem a tenzoriális sorrendet tartjuk. A $\circ$ jel a tenzorszorzatot, más néven diadikus szorzatot jelöli. A mozgásgradiens szubsztanciális és anyagi mennyiség, lokális alakja

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{H}_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{r}), t) = \frac{\partial \chi_t}{\partial \mathbf{R}}(\chi_t^{-1}(\mathbf{r}), t).$$

AZ ELMOZDULÁSGRADIENS. Az $\mathbf{u}_t(\mathbf{R}) := \chi_t(\mathbf{R}) - \mathbf{R}$ elmozdulásfüggvény $\mathbf{R}$ szerinti deriválásával az elmozdulásgradienst (az elmozdulások gradienstenzorát) kapjuk:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = (\chi_t(\mathbf{R}) - \mathbf{R}) \circ \nabla_{\mathbf{R}} = \mathbf{H}_t(\mathbf{R}) - \mathbf{I}_{\mathbf{R}}.$$

A $\chi_t^{-1}(\mathbf{r})$ inverz függvény $\mathbf{r}$ szerinti deriváltja a

$$\frac{\partial \chi_t^{-1}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \chi_t^{-1}(\mathbf{r}) \circ \nabla = (\mathbf{H}(\chi_t^{-1}(\mathbf{r}), t))^{-1} = [\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]^{-1}$$

tenzor. Ez valóban így van, ui. a $\chi_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{r})) \equiv \mathbf{r}$ azonosságot $\mathbf{r}$ szerint deriválva, a

$$\frac{\partial \chi_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \chi_t^{-1}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = (\chi_t \circ \nabla_{\mathbf{R}})(\chi_t^{-1}(\mathbf{r}) \circ \nabla) = \mathbf{I}$$

egyenlőséget kapjuk, ahonnan látható, hogy $\chi_t^{-1}(\mathbf{r}) \circ \nabla = [\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]^{-1}$. Az egyszerűbb, de némileg pongyola jelölésmódunkkal

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{I}, \quad \text{ezért} \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{H}^{-1}.$$

Ha az elmozdulásmezőt, azaz az $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} - \chi_t^{-1}(\mathbf{r}, t)$ egyenlőség mindkét oldalát $\mathbf{r}$ szerint deriváljuk, akkor az

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \circ \nabla = \mathbf{I} - [\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]^{-1}$$

összefüggéshez jutunk. Ez utóbbi, fordított gradiens jelölésmód helyesen mutatja a deriváltmátrix sor-oszlop sorrendjét, amelyre a szokottabb jelölésmódnál külön ügyelnünk kellene.

POLÁRIS DEKOMPOZÍCIÓ. A

$$(3) \quad \mathbf{H}_t = \mathbf{I}_R + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R$$

mozgásgradiens leírja az anyagi forma alakjának és helyzetének változását. Ez azonban tartalmazza a pont környezetében lejátszódó merevtestszerű elfordulást és az alakváltozást is.

A CAUCHY-féle polárisdekompozíció-tétel értelmében (lásd például [VERHÁS 1985]) a mozgásgradiens egyértelműen felírható

$$(4) \quad \mathbf{H}_t = \mathbf{Q}_t \mathbf{A}_t$$

formában, ahol $\mathbf{Q}_t$ ortogonális leképezés, azaz $\mathbf{Q}_t^T = \mathbf{Q}_t^{-1}$, $\mathbf{A}_t$ pedig szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}_t^T = \mathbf{A}_t$. A $\mathbf{Q}_t$ forgatás jellemzi a kontinuumelem környezetének t időpillanatbeli elfordulását, $\mathbf{A}_t$ pedig az alakváltozást a kezdeti konfigurációhoz képest.

AZ ALAKVÁLTOZÁSI TENZOR. A (4) összefüggésből

$$\mathbf{H}_t^T = \mathbf{A}_t^T \mathbf{Q}_t^T, \Rightarrow \mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t = \mathbf{A}_t^T \mathbf{Q}_t^T \mathbf{Q}_t \mathbf{A}_t = \mathbf{A}_t^T \mathbf{I}_R \mathbf{A}_t = \mathbf{A}_t^T \mathbf{A}_t = \mathbf{A}_t^2,$$

így az *alakváltozási tenzor*:

$$(5) \quad \mathbf{A}_t = \sqrt{\mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t} = \sqrt{(\mathbf{I}_R + \nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{I}_R + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R)}.$$

A DEFORMÁCIÓTENZOR. Azokban a speciális esetekben, amikor nincs alakváltozás, olyankor $\mathbf{A}_t = \mathbf{I}_R$. Ezért az általános esetben az alak megváltozásának mértékét természetes a

$$(6) \quad \mathbf{D}_t := \mathbf{A}_t - \mathbf{I}_R = \sqrt{\mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t} - \mathbf{I}_R,$$

azaz

$$\mathbf{D}_t = \sqrt{(\mathbf{I}_R + \nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{I}_R + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R)} - \mathbf{I}_R$$

deformációtenzorral jellemezni. Ez az összefüggés a kis és a nagy deformációk tartományán egyaránt érvényes és pontos értelmezés. Legismertebb közelítései a

$$\text{CAUCHY-féle} \quad \mathbf{D}_t^{\text{Cauchy}} = \frac{1}{2} [\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R],$$

$$\text{GREEN-féle} \quad \mathbf{D}_t^{\text{Green}} = \frac{1}{2} [\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R + (\nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{u}_t \circ \nabla_R)]$$

deformációtenzorok.

Vegyük észre, hogy ha a $\mathbf{H}_t$ mozgásgradiens szimmetrikus, akkor a teljes deformáció a CAUCHY-féle deformációval egyezik meg, vagyis olyankor a CAUCHY-féle tenzor már nem közelítés.

A SEBESSÉGGRADIENS. Fontos összefüggést kaphatunk a $\mathbf{v}$ sebességmező és a $\mathbf{H}$ lokális mozgásgradiens között a mozgásfüggvény t és $\mathbf{R}$ szerinti vegyes parciális deriváltjainak egyenlőségéből. Felhasználva a sebesség és a mozgásgradiens (1)-(2) definícióit:

$$\frac{\partial^2 \chi_t(\mathbf{R})}{\partial t \partial \mathbf{R}} = \frac{\partial}{\partial t} (\chi_t(\mathbf{R}) \circ \nabla_{\mathbf{R}}) = \dot{\mathbf{H}}_t(\mathbf{R}) =$$

$$\frac{\partial^2 \chi_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R} \partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\chi_t(\mathbf{R}), t)}{\partial \mathbf{R}} = (\mathbf{v}(\chi_t(\mathbf{R}), t) \circ \nabla) \frac{\partial \chi_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = ((\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{H})(\chi_t(\mathbf{R}), t),$$

átterve tisztán lokális formára

$$\dot{\mathbf{H}} = (\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{H}, \quad \text{azaz} \quad \dot{\mathbf{H}} = (\text{Grad } \mathbf{v}) \mathbf{H}.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát jobbról szorozva a $\mathbf{H}^{-1}$ tenzorral, megkapjuk a *sebességgradienst*:

$$(7) \quad \mathbf{v} \circ \nabla = \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}.$$

Ha figyelembe vesszük a (4) szerinti felbontást, akkor

$$\mathbf{v} \circ \nabla = \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} = \dot{\widehat{\mathbf{Q}} \mathbf{A}} (\mathbf{Q} \mathbf{A})^{-1} = (\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{A} + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{A}}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^{-1},$$

s megkapjuk a merevtestszerű elfordulás sebességét, és az alakváltozás sebességét. Megszokott jelöléseinkkel:

$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{-1}$ - az örvénytenzor (az elfordulási sebesség tenzora, szögsebességtenzor),

$\mathbf{V} = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^{-1}$ - az alakváltozási sebesség tenzora.

LEÍRÁSOK KÖZÖTTI ÁTJÁRÁS. Látjuk, hogy lokális mennyiségről a szubsztanciális mennyiségekre történő áttérés egyszerű, a megfelelő mezőket kell komponálni a mozgásfüggvény inverzével. Lokális helyzetről az anyagi mennyiségekre való áttérés (vagy fordítva) nem azonos összefüggésekkel történik, hanem függ a fizikai mennyiség tenzori rendjétől is. Más a helyzet skalárnál, más vektornál, és más tenzornál. Sőt, vigyáznunk kell, mert vektoroknál az áttérési szabály látszólag más, ha a fizikai mennyiség nem mozgásból származik, és megint más, ha abból (pl. sebességmező).

Ha egy f fizikai mennyiség *skalár*, akkor szubsztanciális formája egyúttal anyagi forma is, és közöttük az összefüggés a következő:

$$(8a) \quad f(\mathbf{r}, t) \quad \Leftrightarrow \quad f_t(\mathbf{R}) = f(\chi_t(\mathbf{R}), t),$$

$$(8b) \quad f(\mathbf{r}, t) = f_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{r})) \quad \Leftrightarrow \quad f_t(\mathbf{R}),$$

azaz csupán a változóknak kell értelem szerűen áttérni.

Ha egy $\mathbf{c}$ fizikai mennyiség *vektor*, akkor szintén definiálhatjuk – (8a) mintájára – a $\mathbf{c}_t$ mennyiséget, azonban figyelembe kell vennünk, hogy már egy merev közeg is elfordulhat vándorlása során, egy deformálódó közegben pedig az anyagi pontok szomszédsági viszonyai is megváltoznak. A közeghez rögzített irányok, vektorok az idő függvényében elfordulnak, és eredetileg ortogonális, normált bázisvektorok a közeggel együtt deformálódva már nem feltétlenül egységnyi hosszúak és nem is merőlegesek egymásra. A közeghez rögzített bármely koordináta-rendszer változását, a közeg minden pontjában az irány- és méretviszonyok változását a mozgásgradiens tenzor jellemzi.

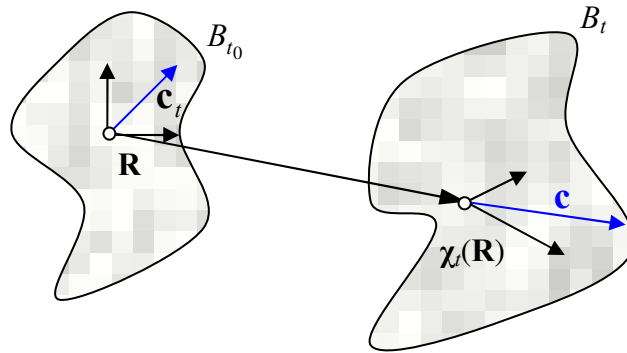
Ennek megfelelően, ha $\hat{\mathbf{c}}_t(\mathbf{R})$ szubsztanciális vektormező, akkor a megfelelő lokális vektormező

$$(9a) \quad \mathbf{c}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{r})) \hat{\mathbf{c}}_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{r})),$$

illetve fordítva, ha $\mathbf{c}(\mathbf{r}, t)$ lokális vektormező, akkor a megfelelő szubsztanciális vektormező³

$$(9b) \quad \hat{\mathbf{c}}_t(\mathbf{R}) = \mathbf{H}^{-1}(\chi_t(\mathbf{R}), t) \mathbf{c}(\chi_t(\mathbf{R}), t).$$

Itt újabb jelölést vezettünk be, mert $\hat{\mathbf{c}}_t(\mathbf{R})$ és $\mathbf{c}(\chi_t(\mathbf{R}), t)$ ugyanahhoz a lokális vektormezőhöz tartozó, és egyformán szubsztanciális változójú, de különböző vektormezők.



2. ábra

Az előbbi nevezzük anyagnak, az utóbbira megtartjuk a szubsztanciális elnevezést. A lokális koordináta-rendszer változását is figyelembe vevő, $\mathbf{H}_t$ -vel *visszahúzott mennyiségeket* jelöljük a továbbiakban kalappal. Tehát ugyanahhoz a lokális $\mathbf{c}$

³ Az áttérési formulák szemléltetéséhez vegyük észre, hogy a közeg számára az irányokat, a szerinte állandó irányokat bármely anyagi pontban a környező anyagi pontok jelölik ki. Ha választunk egy $\mathbf{R}$ közegpontot és egy közeli $\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}$ másikat, akkor az őket összekötő vektor a külső inerciarendszerünk szerint $\chi_t(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) - \chi_t(\mathbf{R}) \approx (\chi_t(\mathbf{R}) \circ \nabla_{\mathbf{R}}) \Delta\mathbf{R} = \mathbf{H}_t(\mathbf{R}) \Delta\mathbf{R}$ szerint változik az idő függvényében, míg a közeg szerint ugyanaz az állandó $\Delta\mathbf{R}$ vektor marad. A $\Delta\mathbf{R} \rightarrow 0$ határátmenetben a két megfigyelő szerint látott különbségvektor viszonya pontosan a $\mathbf{H}_t(\mathbf{R})$ tenzorhoz tart.

vektormezőhöz általában kétféle szubsztanciális változójú mező is tartozhat, $\mathbf{c}_t$, amelyben csak a függvény argumentumát cseréltük ki, és $\hat{\mathbf{c}}_t$, amellyel a közeghez rögzített vektorok változásait is követtük⁴.

Természetesen ez utóbbinak is megvan a lokális alakja, és általában $\hat{\mathbf{c}}_t \neq \mathbf{c}_t$, illetve $\hat{\mathbf{c}} \neq \mathbf{c}$. Ez a jelölés függvények argumentumának kiírása nélkül is egyértelművé teszi az előbbi formuláinkat:

$$\mathbf{c} = \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{c}}_t \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{c}}_t = \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{c}_t.$$

A már emlegetett, az anyag belső viszonyait jellemző anyagi mennyiségeket viszont természetesen nem formális szabályok, hanem a fizika törvényei jelölik ki. Világosan látszik ez a mozgással kapcsolatos mennyiségek, azaz a mozgásfüggvény és deriváltjai esetén. Ugyanis a mozgást megadó χ_t mozgásfüggvénynek és inverzének nincs kalapos formája, azaz saját deriváltjának segítségével transzformálódó alakja. Belátható továbbá, hogy a mozgásgradiens esetén a visszahúzott alak megegyezik az értelmezési tartomány egyszerű változtatásával kapott alakkal, azaz $\hat{\mathbf{H}}_t = \mathbf{H}_t$.

2. A MÉRLEGEGYENLETEK

A mérlegegyenleteket eredetileg mindig lokális formában írjuk fel – ez felel meg a megszokott téridő szemléletünknek ezért a mérlegek lokális fizikai mennyiségek között érvényes összefüggéseket adnak meg. Fontos kiemelnünk, hogy az úgynevezett szubsztanciális mérlegek valójában nem szubsztanciális mennyiségekre vonatkoznak. Egyrészt a bennük szereplő fizikai mennyiségek továbbra is lokális mennyiségek, másrészt gondoljunk arra, hogy az áramok divergenciáját sem az anyagi sokaságon érvényes deriválással képezzük. Csak a lokális időderiváltat cseréljük ki a megfelelő

⁴ Az elmondottakat egy példával is illusztráljuk. Gondoljunk egy egyenletesen forgó korongot, amelynek középpontja a mi terünk (azaz választott külső inerciális vonatkoztatási rendszerünk terének) origójában nyugszik. Tehát a középpont mind a mi terünknek, mind a korongnak a pontja. A korong tetszőleges $\mathbf{R}$ pontjának a mozgását a $\chi_t(\mathbf{R}) = \mathbf{Q}_t \mathbf{R}$ függvény írja le, ahol $\mathbf{Q}_t$ egy ortogonális (forgató) tenzor. Ekkor a mozgásgradiens $\mathbf{H}_t = \chi_t \circ \nabla_{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}_t$. Tegyük fel, hogy a lokális hőárammező vektora a terünk minden pontjában a középpont felé mutat: $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \mathbf{r}$. Ekkor a korongon lévő megfigyelő azt érzi, hogy a korong minden pontjában a hő a középpont felé áramlik. Formulával megfogalmazva, a korong $\mathbf{R}$ helyén $-\lambda \mathbf{R}$ a hőáramvektor. A szimpla változótranszformáció szerinti $\mathbf{q}_t(\mathbf{R}) = \mathbf{q}(\chi_t(\mathbf{R}), t) = -\lambda \mathbf{Q}_t \mathbf{R}$ azonban nem ezt adja, ellenben a $\hat{\mathbf{q}}_t(\mathbf{R}) = \mathbf{Q}_t^{-1} \mathbf{q}_t(\mathbf{R}) = -\lambda \mathbf{R}$ valóban igen. Vagy tegyük fel, hogy a hő a terünkben a forgástengelyre merőlegesen adott $\mathbf{n}$ irányban áramlik egyenletesen: $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \mathbf{n}$. Ekkor a korong úgy érzi, hogy a hőáram forog a korong saját forgásával ellentétes irányban, amit a $\hat{\mathbf{q}}_t(\mathbf{R}) = \mathbf{Q}_t^{-1} \mathbf{q}(\chi_t(\mathbf{R}), t) = -\lambda \mathbf{Q}_t^{-1} \mathbf{n}$ ír le jól. (A példa MATOLCSI TAMÁSTól származik.)

szubsztanciális derivált lokális (!) formájával. Ez utóbbi, LAGRANGE-féle leírásmód folyadékok esetén kielégítő, de szilárd testek és folyadékok egységes leírásánál – a szubsztanciális és lokális függvények szigorú megkülönböztetése nélkül - zavarokra vezethet. Ezen okok miatt a mérlegegyenleteket még egyszer összefoglaljuk pontosan elkülönítve a lokális (mező), LAGRANGE-féle és anyagi alakját.

Először is, egy szubsztanciális formában adott f_t skalár időderiváltjait és anyagi térderiváltjait lokális formába átírva kapjuk a szubsztanciális deriváltak lokális formáját:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(\mathbf{R}) = \dot{f}_t(\mathbf{R}) = \dot{f}(\chi_t(\mathbf{R}), t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\chi_t(\mathbf{R}), t) + \nabla f(\chi_t(\mathbf{R}), t) \mathbf{v}(\chi_t(\mathbf{R}), t),$$

$$\nabla_R f_t(\mathbf{R}) = \nabla f(\chi_t(\mathbf{R}), t) (\chi_t(\mathbf{R}) \circ \nabla_R) = \nabla f(\chi_t(\mathbf{R}), t) \mathbf{H}_t(\mathbf{R}).$$

Azaz az átszámítási formulák:

$$(10) \quad \dot{f} = \frac{d}{dt} f = \frac{\partial}{\partial t} f + \mathbf{v} \cdot \nabla f, \quad \nabla_R f = \nabla f \mathbf{H}_t.$$

Ezek, még rövidebben, a deriváltak közötti transzformációs szabályként jegyezhetők meg és nemcsak skaláris mennyiségekre vonatkoznak:

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \dots = \frac{\partial}{\partial t} \dots + \mathbf{v} \cdot \nabla \dots \quad \nabla_R \dots = \nabla \dots \mathbf{H}_t.$$

Hangsúlyozzuk, hogy a (11) formulákban az anyagi sokaságon értelmezett függvényekre vonatkozó parciális deriváltak vannak kifejezve lokális mennyiségekkel és lokális deriváltakkal. (11a) a szubsztanciális időderivált, (11b) pedig a szubsztanciális térderivált lokális mennyiségekre érvényes formája.

Ezek után a differenciális mérlegeknek mindhárom formáját megadjuk. Egyrészt a kontinuumhoz képest külső, inerciális megfigyelők szempontjából (lokális, vagy EULER-leírás), másrészt a szubsztanciális időderivált szubsztanciális formáját tartalmazót (LAGRANGE-leírás), végül megadunk egy teljesen szubsztanciális mennyiségekre vonatkozó formát is. Mindhárom leírásmód fontos: lokális módon látjuk az anyagot, Lagrange leírásban tudjuk az áramvonalakkal együtt mozogva elképzelni, viszont az anyagi kölcsönhatásokat, inhomogenitásokat egy tiszta anyagi leírásban látjuk jól.

Egy adott V térfogatban levő A extenzív fizikai mennyiség esetén a kontinuum leírásban célszerű bevezetnünk annak *fajlagos* (tömegegységre jutó) értékét, amelyet az $a(\mathbf{r}, t)$ tértől és időtől függő mezővel reprezentálunk. A fajlagos mennyiség homogén anyageloszlás esetén $a = A/m = (A/V)(V/m) = \rho_a / \rho$ módon adható meg, ahol m a térrészben levő anyag tömege, ρ_a pedig az A jellemző sűrűsége. Speciálisan a fajlagos tömeg 1, mivel a tömegsűrűség (azaz maga a sűrűség) ρ . A fajlagos impulzus pedig maga a lokális $\mathbf{v}$ sebesség. Általában igaz, hogy

$$A = \int_V \rho a d^3 r, \quad A = \int_V \rho a dV.$$

(A megkülönböztetés miatt alkalmazzuk a $dV = d^3 r$ és $dV_R := d^3 R$ jelöléseket.)

Általánosan az A extenzív mennyiség lokális mérlege:

$$(12) \quad \frac{\partial \rho a}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho a \mathbf{v} + \mathbf{j}_a) = \sigma_a.$$

Itt $\rho a \mathbf{v}$ a közeg áramlásából származó *konvektív*, és $\mathbf{j}_a$ az attól független *konduktív* áramsűrűség. (11) alkalmazásával a *Lagrange*-leírás szubsztanciális mérlege a következő egyszerű formába írható:

$$(13) \quad \rho \dot{a} + \nabla \cdot \mathbf{j}_a = \sigma_a.$$

Megmaradónak nevezünk egy extenzív fizikai mennyiséget, ha σ_a forrassűrűsége nulla.

TÖMEGMÉRLEG. A tömeg két szempontból speciális mennyiség. Egyrészt, egy egykomponensű kontinuum mozgását annak tömegéhez képest rögzítjük, azaz a tömegnek nincs konduktív áramsűrűsége. Másrészt, a tömeg megmaradó mennyiség, a tömegsűrűség megváltozása csak (!) a kontinuum alakváltozásából adódó térfogatváltozásból származik, a mozgásgradiens determinánsának megfelelően. A teljes tömeg megmaradásából ugyanis, az integráltranszformáció ismert formulája alapján

$$\int_{B_{t_0}} \rho_{t_0}(\mathbf{R}) d^3 R = \int_{B_t} \rho(r, t) d^3 r = \int_{B_{t_0}} \rho(\chi_t^{-1}(\mathbf{R}), t) |\det \mathbf{H}_t(\mathbf{R})| d^3 R.$$

Ezért aztán, mivel a mozgásgradiens determinánsa pozitív,

$$(14) \quad \rho_t = \frac{\rho_{t_0}}{\det \mathbf{H}_t}.$$

Ez az összefüggés tartalmazza a tömeg megmaradását. Deriválva a determinánst, kapjuk, hogy

$$\dot{\rho}_t = \frac{d}{dt} \frac{\rho_{t_0}}{\det \mathbf{H}_t} = - \frac{\rho_{t_0}}{(\det \mathbf{H}_t)^2} \frac{d}{dt} \det \mathbf{H}_t = - \frac{\rho_{t_0}}{(\det \mathbf{H}_t)^2} (\det \mathbf{H}_t) \mathbf{H}_t^{-1} : \dot{\mathbf{H}}_t = - \frac{\rho_{t_0}}{\det \mathbf{H}_t} \mathbf{H}_t^{-1} : \dot{\mathbf{H}}_t,$$

azaz

$$(15) \quad \dot{\rho}_t + \rho_t \mathbf{H}_t^{-1} : \dot{\mathbf{H}}_t = 0.$$

Ez a tömegmérleg szubsztanciális alakja, mely LAGRANGE-alakban a

$$(16) \quad \dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

lokális alakban pedig a

$$(17) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

formát nyeri.

Egy általános mennyiség mérlegének szubsztanciális formájához a deriváltakra vonatkozó (10) összefüggések és a (13)-ban szereplő fizikai mennyiségek szubsztanciális formájának használatával juthatunk:

$$(18) \quad \frac{\rho_{t_0}}{\det \mathbf{H}_t} \dot{a}_t + \mathbf{H}_t^{-1} \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}_t^a = \sigma_a.$$

Ez az összefüggés látszólag nem mérleg formájú, de azzá alakításához alkalmazhatjuk NANSON tételét⁵ (lásd például [MARTINEC, 2003, BERTRAM, 2005]), mely szerint

$$\nabla_{\mathbf{R}} \cdot ((\det \mathbf{H}_t) \mathbf{H}_t^{-1}) = \mathbf{0}.$$

Ezt felhasználva, ha $\det \mathbf{H}_t$ -val szorozzuk (18)-at, az A extenzív fizikai mennyiség *anyagi mérlegét*⁶ nyerhetjük:

$$\rho_{t_0} \dot{a}_t + \nabla_{\mathbf{R}} \cdot ((\det \mathbf{H}_t) \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{j}_t^a) = \dot{a}_A + \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}_A^a = \sigma_{a_A},$$

ahol $a_A = \rho_{t_0} a_t$ az A mennyiség anyagi sűrűsége, $\mathbf{j}_A^a = (\det \mathbf{H}_t) \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{j}_t^a$ pedig az anyagi áramsűrűsége.

A DIFFERENCIÁLIS MÉRLEG ÁLTALÁNOS FORMÁJA az elmondottak alapján a következők:

<i>Euler</i>	<i>Lagrange</i>	<i>Anyagi</i>
$\frac{\partial \rho a}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho a \mathbf{v} + \mathbf{j}_a) = \sigma_a,$	$\rho \dot{a} + \nabla \cdot \mathbf{j}_a = \sigma_a,$	$\dot{a}_A + \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}_A^a = \sigma_{a_A}.$

⁵ A formula rövid bizonyítását indexes jelöléssel adjuk meg. A komponensek jelölésekor a szubsztanciális formára történő közvetlen utalást nem alkalmazzuk.

$$\begin{aligned} \partial_j (\det \mathbf{H}_t (H^{-1})_i^j) &= \partial_j (\det \mathbf{H}_t) (H^{-1})_i^j + \det \mathbf{H}_t \partial_j (H^{-1})_i^j = \\ \det \mathbf{H}_t (H^{-1})_l^k \partial_j H_k^l (H^{-1})_i^j - \det \mathbf{H}_t (H^{-1})_l^j \partial_j H_k^l (H^{-1})_i^k &= \\ \det \mathbf{H}_t \partial_j H_k^l ((H^{-1})_l^k (H^{-1})_i^j - (H^{-1})_l^j (H^{-1})_i^k) &= \\ \det \mathbf{H}_t \partial_{jk} \chi^l (\partial_l (\chi^{-1})^k \partial_i (\chi^{-1})^j - \partial_l (\chi^{-1})^j \partial_i (\chi^{-1})^k) &= 0_i \end{aligned}$$

mert rögzített l és i indexek mellett $A_{jk} = \partial_{jk} \chi^l$ mátrixot szorozzunk $a^k = \partial_l (\chi^{-1})^k$ és $b^k = \partial_i (\chi^{-1})^k$ vektorokkal. Azaz a fenti kifejezés utolsó sorában $A_{jk} (a^j b^k - a^k b^j) = a_j A^{jk} b_k - b_j A^{jk} a_k = 0$, mert az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus. A fenti átalakítások során felhasználtuk a mátrix determinánsának és inverzének deriváltjára vonatkozó összefüggéseket.

⁶ Legalábbis, mai tudásunk szerint az ilyen formákat tekinthetjük anyagi mérlegeknek.

A TÖMEGMÉRLEG. A fentiből $a = 1$ behelyettesítéssel:

<i>Euler</i>	<i>Lagrange</i>	<i>Anyagi</i>
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$	$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$	$\dot{\rho}_{t_0} = 0.$

AZ IMPULZUSMÉRLEGEket is az általános formulák alkalmazásával kaphatjuk, az $a = \mathbf{v}$ esetben:

<i>Euler</i>	<i>Lagrange</i>	<i>Anyagi</i>
$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v} \circ \mathbf{v} - \mathbf{F}) = \rho \mathbf{f},$	$\dot{\rho} \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{F} = \rho \mathbf{f},$	$\dot{\mathbf{p}}_A + \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{F}_A = \rho_t \mathbf{f}_t.$

Itt $\mathbf{F}$ a lokális feszültségtenzor, $\mathbf{f}$ a lokális erősrűség, $\mathbf{p}_A = \rho_{t_0} \mathbf{v}_t$ az anyagi impulzussűrűség, $\mathbf{F}_L = (\det \mathbf{H}_t) \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{F}_t$ pedig az első PIOLA-KIRCHHOFF-feszültségtenzor, azaz az impulzus anyagi fluxusa.

A BELSŐ ENERGIA MÉRLEGE. Az $a=e$ behelyettesítéssel:

<i>Euler</i>	<i>Lagrange</i>	<i>Anyagi</i>
$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v} + \mathbf{j}^q) = \mathbf{F} : (\mathbf{v} \circ \nabla),$	$\rho \dot{e} + \nabla \cdot \mathbf{j}^q = \mathbf{F} : (\mathbf{v} \circ \nabla),$	$\dot{e}_A + \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}_A^q = \mathbf{F}_A : \dot{\mathbf{H}}_t \mathbf{H}_t^{-1}.$

Itt $e_A = \rho_{t_0} e$ az anyagi belsőenergia-sűrűség, és $\mathbf{j}_A^q = (\det \mathbf{H}_t) \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{j}^q$ az anyagi hőáram-sűrűség.

AZ ENTRÓPIA MÉRLEGE elvileg különbözik a többi mérlegtől, ugyanis az entrópia és annak áramsűrűsége alapvetően anyagi mennyiség, nem független a többi fizikai mennyiségtől. Sőt, ahogy azt például MATOLCSI megmutatta [MATOLCSI, 2005], az entrópia az anyag stabilitását biztosító feltételrendszer kulcseleme, mert a teljes termodinamikai egyensúly aszimptotikus stabilitása a termodinamika második főtételenek fizikai tartalma. Az aszimptotikus stabilitás pedig akkor következik az anyag tulajdonságaiból, ha az összes többi anyagfüggvény olyan, hogy azok formája együttesen biztosítja az entrópia létezését és növekedését. Azaz, az általános gyakorlatnak megfelelően, az anyagfüggvényeket célszerű már eleve a II. főtételeknek megfelelően származtatni.

Az entrópia mérlegének származtatásánál tehát először meg kell határoznunk, melyek az adott anyagcsaládra vonatkozó alapvető fizikai mennyiségek, és meg kell követelnünk, hogy az *entrópia*, mint anyagfüggvény bármely anyagi térrészen

növekedjen. Ebben a fejezetben a legegyszerűbb termomechanikai kontinuumra (szokásos terminológiával: véges deformációs termoviszkoelasztikus anyagra) származtatjuk az entrópia mérlegét, majd a továbbiakban a reológiai és képlékeny anyagok leírásának megfelelően továbbfejlesztjük az elvi kereteket.

Ennek megfelelően feltesszük, hogy a fajlagos entrópia az $(e, \mathbf{H})$ változóktól függ. Mivel összetett függvény, ezért lokális és szubsztanciális formáját a változóinak megfelelő formái segítségével kapjuk. Ezek után az összetett függvény deriválási szabálya alapján az entrópia lokális mennyiségekkel kifejezett anyagi (és szubsztanciális) időderiváltja:

$$\dot{s}(e, \mathbf{H}) = \frac{\partial s}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} : \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}}.$$

Ezt az összefüggést használjuk az entrópia LAGRANGE-mérlegének származtatásához. A hőmérséklet reciproka az entrópia belső energia szerinti deriváltja:

$$\frac{\partial s}{\partial e}(e, \mathbf{H}) = \frac{1}{T}.$$

Ezt, és a belsőenergia-mérleg LAGRANGE-formáját felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \rho \dot{s}(e, \mathbf{H}) &= \frac{1}{T} (-\nabla \cdot \mathbf{j}_q + \mathbf{F} : (\mathbf{v} \circ \nabla)) + \rho \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} = \\ &= -\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}_q}{T} + \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \mathbf{F} : (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}) + \rho \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} = \\ &= -\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}_q}{T} + \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right) : (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}). \end{aligned}$$

Az entrópia konduktív áramsűrűségét a következő formában ismerhetjük fel a $\mathbf{j}^q$ hőáram-sűrűséggel kifejezve:

$$\mathbf{j}_s = \frac{\mathbf{j}_q}{T}.$$

Az entrópiafluxus fenti meghatározása általában egyáltalán nem magától értetődő, formáját befolyásolják az állapotváltozókra vonatkozó fejlődési egyenletek is, általános formája levezethető. Általában bizonyítható, hogy ha a fejlődési egyenletek mérleg alakúak, akkor a fenti forma összhangban van a második főtétellel [VÁN, 2003].

Így végül az entrópiamérleg LAGRANGE-alakja a következő formába írható:

$$(19) \quad \rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \sigma_s = \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right) : (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}) \geq 0.$$

A fenti alakot szubsztanciális formában felírva, és szorozva a mozgásgradiens determinánsával, NANSON formulájának segítségével kaphatjuk a megfelelő anyagi formát. Ezt a lokális alakkal együtt adjuk meg:

<i>Lokális</i>	<i>Anyagi</i>
$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v} + \mathbf{j}^q) = \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} +$ $+ \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right) : \mathbf{v} \circ \nabla \geq 0,$	$\dot{s}_A + \nabla \cdot \mathbf{j}_A^s = \sigma_{s_A} = \mathbf{j}_A^q \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{T} +$ $+ \frac{1}{T} \left(\mathbf{F}_A + \rho_{t_0} T \frac{\partial s_t}{\partial \mathbf{H}_t} \right) : (\dot{\mathbf{H}}_t \mathbf{H}_t^{-1}) \geq 0.$

Itt $s_A = \rho_{t_0} s_t$ az anyagi entrópiasűrűség, és $\mathbf{j}_A^s = (\det \mathbf{H}_t) \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{j}_t^s$ az anyagi entrópiafluxus. Figyeljük meg, hogy az entrópiatermelés anyagi alakjában természetes módon felbukkan az első PIOLA-KIRCHHOFF-feszültség és az anyagi hőáramsűrűség.

A (19) mérlegekben az entrópiára vonatkozó egyenlőtlenség a II. főtételek entrópiatermelésre vonatkozó részét jelenti. Az entrópiamérleg lokális formáját bármely adott térrészben kiintegrálva kapjuk az entrópia növekedését mindenütt, ahol a térrész határán nincs entrópiaáramlás és entrópiafluxus. Ugyanígy, az entrópiamérleg anyagi formáját az anyagi sokaság minden összefüggő részhalmazán kiintegrálva kapjuk az entrópia növekedését minden zárt anyagrészben, ahol a határon nincs entrópiafluxus.

Figyeljük meg, hogy az anyagi entrópiatermelés a lokális entrópiatermelés szubsztanciális formája szorozva a mozgásgradiens determinánsával, azaz $\sigma_{s_A} = (\det \mathbf{H}_t) \sigma_s$, tehát a második főtételek egyenlőtlensége mindkét alakra egyaránt érvényes, ezért az anyagtörvények származtatásához bármelyik formából kiindulhatunk. A továbbiakban a LAGRANGE-leírásban szereplő entrópiatermelést fogjuk használni.

AZ ÁLTALÁNOS ANYAGTÖRVÉNY

1. AZ ANYAGTÖRVÉNY VÁLTOZÓI ÉS AZ ENTRÓPIAFÜGGVÉNY

Az *entrópia* a nemegyensúlyi termodinamika alapvető *anyagfüggvénye*, minden más anyagfüggvényt vagy közvetlenül belőle származtathatunk (intenzívek és deriváltjaik), vagy az entrópiatermeléshez köthetünk (hővezetési tényező, viszkozitási együtthatók). Az anyag szimmetriáit az entrópiafüggvénynek is tükröznie kell. Így például izotróp kontinuumok esetén az entrópia *izotróp* függvénye változóinak.

Egy anyag termodinamikai modellezése, a megfelelő anyagfüggvények keresése során az első kérdés mindig az adott anyagtípus viselkedését valóban jellemző alaplmenyiségek kihámozása a kusza valóságból. Már itt is lényeges kérdés az, hogy hogyan lehet valóban az anyag – és csak az anyag – tulajdonságait és folyamatait leírni, azaz megtalálni azokat a mennyiségeket, amelyek segítségével jellemezhetjük az anyagot, azaz elválaszthatjuk, megkülönböztethetjük a külső feltételektől. A jellemző folyamatok azonosítása, a leírásukra használható fizikai mennyiségek közül a megfelelőek kiválasztása nem egyszerű, nagyon sok tapasztalat felhalmozódása és kísérletek sokasága kell hozzá. Az esetünkben tárgyalt véges deformációs képlékenységi elméletének négy évtizede jól szemlélteti ennek a folyamatnak nehézségeit. Az entrópia, mint anyagfüggvény ezeknek a kiválasztott változóknak a függvénye. Ezeket az alapváltozókat *állapothatározóknak* nevezzük.

Általában mindenféle termodinamikai elméletben az *extenzív* mennyiségek kitüntetett szerepet játszanak, például a nemegyensúlyi termodinamikában az alapvető változók az extenzív mennyiségek sűrűségei. Extenzívek azok a változók, melyeknél a véges kiterjedésű anyagdarab egészére jellemző mennyiségből additívan áttérhetünk lokális jellemzőre, azaz a fizikai mennyiség sűrűsége, vagy fajlagos értéke alkalmas fizikai mennyiség. Az egyes konkrét extenzív állapotahatározóknak speciális sajátosságai vannak, nem kezelhetők egy általános, közös szinten, nem kezdhetünk egy termodinamikai elméletet n darab absztrakt extenzív változó bevezetésével. Ráadásul valójában nagyon kevés valóban jó alaplmenyiség van (tömeg, kémiai komponensek

anyagmennyisége). Más, termosztatikában extenzívnek tekintett, sokszor használt változók gyakran nem is egészen extenzívek, sőt van, amikor egyáltalán nem értelmezhető a fogalom rájuk. Ilyen változó például az elektromos polarizáció, mely függ az anyag alakjától is [MATOLCSI, 2005], és a mechanikai alapváltozók (alakváltozás, deformáció) sem extenzívek, kivéve speciális anyagokat (folyadékok) és terhelési feltételeket. Ráadásul vannak egyéb változóink is, amikről eleve nem várjuk el ezt a tulajdonságot, de fontosak az anyag szerkezetének jellemzésében. Tehát az extenzivitást nem tekintjük a továbbiakban meghatározónak az alapváltozók kiválasztásánál.

Jelen esetben a termodinamikai kölcsönhatások közül elsősorban a mechanikaival foglalkozunk. Ez azt jelenti, hogy a mechanikai és termikus kölcsönhatáson kívül az összes többit figyelmen kívül hagyjuk, vagyis nincs kémiai effektus, az elektromos és mágneses mező nem változik, stb. A termikus és mechanikai kölcsönhatás a belső energián keresztül állandó kapcsolatban van egymással, mechanikai hatásra is változik a közeg hőmérséklete, és termikus hatásra is felléphet alakváltozás. Nem fogjuk ezt a kapcsolatot részletesen tárgyalni, legtöbbször a vizsgálat egyszerűsítése érdekében feltételezzük, hogy közegünk izotermikusan vagy adiabatikusan izolált a környezetétől. A termoelaszticitás, termoplaszticitás, stb. elvileg része a tárgyalt egyenleteknek, de speciális problémákra nem fogunk részletesen kitérni.

2. KÉPLÉKENYSÉG - TAPASZTALAT

Az entrópia csak azoktól a fizikai mennyiségektől függhet, amelyek az alapvető mérlegegyenletekben állapothatározók, illetve az anyag bizonyos szerkezeti tulajdonságait jellemzik. Esetünkben ilyen az e belső energia, amely a termikus kölcsönhatás alapváltozója, a $\mathbf{H}$ mozgásgradiens, amely a közeg belső mozgását jellemzi, illetve a szerkezeti változások jellemzésére még használni fogunk egy további dinamikai (belső) változót is, melynek értéke egyensúlyban nulla. Ez utóbbi ξ mennyiség az anyag reológiai tulajdonságainak modellezésében játszik szerepet.

A képlékenység jelenségkörét is magába foglaló anyagtörvény származtatásához további megfontolásokra is szükség van, fizikai feltevéseket kell tennünk a kialakulásának természetére vonatkozóan. A modellezés általános fenomenologikus szintjén ez a jelenségkör leírására megfelelő változók kiválasztását jelenti. Mivel a képlékeny viselkedést alapvetően mechanikai változások megfigyelésével (maradandó alakváltozás, folyás) azonosítjuk, ezért természetes, hogy a mechanikai jellegű fizikai mennyiségeket vesszünk figyelembe a leírására.

A tapasztalatok összefoglalására használt legegyszerűbb képlékenységi elméletekben képlékenységi alapváltozóként egy speciális elmozdulást vezetnek be, azaz az anyag mozgásfüggvényét felbontják képlékeny és rugalmas részre. Ennek

megfelelően a képlékeny állapot elérését egy $\psi(\mathbf{F}_t, \mathbf{H}_t^{plast})$ formájú *képlékenységi függvény* adja meg, amelynek változói az $\mathbf{F}_t$ a feszültség és a teljes $\mathbf{H}_t$ mozgásgradiens $\mathbf{H}_t^{plast}$ képlékeny része. A felbontás $\mathbf{H}_t^{elast}$ rugalmas és $\mathbf{H}_t^{plast}$ képlékeny részre általában multiplikatív,

$$(1) \quad \mathbf{H}_t = \mathbf{H}_t^{plast} \mathbf{H}_t^{elast},$$

és ebből következően kis deformációkra additív, mert

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{H}_t - \mathbf{I} = \mathbf{H}_t^{plast} \mathbf{H}_t^{elast} - \mathbf{I} = (\mathbf{D}_t^{plast} + \mathbf{I})(\mathbf{D}_t^{elast} + \mathbf{I}) - \mathbf{I} \approx \mathbf{D}_t^{elast} + \mathbf{D}_t^{plast}.$$

A képlékenységi függvény függése $\mathbf{H}_t^{plast}$ -tól a keményedést modellezi (ez történhet többféle módon is), abban a speciális esetben, ha ψ nem függ $\mathbf{H}_t^{plast}$ -tól, beszélhetünk ideális plaszticitásról. A képlékenységi függvény segítségével az anyag mechanikai viselkedését jellemző $\mathbf{F}_t(\mathbf{H}_t)$ anyagfüggvény értelmezési tartományát rugalmas és képlékeny részre bonthatjuk. A két részben a mechanikai tulajdonságok alapvetően különböznek, és a határoló felületen ugrásszerűen változnak. A képlékeny és rugalmas tartomány határát jelentő $\mathbf{F}_f$ folyási feszültséget a

$$(2) \quad \psi(\mathbf{F}_f, \mathbf{H}_t^{plast}) = 0$$

feltétel jelöli ki. Néha egyes szerzők azt feltételezik, hogy képlékeny állapotban az anyag nyíró rugalmassága eltűnik, és az anyag összenyomhatatlanná válik.

Meg kell persze mondanunk, hogy a (2) függvény által meghatározott felület melyik oldalán van a rugalmas és melyiken a képlékeny tartomány. A rugalmasból a képlékenybe történő átmenetet nevezzük felterhelésnek, ekkor

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_t} : d\mathbf{F}_t > 0.$$

Leterhelés (tehermentesítés) esetén, azaz ha

$$\psi = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_t} : d\mathbf{F}_t < 0, \quad \text{illetve} \quad \psi < 0,$$

azonnal visszalépünk a rugalmas tartományba. Az alakváltozás egy része maradandó, a feszültség eredeti helyzetbe történő visszaállítással nem áll helyre az eredeti deformációs állapot.

A $\mathbf{H}_t^{plast}$ képlékeny mozgásgradienstől történő függés (bármilyen legyen is az) azt fejezi ki, hogy a tartomány határa “mozog”, azaz képlékeny állapotban $\mathbf{H}_t^{plast}$ valahogy változik, és újabb felterheléskor a képlékeny állapotba más feszültségek esetén jutunk.

Termodinamikailag H_i^{plast} egy újabb változó, ráadásul változásának leírására vonatkozóan nyilvánvalóan szükség van egy fejlődési (evolúciós) egyenletre, amit a képlékenységtanban szokás folyási törvénynek is nevezni. Ezek bevezetésének változatos módjai vannak [KALISZKY 1975]. Ebben az írásban szeretnénk minél kevesebb feltétellel a termodinamikai anyagelmélet felhasználásával megvizsgálni ezt a kérdéskört.

Ezek után, a megfelelő termodinamikai háttér megértése céljából térjünk át a képlékenység és az irreverzibilitás viszonyának tárgyalására.

3. IRREVERZIBILITÁS-FOGALMAK

A *képlékeny viselkedés - irreverzibilis változás*. Ugyanakkor nem jár feltétlenül disszipációval. A mechanikailag disszipatív (adott esetben viszkózus), rugalmas és képlékeny viselkedés tetszőleges párosításban előfordulhat. Ennek megfelelően beszélünk viszkózusan rugalmas (viszkoelasztikus), képlékeny és viszkózus (viszkoplasztikus), rugalmasan képlékeny (elasztoplasztikus) stb. anyagokról is. Azonban reologikusan képlékeny, viszkózusan reológus, stb. fogalompárosításokat nem tartalmaz az irodalom, holott majd látni fogjuk, hogy ilyenek természetes módon lépnek fel a termodinamikai keretek között. A legáltalánosabb anyagviselkedés mindegyik variációt magába foglalja, még sem érdemes viszko-elasztó-plasztikus névvel illetni, mert ez a normális reológiai tulajdonságokkal rendelkező anyag. Főleg azért nem, mert a viszkózus anyagtulajdonságon a szilárd testeknél, sokan az ún. kúszási tulajdonságot értik (amelyik a deformáció sebességével van összefüggésben), s deformációk késleltetésében jelentkezik. De ugyanilyen tulajdonság a relaxáció (amelyik a feszültségváltozás sebességével van összefüggésben), s a feszültségek ernyedésében is jelentkezik. Általában külön-külön csak speciális esetben jelentkezik, legtöbbször a deformációk késésének és a relaxációnak a különbsége jelenik meg a szemünk előtt.

Ennek megfelelően, a tisztánlátás végett először általánosan, a mechanikai és termodinamikai kölcsönhatásokon túlmenően érdemes áttekinteni a sok esetben keveredő irreverzibilitási és egyensúly fogalmainkat.

Mindenek előtt fontos leszögezni, hogy bármilyen fizikai elméletben a folyamatokat meghatározó differenciálegyenletek, a *fejlődési egyenletek* fényében lehet tisztán beszélni *alapváltozókról*, *folyamatok* tulajdonságairól, illetve egyáltalán meghatározni mit értünk adott fizikai rendszerre vonatkozó külső hatáson és miként határozzuk meg mi a rendszer belső felépítése, azaz *anyaga*. A fejlődési egyenletek felírhatósága már az elmélet meglehetősen fejlett fokát jelzi. A fejlődési egyenletet szokás mozgásegyenletnek, dinamikai egyenletnek is nevezni. Mi szándékosan kerüljük

ezeknek a mechanikai hátteret sejtető, ezért speciális jelzőknek a használatát. Természetesen a mechanikai kölcsönhatás esetén a tömegpont helyzetváltozását meghatározó fejlődési egyenlet a NEWTON-egyenlet, a tömegpont mozgásegyenlete, de nem minden fejlődési egyenlet hasonlít a NEWTON-egyenletre. A következőkben felsorolt tulajdonságok segítenek a különféle fizikai kölcsönhatásokhoz kapcsolódó foglaimaink laza osztályozásában.

AZ ÁLLAPOTHATÁROZÓK TULAJDONSÁGAI – A FEJLŐDÉSI EGYENLET FÉNYÉBEN. A *kölcsönhatásokat* egyes állapotthatározók, vagy csoportjuk, illetve a hozzájuk tartozó fejlődési egyenlet együttesen modellezi.

- (a) Egy állapotthatározót *extenzívnek* nevezünk, ha értelme van a sűrűségéről beszélni, és idő és térbeli változását teljes mérleg alakú fejlődési egyenlet határozza meg. Teljes mérlegen pedig azt értjük, hogy a változónak természetes módon értelmes a fluxusáról és áramlásáról beszélni. Extenzív állapotthatározó például a tömeg, a belső energia, vagy az impulzus.
- (b) Egy állapotthatározót *egyensúlyinak* nevezünk, ha teljes termodinamikai egyensúlyban értéke nem feltétlenül nulla. A teljes termodinamikai egyensúly fogalma (lásd a következő pontot) pedig összefonódik az állapotthatározók osztályozásával. A fenti extenzív állapotthatározók közül a tömeg és a belső energia egyensúlyi.
- (c) *Dinamikai* állapotthatározók meghatározó tulajdonsága, hogy teljes termodinamikai egyensúlyban nullák. Az impulzus például dinamikai állapotthatározó.

Extenzív állapotthatározó lehet egyúttal dinamikai vagy egyensúlyi is, de a dinamikai és az egyensúlyi komplementer fogalmak.

SPECIÁLIS FOLYAMATOK – A FEJLŐDÉSI EGYENLET FÉNYÉBEN.

- (a) Egy fizikai rendszer *termodinamikai egyensúlya* a hozzá tartozó fejlődési egyenlet időben állandó, térben homogén megoldása. A termodinamikai egyensúly létezése természetesen függ a fejlődési egyenlettől és a megfelelő peremfeltételektől. Az extenzív állapotthatározókra vonatkozó fejlődési egyenleteknek létezik termodinamikai egyensúlya, forrásmentes esetben, homogén peremfeltételek és nulla áramsűrűségek esetén. A termodinamikai egyensúly az anyag nyugalmi állapota, minden termodinamikai elmélet alapfogalma.
- (b) Egy fizikai rendszer *dinamikai egyensúlyban* van, ha minden állapotthatározója állandó. Dinamikai egyensúlyban levő rendszer tulajdonságai időben állandók, de a rendszerben folyamatok zajlhatnak. Ilyen például, ha az extenzív

állapothatározók fluxusai vagy a dinamikai állapotthatározók állandók, de nem nullák.

- (c) Egy fizikai rendszer adott állapotthatározóra (vagy a megfelelő kölcsönhatásra) vonatkoztatva *részleges termodinamikai egyensúlyban*, illetve *részleges dinamikai egyensúlyban* van, ha az előbbi feltételek az adott állapotthatározóra állnak fenn. Az összes állapotthatározóra vonatkoztatott termodinamikai, illetve dinamikai egyensúlyt *teljes egyensúlynak* nevezzük.

AZ ANYAGCSALÁD (KÖZEG) – AZ ÁLLAPOTHATÁROZÓK KIVÁLASZTÁSA SZERINT. Az *anyagcsalád (közeg)* az anyagfüggvények meghatározott osztályát jelenti az állapotthatározók kiválasztása szerint. Például a termomechanikai anyagcsaládba azok az anyagok tartoznak, amelyeknek anyagfüggvényei (nyomás, hőáram, stb.) csak a mechanikai és termikus állapotthatározóktól és azok tér- és időderiváltjaitól, integráljaitól függenek.

- (a) Egy anyagcsalád *egyensúlyi*, ha anyagfüggvényei csak egyensúlyi állapotthatározóktól függenek.
- (b) Egy anyagcsalád *nemegyensúlyi*, ha nem egyensúlyi. Ez nem vicc, hanem egy további osztályozásra buzdító összefoglaló jelző. A nemegyensúlyiságnak ugyanis több oka is lehet:
 - (i) Az anyagfüggvények dinamikai változóktól is függenek (ekkor tehetetlenségi tulajdonságok miatt nemegyensúlyi a közeg).
 - (ii) Az anyagfüggvények az állapotthatározók időderiváltjaitól függenek. Ennek egyik oka lehet, hogy nem találtuk meg a megfelelő dinamikai állapotthatározókat. Persze egy időderivált is lehet dinamikai változó, de egy termodinamikai elméletben ez mindig egy speciális választás.
 - (iii) Nem találtuk meg a jó egyensúlyi változókat.

Egy egyensúlyi anyagcsaládot, kis pontosítással, néha lokális egyensúlyban levőnek nevezik történelmi okokból [GYARMATI 1969]. A továbbiakban ezt a jelzőt nem használjuk, mert csak a megfelelő térbelileg homogén testekre vonatkozó termodinamikai (termosztatikai) elmélet kifejtésével lehetne értelmezni. Fontos és a hagyományos felfogástól eltérő, hogy a fenti értelemben egy tisztán mechanikai anyagcsalád nemegyensúlyi, mert dinamikai állapotthatározót is tartalmaz: az impulzust, illetve a sebességet (fajlagos impulzust). A fenomenologikus termodinamika elméleti alapstratégiája szerint a nemegyensúlyiság leírásához elsősorban a megfelelő állapotthatározókat kell megkeresnünk.

AZ ANYAG – A FOLYAMATOK IRÁNYÍTHATÓSÁGA, AZAZ A FEJLŐDÉSI EGYENLET SZERINT. Az adott állapotthatározókkal meghatározott anyagcsaládhoz tartozó *anyag* –

amit a konkrét anyagfüggvények határoznak meg – osztályozható a folyamatok irányíthatósága, azaz végső soron a fejlődési egyenlet szerkezete szerint is. Ebben az osztályozásban elszigetelt rendszereket tekintünk, azaz speciálisan a testet és azok környezetét együttesen. Az anyagfüggvényekhez természetesen hozzá tartozik értelmezési tartományuk, az úgynevezett *konstitutív állapotter* is.

- (a) Egy anyag *reverzibilis*, ha konstitutív állapottere összefüggő, azaz elszigetelt rendszerben eljuttatható konstitutív állapotterének minden pontjából minden más pontjába.
- (b) Egy anyag *irreverzibilis*, ha nem reverzibilis. Például akkor, ha konstitutív állapotterében van olyan pont, hogy onnan már nem juthatunk vissza a kiindulási állapotba.
- (c) Egy anyag egy vagy több adott állapotthatározóra vonatkoztatva, azaz *részlegesen reverzibilis*, ha az összes többi állapotthatározót állandó értéken tartva reverzibilis.

A reverzibilitás fogalmát könnyű félreérteni (és nehéz pontosan körülhatárolni). Fontos, hogy nem folyamat, hanem anyagtulajdonság az egyensúlyisághoz hasonlóan.

Sokkal könnyebben érthető feltételt jelent a következő két tulajdonság.

- (d) Az anyag *disszipatív* – ha az entrópiaprodukciója nagyobb, mint nulla.
- (e) Az anyag *nem disszipatív* – ha az entrópiaprodukciója nulla.

Tehát a disszipativitás felfogásunk szerint az anyag és nem a folyamat tulajdonsága, bár természetesen mondhatnánk, hogy egy disszipatív anyag folyamatai disszipatív folyamatok, de ez félrevezető lenne. Az entrópia növekedését a megfelelő anyagfüggvények biztosítják (pl. FOURIER-féle hővezetési törvény pozitív (!) hővezetési együtthatóval).

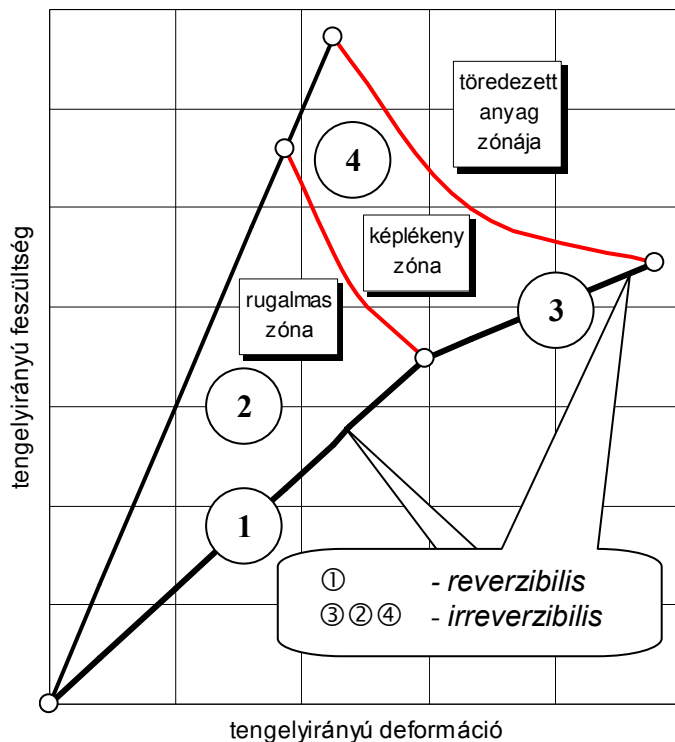
Az egyensúlyiság és reverzibilitás független fogalmak (másra is vonatkoznak), a reverzibilitás és disszipativitás nem az. Egy disszipatív anyag mindig irreverzibilis és egy reverzibilis sosem disszipatív.

Fontos még megemlíteni, hogy nem minden disszipativitás fogható fel belső energiára vonatkozó részleges irreverzibilitásként.

Mint arra fentebb utaltunk, a nemegyensúlyiság egyik formája a tehetetlenség. A tehetetlenség speciális memóriatulajdonság, az anyag pillanatnyi állapota függ az előzőektől. Más irreverzibilitások (pl. károsodás) is lehetnek memóriaszerűek. Vannak reverzibilis memóriahatások is. Ilyet mutatnak az emlékező fémek speciális fázisátalakulásai.

ANYAGOK ÁLLAPOTÁNAK OSZTÁLYOZÁSA KONTINUUMMECHANIKAI (VAGY ANYAGSZERKEZETI) SZEMPONTBÓL. Az anyagok – mindaddig, amíg folytonosságuk

megmarad, vagyis a tönkremenetelig – vagy rugalmasak, vagy képlékenyek (értve ezalatt, hogy a rugalmas alakváltozások mellett megjelennek a maradó (visszafordíthatatlan) deformációk is).



1. ábra

Az 1. ábrán egytengelyű terhelés esetére ábrázoltuk azokat a határoló görbét, amelyekben belül helyezkednek el a feszültség–deformáció-diagramok tetszőleges deformációsebesség esetén. Ekkor 4 különböző esetet különböztethetünk meg a tapasztalatnak megfelelően. Ez az előzőekben felsorolt osztályozásoknak megfelelően a következők:

Rugalmas tartományon belül:

- 1 - egyensúlyi, reverzibilis, nemdisszipatív,
- 2 - nemegyensúlyi, irreverzibilis, disszipatív,

A rugalmas tulajdonságok ugrásszerű megváltozása jelzi a képlékeny zóna határát.

Képlékeny tartományon belül:

- 3 - egyensúlyi, irreverzibilis, disszipatív,
- 4 - nemegyensúlyi, irreverzibilis, disszipatív.

TOVÁBBI MEGJEGYZÉSEK. Az irodalomban azért található számos félreértés, mert azonos elnevezésekkel illetnek más és más fizikai tartalmakat. Teljesen nyilvánvaló, hogy a *reverzibilis* (visszafordítható) és az *egyensúlyi* nem azonos tartalmat takar. De ekkor az *irreverzibilis* (visszafordíthatatlan) és a *nemegyensúlyi* sem lehet azonos, holott a szó jelentésstanilag szinte ugyanazt fejezi ki. Például a nemegyensúlyi termodinamikát és az irreverzibilis termodinamikát egymás szinonimájaként is használják. Klasszikus irreverzibilis termodinamikának azt az egyensúlyi elméletet nevezik, amelyben csak disszipációból származik az irreverzibilitás [DE GROOT – MAZUR, 1962]. A termostatikában használt kvázisztatikus folyamatok az egyensúlyi anyagcsaládokra utalnak, csak disszipációból származó irreverzibilitással, ennek megfelelően a klasszikus irreverzibilis termodinamika anyagcsaládjainak homogén testekre vonatkozó megfelelői.

Teljesen formálisan, az s entrópiafüggvényt szokás két különböző függvény összegeként felírni:

$$[\text{folyamatra vonatkozó felosztás}]: \quad s = s^{rev} + s^{irrev},$$

$$[\text{állapotra vonatkozó felosztás}]: \quad s = s^{egyensúlyi} + s^{nemegyensúlyi},$$

$$[\text{mechanikai (anyagszerkezeti) felosztás}]: \quad s = s^{rug} + s^{képl} := s^{elast} + s^{plast}.$$

Mindhárom esetben meg kell határoznunk a felosztás kritériumát. A változók pontos felírásával válnak csak értelmezhetővé ezek a kijelentések. Mint láttuk, folyamatokra és állapotokra történő hivatkozás anyagi tulajdonságként értelmezhető. Ennek megfelelően egyedül a második felosztás olyan, amelynek természetes matematikai tartalom adható. Ugyanis dinamikai változók jelenléte (tehetetlenség) esetén az entrópia természetes módon szétbontható egyensúlyi és nemegyensúlyi részre:

$$s(a, b) = s^{egyensúlyi}(a) + s^{nemegyensúlyi}(a, b),$$

ahol a az egyensúlyi, b pedig a dinamikai változókat jelöli, és a nemegyensúlyi rész nulla akkor, ha a dinamikai változók nullák, azaz $s^{nemegyensúlyi}(a, 0) = 0$. Ez a felosztás semmiféle megszorítást nem jelent az entrópiafüggvényre vonatkozóan, csak a dinamikai állapothatározók alaptulajdonságát használja. Reológiai hatások esetén már használtuk [VÁN – ASSZONYI 2006, 58. o.] és a továbbiakban is felhasználjuk.

A dinamikai változók hatásának, illetve a nem disszipatív irreverzibilitásoknak az észlelhetősége meghatározott feltételekhez kötődik. Ilyen például az állapotváltozás sebessége, külső hatás nagysága. Tehát az általánosabb anyagcsalád természetes módon és nemcsak elvi határesetként tartalmazhatja a speciálisat. Ez a fejlődési egyenletekben megjelenő időskáláktól, vagy/és a külső hatások erősségétől függhet, anyagonként más-más módon.

4. MECHANIKAI ÁLLAPOTHATÁROZÓK ÉS KÉPLÉKENYSÉG

A véges deformációs képlékenységtan első elméletei a hatvanas-hetvenes években születtek, miután a véges deformációs rugalmasságtan tudománya eljutott bizonyos érettségi fokra. Három-négy évtizeddel ezután máig sincs egyetlen általánosan elfogadott elmélet. BERTRAM a következőképpen jellemzi a helyzetet:

“A *véges képlékenységtan elméletek* egyik alapvető problémája a belső változók definíciója, és különösen a képlékeny vagy inelasztikus alakváltozásé. Habár a *képlékeny deformáció* kifejezés meglehetősen szokásosnak tűnik a mérnöki

irodalomban, kiderül, hogy nagy deformációk esetén meghatározása rendkívül bonyolult.” [BERTRAM, 2005, 249. o., kiemelés a szerzőtől].

Nincs sem elméleti, sem kísérleti általános szabály arra, hogyan különítsük el a kettőt. A probléma nehézségét jól szemlélteti az (1) alatti $\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_t^{plast} \mathbf{H}_t^{elast}$ multiplikatív összefüggés. Emlékezzünk ugyanis arra, hogy a mozgásgradiens a mozgásfüggvény adott referenciakonfiguráción értelmezett deriváltja. Viszont akármilyen valódi vagy elképzelt mozgást (elmozdulást) bontunk két részre, az additív lesz, a fenti multiplikatív összefüggés csak a referenciakonfiguráció változásaként, az összetett függvények deriválási szabálya alapján értelmezhető:

$$\mathbf{H}_t(\mathbf{R}) = \frac{\partial \chi_t^{plast}(\chi_t^{elast}(\mathbf{R}))}{\partial \mathbf{R}} = \frac{\partial \chi_t^{plast}}{\partial \chi_t^{elast}}(\chi_t^{elast}(\mathbf{R})) \frac{\partial \chi_t^{elast}}{\partial \mathbf{R}}(\mathbf{R}) = \mathbf{H}_t^{plast} \mathbf{H}_t^{elast}.$$

A referencialhelyzet ilyen felbontás után azonban többé nem reprezentálja az anyagot, az előző fejezetben elmondottak érvényüket veszítik. Bármilyen alakváltozás – azaz egy geometriailag meghatározott mennyiség – állapothatározóként történő bevezetése ehhez hasonló problémákat eredményez.

Az alábbiakban amellet érvelünk, hogy a képlékenységek a mozgáshoz történő lekötésére nincs szükség. A látszat itt is elfedi a lényegét, a képlékenység, amit alakváltozáson keresztül észlelünk, anyagszerkezeti okokra vezethető vissza. Ha a képlékenységi feltételt fizikailag sokkal természetesebb módon munka-alapúnak tételezzük fel – esetünkben konkrétan a deformációs munkavégzéshez kötjük –, akkor egy megfelelő termodinamikai keretelméletben a rugalmas és képlékeny alakváltozások természetes módon értelmezhetőek és származtathatóak. Ráadásul a képlékenység ebben az esetben egységes módon kezelhető a többi termodinamikai kölcsönhatással, ami lehetővé teszi, hogy a rugalmasság változásainak különféle okait egyszerűen elkülönítsük. Különösen fontos ez a reológia folyamatokhoz történő természetes csatlakozás miatt.

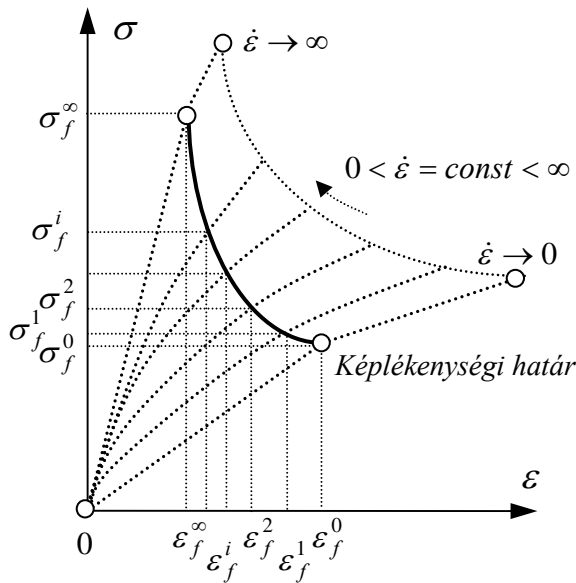
Tekintsük a legegyszerűbb ideális képlékenység esetét, amikor $\psi(\mathbf{F}_t)$ csak az $\mathbf{F}_t$ feszültség függvénye. Hol vannak ebben az általános leíró keretben a fizikai feltevések? Először is vegyük észre, hogy habár a képlékenységi határt kijelölő függvény csak a feszültségtől függ, komplementer módon meg szokás adni alakváltozástól (mozgásgradienstől) függő duális változatát is, például $\hat{\psi}(\mathbf{A}_t)$ formában. Amíg ez a függvény a rugalmas tartomány határát jelöli ki, addig lényegében mindegy, melyik utat járjuk, mert a $\mathbf{F}_t(\mathbf{A}_t)$ rugalmas anyagtörvény miatt a változócsere általában egyértelmű. Viszont a változó megválasztása nem tetszőleges, a dualitásnak szigorú feltételei vannak, ezért valamilyen fizikai feltételt kell keresnünk. A valóságban, illetve az általunk vizsgált általánosabb, az időbeli változásokat is tekintetbe vevő nemegyensúlyi keretek között is, nem feltétlenül a rugalmas tartományból jutunk a képlékeny

tartomány határára. Ugyanis a reológiai viselkedésnek nincsenek a képlékenységhez hasonló „tartományai”.

Amikor az anyag képlékeny, és egyúttal a mechanikai viselkedését a terhelés sebessége jelentősen befolyásolja, akkor a képlékenységi határ nemcsak a feszültségtől, hanem a deformációtól és ezek időderiváltjaitól is függ, tehát legalábbis

$$\psi_{univ}(\mathbf{F}_t, \dot{\mathbf{F}}_t, \mathbf{H}_t, \dot{\mathbf{H}}_t) = 0$$

alakú.



2. ábra. A képlékenységi határfeltétel egytengelyű nyomókísérlet alapján, különböző állandó deformációsebességű méréseknél

Azonban egy ilyen függvénykapcsolat empirikus kijelölése egyáltalán nem világos egy, a jelenségeket tisztán szétválasztó elmélet nélkül. A

$$\psi(\mathbf{F}_t) = 0$$

kritérium változójának kiválasztása azt a fizikai elképzelést tükrözi, hogy az anyag képlékeny viselkedése, vagyis belső szerkezetének átrendeződése valamilyen kritikus feszültség hatására következik be. A fenti általánosabb összefüggés azt mutatja, hogy ez az egyszerű fizikai kép nem tartható, a feszültség önmagában csak speciális esetekben szolgáltat jó képlékenységi feltételt. A

sematikus 2. ábra mutatja, hogy a képlékenységi határ jelentősen függ a terhelés sebességétől is. Viszont újabb, $\psi_{ij}(\mathbf{F}_t, \dot{\mathbf{F}}_t) = 0$ jellegű képlékenységi feltétel empirikus előírása – habár kézenfekvőnek tűnik – de egyrészt semmit nem magyaráz meg a jelenségből, másrészt hamis eredményre vezethet. Például azért, mert objektivitási és a termodinamika második főtételeiből eredő megkorlátozásokat is figyelembe kell vennünk.

Viszont van olyan fizikai mennyiségünk, amely mindezeket a hatásokat képes figyelembe venni és fizikailag is plauzibilis, ráadásul speciális esetként tartalmazza a hagyományost. Tegyük fel ugyanis, hogy a képlékenységi határ az anyaggal közölt munkától, illetve teljesítménytől függ. Ez egy fizikailag tiszta feltétel, rugalmas-képlékeny anyag esetén egyenértékű csak a feszültséget, vagy csak a deformációt bevezető feltételekkel. De pontosan mi lehet a képlékenységi feltétel? Munka vagy a teljesítmény, rugalmas munka, plasztikus munka, vagy valami más? Ez egy tapasztalati kérdés, de a tapasztalatot egy elméletbe ágyazottan értékeljük. Jelen esetben nagyon

lényeges, hogy ezeket az elképzeléseket ne a származtatott anyagfüggvényekbe, hanem közvetlenül az entrópiába építsük be. Ez a feltétel pedig kitünteti a deformációs munkát, mint legegyszerűbb lehetőséget az összes többi lehetséges választás közül. Ennek megfelelően a továbbiakban azzal a feltevessel élünk, hogy a plaszticitási határ elérése az anyagon végzett W deformációs munkától, illetve a P deformációs teljesítménytől függ ($P = \dot{W} = \mathbf{F}_t : \dot{\mathbf{H}}_t \mathbf{H}_t^{-1}$).

A változók kijelölésén túlmenően a másik lényeges fizikai kérdés a képlékenységi határ eredete. Következménye valamilyen szerkezeti, fizikai elképzelésnek (pl. fázishatár, mint a károsodási felület lehet [VÁN, 2001], vagy az anyag belső mozgásai miatti stabilitásvesztésként értelmezhető [VERHÁS, 1985]), vagy az elmélet független, azaz kézzel előírt, kísérletileg meghatározandó alapfeltevése, mint a $\psi(\mathbf{F}_t) = 0$ klasszikus modellben. Mindkét esetben a változások egyirányúságát, irreverzibilitást tekintetbe vevő elméletet kell alkotnunk. Ennek megfelelően a termodinamika II. főtételenek pontos értelmezése és bevezetése a képlékenységtanban sem mellőzhető.

Jól ismert, hogy a képlékenységi határ, illetve a képlékeny alakváltozásra jellemző folyási törvény tulajdonságai a második főtéttel szoros kapcsolatban vannak. Például KESTIN és RICE klasszikus munkái óta a képlékenységet termodinamikai belső változók megjelenéséhez kötjük (diszlokációk mozgása) (lásd például [MAUGIN, 1999]). Ilyen módon például a normalitási szabályt a II. főtétel következményeként kaphatjuk [RICE, 1971]. A legegyszerűbb ilyen elmélet a képlékeny alakváltozást vezeti be az entrópia függvény változójaként, és ebből von le következtetéseket. Mi a képlékeny alakváltozást magyarázandó ténynek tekintjük és helyette a képlékenységi határt meghatározó munkavégzést építjük be az elméletbe.

Ennek megfelelően az entrópia a következő változók függvénye lesz

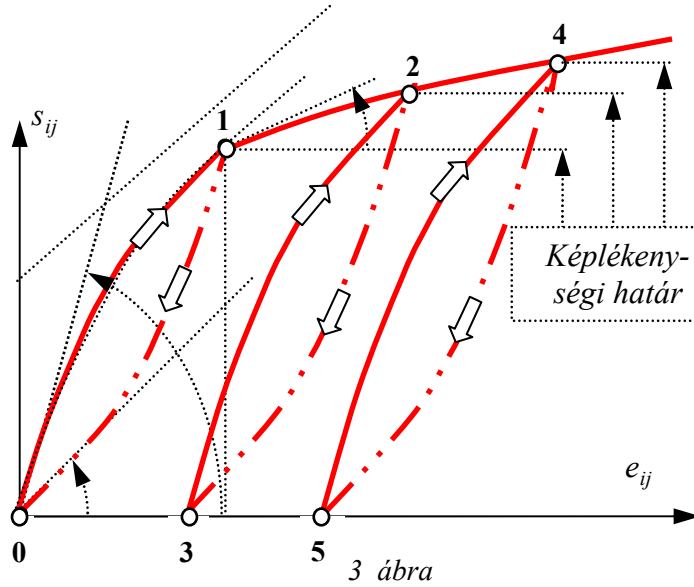
- a belsőenergia-sűrűség $[e]$,
- mozgásgradiens $[\mathbf{H}]$, illetve speciálisan lehet valamelyik más belső elmozdulás mérték is (pl. alakváltozás $[\mathbf{A}]$, vagy deformáció $[\mathbf{D}]$),
- a térfogategységre jutó deformációs munka $[W]$,

tehát elvben

$$(3) \quad s = s(e, \mathbf{H}, W).$$

Mivel az anyagmennyiség változásával kapcsolatos jelenségek (diffúzió, fázisátalakulás, stb...), azaz az *anyagi kölcsönhatás* nem szerepel a leírásunkban, ezért a ρ tömegsűrűség változása kizárólag a térfogatváltozáshoz köthető, nem független a mozgásgradienstől, nem lehet független változója az entrópiafüggvénynek.

A KÉPLÉKENYSÉGI HATÁRFELTÉTEL. Ennek bevezetése a HEAVISIDE-féle ugrásfüggvénnyel történik, annak megfelelően, hogy a képlékenységi határ az az elválasztó felület, amelyiknek egyik oldalán a rugalmas deformációk mellett még nincsenek maradó deformációk, a másik oldalán pedig megjelennek ezek a visszafordíthatatlan deformációk.



Ez a képlékenységi határfeltétel *természetes definíciója*. Azonban a szokásos megközelítéssel ellentétben mégsem bontjuk fel az alakváltozást képlékeny és rugalmas részre.

Számos jelenség mutatja, hogy a képlékenységi határ sem a feszültségektől, sem az alakváltozástól nem függhet önmagában, csupán az összetartozó feszültségektől és deformációktól együttesen. Arról a közismert tényről nem is beszélve, hogy a folyás határ még vándorol is, ugyanis az anyag által a múltban elszenvedett hatásoknak is a függvénye, mint azt a 3. ábra mutatja. Ha klasszikus felfogásban – egy adott szituációban – a képlékenységi határhoz tartozó értéket $\{\sigma_f^{(1)}, \varepsilon_f^{(1)}\}$ -vel jelöljük

miközben a terheléssel továbbhaladtunk, majd az ismételt felterhelésnél a képlékenységi küszöb az előző érték maximuma lesz: $\{\sigma_f^{(2)}, \varepsilon_f^{(2)}\}$, és így tovább. Vagyis egy adott szituációnál (pl. egyenletes sebességű felterhelés- és leterhelés sorozat) a küszöbértékek egy monoton növekvő sorozatot alkotnak:

$$\{\sigma_f^{(1)}, \varepsilon_f^{(1)}\} \leq \{\sigma_f^{(2)}, \varepsilon_f^{(2)}\} \leq \dots \leq \{\sigma_f^{(i)}, \varepsilon_f^{(i)}\} \leq \dots$$

Ez azt mutatja, hogy az anyag (minden anyag) memóriával rendelkezik, s a mai t^* időpillanatban a képlékenységi küszöb összetartozó feszültség-deformáció értéke:

$$\left\{ \sigma_f \Big|_{t=t^*}, \varepsilon_f \Big|_{t=t^*} \right\} = \text{Max}_{-\infty < t \leq t^*} \{ \sigma_f(t), \varepsilon_f(t) \}.$$

Az általánosabb munkafelfogásban felírva

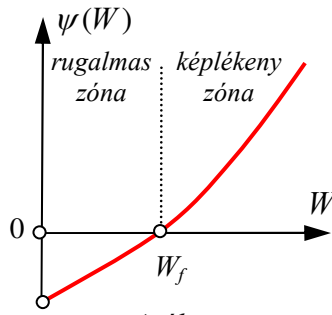
$$W_f = \text{Max}_{-\infty < t \leq t^*} \{ W_f(t) \}.$$

Már most lerögzítjük, hogy a következőkben a W teljes deformációs munkát vesszük, holott tisztában vagyunk azzal, hogy a W felbontható: W' torzulási és W_0 térfogatváltozási munka összegére, valamint Φ rugalmas (potenciális) és $\mathcal{L}$ disszipációs munka összegére is. Ennek a kérdésnek a lényegével a 8. fejezetben foglalkozunk.

Az előbbi indokoknak megfelelően tegyük fel, hogy a határfüggvény csak a munkától függ [$\psi = \psi(W)$]. Ezt a 3. ábrán a görbék alatti területek (mint a munkával arányos értékek) is szemléletesen mutatják.

Tehát az entrópiafüggvény
(3a)
alakú.

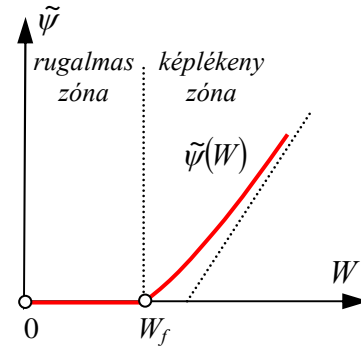
$$s = s(e, \mathbf{H}, \psi(W))$$



4. ábra

A $\psi(W)$ függvény azt a fizikai képet fejezi ki, hogy bizonyos kritikus W_f munkamennyiségnél többet az anyag nem képes szerkezeti változások nélkül felvenni, és ekkor a rugalmassági zónában érvényes tulajdonságai (a rugalmas és reológiai anyagállandók értékei) megváltoznak.

Mivel a $\psi(W)$ -t az entrópia változójaként kívánjuk bevezetni, tehát olyannak kell lennie, amely a rugalmas zónában nem okoz változást az entrópiában. Ezért olyan speciális $\tilde{\psi}(W)$ függvényt kell alapul venni, a mely a rugalmas zónában végig állandó. Az a két feltétel, hogy a ψ függvény a $W = 0$ helyen, és a $W = W_f$ helyen egyaránt zérus legyen, továbbá e két érték között pedig állandó legyen, az eredményezi, hogy a rugalmas zónában $\tilde{\psi}$ végig nulla legyen (5. ábra).



5. ábra

Ha a ψ függvény a képlékenységi határfeltételt reprezentálja, akkor értékének a rugalmas tartományban zérusnak kell lennie, s ezt ideális esetben a HEAVISIDE-féle egységugrás-függvénnyel írjuk le:

$$\Psi_H(W - W_f) = \begin{cases} 0, & \text{ha } W < W_f, \\ 1, & \text{ha } W \geq W_f. \end{cases}$$

Ez a kifejezés azonban még további pontosításra szorul. A 3. ábrából is látható, de különben is köztudott, hogy ha terhelésnél átléptük a folyáshatárt, majd tehermentesítést hajtunk végre, akkor az anyag a „visszaút” során a rugalmas anyagtörvénynek

megfelelően viselkedik. Ennek az összefüggéseinkben kifejezésre kell jutniuk. „Odaút” során az anyaggal közölt munka növekszik: ΔW tehát pozitív ($\dot{W} > 0$), míg a visszaútnál ΔW negatív ($\dot{W} < 0$):

$$\Psi_H(\dot{W}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \dot{W} < 0, \\ 1, & \text{ha } \dot{W} \geq 0. \end{cases}$$

Ennek megfelelően a korrekt összefüggés:

$$\Psi = \Psi(W, \dot{W}) = \Psi_H(W - W_f) \Psi_H(\dot{W}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } W < W_f, \text{ vagy } \dot{W} < 0, \\ 1, & \text{ha } W \geq W_f, \text{ és } \dot{W} \geq 0. \end{cases}$$

Itt a ψ függvényről feltételeztük a $\psi(W_f) = 0$ tulajdonságot. Tehát két gondolat összevetéséből, miszerint az egységugrásra szükség van az alakváltozásoknál, de akkor a képlékenységi határfeltételt is ez kapcsolja az entrópiához, a képlékenységi határ megadását célszerűen egyesíthetjük a képlékeny állapot egy általánosított megadásával. függvényt, és ennek segítségével a

$$(4) \quad \tilde{\psi}(W) := \Psi(W, \dot{W}) \psi(W) = \Psi \cdot \psi(W)$$

alakba írjuk elvárásainkat.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy már ebből az egyszerűnek tűnő feltevésből is következik a maradó alakváltozások megjelenése.

5. NEMEGYENSÚLYI KÖZEG – ÁLTALÁNOS REOLÓGIAI-PLASZTIKUS VISELKEDÉS VÉGES DEFORMÁCIÓK ESETÉN

DINAMIKAI ÁLLAPOTHATÁROZÓ. Az állapotthatározók értéke az idő függvényében változik, azonban nem akármilyen módon, hanem mindig a második főtétel által megszabott pályán, oly módon, hogy a folyamat iránya a teljes termodinamikai egyensúly – a kiegyenlítődé – felé mutat. Az egyensúlyi közegmodellen dinamikai változók bevezetésével léphetünk túl. Az egyensúlyi közegmodelltől való eltérést egy ξ dinamikai állapotthatározóval jellemezzük (vagyis olyan változóval, melynek értéke termodinamikai egyensúlyban zérus). A ξ változó egyesek szerint a mikrotulajdonságok makroszkopikus (fenomenologikus) hatását jeleníti meg. Mi a változó mikroszkopikus értelmezésével nem foglalkozunk, csak a termodinamika általános elveiből vonunk le következtetéseket, ezáltal nyitva hagyva a lehetőséget többféle mikroszkopikus értelmezésnek és mechanizmusnak. Mivel a továbbiakban a dinamikai változót kiküszöböljük az egyenletekből, ezért valójában a speciális mikroszkopikus értelmezések legfeljebb a megfelelő anyagi paraméterek

meghatározását eredményezhetik. A dinamikai állapothatározókat [VERHÁS 1986] *dinamikai szabadságfoknak* nevezi.

A ξ változóra vonatkozó fejlődési egyenletet nem ismerjük, annak formájára a második főtételel fogunk megszorításokat kapni. Milyen változó lehet ez a ξ ? Tenzori rangja elvben bármilyen lehetne, de mivel a mechanikai hatásokra vonatkozó nemegyensúlyi tulajdonságokat modellezzük vele, másodrendű tenzornak tekintjük. Ilyen módon izotróp anyagok viselkedését is észlelhetően befolyásolja, mert ekkor is csatlóódhat a mozgásgradienshez.

Az entrópiafüggvényt a következő formában írjuk:

$$(5) \quad s(e, \mathbf{H}, \tilde{\psi}(W), \xi) = \underbrace{s^{\text{egyensúlyi}}}_{\tilde{s}} + \underbrace{s^{\text{nemegyensúlyi}}}_{\Delta s} = \tilde{s}(e, \mathbf{H}, \tilde{\psi}(W)) - \frac{1}{2} \xi : \xi.$$

A kvadratikus forma az elvárt termodinamikai stabilitásnak (entrópia konkávitás) és annak következménye, hogy ξ dinamikai változó, azaz teljes termodinamikai egyensúlyban nulla. Ekkor a fenti függvénynek minimuma van a dinamikai változóban, azaz az állapottér ξ -hez tartozó nemegyensúlyi részén. A MORSE-lemma biztosítja, hogy a fenti egyszerű forma egyben általános reprezentáció is [VERHÁS 1986]. Konkrét mikroszkopikus modellek esetén nem tekinthetnénk el a tehetetlenség mértékének jellemzésétől, azaz a megfelelő termodinamikai induktivitások bevezetésétől, ami matematikailag az entrópiafüggvény LAGRANGE-féle középértéktétel szerinti általános, vagy ξ szerinti TAYLOR-sorba fejtésének megfelelő speciális formáját jelenti (tehát (5)-ben $\frac{1}{2} \xi : \xi$ helyett $\frac{1}{2} \xi \mathbf{M} \xi$ állhat, ahol $\mathbf{M}$ a termodinamikai induktivitások mátrixa).

6. AZ ENTRÓPIA MÉRLEGE

Az előző fejezet entrópiamérlegre vezető gondolatmenetét megismételhetjük, figyelembe véve a függvény újabb változóit is. Most is a hagyományos LAGRANGE-formát használjuk,

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \sigma_s \geq 0.$$

Az (5) fajlagos entrópia szubsztanciális időderiváltját kiszámolva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(6) \quad \rho \dot{s}(e, \mathbf{H}, \psi(W), \xi) &= \rho \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e} + \rho \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} + \rho \frac{\partial s}{\partial \tilde{\psi}} \dot{\tilde{\psi}} + \rho \frac{\partial s}{\partial \xi} : \dot{\xi} = \\
&= \rho \frac{d}{dt} \left[\tilde{s} - \frac{1}{2} \xi : \xi \right] = \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial e} \dot{e} + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{\psi}} \frac{d\tilde{\psi}}{dW} \dot{W} - \rho \xi : \dot{\xi} \\
&= -\frac{1}{T} (\nabla \cdot \mathbf{j}_q - \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla) + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{\psi}} \frac{d\tilde{\psi}}{dW} \mathbf{F} : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} - \rho \xi : \dot{\xi} = \\
&= -\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}_q}{T} + \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \mathbf{F} : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \mathbf{F} : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} - \rho \xi : \dot{\xi}.
\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk az első fejezetben található energiamérleg LAGRANGE-formáját. A hőmérsékletet reciproka most is az entrópia belső energia szerinti deriváltja:

$$(7) \quad \frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial e} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial e}.$$

Felhasználtuk továbbá a rugalmas teljesítmény definícióját, $\dot{W} = \mathbf{F} : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}$ formában. Legyen az entrópia fluxusa a szokásos módon a hőáramsűrűség és a hőmérséklet hányadosa, azaz

$$(8) \quad \mathbf{j}_s = \frac{\mathbf{j}_q}{T}.$$

Ekkor a fenti (6) számításból kapjuk az entrópiatermelést:

$$\begin{aligned}
(9) \quad \sigma_s &= \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \mathbf{F} : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \right) - \rho \xi : \dot{\xi} = \\
&\quad \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\left(1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{H}} \right) : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} - \rho \xi : \dot{\xi} \geq 0.
\end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség a további vizsgálódásaink kiindulópontja, a mechanikai kontinuumok anyagtörvényeinek meghatározásának alapja.

7. ÁLTALÁNOS ANYAGFÜGGVÉNYEK

A (9) egyenlőtlenségben az alap-állapothatározók az e belső energia, a $\mathbf{H}$ mozgásgradiens és a ξ dinamikai változó. Az anyagfüggvények, azaz a $\mathbf{j}_q$ hőáramsűrűség és az $\mathbf{F}$ feszültség ezekről a mennyiségektől és deriváltjaiktól függenek. A belső változó fejlődési egyenlete nem ismert, de általában a következő formájú lehet:

$$(10) \quad \dot{\xi} = \mathbf{G}(e, \mathbf{H}, \xi, W),$$

ahol $\mathbf{G}$ függhet az argumentumában szereplő változók meghatározott tér- és időderiváltjaitól is, a tekintetbe vett anyagcsaládnak megfelelően. Ugyanilyen értelemben anyagfüggvények a feszültség és a hőáram is (azaz tulajdonképpen nem egyszerű függvények, hanem differenciáloperátorok). Ha a munka integrális felírási módját is figyelembe vesszük: $W = \int \mathbf{F} : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} dt$, akkor látjuk, hogy az anyagfüggvények még bonyolultabban is összefüggenek. A továbbiakban alkalmas egyszerűsítésekkel el fogjuk kerülni az ebből adódó formai és matematikai komplikációkat. Ha a fenti (7) formában megadott hőmérséklet független a munkától, akkor (9) egyes tagjaiban termodinamikai erőket és áramokat azonosíthatunk annak megfelelően, hogy a termodinamikai erők az állapothatározók adott függvényei, a termodinamikai áramok pedig mindig tartalmaznak anyagfüggvényeket, amelyek formájára ad megszorítást a (9) egyenlőtlenség. Tehát a (9) entrópiaprodukcióban a termodinamikai erők $[\mathbf{X}_i]$ és termodinamikai áramok $[\mathbf{J}_i]$ különülnek el:

$$(11) \quad \sum_{i=1}^3 \mathbf{X}_i \mathbf{J}_i \geq 0,$$

azaz esetünkben a következő erő-áram rendszert javasolhatjuk:

	Erő	Áram
Termikus	$\nabla \frac{1}{T}$	$\mathbf{j}_q$
Mechanikai	$(\mathbf{v} \circ \nabla) = \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{-1}$	$\frac{1}{T} \left(\left(1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{H}} \right)$
Reológiai	$\rho \xi$	$\mathbf{G}$

Vegyük észre, hogy a fenti erő-áram-képből anyagtörvényt úgy kaphatunk, ha feltételezzük, hogy az áramok az erőkkel arányosak, azaz érvényesek az ún. *vezetési egyenletek* a következő formában:

$$(12) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{j}_q \\ \frac{1}{T} \left(\left(1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{H}} \right) \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \\ \rho \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} & \mathbf{L}_{13} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{L}_{23} \\ \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \\ \rho \xi \end{pmatrix}.$$

Hangsúlyozni szeretnénk, hogy ezek a vezetési egyenletek a nemlineáris esetben, tehát amikor $\mathbf{L}$ függhet a termodinamikai erőktől, a (9) egyenlőtlenség általános megoldását adják. Mi a továbbiakban megelégszünk a lineáris közelítés vizsgálatával.

Egy fontos problémát ezen a ponton mindenképpen meg kell említenünk. Ugyanis az entrópia anyagfüggvény, mi mégis a lokális LAGRANGE-leírás függvényeit használtuk az entrópiaprodukciónak levezetéséhez, holott az előző fejezetben bevezettünk anyagi fizikai mennyiségeket és felírtuk az anyagi mérlegeket is. Eljárásunknak több oka is van. Természetesen az anyagi mérleg használata lenne a korrektebb. Valóban, a fentiekhez hasonló számolás NANSON első fejezetben ismertetett formulájának használatával egyszerűen eredményezi az entrópiaprodukciónak anyagi formáját ebben a bővített változórendszerben is:

$$\dot{s}_A + \nabla \cdot \mathbf{j}_A^s = \sigma_{s_A} = \mathbf{j}_A^q \cdot \nabla_R \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\left(1 + \rho_{t_0} T \frac{\partial \tilde{s}_t}{\partial W} \right) \mathbf{F}_A + \rho_{t_0} T \frac{\partial \tilde{s}_t}{\partial \mathbf{H}_t} \right) : \dot{\mathbf{H}}_t - \rho_{t_0} \xi_t : \dot{\xi}_t \geq 0.$$

Számunkra viszont a lokális termodinamikai áramok és erők közötti összefüggések kellenek, mert azokra van szükség a mérlegekben, márpedig ebben az esetben is

$$\frac{\sigma_{s_A}}{\det \mathbf{H}} = \sigma_s = \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\left(1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{H}} \right) : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} - \rho \xi : \dot{\xi} \geq 0.$$

Vagyis a kétféle entrópiaprodukciónak lokális formája között a mozgásgradiens determinánsa jelenti az egyetlen eltérést, ennek hatásától pedig a további vizsgálatainkban eltekintünk. A kérdéskör természetesen ezzel a megjegyzéssel nincs lezárva, további kutatást igényel.

Annyit azonban nagy biztonsággal kijelenthetünk, hogy az eltérések csak a nagy deformációk esetén jelentkezhetnek. Tekintsük például a hővezetési törvény példáját. Lineáris kapcsolatot tételezve fel az anyagi hőáram és a megfelelő szubsztanciális térderiválttal képzett termodinamikai erő között, kapjuk, hogy

$$\mathbf{j}_A^q = (\mathbf{L}_{11})_A \nabla_R \frac{1}{T} = \det \mathbf{H}_t \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{j}^q = (\mathbf{L}_{11})_A \mathbf{H}_t^T \nabla \frac{1}{T}.$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbf{j}^q = \frac{1}{\det \mathbf{H}_t} \mathbf{H}_t (\mathbf{L}_{11})_A \mathbf{H}_t^T \nabla \frac{1}{T} = \mathbf{L}_{11} \nabla \frac{1}{T},$$

azaz az anyagi és a LAGRANGE-leírásból kapott vezetési együtthatók között egyértelmű kapcsolat van a következő formában:

$$\mathbf{L}_{11} = \frac{1}{\det \mathbf{H}_t} \mathbf{H}_t (\mathbf{L}_{11})_A \mathbf{H}_t^T.$$

Ez az összefüggés pedig azt mutatja, hogy még az izotróp esetben is, az l FOURIER-féle hővezetési együttható – amiről azt várnánk, hogy az anyagi leírásban inkább állandó – erősen függ a mozgásgradienstől:

$$l = \frac{1}{\det \mathbf{H}_t} \mathbf{H}_t : \mathbf{H}_t^T l_A.$$

Tehát nagy deformációs hővezetés esetén nem mindegy, melyik képet használjuk, melyik esetben alkalmazzuk a lineáris vezetési törvényeket. Viszont az anyagi leírás nem az egyetlen elképzelhető tisztán anyagi mérlegrendszer (ismeretesekek például pszeudo-anyagi mérlegek is [MAUGIN, 1999]). Ezért aztán számos nyitott kérdés merül fel ezzel kapcsolatban. Melyek az ‘igazi’ termodinamikai erők és áramok? Eldönthető-e ez a kérdés elméletileg? Eldönthető-e kísérletileg?

8. AZ ANYAGTÖRVÉNY ÉS AZ ANYAGI OBJEKTIVITÁS ELVE

Az anyagtörvények jelentős egyszerűsítését eredményezi az anyag szimmetriáinak figyelembe vétele. Két ilyen feltételt fogunk alkalmazni. Feltételezzük az anyag forgásfüggetlenségét és izotrópiáját. Az izotrópiát az előző kötetben részletesen tárgyaltuk, ezért arra a továbbiakban csak utalunk.

Fontos szerepet játszik a mozgásgradiens tenzornak az első fejezet (4) formulájában bemutatott $\mathbf{H}_t = \mathbf{Q}_t \mathbf{A}_t$ poláris dekompozíciója a $\mathbf{Q}_t$ ortogonális ($\mathbf{Q}_t^{-1} = \mathbf{Q}_t^T$) elfordulási tenzor és az $\mathbf{A}_t$ szimmetrikus ($\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_t^T$) alakváltozási tenzor szorzatára. E poláris felbontás segítségével az entrópiaprodukció *mechanikai* tagja a következő formába írható (itt és a továbbiakban az A felső index a tenzorok antiszimmetrikus részét, az S felső index a szimmetrikus részt jelöli):

$$\begin{aligned} T\sigma_s^{mech} &= \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H}_t \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}_t} \right) : \dot{\mathbf{H}}_t \mathbf{H}_t^{-1} = \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H}_t \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}_t} \right) : (\dot{\mathbf{Q}}_t \mathbf{Q}_t^T + \mathbf{Q}_t \dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{Q}_t^T) = \\ &= \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H}_t \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}_t} \right) : \mathbf{Q}_t \dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{Q}_t^T + \rho T \left(\mathbf{H}_t \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}_t} \right)^A : \dot{\mathbf{Q}}_t \mathbf{Q}_t^T = \\ &= \left(\mathbf{Q}_t^T \mathbf{F} \mathbf{Q}_t + \rho T \mathbf{A}_t \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}_t} \mathbf{Q}_t \right) : \dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1} + \rho T \left(\mathbf{H}_t \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}_t} \right)^A : \dot{\mathbf{Q}}_t \mathbf{Q}_t^T = \\ &= \left(\mathbf{Q}_t^T \mathbf{F} \mathbf{Q}_t + \rho T \left(\mathbf{A}_t \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}_t} \mathbf{Q}_t \right)^S \right) : (\dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1})^S + \\ &+ \rho T \left(\mathbf{A}_t \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}_t} \mathbf{Q}_t \right)^A : \left((\dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1})^A + \mathbf{Q}_t^T \dot{\mathbf{Q}}_t \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy $\mathbf{F}$ szimmetrikussága miatt $\mathbf{Q}_t^T \mathbf{F} \mathbf{Q}_t = (\mathbf{Q}_t^T \mathbf{F} \mathbf{Q}_t)^T$ is szimmetrikus, így a $\dot{\mathbf{Q}}_t \mathbf{Q}_t^T$ szögsebességgel való szorzata kiesik. Igaz továbbá, hogy

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}_t}(\mathbf{H}_t)\mathbf{Q}_t = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}_t}(\mathbf{H}_t).$$

Itt az argumentum kiírásával azt hangsúlyozzuk, hogy ugyanaz a függvény van a két oldalon. Tehát általában

$$(13) \left(\mathbf{Q}_t^T \mathbf{F} \mathbf{Q}_t + \rho T \left(\mathbf{A}_t \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}_t} \right)^S \right) : (\dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1})^S + \rho T \left(\mathbf{A}_t \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}_t} \right)^A : \left((\dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1})^A + \mathbf{Q}_t^T \dot{\mathbf{Q}}_t \right) \geq 0.$$

Ebből az formulából kiindulva kézenfekvőnek tűnik megvizsgálni annak következményeit, ha az entrópia csak az alakváltozás függvénye. Ennek a feltevésnek az elemzéséhez fel kell idéznünk a kontinuumfizika egyik már emlegetett általános elvét, illetve annak szokott formáját.

AZ ANYAGI OBJEKTIVITÁS ELVE. Az „anyagi objektivitás elve” speciális megfogalmazása annak az általános követelménynek, hogy a valóság objektív, azaz tőlünk független, ezért leírásában is tükröződnie kell ennek a követelménynek. (A valóság objektivitásában a filozófusok kételkedhetnek, de fizikai elméletek esetén ez egy igen produktív feltevés.) Az elv hagyományos kimondása és alkalmazása az irodalomban a következő módon történik. A megfigyelő (vonatkoztatási rendszer) változtatására az anyagtörvények formája invariáns. Speciálisan tekintsük azt a megfigyelőt, amely a kezdeti (célszerűen inerciálisnak választott) megfigyelőhöz képest mereven forog, és középpontjának relatív helyzete is változik. A merev forgást egy $\mathbf{B}(t)$ ortogonális tenzorral írjuk le ($\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^{-1}$, $\det \mathbf{B} = 1$), a középpont helyzetét pedig egy $\mathbf{c}(t)$ vektorral jellemezzük. Ekkor a kontinuum egy pontjának helye a következőképpen transzformálódik a vonatkoztatási rendszer váltásakor:

$$(14) \quad \tilde{\chi}_t(\mathbf{R}) = \mathbf{B}(t)\chi_t(\mathbf{R}) + \mathbf{c}(t).$$

Világos, hogy ha az új vonatkoztatási rendszerünk a középpontja körül forog, akkor az összes vektor és tenzor is ennek megfelelően transzformálódik. Tehát egy tetszőleges $\mathbf{d}$ vektor és egy $\mathbf{D}$ másodrendű tenzor transzformált alakja:

$$(15) \quad \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{B}\mathbf{d}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^T.$$

A mozgásgradiens viszont, habár másodrendű tenzor, mégis másképp transzformálódik, mivel a mozgásra közvetlenül vonatkozó fizikai mennyiségről van szó:

$$(16) \quad \tilde{\mathbf{H}}_t(\tilde{\mathbf{R}}) = \frac{\partial \tilde{\chi}_t(\tilde{\mathbf{R}})}{\partial \tilde{\mathbf{R}}} = \mathbf{B}(t) \frac{\partial \chi_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{B}\mathbf{H}_t(\mathbf{R}),$$

ahol figyelembe vettük, hogy az anyagi pont helyvektora is megfelelően változik: $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{B}(t)\mathbf{R} + \mathbf{c}(t)$. Tehát a feszültségre vonatkozó $\mathbf{F}(\mathbf{H})$ anyagfüggvény teljes transzformált formája:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{H}}) = \mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{B}\mathbf{H})\mathbf{B}^T.$$

Az anyagi objektivitás elve szerint ez ugyanolyan formájú kell legyen, mint az eredeti vonatkoztatási rendszerben (hiszen az anyagtörvény csak az anyagra vonatkozik), azaz

$$(17) \quad \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{H}}) = \mathbf{F}(\mathbf{H}) = \mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{B}\mathbf{H})\mathbf{B}^T.$$

Ennek a függvényegyenletnek minden $\mathbf{B}$ ortogonális tenzorra teljesülnie kell. Speciálisan a mozgásgradiens poláris dekompozíciójával kapott $\mathbf{Q}_t(\mathbf{R})$ -re is minden anyagi pontban. Ennek következményeként (17)-et alkalmazva kapjuk, hogy

$$(18) \quad \mathbf{Q}_t \mathbf{F}_t(\mathbf{H}_t) \mathbf{Q}_t^T = \mathbf{F}_t(\mathbf{Q}_t^T \mathbf{H}_t) = \mathbf{F}_t(\mathbf{A}_t).$$

(lásd például [TRUESDALL–NOLL, 1965], (26.12)→(28.5)→(43.2)). Tehát

$$\left(\mathbf{Q}_t^T \mathbf{F} \mathbf{Q}_t + \rho T \mathbf{A}_t \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}_t} \right) : (\dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1})^S = \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{A}_t \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}_t} \right) : (\dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1})^S \geq 0.$$

Ahogy erre már az előzőekben is utaltunk, ez a hagyományos gondolatmenet több szempontból is hibás, illetve kétséges.

- a) A (14) transzformáció nem tetszőleges vonatkoztatási rendszer esetén érvényes, hanem csak egy nagyon speciális (mereven forgó) rendszer esetén. A transzformáció megfogalmazása tehát nem tükrözi a fizikai követelményt.
- b) A (17) követelményről, mint az anyagfüggvény *formájának* változatlanóságáról egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy tükrözi azt az elvárást, hogy magának az anyagnak a viselkedése ne változzon másik vonatkoztatási rendszerből nézve. Az anyagi objektivitás elve minden vonatkoztatási rendszertől függetlenül, pontosan is megfogalmazható, és kiderül, hogy a tisztán formai invariancia hibás feltevés [MATOLCSI–GRUBER, 1996].
- c) A (17) feltétel egy függvényegyenlet, amely nagyon hasonlít az izotrópia követelményéhez ($\mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{H})\mathbf{B}^T = \mathbf{F}(\mathbf{B}\mathbf{H}\mathbf{B}^T)$). Tehát következményeként a feszültségtenzorra vonatkozó anyagfüggvénynek csak speciális alakjai megengedettek. Nem ismerünk azonban az irodalomban olyan munkát, amely ezt ilyen formában aknázná ki, megadván a feltételnek megfelelő függvényformákat, hanem *mindig* csak a speciális (18) alakot követelik meg.

Tehát az anyagi objektivitás elvének NOLL által javasolt fenti megfogalmazása nézetünk szerint hibás, leggyakoribb alkalmazása a feszültségtenzorra vonatkozóan pedig utolsó megjegyzésünk szerint nem is igazán magát az elvet alkalmazza, hanem egy annál gyengébb követelményt. Ennek megfelelően javasoljuk, hogy (18)-at tekintsük anyagi jellegű, nem pedig elvi megszorításnak.

Fizikailag teljesen világos, hogy a (18) feltétellel olyan anyagot adunk meg, amelyben a fellépő feszültségek csak a lokális nyúlásoktól függenek, és függetlenek a belső elfordulásoktól. Ugyanis koordinátákban gondolkodva a $\mathbf{H}_t(\mathbf{R})$ tenzor megadja a kezdeti, anyagi vonatkoztatási rendszer (kezdetben mondjuk ortonormált) bázisának változását, bázistranszformációját. A poláris dekompozícióval a bázistranszformációt a bázisvektorok hosszváltozására és elforgatására bontjuk. $\mathbf{Q}_t(\mathbf{R})$ az anyagi pontban az elfordulást jelenti. Éppen ezért magának a mozgásgradiensnek a “visszaforgatása” nem követi a tenzorokra vonatkozó általános formulát, hanem a speciális $\hat{\mathbf{H}}_t = \mathbf{A}_t = \mathbf{Q}_t^T \mathbf{H}_t$ alakú. Ez felel meg (16)-nak, és ebből következik, hogy a forgásfüggetlen anyagfüggvények csak az alakváltozási tenzoron keresztül függenek a mozgásgradienstől. Természetesen vektor és tenzor értékű anyagfüggvények esetén ($\mathbf{d}_t(\mathbf{R})$, illetve $\mathbf{D}_t(\mathbf{R})$) azt is meg kell követelnünk, hogy a vektor és a tenzor irányultságába se szóljon bele az elfordulás, azaz

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_t^T \mathbf{d}_t(\mathbf{Q}_t^T \mathbf{H}_t) &= \mathbf{d}_t(\mathbf{H}_t), \\ \mathbf{Q}_t^T \mathbf{D}_t(\mathbf{Q}_t^T \mathbf{H}_t) \mathbf{Q}_t &= \mathbf{D}_t(\mathbf{H}_t).\end{aligned}$$

Tehát speciálisan a feszültségre vonatkozóan fogalmazva, annak a követelménye, hogy az anyagban a belső, pontonkénti elfordulások hatására ne lépjen fel feszültség, éppen azt jelenti, hogy se a feszültségtenzor irányultságába ne szóljon bele az elfordulás (vissza kell forgatni), se a tenzor ne függjön semmilyen módon tőle (argumentumát is vissza kell forgatni), azaz

$$\mathbf{Q}_t^T \mathbf{F}_t(\mathbf{Q}_t^T \mathbf{H}_t) \mathbf{Q}_t = \mathbf{F}_t(\mathbf{H}_t).$$

Ez pedig pontosan a (18) követelmény. Éppen ezért a továbbiakban a (18) feltételnek eleget tevő $\mathbf{F}_t(\mathbf{H}_t)$ feszültségfüggvénnyel leírható anyagot *forgásfüggetlennek* nevezzük.

A kontinuummechanika használhatósága azt mutatja, hogy a forgásfüggetlenség nagyon sok anyagra igen jó feltételezés. Számos esetben viszont komoly problémákba ütközünk. Egyelőre nyitott kérdés, hogy pontosan miféle anyagok és hogyan írhatók le az általánosabb anyagtörvénnyel. A továbbiakban kizárólag a hagyományos forgásfüggetlen anyagok családjával foglalkozunk.

Forgásfüggetlen anyagokra az előbbieknél megfelelően természetesen az alapvető anyagfüggvényünk, az s skalár entrópia is csak $\mathbf{A}$ -tól függhet, ennek megfelelően (13) is egyszerűsödik:

$$(19) \quad \left(\mathbf{Q}_t^T \mathbf{F} \mathbf{Q}_t + \rho T \left(\mathbf{A}_t \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}_t} \right)^S \right) : (\dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1})^S + \rho T \left(\mathbf{A}_t \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}_t} \right)^A : \left((\dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1})^A + \mathbf{Q}_t^T \dot{\mathbf{Q}}_t \right) =$$

$$\left(\mathbf{F} + \rho T \left(\mathbf{A}_t \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}_t} \right)^S \right) : (\dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1})^S + \rho T \left(\mathbf{A}_t \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}_t} \right)^A : \left((\dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{A}_t^{-1})^A + \mathbf{Q}_t^T \dot{\mathbf{Q}}_t \right) \geq 0.$$

Láttuk, hogy izotróp anyagtörvények esetén az entrópia $\mathbf{A}$ szerinti deriváltja az alakváltozás legfeljebb másodfokú polinomja, ezért szimmetrikus [VÁN – ASSZONYI 2006], és $\mathbf{A}$ -val szorozva is az. Ekkor tehát (19) második tagja eltűnik.

Ezek után izotróp forgásfüggetlen anyagok esetén az entrópiaprodukció LAGRANGE-formája a következő egyszerű formában írható:

$$\mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}} \right) : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \geq 0,$$

ha $s = s(e, \mathbf{A})$, illetve (9a):

$$(20) \quad \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\left(1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} - \rho \xi : \dot{\xi} \geq 0,$$

ha $s(e, \mathbf{A}, \tilde{\psi}(W), \xi) = \tilde{s}(e, \mathbf{A}, \tilde{\psi}(W)) - \frac{1}{2} \xi : \xi$.

Mivel a továbbiakban csak izotróp, forgásfüggetlen kontinuumokkal foglalkozunk, ezért ez az egyenlőtlenség lesz minden további vizsgálódásunk kiindulópontja.

9. IZOTRÓP, RUGALMAS-KÉPLÉKENY KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE

A (20) összefüggés már jó alapot szolgáltat az anyagtörvény meghatározásához, mivel az anyagok nagy részénél a tapasztalat alapján elvárjuk, hogy a vonatkozó anyagtörvény a $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$ deformációtenzor függvénye legyen, nem pedig a $\mathbf{H}$ mozgásgradiensé.

A (20)-nak megfelelő termodinamikai erők és áramok :

	ERŐ	ÁRAM
<i>Termikus</i>	$\nabla \frac{1}{T}$	$\mathbf{j}_q$
<i>Mechanikai</i>	$\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^{-1}$	$\frac{1}{T} \left(\left(1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)$
<i>Reológiai</i>	$\rho \xi$	$\mathbf{G}$

Mielőtt az entrópiaprodukció függvényre kiróva az izotrópiát megadnánk a vezetési egyenleteket, vizsgáljuk meg a disszipációmentes esetet részletesebben.

9.2. DISSZIPÁCIÓMENTES ANYAGTÖRVÉNY - A KÉPLÉKENYSÉGI FELTÉTEL SZEREPE

Tekintsük azt az esetet, amikor az anyag nem disszipatív, tehát az entrópiaprodukció nulla, viszont a képlékenységi feltétel miatt nem feltétlenül reverzibilis. Tegyük fel ennek megfelelően, hogy ebben az ideális, disszipációmentes anyagban a vezetési együtthatók mátrixa azonosan nulla. Ebben az esetben a vezetési egyenletek a hővezetésre és a dinamikai változók fejlődési egyenletére vonatkozóan triviálisak:

$$(21) \quad \mathbf{j}_q \equiv \mathbf{0}, \quad \text{és} \quad \mathbf{G} \equiv \mathbf{0}.$$

A mechanikai kölcsönhatásra érvényes vezetési egyenlet, mely a feszültségre vonatkozó anyagtörvény meghatározására szolgál, azonban meglehetősen összetett:

$$(22) \quad \left(1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{0}.$$

A (21)-(22) anyagtörvényekkel meghatározott anyagokat *rugalmas-képlékeny* (elasztoplasztikus) anyagoknak nevezzük. A (4)-(4a) feltétel felhasználásával a fenti egyenletekből egyszerűen kaphatjuk, hogy

$$(23) \quad \mathbf{F}^{eq} = - \frac{\rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}}{1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}}.$$

Az eq indexszel arra utalunk, hogy disszipációmentes esetben, az anyag egyensúlyi állapotban van, tehát a (23) az anyagtörvény egyensúlyban érvényes formája.

Ezzel az egyenlettel az a gond, hogy a $\partial \tilde{s} / \partial W$ derivált csak implicit tartalmazza az ugrásfüggvényt, így nem látszik belőle a rugalmas és képlékeny tartomány elválása. Ezért a

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{\psi}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial W}$$

összefüggésből, a (4) definíció

$$\tilde{\psi} = \Psi \psi,$$

felhasználásával

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial W} = \frac{\partial \Psi}{\partial W} \psi + \Psi \frac{\partial \psi}{\partial W}$$

írható.

A $\frac{\partial \Psi}{\partial W}$ derivált minden W -nél nulla, kivéve W_f -et, ahol egy DIRAC-delta-szerű (túimpulzusszerű) ugrása van. Ezen a W_f helyen azonban a ψ függvény nulla értéket vesz föl, ezért a $\frac{\partial \Psi}{\partial W} \psi$ szorzatot a W_f helyen is nullának tekinthetjük. Tehát

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial W} = \Psi \frac{\partial \psi}{\partial W},$$

és így

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{\psi}} \Psi \frac{\partial \psi}{\partial W} = \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{\psi}} \frac{\partial \psi}{\partial W} = \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}.$$

Ennek felhasználásával

$$(24) \quad \mathbf{F}^{eq} = - \frac{\rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}}{1 + \Psi \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}}.$$

A fenti összefüggés általában nem adja meg explicit módon a feszültséget, mert $\tilde{s}$ deriváltjai, így $\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}$ és $\frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}$ is függhetnek a munkától, amely a feszültség integrálja. Sőt maga a hőmérséklet is, mivel az entrópia belső energia szerinti deriváltjának reciproka, általában a feszültség függvénye. Tehát a fenti (24) egyenlet csak bonyolult, integrálisan implicit módon határozza meg a feszültséget, mert az összes deriváltban az $s(e, \mathbf{A}, \tilde{\psi}(\int \mathbf{H} \mathbf{F} : d\mathbf{H}), \xi)$ függvény szerepel.

Mi a továbbiakban elkerüljük az ebből fakadó bonyodalmakat, és arra a speciális esetre szorítkozunk, amikor az entrópia ψ -függését ésszerűen

$$\tilde{s}(e, \mathbf{H}, \tilde{\psi}) = s^*(e + \tilde{\psi}, \mathbf{H})$$

alakban tételezzük fel, mert $\tilde{\psi}(W)$ is egy energiaszerű (vagy munkaszerű) kifejezés.

Ebben az esetben

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{\psi}} = \frac{\partial s^*}{\partial e},$$

és a hőmérséklet általános definícióját felhasználva,

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial e} = \frac{\partial s^*}{\partial e} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{\psi}},$$

ezért ilyenkor

$$T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{\psi}} = 1.$$

Mindezek alapján a (24) összefüggés

$$\mathbf{F}^{eq} = \frac{\rho T}{1 + \underbrace{\Psi \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{\psi}} \frac{\partial \psi}{\partial W}}_1} \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}},$$

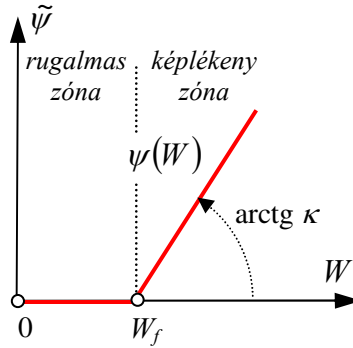
s ezért a disszipációmentes (és egyensúlyi) anyagtörvény általánosan

$$(25) \quad \mathbf{F}^{eq} = \frac{\rho T}{1 + \Psi \rho \frac{\partial \psi}{\partial W}} \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}$$

alakú, amennyiben a $\partial \psi / \partial W$ nem függ az $\mathbf{F}$ -től.

Ha feltesszük, hogy $\psi(W)$ a legegyszerűbb, lineáris módon függ W -től, vagyis

$$(26) \quad \psi(W) = \kappa(\mathbf{A})(W - W_f),$$



6 ábra

akkor még egyszerűbb lesz a helyzet, ahol κ csak az alakváltozás függvénye (6 ábra). Ez már közelítő linearizált összefüggés. A munkavégzés mindig a kiindulási, feltételezetten termodinamikai egyensúlyi állapothoz képest értendő.

Ezek után a disszipációmentes (és egyensúlyi) anyagtörvény - a (26) összefüggés felhasználásával - a feszültségre vonatkozóan explicit, és a következő formában írható:

$$(27) \quad \mathbf{F}^{eq} = - \frac{\rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}}{1 + \Psi \rho \frac{\partial \psi}{\partial W}} = - \frac{\rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}}{1 + \Psi \rho \kappa} = \begin{cases} - \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}, & \text{ha } W < W_f, \text{ vagy } \dot{W} < 0, \\ - \frac{\rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}}{1 + \rho \kappa}, & \text{ha } W \geq W_f, \text{ és } \dot{W} \geq 0. \end{cases}$$

A (27) anyagegyenlet a forgásfüggetlen, izotróp, nem disszipatív, egyensúlyi, egyszerű képlékeny-rugalmas anyag anyagfüggvénye, amely a *kis és a nagy deformációk* tartományán egyaránt érvényes összefüggés.

A (27) összefüggésben pontosan szétválasztható a *rugalmas* és a *képlékeny* tartomány a $\Psi = 0$, illetve $\Psi = 1$ értékkel.

Befejezésül foglaljuk össze az egyensúlyi anyagtörvény általános

$$(27) \quad (a) \quad \mathbf{F}^{eq} = -\frac{\rho T}{1 + \Psi \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}, \quad (b) \quad \mathbf{F}^{eq} = -\frac{\rho T}{1 + \Psi \rho \frac{\partial \psi}{\partial W}} \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}},$$

és linearizált formáit:

$$(27) \quad (c) \quad \mathbf{F}^{eq} = -\frac{\rho T}{1 + \Psi \rho \kappa} \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}.$$

A $\Psi = 0$ esetben, azaz a rugalmas állapotban mindhárom kifejezés azonos, s ez az ún. reverzibilis anyagtörvény.

9.2 IZOTRÓP, DISSZIPATÍV, EGYSZERŰ KÉPLÉKENY ANYAG - TÚL AZ EGYENSÚLYON

Ezek után térjünk vissza a vezetési egyenletek meghatározására, – az előző levezetések beépítésével – a (20) egyenlőtlenség alapján:

$$\left(\left(1 + \Psi \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} - \rho T \xi : \dot{\xi} \geq 0,$$

illetve

$$\left((1 + \Psi \rho \kappa) \mathbf{F} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} - \rho T \xi : \dot{\xi} \geq 0.$$

Először is vezessük be a következő jelöléseket a *rugalmas és reverzibilis feszültség anyagtörvényére*:

$$\mathbf{F}^{rev} := -\rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}},$$

illetve a ψ függvény deriváltjára a (26) szerint a következő kifejezést:

$$\frac{\partial \psi}{\partial W}(W, \dot{W}, \mathbf{A}) =: K(W, \dot{W}, \mathbf{A}) = \Psi \kappa(\mathbf{A}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } W < W_f, \quad \text{vagy } \dot{W} < 0, \\ \kappa(\mathbf{A}), & \text{ha } W \geq W_f, \quad \text{és } \dot{W} \geq 0. \end{cases}$$

Ezek után alkalmazzuk az entrópiaprodukcióna az izotróp függvények reprezentációs tételét. Így a (20)-nak megfelelően fent bevezetett termodinamikai erőkkel és áramokkal a vezetési egyenletek a következőképpen írhatók:⁷

$$(28) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \text{tr}((1 + \Psi \rho \kappa) \mathbf{F} - \mathbf{F}^{rev}) \\ \text{tr} \mathbf{G} \\ \frac{1}{T} ((1 + \Psi \rho \kappa) \mathbf{F} - \mathbf{F}^{rev})^S \\ \mathbf{G}^S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_{12} & 0 & 0 \\ l_{12} & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & k_{12} \\ 0 & 0 & k_{12} & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{tr}(\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}) \\ -\text{tr} \xi \\ (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})^S \\ -\xi^S \end{pmatrix},$$

ahol bevezettük az $l_1, l_{12}, l_2, k_1, k_2$ skalár anyagi paramétereket, [VÁN – ASSZONYI, 2006, 61. o.]-hoz hasonlóan.

Vezessük be az $\mathbf{F}$ feszültségtenzor és a rugalmas feszültség $\mathbf{F}^{rev}$ anyagtörvényének nyomára illetve szimmetrikus nyom nélküli részére a σ_o , $\mathbf{T}$ és σ_o^{rev} , $\mathbf{T}^{rev}$ jelöléseket és a $\mathbf{J} := \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}$, valamint ξ tenzor gömbi és szimmetrikus nyom nélküli részére az J_o , $\mathbf{S}_d$ és ξ_o, ξ_d jelöléseket a következők szerint:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : \begin{cases} \mathbf{T}_o &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{F}) \mathbf{I} = \sigma_o \mathbf{I}, \\ \mathbf{T} &= \mathbf{F} - \mathbf{T}_o, \end{cases} \quad \mathbf{F}^{rev} : \begin{cases} \mathbf{T}_o^{rev} &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{F}^{rev}) \mathbf{I} = \sigma_o^{rev} \mathbf{I}, \\ \mathbf{T}^{rev} &= \mathbf{F}^{rev} - \mathbf{T}_o^{rev}, \end{cases} \\ \mathbf{J} : \begin{cases} \mathbf{J}_o &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{J}) \mathbf{I} = J_o \mathbf{I}, \\ \mathbf{J}_d &= \mathbf{J} - \mathbf{J}_o, \end{cases} \quad \xi : \begin{cases} \xi_o &= \frac{1}{3} \text{tr}(\xi) \mathbf{I} = \xi_o \mathbf{I}, \\ \xi_d &= \xi - \xi_o. \end{cases} \end{aligned}$$

Ezekkel a jelölésekkel a fenti (28) egyenletrendszer két független részre esik szét:

$$(29a) \quad \begin{aligned} (1 + \Psi \rho \kappa) \mathbf{T} - \mathbf{T}^{rev} &= k'_1 \mathbf{J}_d - k'_{12} \xi_d, \\ \dot{\xi}_d &= k'_{12} \mathbf{J}_d - k'_2 \xi_d, \end{aligned}$$

ahol $k'_1 = T k_1$, $k'_2 = T k_2$ és $k'_{12} = T k_{12}$. Továbbá

$$(29b) \quad \begin{aligned} (1 + \Psi \rho \kappa) \sigma_o - \sigma_o^{rev} &= l'_1 J_o - l'_{12} \xi_o, \\ \dot{\xi}_o &= l'_{12} J_o - l'_2 \xi_o, \end{aligned}$$

ahol $l'_1 = T(l_1 + k_1)$, $l'_2 = T(l_2 + k_2)$ és $l'_{12} = T(l_{12} + k_{12})$.

Ezt és az összes eddigi feltételt (20)-ba visszahelyettesítve, az entrópiaprodukciónemnegativitása miatt kapjuk, hogy

$$(30) \quad \begin{aligned} k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad \text{és} \quad k_1 k_2 - k_{12}^2 &\geq 0, \\ l'_1 > 0, \quad l'_2 > 0, \quad \text{és} \quad l'_1 l'_2 - l_{12}^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

⁷ Ebben az esetben a (27) alatti linearizált összefüggést vettük alapul. Semmi akadályja annak, hogy az általánossal dolgozzunk, ekkor a $\Psi \rho \kappa$ helyett $\Psi \rho T (\partial \tilde{s} / \partial W)$ írandó.

A (29a-b) egyenletrendszeréből a dinamikai változó egyszerűen kiküszöbölhető, az első sor időderiváltjába a második sort visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$(31a) \quad (1 + \Psi \rho \kappa) \dot{\mathbf{T}}_0 + \left(k'_{12} (1 + \Psi \rho \kappa) + \Psi \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \right) \mathbf{T} = \\ = k'_1 \dot{\mathbf{J}}_d + (k'_1 k'_{12} - k'_{12} k'_{21}) \mathbf{J}_d + k'_{12} \mathbf{T}_0^{rev} + \dot{\mathbf{T}}_0^{rev}.$$

$$(31b) \quad (1 + \Psi \rho \kappa) \dot{\sigma}_0 + \left(l'_{12} (1 + \Psi \rho \kappa) + \Psi \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \right) \sigma_0 = \\ = l'_1 \dot{J}_0 + (l'_1 l'_{12} - l'_{12} l'_{21}) J_0 + l'_{12} \sigma_0^{rev} + \dot{\sigma}_0^{rev}.$$

A (31a) torzulási (nyírási) anyagtörvényben vezessük be a következő mennyiségeket:

$$(32) \quad m = \left(k'_{12} (1 + \Psi \rho \kappa) + \Psi \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \right)^{-1}, \\ \tau = m(1 + \Psi \rho \kappa), \quad \tau_d = m k'_1, \quad 2\nu = m(k'_1 k'_{12} - k'_{12} k'_{21}), \quad 2g = m k'_{12}.$$

Ezek után (31a)-ból

$$(33) \quad \tau \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} = \tau_d \dot{\mathbf{J}}_d + 2\nu \mathbf{J}_d + m \dot{\mathbf{T}}^{rev} + 2g \mathbf{T}^{rev}$$

adódik.

Ezt az összefüggést nevezzük a képlékeny-rugalmas test véges deformációk tartományában érvényes *torzulási reológiai egyenletének*. Hasonlóan, a térfogati mennyiségekre is bevezetve a megfelelő

$$(34) \quad m_0 = \left(l'_{12} (1 + \Psi \rho \kappa) + \Psi \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \right)^{-1}, \\ \tau_0 = m_0 (1 + \Psi \rho \kappa), \quad \tau_{d0} = m_0 l'_1, \quad 2\nu_0 = m_0 (l'_1 l'_{12} - l'_{12} l'_{21}), \quad 2g_0 = m_0 l'_{12}$$

együtthatókat, azt kapjuk, hogy

$$(35) \quad \tau_0 \dot{\sigma}_0 + \sigma_0 = \tau_{d0} \dot{J}_0 + 2\nu_0 J_0 + m_0 \dot{\sigma}_0^{rev} + 2g_0 \sigma_0^{rev}.$$

Ezt az összefüggést nevezzük a képlékeny-rugalmas test véges deformációk tartományában érvényes *térfogati reológiai egyenletének*.

Vegyük észre, hogy a $W < W_f$ rugalmas esetben τ_d, τ, τ_{d0} és τ_0 a szokásos nyírási és térfogati reológiai együtthatók, a (33) és (35) egyenletek azonban még ebben az esetben is jóval összetettebbek a megfelelő kis deformációs közelítés esetén érvényes egyenleteknél, azaz a torzulási POYNTING-THOMSON egyenletnél és a térfogati DOBRÓKA-CRISTESCU egyenletnél (vesd össze [VÁN-ASSZONYI, 2006] 64-65. oldal, (54) és (55) egyenletekkel).

Kapott anyagegyenletünkből

$$(36) \quad \begin{aligned} \tau \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} &= \tau_d \dot{\mathbf{J}}_d + 2\nu \mathbf{J}_d + m \dot{\mathbf{T}}^{rev} + 2g \mathbf{T}^{rev}, \\ \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o + \mathbf{T}_o &= \tau_{do} \dot{\mathbf{J}}_o + 2\nu_o \mathbf{J}_o + m_o \dot{\mathbf{T}}_o^{rev} + 2g_o \mathbf{T}_o^{rev} \end{aligned}$$

nem látszik explicite a rugalmas és képlékeny tartomány különválása, mivel ez az anyagjellemzők elfedik. Ha a (32) és (34) összefüggéseket kiírjuk, akkor

$$(37) \quad \Psi = 0: \left\{ \begin{array}{ll} m = k_2'^{-1}, & m = \left(k_2' (1 + \rho\kappa) + \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \right)^{-1} \\ \tau = k_2'^{-1}, & \tau = m(1 + \rho\kappa), \\ \tau_d = k_2'^{-1} k_1', & \tau_d = m k_1', \\ 2\nu = k_1' - k_2'^{-1} k_{12}' k_{21}', & 2\nu = m(k_1' k_2' - k_{12}' k_{21}'), \\ 2g = 1, & 2g = m k_2', \\ m_o = l_2'^{-1}, & m_o = \left(l_2' (1 + \rho\kappa) + \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \right)^{-1} \\ \tau_o = l_2'^{-1}, & \tau_o = m_o(1 + \rho\kappa), \\ \tau_{do} = l_2'^{-1} l_1', & \tau_{do} = m_o l_1', \\ 2\nu_o = l_1' - l_2'^{-1} l_{12}' l_{21}', & 2\nu_o = m_o(l_1' l_2' - l_{12}' l_{21}'), \\ 2g_o = 1, & 2g_o = m_o l_2'. \end{array} \right\} : \Psi = 1$$

A (36) anyagegyenlet azonban csak implicit tartalmazza az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzort, s a reverzibilis tenzorok sincsenek kifejtve.

A (36) egyenletpár két egyenletének összeadásával visszatérhetünk a feszültségtenzorra. A bal oldalak összege

$$\mathbf{T} + \mathbf{T}_o + \tau \dot{\mathbf{T}} + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o = \mathbf{F} + \tau(\dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{T}}_o) + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o = \mathbf{F} + \tau \dot{\mathbf{F}} + (\tau_o - \tau) \dot{\mathbf{T}}_o,$$

a jobb oldalak összege pedig

$$2\nu \mathbf{J}_d + 2\nu_o \mathbf{J}_o + \tau_d \dot{\mathbf{J}}_d + \tau_{do} \dot{\mathbf{J}}_o = 2\nu \mathbf{J} + (2\nu_o - 2\nu) \mathbf{J}_o + \tau_d \dot{\mathbf{J}} + (\tau_{do} - \tau_d) \dot{\mathbf{J}}_o$$

és

$$2g \mathbf{T}^{rev} + 2g_o \mathbf{T}_o^{rev} + m \dot{\mathbf{T}}^{rev} + m_o \dot{\mathbf{T}}_o^{rev} = 2g \mathbf{F}^{rev} + (2g_o - 2g) \mathbf{T}_o^{rev} + m \dot{\mathbf{F}}^{rev} + (m_o - m) \dot{\mathbf{T}}_o^{rev}$$

összege, s így

$$(38) \quad \begin{aligned} \mathbf{F} + \tau \dot{\mathbf{F}} + (\tau_o - \tau) \dot{\mathbf{T}}_o &= 2\nu \mathbf{J} + (2\nu_o - 2\nu) \mathbf{J}_o + \tau_d \dot{\mathbf{J}} + (\tau_{do} - \tau_d) \dot{\mathbf{J}}_o + \\ &2g \mathbf{F}^{rev} + (2g_o - 2g) \mathbf{T}_o^{rev} + m \dot{\mathbf{F}}^{rev} + (m_o - m) \dot{\mathbf{T}}_o^{rev}. \end{aligned}$$

A (38) egyenletbe behelyettesítendő a reverzibilis feszültség

$$\mathbf{F}^{rev} = -\rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}, \quad \dot{\mathbf{F}}^{rev} = -\rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} = -\rho T \left(\dot{\mathbf{A}} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} + \mathbf{A} \frac{\partial \dot{\tilde{s}}}{\partial \mathbf{A}} \right)$$

és az $\mathbf{J}$ tenzor $\mathbf{A}$ -val felírt alakja: $\mathbf{J} := \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$, $\dot{\mathbf{J}} = \overbrace{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}}^{\bullet} = \ddot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} - (\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1})^2$. Így az anyagtörvény alakváltozási tenzorral felírt alakja:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} + \tau \dot{\mathbf{F}} + \frac{1}{3}(\tau_o - \tau)\text{tr}(\mathbf{F}) &= 2\nu\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} + \frac{1}{3}(2\nu_o - 2\nu)\text{tr}(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}) + \\
 &+ \tau_d \overbrace{(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1})}^{\bullet} + \frac{1}{3}(\tau_{do} - \tau_d)\text{tr}(\overbrace{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}}^{\bullet}) - \\
 (39) \quad &- 2g\rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} - \frac{1}{3}(2g_o - 2g)\rho T \text{tr}\left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}\right) - \\
 &- m\rho T \overbrace{\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}}^{\bullet} - \frac{1}{3}(m_o - m)\rho T \text{tr}\left(\overbrace{\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}}^{\bullet}\right).
 \end{aligned}$$

A (38) összefüggés az *izotróp kontinuumok általános anyagtörvénye*, amely *kis és nagy alakváltozások* esetén, *rugalmas és képlékeny állapotban* egyaránt érvényes.

Az anyagtörvények konkrét és specifikus alakját ezen általános formák alapján a következő fejezetekben mutatjuk be, ahol visszatérünk az anyagtörvényeknél az alakváltozásról a már megszokott deformációkra.

3. FEJEZET
EGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY A RUGALMAS DEFORMÁCIÓK
TARTOMÁNYÁBAN⁸

Az entrópiánövekedés 2. fejezetben levezett –
izotróp és forgásfüggetlen anyagokra érvényes –
(27a) formuláját vesszük alapul:

$$(1) \quad \left[\left(1 + \Psi \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) \right] : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}) - \rho T \dot{\xi} : \dot{\xi} \geq 0,$$

s ebből a rugalmas állapotra vonatkozóan a $\Psi = 0$ feltétel esetén az

$$(2) \quad \left[\mathbf{F} + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) \right] : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}) - \rho T \dot{\xi} : \dot{\xi} \geq 0$$

összefüggés adódik. Ezeket az egyenleteket az entrópiafüggvény

$$(3) \quad s = s^{\text{egyensúlyi}} + s^{\text{nemegyensúlyi}} := \tilde{s} + \Delta s$$

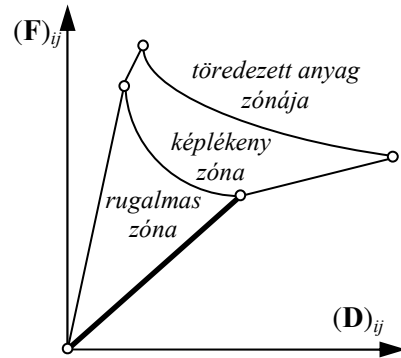
felírásából vezettük le, amelynél az egyensúlyi entrópiát $[\tilde{s}]$ és az egyensúlytól való eltérést $[\xi]$ vettük alapul:

$$s = \tilde{s} - \frac{1}{2} \dot{\xi} : \dot{\xi}.$$

Láttuk azonban, hogy a reverzibilis állapotváltozás mindig egyensúlyi állapotok során valósul meg, s reverzibilitás csak a rugalmas tartományban létezik. Ebből következik az is, hogy rugalmas állapotban, és csakis rugalmas állapotban, a (3)-mal ekvivalens a

$$(4) \quad s = s^{\text{rev}} + s^{\text{irrev}} := \hat{s} + \Delta s$$

egyenlőség, mivel ekkor $\tilde{s} = \hat{s}$, és ξ a rugalmastól, illetve a reverzibilistól való eltérést egyaránt leírja.



⁸ Az anyagtörvény meghatározásával foglalkozó – 3, 4, 6 és 7. – fejezeteknél, az egyszerűsített – és számozás nélküli – ábrával (mintegy kriptogrammal) a jobb felső sarokban mindenütt feltüntettük, hogy az állapottér melyik részére vonatkoznak a vizsgálataink.

Kövessük a megszokott utat: először határozzuk meg az egyensúlyi, nemdisszipatív állapotban érvényes összefüggést, majd a nemegyensúlyi, disszipatív esetre vonatkozót.

1. AZ ANYAGTÖRVÉNY RUGALMAS NEMDISSIPATÍV ESETRE KORLÁTOZOTT ALAKJA

A

$$\mathbf{X}_A : \mathbf{J}_A + \mathbf{X}_\xi : \mathbf{J}_\xi \geq 0$$

feltételből egyensúly, azaz egyenlőség fennállása esetén a termodinamikai erők $[\mathbf{J}]$ és termodinamikai áramok $[\mathbf{X}]$ egyaránt zérusok:

$$\mathbf{X}_A \equiv \mathbf{F} + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{J}_A \equiv (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}_\xi \equiv \dot{\xi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{J}_\xi \equiv -\rho T \dot{\xi} = \mathbf{0}.$$

Az anyagegyenlet az entrópiaprodukció-sűrűség zérus voltából következően, a rugalmas állapotban:

$$(5) \quad \mathbf{F}^{rev} = -\rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}.$$

Ennek az $\mathbf{F}$ feszültségtenzornak több különböző elnevezése is lehet. Egyrészt a mechanikai egyensúlyra vonatkozik, másrészt a rugalmas állapotra érvényes és nemdisszipatív, harmadrészt reverzibilis. A mechanikai állapottérben minden más változás irreverzibilis, ezért jelöljük ^{rev} indexszel.

Az (5) összefüggés tehát a *reverzibilis állapotváltozás* esetére korlátozott anyagtörvény.

Ez az egyenlet teljesíti az előírt szimmetriafeltételt is. Két szimmetrikus tenzor szorzata általában nem szimmetrikus, de jelen esetben az $\mathbf{A}$ tenzor és a $\partial \tilde{s} / \partial \mathbf{A}$ főirányai megegyeznek, ezért szorzatuknak is ezek a főirányai, tehát a szorzat is szimmetrikus. Vagyis teljesül a

$$\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} = \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)^T = \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \mathbf{A}^T = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{A}$$

feltétel. Az $\mathbf{F}^{rev}$, $\mathbf{A}$, $\partial \tilde{s} / \partial \mathbf{A}$ és $\mathbf{A} \partial \tilde{s} / \partial \mathbf{A}$ tenzorok főirányai mind azonosak.

Az anyagtörvényt általában nem az $\mathbf{A}$ alakváltozással, hanem a $\mathbf{D}$ deformációval szokás felírni, ezért deformációra felírt anyagegyenlet:

$$(6) \quad \mathbf{F}^{rev} = -\rho T \mathbf{A} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}} = -\rho T (\mathbf{D} + \mathbf{I}) \frac{\partial s}{\partial \mathbf{D}}.$$

Ez az összefüggés a *kis* és a *nagy deformációk* teljes tartományán egyaránt érvényes.

2. A RUGALMAS EGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY KONKRÉT ALAKJA

ANYAGTÖRVÉNY A CAYLEY-HAMILTON-TÉTEL ALAPJÁN. A CAYLEY-HAMILTON-tétel kimondja, hogy egy $\mathbf{A}$ szimmetrikus tenzor kielégíti az sajátvektorok meghatározására szolgáló, (háromdimenziós esetben) harmadfokú, ún. karakterisztikus egyenletet:

$$(7) \quad \mathbf{A}^3 - A_1 \mathbf{A}^2 + A_2 \mathbf{A} - A_3 \mathbf{I} = \mathbf{0},$$

ahol A_1, A_2, A_3 az $\mathbf{A}$ tenzor skalárinvariánsai.

Izotróp tenzorok felírhatók egy végtelen hatványsor alakjában:

$$\mathbf{F}^{rev} = \mathbf{F}(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \mathbf{A}^i = \alpha_0 \mathbf{A}^0 + \alpha_1 \mathbf{A}^1 + \dots + \alpha_i \mathbf{A}^i + \dots$$

módon. Felhasználva a (7) összefüggést, mint az

$$\mathbf{A}^n - \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \alpha_{n-2} \mathbf{A}^{n-2} - \alpha_{n-3} \mathbf{A}^{n-3} = \mathbf{0}$$

rekurzív formulát, a végeredmény legáltalánosabban az

$$(8) \quad \mathbf{F}^{rev} = \mathbf{F}(\mathbf{A}) = f_0 \mathbf{A}^0 + f_1 \mathbf{A}^1 + f_2 \mathbf{A}^2$$

alakú anyagtörvényt eredményezi, ahol az f_i együtthatók csak a A_i skalárinvariánsoktól függhetnek. Ez a (8) összefüggés csak az izotróp tenzorokra vonatkozó egyenlet, s nem használtuk fel a felírásához az $\mathbf{F}^{rev}$ és $\mathbf{D}$ közötti fizikai összefüggést, amelyet az entrópiamérlegből kapunk.

Az $\tilde{s} = \tilde{s}(e, \mathbf{A})$ egyensúlyi entrópiafüggvénnyel:

$$\mathbf{F}^{rev} = -\rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}, \quad \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}^{rev} = -\rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}, \quad \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}^{rev} : \dot{\mathbf{A}} = -\rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}},$$

s ennek megfelelően írható, hogy

$$\begin{aligned} -\rho T \frac{d\tilde{s}}{dt} &= -\rho T \frac{d\tilde{s}}{d\mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}^{rev} : \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1} (f_1 \mathbf{I} + f_2 \mathbf{A} + f_3 \mathbf{A}^2) : \dot{\mathbf{A}} = \\ &= f_1 \mathbf{A}^{-1} : \dot{\mathbf{A}} + f_2 \underbrace{\mathbf{I} : \dot{\mathbf{A}}}_{\text{Tr } \dot{\mathbf{A}}} + f_3 \mathbf{A} : \dot{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A}$ skalárinvariánsai:

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Tr} \mathbf{A} = \mathbf{I} : \mathbf{A} = a_1 + a_2 + a_3, \\ A_2 &= \frac{1}{2} (\text{Tr} \mathbf{A})^2 - \frac{1}{2} \mathbf{A} : \mathbf{A} = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1, \\ A_3 &= \det \mathbf{A} = a_1 a_2 a_3, \end{aligned}$$

(ahol a_i -k az $\mathbf{A}$ sajátértékei) felhasználásával a

$$\begin{aligned} -\rho T \frac{d\tilde{s}}{dt} &= -\rho T \left[\frac{\partial \tilde{s}}{\partial A_1} \underbrace{\frac{dA_1}{dt}}_{\text{Tr}\dot{\mathbf{A}}} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial A_2} \underbrace{\frac{dA_2}{dt}}_{(\text{Tr}\mathbf{A})\text{Tr}\dot{\mathbf{A}} - \mathbf{A}:\dot{\mathbf{A}}} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial A_3} \underbrace{\frac{dA_3}{dt}}_{D_3\mathbf{A}:\dot{\mathbf{A}}} \right] = \\ &= -\rho T \left[\frac{\partial \tilde{s}}{\partial A_1} \text{Tr}\dot{\mathbf{A}} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial A_2} (\text{Tr}\mathbf{A}\text{Tr}\dot{\mathbf{A}} - \mathbf{A}:\dot{\mathbf{A}}) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial A_3} A_3 \mathbf{A}:\dot{\mathbf{A}} \right] = f_1 \mathbf{A}^{-1}:\dot{\mathbf{A}} + f_2 \text{Tr}\dot{\mathbf{A}} + f_3 \mathbf{A}:\dot{\mathbf{A}}, \end{aligned}$$

eredményt kapjuk, ahonnan a $\mathbf{A}$ és $\dot{\mathbf{A}}$ tetszőleges volta miatt következik, hogy

$$\begin{aligned} f_0 &= f_0(A_1, A_2, A_3) = -\rho T A_3 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial A_3}, \\ f_1 &= f_1(A_1, A_2, A_3) = -\rho T \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial A_1} + A_1 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial A_2} \right), \\ f_2 &= f_2(A_1, A_2, A_3) = +\rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial A_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Az f_i együtthatók azonban nem lehetnek függetlenek egymástól, mert például ki kell elégíteniük a vegyes parciális deriváltak egyenlőségének feltételét.

Ezek után az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzorról térjünk át a $\mathbf{D}$ deformációtenzorra. Mivel a kettő között az $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{I}$ kapcsolat van, ezért $\mathbf{D}$ skalárinvariánsai a

$$\begin{aligned} D_1 &= \text{Tr}\mathbf{D} = \mathbf{I}:\mathbf{D} = A_1 - 3, \\ D_2 &= \frac{1}{2}[(\text{Tr}\mathbf{D})^2 - \mathbf{D}:\mathbf{D}] = 2A_1 + A_2 + 3, \\ D_3 &= \det\mathbf{D} = A_3 - 3A_1 - A_2 - 1 \end{aligned}$$

formában felírhatók, s így az anyagtörvény:

$$\mathbf{F}^{rev} = \mathbf{F}(\mathbf{D}) = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{D} + \varphi_2 \mathbf{D}^2, \quad (10)$$

ahol

$$\varphi_0 = f_0 + f_1 + f_2, \quad \varphi_1 = f_1 + 2f_2, \quad \varphi_2 = f_2.$$

AZ ANYAGTÖRVÉNY DEVIATORIKUS ÉS TÉRFOGATVÁLTOZÁSI EGYENLETE. A deviatoros $[\mathbf{F}^{rev} = \mathbf{T}^{rev} + \mathbf{T}_0^{rev}]$ és gömbi $[\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0]$ felbontásnak megfelelő egyenleteket torzulási és térfogatváltozási egyenleteknek szokás nevezni, holott ez csak a kis deformációknál lenne megengedhető elnevezés.⁹ Mégis a jövőben a megszokás miatt ezt használjuk. Átmenetileg elhagyva a ^{rev} indexet, az

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{deviátor} + \mathbf{F}_{gömb} \quad := \mathbf{T} + \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{T}_0 = \sigma_o \mathbf{I} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{F}) \mathbf{I}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{F} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{F}) \mathbf{I}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}_{deviátor} + \mathbf{D}_{gömb} \quad := \mathbf{E} + \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E}_0 = \varepsilon_o \mathbf{I} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I}, \\ \sigma_o &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{F}), \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{D}) \end{aligned}$$

⁹ Ekkor ugyanis a relatív térfogatváltozást kifejező $\det(\mathbf{A}) - 1$ közelítőleg megegyezik a $\text{Tr}(\mathbf{D})$ -vel.

egyenleteket építjük be a (10) anyagegyenletbe, figyelembe véve, hogy a tenzorok nyomát az egyenlet mindkét oldalára fel kell írni:

$$\begin{aligned}\sigma_o &= \frac{1}{3} \text{Tr} \mathbf{F} = \frac{1}{3} \text{Tr} (\varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{D} + \varphi_2 \mathbf{D}^2) = \frac{1}{3} \varphi_0 \text{Tr}(\mathbf{I}) + \frac{1}{3} \varphi_1 \text{Tr}(\mathbf{D}) + \frac{1}{3} \varphi_2 \text{Tr}(\mathbf{D}^2) = \\ &= \varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon_o + \frac{1}{3} \varphi_2 (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2).\end{aligned}$$

Ez maga az egyensúlyi anyagegyenlet *térfogatváltozási* része. A deformációtenzor felbontását felhasználva a feszültségtenzor

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{D} + \varphi_2 \mathbf{D}^2 = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 (\mathbf{E} + \varepsilon_o \mathbf{I}) + \varphi_2 (\mathbf{E} + \varepsilon_o \mathbf{I})^2 = \\ &= (\varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon_o + \varphi_2 \varepsilon_o^2) \mathbf{I} + (\varphi_1 + 2\varphi_2 \varepsilon_o) \mathbf{E} + \varphi_2 \mathbf{E}^2\end{aligned}$$

alakban írható fel.

Az anyagtörvény *torzulási* része pedig, a definícióból következően:

$$\mathbf{F} - \sigma_o \mathbf{I} = (\varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon_o + \varphi_2 \varepsilon_o^2) \mathbf{I} + (\varphi_1 + 2\varphi_2 \varepsilon_o) \mathbf{E} + \varphi_2 \mathbf{E}^2 - \varphi_0 - \varphi_1 \varepsilon_o - \frac{1}{3} \varphi_2 (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) \mathbf{I},$$

s az egyszerűsítések után az *anyagtörvény* két egyenletbe felírt *deviatorikus alakja*:

$$\begin{aligned}(11) \quad \mathbf{T} &= \varphi_2 (\varepsilon_o^2 - \frac{1}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)) \mathbf{I} + (\varphi_1 + 2\varphi_2 \varepsilon_o) \mathbf{E} + \varphi_2 \mathbf{E}^2, \\ \sigma_o &= \varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon_o + \varphi_2 \frac{1}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2).\end{aligned}$$

A szokásos *lineárisan rugalmas* esetre

$$(12) \quad \varphi_0 = \lambda \text{Tr} \mathbf{D}, \quad \varphi_1 = 2\mu, \quad \varphi_2 = 0, \text{ illetve } \varphi_0 = \frac{1}{3} (3K - 2G) \text{Tr} \mathbf{D}, \quad \varphi_1 = 2G, \quad \varphi_2 = 0,$$

megkapjuk az ún. HOOKE-törvényt:

$$(13) \quad \mathbf{F}^{rev} = 2G \left[\mathbf{D} + \frac{1}{3} \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \text{Tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right] = 2G \left[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \varepsilon_o \mathbf{I} \right],$$

illetve a megszkott torzulási (deviátoros) és térfogatváltozási (gömbi) részre bontva, a HOOKE-törvény egyszerűbb, és szemléletesebb alakját:

$$(14) \quad \mathbf{T}^{rev} = 2G \mathbf{E}, \quad \mathbf{T}_o^{rev} = 3K \mathbf{E}_o, \quad [\sigma_o = 3K \varepsilon_o].$$

Értelmezzük ezt az eredményt:

- (i) A fizikai törvények kimondják, hogy izotróp anyag esetén a reverzibilis állapotváltozást leíró anyagtörvény (az egyensúlyban lévő közeg anyagtörvénye)¹⁰ legfeljebb másodfokú lehet. Azt azonban nem mondja, hogy másodfokúnak is kell lennie. Lehet elsőfokú is.
- (ii) Ha pl. az egytengelyű nyomókísérletekre gondolunk, akkor ez azt jelenti, hogy a felterhelés másodfokú törvényt követve megy végbe, s tehermentesítésnél

¹⁰ Az általános anyagtörvény egyensúly esetére egyszerűsödött formája.

ugyanezen másodfokú görbe mentén jutunk vissza az origóba, mivel reverzibilis állapotváltozásnál körfolyamat esetén $\oint \sigma d\varepsilon = 0$.

- (iii) Az elmúlt évek során eddig nem találtunk a (ii) feltételt kielégítő anyagot (közetet, acélt, gumit, műanyagot). Mindig azt tapasztaltuk, hogy $\oint \sigma d\varepsilon \neq 0$, vagyis hiszterézis jelentkezett, ami energiaveszteséget, tehát irreverzibilis állapotváltozást jelentett.
- (iv) Az anyagoknál a „végtelen lassú” terhelési sebességet közelítő esetekben (nagy pontossággal) lineáris összefüggést kaptunk. Ez azonban semmi bizonyítékot nem jelent, mert fizikai törvényeket gyakorlati kísérletekkel bizonyítani nem lehet, csak elméleti úton.
- (v) Az elmondottakból az következik, hogy ellenkező bizonyítékok felbukkanásáig a rugalmas reverzibilis anyagtörvényt másodfokúnak kell tekinteni.

3. A RUGALMAS EGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY LINEÁRIS ALAKJA

Az (i)-(v) elmondottak ellenére a következőkben az általános kvadratikus forma helyett a speciális lineáris formát fogjuk használni, amelynek több oka is van:

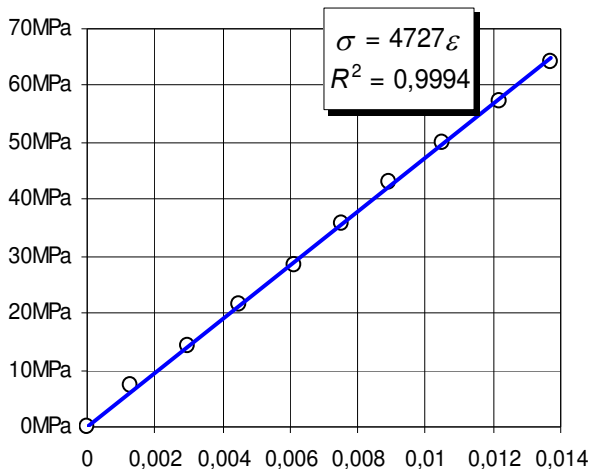
1. Mind a mai napig nem sikerült a φ_0, φ_1 és φ_2 közötti összefüggéseket feltárni, így alkalmazásukkal az izotrópia két anyagállandója helyet hármat használnánk.¹¹

2. Számos laboratóriumi vizsgálatot végig elemeztünk oly módon, hogy lineáris és kvadratikus függvénnyel közelítettük a mérési adatokat, s arra a következtetésre jutottunk, hogy a φ_2 értéke (amely mindig negatív) a deformáció négyzetével szorozva mindig elhanyagolható eredményt szolgáltatott, nem érte el a feszültség 1%-át sem, s a regressziós indexben sincs mértékadó különbség.

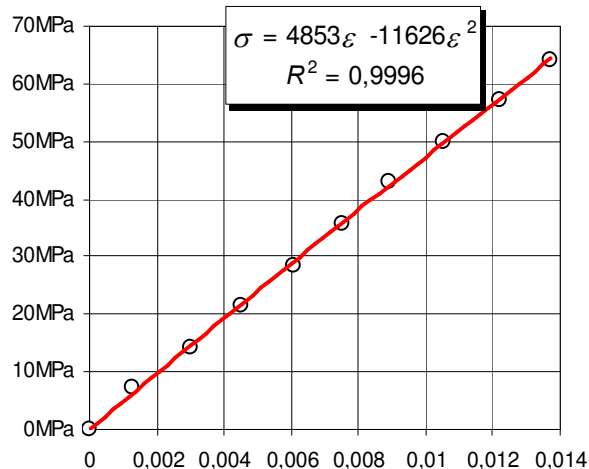
Az 1. ábrán a közölt és alapul vett, sziléziai feketeszénre vonatkozó KLECZEK-féle egytengelyű nyomókísérlet adataival mutatjuk be a két esetet. Azért külön ábrában, mert szemmel szinte meg sem különböztethetők a lineáris és kvadratikus görbék egymástól. A legelső ábra mutatja a két összefüggés közötti különbséget kinagyítva.

3. Az előző két pontban leírtakból következően: *kisebb hiba két anyagállandóval dolgozni, mint olyan hárommal, ami valójában csak kettő, de nem ismerjük a közöttük lévő összefüggést.*

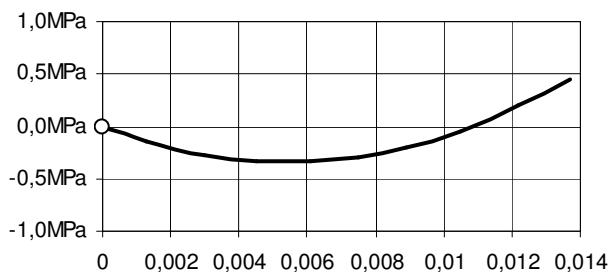
¹¹ Figyelemre méltó eredményeket hoztak [LÁMER G., (2007)] és [TÓTH J., (2007)] tanulmányai, amelyek rámutattak számos belső összefüggésre, azonban a kíváncsatos végeredményt még nem szolgáltatták.



1. a) ábra



1. b) ábra



1. c) ábra

A (6) alatti anyagtörvényt írjuk fel

$$(15) \quad \mathbf{F}^{rev} = -\rho T (\mathbf{I} + \mathbf{D}) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{D}} = -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0) \mathbf{I} \right]$$

formában, ahol a második kifejezés a $\mathbf{D}$ tenzornak a felbontása egy nyomnélkültre (deviátoros részre) és az $\mathbf{I}$ egységgel arányos (gömbi) részre. Ugyanezt téve az $\mathbf{F}$ tenzorral, megkapjuk az anyagtörvény deviátorikus alakját:

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{rev} &= \mathbf{F}^{rev} - \sigma_0^{rev} \mathbf{I} = -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right], \\ \mathbf{T}_0^{rev} &= \sigma_0^{rev} \mathbf{I} = -\rho T \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0) \right] \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Ez a törvény *kis és nagy deformációknál* egyaránt érvényes.

Ha feltételezzük, hogy ezek a (16) összefüggések lineárisak (HOOKE-törvény), akkor (14)-el egyenlővé téve, a

$$\begin{aligned} -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right] &= 2G\mathbf{E}, \\ -\rho T \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0) \right] \mathbf{I} &= 3K\mathbf{E}_0 \quad (3K\varepsilon_0 \mathbf{I}), \end{aligned}$$

egyenletekből a *rugalmas anyagállandók termodinamikai összefüggése* vezethető le:

$$(17) \quad \begin{aligned} 2G &:= -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \right] \mathbf{E}^{-1}, \\ 3K &:= -\rho T \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0) \right]. \end{aligned}$$

EGYTENGELYŰ FESZÜLTSGÁLLAPOT. A (16) összefüggésnek minden esetben fenn kell állnia, ezért érdemes megnézni egytengelyű feszültségállapotban az anyagtörvény alakját, mert közelebb juthatunk az anyagállandók termodinamikai tartalmához, egyszerűbb összefüggést kaphatunk.

Legyen az egytengelyű terhelés σ , a hozzátartozó tengelyirányú deformáció ε , a keresztirányú pedig ε_k . A HOOKE-törvénynél megszokott az m POISSON-szám használata, amely a definíció szerint: $m := -\varepsilon / \varepsilon_k$,¹² s ekkor $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon + 2\varepsilon_k)$, illetve $\varepsilon_0 = \frac{m-2}{3m} \varepsilon$. Ekkor a HOOKE-törvény egyetlen skalár egyenletté egyszerűsödik:

$$(18) \quad \sigma = E\varepsilon, \quad E := 2G \frac{m+1}{m} := 3K \frac{m-2}{m}, \quad m = \frac{2G}{E-2G} = \frac{6K}{3K-E} = \frac{6K+2G}{3K-2G}.$$

Ekkor

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathbf{F} = \|\sigma_{ij}\| &= \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma, \quad \mathbf{D} = \|\varepsilon_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} \end{vmatrix} \varepsilon, \quad \varepsilon_0 = \frac{m-2}{3m} \varepsilon, \\ \mathbf{T} = \mathbf{F} - \sigma_0 \mathbf{I} &= \|\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}\| := \|s_{ij}\| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \\ \mathbf{E} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{I} &= \|\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}\| := \|s_{ij}\| = \frac{m+1}{3m} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \varepsilon, \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} e &= \varepsilon - \varepsilon_0 = \varepsilon - \frac{m-2}{3m} \varepsilon = \frac{3m-m+2}{3m} \varepsilon = 2 \frac{m+1}{3m} \varepsilon, \\ e_k &= \varepsilon_k - \varepsilon_0 = -\frac{\varepsilon}{m} - \frac{m-2}{3m} \varepsilon = -\frac{3+m-2}{3m} \varepsilon = -\frac{m+1}{3m} \varepsilon. \end{aligned}$$

Egytengelyű feszültségállapotra korlátozott entrópiafüggvényt jelöljük $\hat{s}$ -sel, s ekkor

¹² Ne feledjük, hogy ez csak az időfüggetlenség nélküli HOOKE-törvénynél anyagállandó, mert általában a hossz- és keresztirányú deformáció hányadosa időfüggő, s csupán a $t \rightarrow \infty$ esetben konvergál az m értékhez.

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial e} = \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial e} = \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \frac{3m}{2(m+1)}, \quad \frac{\partial \hat{s}}{\partial e_k} = \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_k} = -\frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \frac{3m}{m+1}, \quad \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_o} = \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_o} = \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \frac{3m}{m-2},$$

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{3m}{m+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon}, \quad \mathbf{E} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \varepsilon, \quad \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \hat{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) = \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \varepsilon,$$

összefüggések adódnak, amelyekkel a (16) anyagegyenlet a következő:

$$(20) \quad \sigma = -2\rho T \left(\frac{m+1}{3m} \right)^2 \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \varepsilon,$$

$$\sigma_o = -2\rho T \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o).$$

Ezt egyenlővé téve a HOOKE-törvénnyel a

$$(21) \quad -2\rho T \left(\frac{m+1}{3m} \right)^2 \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \varepsilon = E \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad E := -2\rho T \left(\frac{m+1}{3m} \right)^2 \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon},$$

$$-2\rho T \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) = 3K \varepsilon_o, \quad \Rightarrow \quad 3K := -2\rho T \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_o} \frac{1 + \varepsilon_o}{\varepsilon_o},$$

tehát az anyagállandókra a (17)-nél sokkal egyszerűbb kifejezést kapunk. Igaz, hogy ez nem az s -sel, hanem az $\hat{s}$ -vel van kifejezve, és nincs meg a G csúsztató rugalmassági modulus termodinamikai egyenlete. Ehhez az E , $3K$, és $2G$ (18) alatti összefüggését felhasználva két különböző összefüggés is levezethető:

$$(22) \quad E = -2\rho T \left(\frac{m+1}{3m} \right)^2 \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon},$$

$$3K = -2\rho T \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_o} \frac{1 + \varepsilon_o}{\varepsilon_o},$$

$$2G = E \frac{m}{m+1} = -2\rho T \frac{m+1}{9m} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} = 3K \frac{m-2}{m+1} = -2\rho T \frac{m-2}{m+1} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_o} \frac{1 + \varepsilon_o}{\varepsilon_o}.$$

Az utolsó sor

$$\frac{m+1}{9m} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} = \frac{m-2}{m+1} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_o} \frac{1 + \varepsilon_o}{\varepsilon_o}$$

két összefüggéséből:

$$(23) \quad \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} = \frac{9m(m-2)}{(m+1)^2} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_o} \frac{1 + \varepsilon_o}{\varepsilon_o}, \quad \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_o} = \frac{(m+1)^2}{9m(m-2)} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \frac{\varepsilon_o}{1 + \varepsilon_o}.$$

4. A LINEÁRIS ÉS A MÁSODFOKÚ ALAK ÖSSZEHOSONLÍTÁSA

AZ EGYTENGELYŰ ESET kapcsán térjünk még vissza a kvadrátikus anyagfüggvényhez, amelyet megismerési okokból voltunk kénytelenek kizárni. Ez azt jelenti,

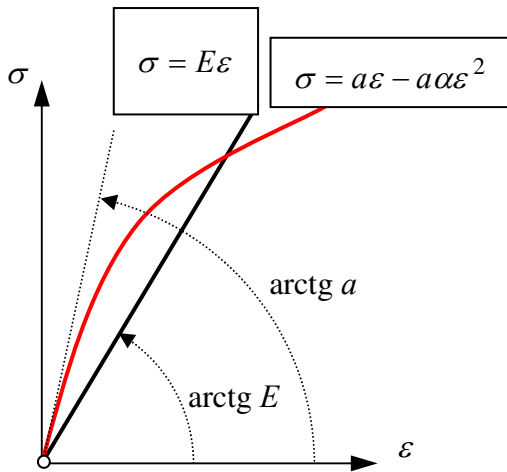
hogy ezideig képtelenek voltunk feltörni azt a zárat, amely mögött megtalálnánk azt az összefüggést, hogy a

$$(23) \quad \sigma = a\varepsilon - a^* \varepsilon^2$$

összefüggésben szereplő együtthatók között milyen összefüggés van. Az tudjuk, hogy a kvadratis tag együtthatója negatív – ugyanis a $\sigma(\varepsilon)$ monoton növekvő alulról konvex –, ezért írtuk fel ilyen formában. A (23) helyett kifejezőbb, ha az a^* -t az a arányában fejezzük ki:

$$\sigma = a\varepsilon + a^* \varepsilon^2 = a \left(1 + \frac{a^*}{a} \varepsilon \right) \varepsilon = a(1 - \alpha\varepsilon) \varepsilon,$$

ahol $\alpha_{\min} = 0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ egy állandó, melyet meghatározni azonban eddig semmiféle fizikai úton nem sikerült.



2. ábra

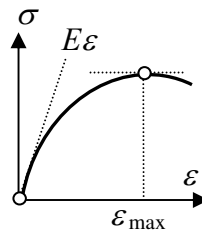
Rajzoljuk fel az 1. ábrának megfelelően, - de jelentősen eltorzítva - a lineáris és a kvadratis összefüggést (2. ábra) abból a célból, hogy a kontinuummechanikával, laboratóriumi vizsgálatokkal foglalkozó kutatók figyelmét ráirányítsuk a problémára.

Az α korlátos: $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$. Az alsó korlátja: $\alpha_{\min} = 0$, s ekkor az anyagtörvény lineáris lesz. A felső korlát $\alpha_{\max}$ értékére azonban nagyon nehéz becslést adni.

Az egyik lehetőség (3. ábra), hogy kimondjuk, hogy az α csak addig növekedhet,

- míg a $\sigma(\varepsilon)$ függvény is növekszik, mivel a maximumon túl már nem teljesül a monoton növekedés feltétele. A szélsőérték:

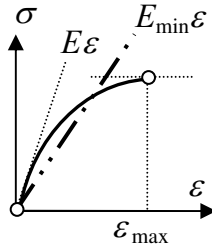
$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a(1 - 2\alpha\varepsilon), \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\max} = \frac{1}{2\alpha}, \quad \alpha_{\max} = \frac{1}{\varepsilon_f},$$



3. ábra

ahol ε_f a folyáshatárhoz tartozó fajlagos nyúlás. Ez az érték azonban sokszorosa a reálisnak.

A másik lehetőség, hogy



- a maximumhoz tartozó görbe kiegyenlítő egyenesének irány-tangense adja a felső korlátot:

$$\sigma = E\varepsilon(1 - \alpha\varepsilon) \geq E_{\min} \varepsilon ,$$

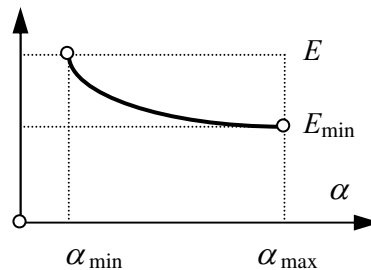
ahonnan

$$\alpha \leq \frac{E - E_{\min}}{E\varepsilon} = \left(1 - \frac{E_{\min}}{E}\right) \frac{1}{\varepsilon} .$$

Vagyis

$$\sigma \equiv \sigma(\varepsilon, \alpha) = \begin{cases} \sigma(\varepsilon, \alpha_{\min}) & = E\varepsilon, \\ \sigma(\varepsilon, \alpha) & = E\varepsilon(1 - \alpha\varepsilon), \\ \sigma(\varepsilon, \alpha_{\max}) & = E_{\min} \varepsilon. \end{cases}$$

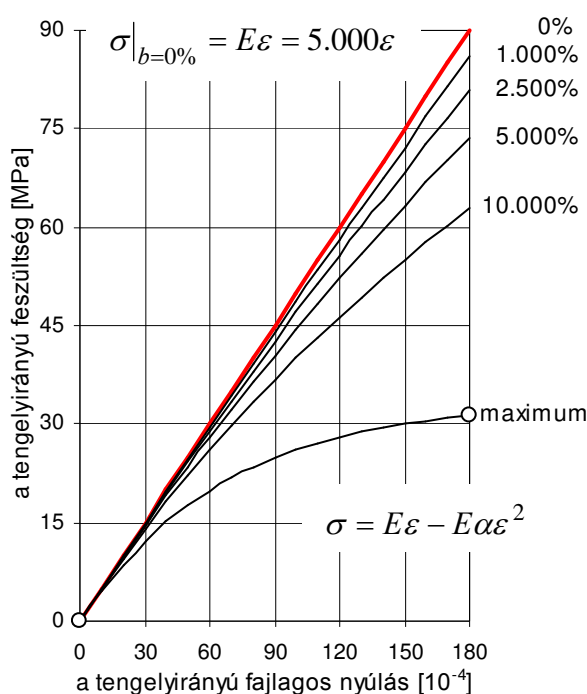
A két szélső esetben egyaránt a lineáris anyagtörvényt kapunk. És a közbelső esetekben? Mi lehet a teendő? A kérdésre a választ nem tudjuk.



5.ábra

Vagy lehet az a megoldás – ami meglehetősen triviálisnak tűnik –, hogy a kvadrátikus anyagtörvény csupán a CAYLEY-HAMILTON-tételből adódó matematikai lehetőség, a fizikai megoldás a linearitás? Ezt azonban LÁMER és TÓTH vizsgálatai nem igazolják.

Mivel a kérdést nem tudjuk eldönteni, végezzünk el egy elvi számítást. Egytengelyű feszültségállapotban az anyagegyenlet lineáris tagját jelöljük, a HOOKE-törvénynél megszokott E -vel, a kvadrátikus tagot pedig adjuk meg az E százalékában: $-E\alpha$ formában.



6. ábra

Az eddig átnézett laboratóriumi méréseinknél maximum $\alpha = 400\%$ -ot (az E értékének négyszeresét) észleltünk.

Ennek ellenére $E = 5.000$ MPa érték mellett, vegyük az α értékét

$$0 \leq \alpha \leq \left(1 - \frac{E_{\min}}{E}\right) \frac{1}{\varepsilon_f}^{13}$$

közöttinek.

Az eredmények a 6. ábrán láthatók.

Mindegyik görbéhez meghatároztuk a lineáris kiegyenlítő függvényt, s az adatokat a táblázat tünteti fel.

α	Az anyagegyenlet	A lineáris közelítés	
		egyenlete	regressziója
0%	$\sigma = 5 \cdot 10^3 \varepsilon$		
1.000%	$\sigma = 5 \cdot 10^3 \varepsilon - 5 \cdot 10^6 \varepsilon^2$	$\sigma = 4.827\varepsilon$	$R^2 = 0,9997$
2.500%	$\sigma = 5 \cdot 10^3 \varepsilon - 12,5 \cdot 10^6 \varepsilon^2$	$\sigma = 4.598\varepsilon$	$R^2 = 0,9982$
5.000%	$\sigma = 5 \cdot 10^3 \varepsilon - 25 \cdot 10^6 \varepsilon^2$	$\sigma = 4.275\varepsilon$	$R^2 = 0,9940$
10.000%	$\sigma = 5 \cdot 10^3 \varepsilon - 5 \cdot 10^7 \varepsilon^2$	$\sigma = 3.757\varepsilon$	$R^2 = 0,9802$
maximum	$\sigma = 5 \cdot 10^3 \varepsilon - 10^8 \varepsilon^2$	$\sigma = 2.178\varepsilon$	$R^2 = 0,7189$

A megoldandó feladatot tehát több oldalról körüljártuk, azonban a kvadratikus anyagtörvényben szereplő három darab anyagfüggvényt nem sikerült lecsökkentenünk kettőre. Helyesebben egytengelyű feszültségállapotnál továbbra is két anyagállandónk van: E és $3K$, valamint egy nem független α paraméter.

Foglaljuk össze az eddigieket kicsit általánosabban. A rugalmas tartományban a reverzibilis (egyensúlyi) anyagtörvény legáltalánosabb formája tetszőleges nagyságú, de véges deformációk esetén:

¹³ Jelen számpéldánknál $\alpha_{\max} \approx 28.000\%$

$$(11) \quad \begin{aligned} (a) \quad \mathbf{T} &= \varphi_2 \left(\varepsilon_o^2 - \frac{1}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right) \mathbf{I} + (\varphi_1 + 2\varphi_2 \varepsilon_o) \mathbf{E} + \varphi_2 \mathbf{E}^2, \\ (b) \quad \sigma_o &= \varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon_o + \varphi_2 \frac{1}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2). \end{aligned}$$

Egytengelyű feszültségállapotnál a feszültségtenzornak egyetlen zérustól különböző skalár komponense van: σ (a tengelyirányú feszültség), a deformációtenzornak pedig 3, amely 2 különböző ε és ε_k (tengely- és keresztirányú fajlagos nyúlás). Az m POISSON-számmal összefoglalóan:

$$(24) \quad \begin{aligned} \sigma_o &= \frac{1}{3} \sigma, \quad \sigma - \sigma_o = \frac{2}{3} \sigma, \quad \varepsilon_o = \frac{m-2}{3m} \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{3m}{m-2} \varepsilon_o, \\ \varepsilon - \varepsilon_o &= \frac{2(m+1)}{3m} \varepsilon = \frac{2(m+1)}{m-2} \varepsilon_o, \quad (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) = \frac{m^2+2}{m^2} \varepsilon^2 = 9 \frac{m^2+2}{(m-2)^2} \varepsilon_o^2. \end{aligned}$$

A (11b) alatti $\sigma_o = \varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon_o + \varphi_2 \frac{1}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)$ térfogatváltozási egyenletből kiindulva, a (24) felhasználásával

$$(25) \quad \sigma_o(\varepsilon_o) = \varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon_o + 3\varphi_2 \frac{m^2+2}{(m-2)^2} \varepsilon_o^2$$

írható.

A (11a) alatti $\mathbf{T} = \varphi_2 \left(\varepsilon_o^2 - \frac{1}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right) \mathbf{I} + (\varphi_1 + 2\varphi_2 \varepsilon_o) \mathbf{E} + \varphi_2 \mathbf{E}^2$ torzulási egyenletből kiindulva

$$(26) \quad \sigma(\varepsilon) = \varphi_1 \frac{m+1}{m} \varepsilon + \varphi_2 \frac{m^2-1}{m^2} \varepsilon^2$$

vezethető le.

Ha a (26) összefüggésbe a (24) megfelelő térfogati paramétereket helyettesítjük, akkor a torzulási egyenlet egy újabb felírását kapjuk:

$$(27) \quad \sigma(\varepsilon) = 3\varphi_0 + \varphi_1 \frac{m-2}{m} \varepsilon + \varphi_2 \frac{m^2+2}{m^2} \varepsilon^2,$$

amelyek természetesen azonosak:

$$\varphi_1 \frac{(m+1)}{m} \varepsilon + \varphi_2 \frac{m^2-1}{m^2} \varepsilon^2 = 3\varphi_0 + \varphi_1 \frac{m-2}{m} \varepsilon + \varphi_2 \frac{m^2+2}{m^2} \varepsilon^2.$$

Ez az egyenlet φ_0 -ra megoldható:

$$(28) \quad \varphi_0 = \varphi_1 \frac{1}{m} \varepsilon - \varphi_2 \frac{1}{m^2} \varepsilon^2.$$

Ez azt jelenti, hogy egy vezetési függvényt kiküszöböltünk, de egy állandó (m) bevezetése árán. Vagyis 2 vezetési függvényünk van, és egy újabb anyagállandónk.

Az anyagtörvény egytengelyű állapot esetén

$$(29) \quad \begin{aligned} \sigma(\varepsilon) &= \varphi_1 \frac{m+1}{m} \varepsilon + \varphi_2 \frac{m^2-1}{m^2} \varepsilon^2 \\ \sigma_o(\varepsilon_o) &= \varphi_1 \frac{m+1}{m-2} \varepsilon_o + 3\varphi_2 \frac{m^2-1}{(m-2)^2} \varepsilon_o^2 \end{aligned}$$

alakú. Ha ezt az összefüggést a lineáris HOOKE-törvénynél megszokott E és $3K$ jelölésekkel (anyagállandókkal) írjuk fel, s felhasználjuk a már bevezetett α (torzulási) arányossági tényezőt, kiegészítve a β (térfogati) arányossági tényezővel, akkor

$$(30) \quad \begin{aligned} (a) \quad \sigma(\varepsilon) &= E\varepsilon - \alpha E\varepsilon^2, \\ (b) \quad \sigma_o(\varepsilon_o) &= 3K\varepsilon_o - \beta 3K\varepsilon_o^2 \end{aligned}$$

összefüggéshez jutunk, ahol a térfogati egyenlethez tartozó arányossági tényező. A (29) és (30) egyenlővé tételéből:

$$\begin{aligned} E &:= \varphi_1 \frac{m+1}{m}, & \alpha E &:= -\varphi_2 \frac{m^2-1}{m^2}, \\ 3K &:= \varphi_1 \frac{m+1}{m-2}, & \beta 3K &:= -\varphi_2 \frac{3(m^2+1)}{(m-2)^2}, \end{aligned}$$

és a két rugalmassági modulusra a megszokott összefüggést kapjuk:

$$E \frac{m}{m-2} = 3K,$$

és

$$\alpha = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \frac{m-1}{m}, \quad \beta = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \frac{3(m^2+1)}{(m-2)(m+1)}.$$

TÉRBELI ÁLLAPOT. Lineáris esetben az anyagtörvény a közismert HOOKE-törvény:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E}, \\ \mathbf{T}_o &= 3K\mathbf{E}_o, \end{aligned}$$

ahol az anyagállandók

$$2G = 3K \frac{m-2}{m+1}, \quad 3K = 2G \frac{m+1}{m-2},$$

amelynél az m POISSON-szám nem független anyagállandó. Ez az m az egytengelyű feszültségállapot révén került bevezetésre, az $m = -\varepsilon/\varepsilon_k$ arány révén. Ezáltal az E rugalmassági modulus is definiálásra került:

$$E := 2G \frac{m+1}{m} := 3K \frac{m-2}{m},$$

hogy az anyagtörvény egytengelyű feszültségállapotban a $\sigma = E\varepsilon$ egyszerű alakban legyen előállítható.

A kvadratikus esetnek tartalmaznia kell a lineáris esetet is (amikor a másodfokú tag együtthatója zérus), ezért nyugodtan felírhatjuk

$$(31) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} - 2G^* \mathbf{E}^2, \\ \mathbf{T}_0 &= 3K\mathbf{E}_0 - 3K^* \mathbf{E}_0^2, \end{aligned}$$

formában (ahol a $2G^*$ és $3K^*$ még ismeretlen állandók, amelyek a $2G$ -től és $3K$ -tól függenek), illetve

$$(31a) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G \left(\mathbf{E} - \frac{2G^*}{2G} \mathbf{E}^2 \right), \\ \mathbf{T}_0 &= 3K \left(\mathbf{E}_0 - \frac{3K^*}{3K} \mathbf{E}_0^2 \right). \end{aligned}$$

Használjuk fel itt is az egytengelyű állapot összefüggéseit:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \quad \sigma - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon - \varepsilon_0) - 2G^*(\varepsilon - \varepsilon_0)^2, \quad \Rightarrow \quad \sigma(\varepsilon) = \underbrace{2G \frac{m+1}{m}}_E \varepsilon - \underbrace{2G^* \frac{2(m+1)^2}{3m^2}}_{E^*} \varepsilon^2, \\ \mathbf{T}_0 : \quad \sigma_0 &= 3K\varepsilon_0 - 3K^*\varepsilon_0^2, \quad \Rightarrow \quad \sigma_0(\varepsilon_0) = 3K\varepsilon_0 - 3K^*\varepsilon_0^2, \end{aligned}$$

ahol definiáljuk a két arányossági tényezőt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{E^*}{E} = \frac{2G^*}{2G} \frac{2(m+1)^2 m}{3m^2(m+1)} = \frac{2G^*}{2G} \frac{2(m+1)}{3m}, \\ \beta &= \frac{3K^*}{3K} = \frac{2G^*}{2G} \frac{2(m+1)}{m-2}, \end{aligned}$$

ahonnan:

$$\frac{2G^*}{2G} = \alpha \frac{3m}{2(m+1)}, \quad \frac{3K^*}{3K} = \beta = \alpha \frac{3m}{m-2}.$$

Ezáltal az anyagtörvény:

$$(31b) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G \left(\mathbf{E} - \alpha \frac{3m}{2(m+1)} \mathbf{E}^2 \right), \\ \mathbf{T}_0 &= 3K \left(\mathbf{E}_0 - \alpha \frac{3m}{m-2} \mathbf{E}_0^2 \right). \end{aligned}$$

Az α és a β lehetséges értékéről már megállapítottuk, hogy általában 0 ... 4-5 között változhat, m pedig 2 ... ∞ között:

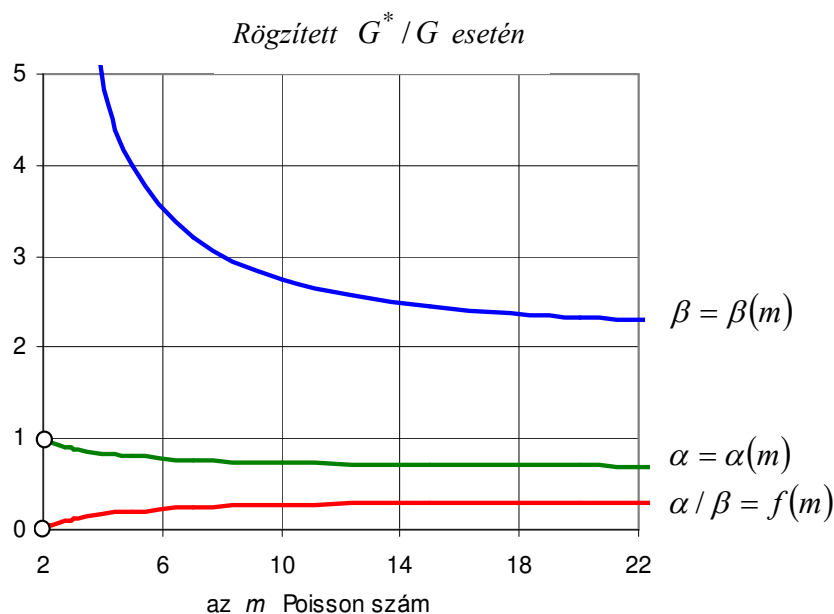
$$\mathbf{T} = 2G \left(\mathbf{E} - \alpha \frac{3m}{2(m+1)} \mathbf{E}^2 \right) = \begin{cases} \mathbf{T}|_{m=2} & = 2G(\mathbf{E} - \alpha \mathbf{E}^2), \\ \mathbf{T}|_{m>2} & = 2G \left(\mathbf{E} - \alpha \frac{3m}{2(m+1)} \mathbf{E}^2 \right), \\ \mathbf{T}|_{m \rightarrow \infty} & = 2G \left(\mathbf{E} - \frac{3}{2} \alpha \mathbf{E}^2 \right), \end{cases}$$

$$\mathbf{T}_0 = 2G \left(\mathbf{E}_0 - \alpha \frac{3m}{m-2} \mathbf{E}_0^2 \right) = \begin{cases} \mathbf{T}_0|_{m=2} & = \mathbf{0}, \\ \mathbf{T}_0|_{m>2} & = 2G \left(\mathbf{E}_0 - \alpha \frac{3m}{m-2} \mathbf{E}_0^2 \right), \\ \mathbf{T}_0|_{m \rightarrow \infty} & = 2G(\mathbf{E}_0 - 3\alpha \mathbf{E}_0^2) \end{cases}$$

A 7. ábra azt mutatja, hogy az α értéke, amely a torzulási állapothoz tartozik, a $\frac{2}{3} \leq \alpha \leq 1$ intervallumon belül változhat, ami nagyon kicsiny értéknek számít.

A térfogatváltozáshoz tartozó β értékváltozása már jelentős: $2 \leq \beta < \infty$, azonban tudjuk, hogy az $m = 2$ közeli érték az anyag összenyomhatatlanságát, térfogat-állandóságát fejezi ki.

Viszont az α / β viszony – mivel $1/\infty$ értéknél kezdődik – szinte elhanyagolható: $0 \leq \alpha / \beta \leq \frac{1}{3}$.



7. ábra

Ezért szinte meggyőződésünk, hogy a lineáris anyagegyenlet alkalmazásánál jobb megoldást pillanatnyilag nem tudunk.

Ne felejtjük el azonban, hogy nem két anyagállandónak kell lennie, hanem két vezetési függvénynek. Vagyis a φ_0, φ_1 és φ_2 közül csak kettő független függvény, s minden függvényben lehet több állandó is. Tehát LÁMER GÉZA előadásában kifejtett három, például [LÁMER, G (2007)].

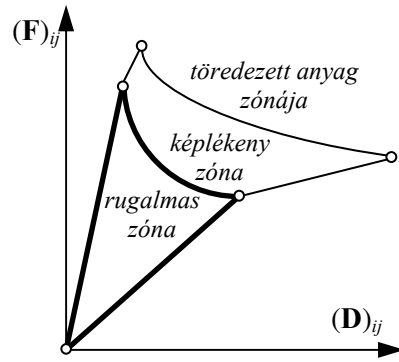
4. FEJEZET

NEMEGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY A RUGALMAS DEFORMÁCIÓK TARTOMÁNYÁBAN

NEMEGYENSÚLYI HELYZETBEN, mivel a termodinamikai erők és a termodinamikai áramok nem zérusértékűek, ezért a következő egyenlőtlenséget kell alapul venni:

$$(1) \quad \left[\mathbf{F} + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}} \right) \right] : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}) - \rho T \dot{\xi} : \dot{\xi} \geq 0,$$

természetesen figyelembe véve, hogy mechanikai egyensúlyban



$$\mathbf{F}^{rev} = -\rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}} \right) = -\rho T (\mathbf{I} + \mathbf{D}) \frac{\partial s}{\partial \mathbf{D}} = -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0) \mathbf{I} \right]$$

illetőleg lineáris közelítéssel:

$$\mathbf{F}^{rev} = 2G \left[\mathbf{D} + \frac{1}{3} \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \text{Tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right] = 2G \mathbf{E} + (3K - 2G) \mathbf{E}_0,$$

s így az (1) egyenlőtlenség az $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{rev} + \mathbf{F}^{irrev}$ jelölésekkel az

$$(2) \quad \mathbf{F}^{irrev} : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})^S - \rho T \dot{\xi} : \dot{\xi} \geq 0$$

alakot ölti.

Az alapegyenlet megoldását a második fejezetben már megadtuk általánosan, de a konkrét alak és forma kifejtéshez levezetjük még egyszer, deviátoros bontásban.

A (2) egyenlőtlenség megoldása mint már láttuk, a LAGRANGE-féle középértéktétel felhasználásával történhet. Bevezetve a $\mathbf{J} := \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}$ jelölést, a (2) összefüggés (feltétel) az

$$(2a) \quad \mathbf{F}^{irrev} : \mathbf{J} - \rho T \dot{\xi} : \dot{\xi} \geq 0$$

alakban írható fel, amelynek megoldása az

$$(3) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{irrev} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ -\rho T \xi \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldásával történhet, ahol $\mathbf{L}$ egy negyedrendű – szimmetrikus és pozitív definit – impulzusvezetési tenzor mátrixa.

Az anyagtörvényt legtöbbször az ún. térfogatváltozási és torzulási alakban alkalmazzuk, ezért a (2a)-t írjuk fel deviátoros és gömbi részre bontva:

$$(2b) \quad \mathbf{F}^{irrev} : \mathbf{J} - \dot{\xi} : \rho T \xi \geq 0,$$

$$(2c) \quad (\mathbf{T}^{irrev} + \mathbf{T}_o^{irrev}) : (\mathbf{J} + \mathbf{J}_o) - (\dot{\xi}_d + \dot{\xi}_o) : \rho T (\xi_d + \xi_o) \geq 0,$$

ahol a megszokott módon

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_o^{irrev} &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{F}^{irrev}) \mathbf{I} = \sigma_o^{irrev} \mathbf{I}, & \mathbf{J}_o &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{J}) \mathbf{I} = J_o \mathbf{I}, & \xi_o &= \frac{1}{3} \text{tr}(\xi) \mathbf{I} = \xi_o \mathbf{I}, \\ \mathbf{T}^{irrev} &= \mathbf{F}^{irrev} - \mathbf{T}_o^{irrev} & \mathbf{J}_d &= \mathbf{J} - \mathbf{J}_o, & \xi_d &= \xi - \xi_o. \end{aligned}$$

A (2b) egyenlőtlenségnek nemcsak összegében, hanem külön-külön is kell teljesülnie a különböző tenzori rangú áramokra és erőkre, tehát

$$(4) \quad \underbrace{\mathbf{T}^{irrev} : \mathbf{J}_d - \rho T \dot{\xi}_d : \xi_d}_{\geq 0} + \underbrace{\sigma_o^{irrev} \varepsilon_o - \rho T \dot{\xi}_o : \xi_o}_{\geq 0} \geq 0.$$

Az erők és áramok deviatorikus felbontáshoz, a negyedrendű $\mathbf{L}$ impulzusvezetési tenzort is, amelynek izotróp esetben csak 2 független skalár komponense van, fel kell bontani deviatorikus $[\mathbf{L}_d]$ és gömbi $[\mathbf{L}_o]$ részre:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{irrev} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{irrev} \\ \dot{\xi}_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{T}_o^{irrev} \\ \dot{\xi}_o \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ -\rho T \xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_d \\ -\rho T \xi_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{J}_o \\ -\rho T \xi_o \end{pmatrix}, & \mathbf{L} &= \mathbf{L}_d + \mathbf{L}_o, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{irrev} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{irrev} \\ \dot{\xi}_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{T}_o^{irrev} \\ \dot{\xi}_o \end{pmatrix} &= \mathbf{L} \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ -\rho T \xi \end{pmatrix} &= (\mathbf{L}_d + \mathbf{L}_o) \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{J}_d \\ -\rho T \xi_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{J}_o \\ -\rho T \xi_o \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Ezek továbbra is negyedrendű tenzorok maradnának, de mivel csak két független skalár komponensük van, áttanszformálhatóak olyan másodrendű tenzorokká, amelyeket ha más tenzorokkal szorzunk, a vegyes részek zérus tenzort eredményeznek:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}^{irrev} \\ \dot{\xi}_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{T}_o^{irrev} \\ \dot{\xi}_o \end{pmatrix} = \mathbf{L}_d \begin{pmatrix} \mathbf{J}_d \\ -\rho T \xi_d \end{pmatrix} + \mathbf{L}_o \begin{pmatrix} \mathbf{J}_o \\ -\rho T \xi_o \end{pmatrix},$$

s a gömbtenzorok helyett áttérve a komponensük skalár értékére, az

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{irrev} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_d \begin{pmatrix} \mathbf{J}_d \\ -\rho T \xi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_o^{irrev} \\ \xi_o^{irrev} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_o \begin{pmatrix} J_o \\ -\rho T \xi_o \end{pmatrix},$$

két független egyenletrendszert kapunk. Az $\mathbf{L}_d$ és $\mathbf{L}_o$ hipermátrixoknál áttérhetünk a skaláris komponensekre:

$$(6a) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{irrev} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_d \begin{pmatrix} \mathbf{J}_d \\ -\rho T \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L'_{12} \\ L_{12} & L'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_d \\ -\rho T \xi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_d \\ \xi \end{pmatrix},$$

$$(6b) \quad \begin{pmatrix} \sigma_o^{irrev} \\ \xi_o \end{pmatrix} = \mathbf{L}_o \begin{pmatrix} J_o \\ -\rho T \xi_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l'_{12} \\ l_{12} & l'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_o \\ -\rho T \xi_o \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_o \\ \xi_o \end{pmatrix}.$$

Ezeknek az egyenleteknek a megoldása a megszokott módon történhet, hogy a ξ_d és ξ_o változókat kiküszöböljük az egyenletekből:

TORZULÁSI EGYENLET	TÉRFOGATVÁLTOZÁSI EGYENLET
$\mathbf{T}^{irrev} = L_{11}\mathbf{J}_d + L_{12}\xi_d,$ $\dot{\xi} = L_{12}\mathbf{J}_d + L_{22}\xi_d,$	$\sigma_o^{irrev} = l_{11}J_o + l_{12}\xi_o,$ $\dot{\xi} = l_{12}J_o + l_{22}\xi_o,$
$\xi = L_{12}^{-1}\mathbf{T}^{irrev} - L_{12}^{-1}L_{11}\mathbf{J}_d,$ $\dot{\xi} = L_{12}\mathbf{J}_d + L_{22}\xi =$ $= L_{12}\mathbf{J}_d - L_{22}L_{12}^{-1}L_{11}\mathbf{J}_d + L_{22}L_{12}^{-1}\mathbf{T}^{irrev},$ $\dot{\mathbf{T}}^{irrev} = L_{11}\dot{\mathbf{J}}_d + L_{12}\dot{\xi} =$ $= L_{11}\dot{\mathbf{J}}_d + (L_{12}^2 - L_{22}L_{11})\mathbf{J}_d + L_{22}\mathbf{T}^{irrev},$	$\xi_o = l_{12}^{-1}\sigma_o^{irrev} - l_{12}^{-1}l_{11}J_o,$ $\dot{\xi}_o = l_{12}J_o + l_{22}\xi_o =$ $= l_{12}J_o - l_{22}l_{12}^{-1}l_{11}J_o + l_{22}l_{12}^{-1}\sigma_o^{irrev},$ $\dot{\sigma}_o^{irrev} = l_{11}\dot{J}_o + l_{12}\dot{\xi}_o =$ $= l_{11}\dot{J}_o + (l_{12}^2 - l_{22}l_{11})J_o + l_{22}\sigma_o^{irrev},$
$\mathbf{T}^{irrev} - L_{22}^{-1}\dot{\mathbf{T}}^{irrev} =$ $= L_{11}L_{22}^{-1}\dot{\mathbf{J}}_d + (L_{12}^2L_{22}^{-1} - L_{11})\mathbf{J}_d,$	$\sigma_o^{irrev} - l_{22}^{-1}\dot{\sigma}_o^{irrev} =$ $= l_{11}l_{22}^{-1}\dot{J}_o + (l_{12}^2l_{22}^{-1} - l_{11})J_o,$
$\mathbf{T}^{irrev} = \mathbf{T} - \mathbf{T}^{rev} = \mathbf{T} - 2G\mathbf{E}, \quad \dot{\mathbf{T}}^{irrev} = \dot{\mathbf{T}} - 2G\dot{\mathbf{E}},$	$\sigma_o^{irrev} = \sigma_o - 3K\varepsilon_o, \quad \dot{\sigma}_o^{irrev} = \dot{\sigma}_o - 3K\dot{\varepsilon}_o,$
$\mathbf{T} - 2G\mathbf{E} - L_{22}^{-1}(\dot{\mathbf{T}} - 2G\dot{\mathbf{E}}) =$ $= L_{11}L_{22}^{-1}\dot{\mathbf{J}}_d + (L_{12}^2L_{22}^{-1} - L_{11})\mathbf{J}_d,$	$\sigma_o - 3K\varepsilon_o - l_{22}^{-1}(\dot{\sigma}_o - 3K\dot{\varepsilon}_o) =$ $= l_{11}l_{22}^{-1}\dot{J}_o + (l_{12}^2l_{22}^{-1} - l_{11})J_o,$
Vezessük be a	
$\tau := -L_{22}^{-1}, \quad \beta_d := L_{12}^2L_{22}^{-1} - L_{11},$ $\alpha_d := L_{11}L_{22}^{-1} = -L_{11}\tau, \quad \gamma_d := -2GL_{22}^{-1}$	$\tau_o := -l_{22}^{-1}, \quad \beta_o := l_{12}^2l_{22}^{-1} - l_{11},$ $\alpha_o := l_{11}l_{22}^{-1} = -l_{11}\tau_o, \quad \gamma_o := -3Kl_{22}^{-1}$
jelöléseket, s akkor	
$\mathbf{T} + \tau\dot{\mathbf{T}} = \alpha_d\dot{\mathbf{J}}_d + \beta_d\mathbf{J}_d + \gamma_d\dot{\mathbf{E}} + 2G\mathbf{E}.$	$\sigma_o + \tau_o\dot{\sigma}_o = \alpha_o\dot{J}_o + \beta_oJ_o + \gamma_o\dot{\varepsilon}_o + 3K\varepsilon_o.$

A rugalmas tartományban az *anyagtörvény* a tehát

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= \alpha_d \dot{\mathbf{J}}_d + \beta_d \mathbf{J}_d + \gamma_d \dot{\mathbf{E}} + 2G\mathbf{E}, \\ \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o &= \alpha_o \dot{\mathbf{J}}_o + \beta_o \mathbf{J}_o + \gamma_o \dot{\mathbf{E}}_o + 3K\mathbf{E}_o, \end{aligned}$$

illetve a $\mathbf{T} = \mathbf{F} - \mathbf{T}_o$, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_d - \mathbf{J}_o$, $\mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{E}_o$ behelyettesítéssel

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathbf{F} + \tau \dot{\mathbf{F}} &= \alpha_d \dot{\mathbf{J}} + (\alpha_o - \alpha_d) \dot{\mathbf{J}}_o + \beta_d \mathbf{J} + (\beta_o - \beta_d) \mathbf{J}_o + \\ &= \gamma_d \dot{\mathbf{D}} + (\gamma_o - \gamma_d) \dot{\mathbf{E}}_o + 2G\mathbf{D} + (3K - 2G)\mathbf{E}_o - (\tau_o - \tau) \dot{\mathbf{T}}_o \end{aligned}$$

alakú.

A 2. fejezetben láttuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &:= \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}, \\ \dot{\mathbf{J}} &= \overbrace{(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1})}^{\bullet} = \ddot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} + \dot{\mathbf{A}}\overbrace{(\mathbf{A}^{-1})}^{\bullet} = \ddot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} - \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} = \ddot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} - (\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1})^2 = \\ &= \ddot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1} - [\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}]^2. \end{aligned}$$

Vezessük be a $\mathbf{J} =: \ddot{\mathbf{D}}$ jelölést – utalva ezáltal arra, hogy ez a $\ddot{\mathbf{D}}$ deformációtenzor a megszokott $\mathbf{D}$ -től eltérő deformációtenzor –, s ekkor

$$(8a) \quad \begin{aligned} \mathbf{F} + \tau \dot{\mathbf{F}} &= \alpha_d \ddot{\mathbf{D}} + (\alpha_o - \alpha_d) \ddot{\mathbf{E}}_o + \beta_d \ddot{\mathbf{D}} + (\beta_o - \beta_d) \ddot{\mathbf{E}}_o + \\ &= \gamma_d \dot{\mathbf{D}} + (\gamma_o - \gamma_d) \dot{\mathbf{E}}_o + 2G\mathbf{D} + (3K - 2G)\mathbf{E}_o - (\tau_o - \tau) \dot{\mathbf{T}}_o, \end{aligned}$$

$$(7a) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= \alpha_d \ddot{\mathbf{E}} + \beta_d \ddot{\mathbf{E}} + \gamma_d \dot{\mathbf{E}} + 2G\mathbf{E}, \\ \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o &= \alpha_o \ddot{\mathbf{E}}_o + \beta_o \ddot{\mathbf{E}}_o + \gamma_o \dot{\mathbf{E}}_o + 3K\mathbf{E}_o, \end{aligned}$$

s ez azt tükrözi, hogy a nemegyensúlyi állapot leírásához kétféle deformációtenzor szükséges (melyek között a $\ddot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}$ összefüggés áll fenn).

A (7a) és (8a) formulával először sikerült az izotróp kontinuumok általános anyagtörvényét – a rugalmas tartományon belül – felírni, amelyben csupán annyi tekinthető közelítésnek, hogy az egyensúlyi részben nem a kvadrátikus, hanem a lineáris összefüggést vettük. Ennek legfontosabb indokai: az egyszerű gyakorlati alkalmazhatóság, és az a körülmény, hogy a kvadrátikus összefüggés alkalmazásában nem tudtunk dűlőre jutni (ld. 3. fejezet). Azonban a semmi akadályja nincs annak, hogy a legáltalánosabbat is felírjuk. Ekkor a levezetésben használt (HOOKE-törvény)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{rev} &= 2G\mathbf{E}, \\ \mathbf{T}_o^{rev} &= 3K\mathbf{E}_o \end{aligned}$$

helyett a 3. fejezetben (11) alatt levezetett

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{rev} &= \varphi_2 \left(\varepsilon_o^2 - \frac{1}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right) \mathbf{I} + (\varphi_1 + 2\varphi_2 \varepsilon_o) \mathbf{E} + \varphi_2 \mathbf{E}^2 =: A_1 \mathbf{E} + A_2 \mathbf{E}^2, \\ \mathbf{T}_o^{rev} &= \varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon_o + \varphi_2 \frac{1}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) =: a_1 \mathbf{E}_o + a_2 \mathbf{E}_o^2\end{aligned}$$

kvadratikussá összefüggést kell szerepeltetni (amelynek az a szépséghibája, hogy az anyagállandók száma ebben is csak kettő). A két reverzibilis egyenlet által szolgáltatott feszültségértékek tetszőleges deformációértékek mellett sem haladja meg általában a 0,5...1%-ot.

A levezetést csak a torzulási egyenletre felírva, mivel a térfogatváltozási egyenlet azonos formájú, csak az együtthatók mások (L_{ij} helyett l_{ij} , és A_i helyett a_i):

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{irrev} - L_{22}^{-1} \dot{\mathbf{T}}^{irrev} &= L_{11} L_{22}^{-1} \dot{\mathbf{J}}_d + (L_{12}^2 L_{22}^{-1} - L_{11}) \mathbf{J}_d, \\ \mathbf{T} - a_1 \mathbf{E} - a_2 \mathbf{E}^2 - L_{22}^{-1} (\dot{\mathbf{T}} - a_1 \dot{\mathbf{E}} - a_2 \dot{\mathbf{E}}^2) &= L_{11} L_{22}^{-1} \dot{\mathbf{J}}_d + (L_{12}^2 L_{22}^{-1} - L_{11}) \mathbf{J}_d, \\ \mathbf{T} - L_{22}^{-1} \dot{\mathbf{T}} &= L_{11} L_{22}^{-1} \dot{\mathbf{J}}_d + (L_{12}^2 L_{22}^{-1} - L_{11}) \mathbf{J}_d + A_1 \mathbf{E} + A_2 \mathbf{E}^2 - L_{22}^{-1} A_1 \dot{\mathbf{E}} - L_{22}^{-1} A_2 \dot{\mathbf{E}}^2,\end{aligned}$$

s ezáltal

$$(9) \quad \begin{aligned}\mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= \alpha_d \ddot{\mathbf{E}} + \beta_d \dot{\mathbf{E}} + \gamma_d \mathbf{E} + \delta_d \mathbf{E}^2 + A_1 \mathbf{E} + A_2 \mathbf{E}^2, \\ \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o &= \alpha_o \ddot{\mathbf{E}}_o + \beta_o \dot{\mathbf{E}}_o + \gamma_o \mathbf{E}_o + \delta_o \mathbf{E}_o^2 + a_1 \mathbf{E}_o + a_2 \mathbf{E}_o^2,\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}\tau &:= -L_{22}^{-1}, & \tau_o &:= -l_{22}^{-1}, \\ \alpha_d &:= L_{11} L_{22}^{-1} = -L_{11} \tau, & \alpha_o &:= l_{11} l_{22}^{-1} = -l_{11} \tau_o, \\ \beta_d &:= L_{11} L_{22}^{-1} - L_{11} = -L_{11} (1 + \tau), & \beta_o &:= l_{11} l_{22}^{-1} - l_{11} = -l_{11} (1 + \tau_o), \\ \gamma_d &:= -A_1 L_{22}^{-1} = A_1 \tau, & \gamma_o &:= -a_1 l_{22}^{-1} = a_1 \tau_o, \\ \delta_d &:= -A_2 L_{22}^{-1} = A_2 \tau, & \delta_o &:= -a_2 l_{22}^{-1} = a_2 \tau_o.\end{aligned}$$

A (9) általános alakot csak a teljesség kedvéért írtuk fel, ugyanis bonyolultsága okán, valamint a benne lévő 12 darab együttható miatt (amelyből csak 8 független egymástól – s ezt a függést nem ismerjük,) gyakorlati alkalmazásra nem is ajánlhatjuk. Arról nem is beszélve, hogy egy jó érzésű kutató, vagy tervezőmérnök elborzad ennek a bonyolult anyagegyenletnek a láttán.

AZ ÁLTALÁNOSSÁG SZŰKÍTÉSE. A 2. fejezetben már utaltunk rá, hogy az idő szerinti második derivált hatásától a gyakorlatban általában el szoktunk tekinteni, ugyanis ennek a szerkezetépítési mérnöki gyakorlatban nincs jelentősége, mert a gyors lecsengés (csillapodás) miatt a hatása a mérnöki beavatkozás után gyorsan elenyészik. Az $\alpha_d \approx 0$, $\alpha_o \approx 0$ esetén a (7a) anyagegyenlet a

$$(10) \quad \begin{aligned}\mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= \beta_d \dot{\mathbf{E}} + \gamma_d \mathbf{E} + 2G\mathbf{E}, \\ \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o &= \beta_o \dot{\mathbf{E}}_o + \gamma_o \mathbf{E}_o + 3K\mathbf{E}_o.\end{aligned}$$

formájúra egyszerűsödik.

Különösebb gondot a mai számítástechnikai világban nem jelent az, hogy kétféle deformációval kell dolgoznunk, bár a mérnököknek meglehetősen szokatlan, mert egész gondolkodásmódjukat – amelyet a mechanikáról kialakítottak (vagy készen kaptak) – kissé felborítja. A $\mathbf{D}$ és a $\tilde{\mathbf{D}}$ tenzor között a megszokott mérnöki gyakorlat szempontjából nem is nagy a különbség.

ANYAGTÖRVÉNY KIS DEFORMÁCIÓK ESETÉN. A (10) formulában kétféle deformáció is szerepel [$\mathbf{D}$, $\tilde{\mathbf{D}}$, illetve $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_0$, $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{E}}_0$]. Amennyiben a kis deformációk tartományára korlátozzuk vizsgálatainkat: akkor $\tilde{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1} \approx \dot{\mathbf{D}}$, és így az anyagtörvény a reológiában megszokott alakot ölti:

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{T}_0 + \tau_0 \dot{\mathbf{T}}_0 &= 3K\mathbf{E}_0 + 3K_v \dot{\mathbf{E}}_0, \end{aligned}$$

ahol

$$\tau := -L_{22}^{-1}, \quad \tau_0 := -l_{22}^{-1}, \quad 2\eta := \beta_d + \gamma_d = 2L_{11}L_{22}^{-1} - L_{11}, \quad 3K_v := 2l_{11}l_{22}^{-1} - l_{11}.$$

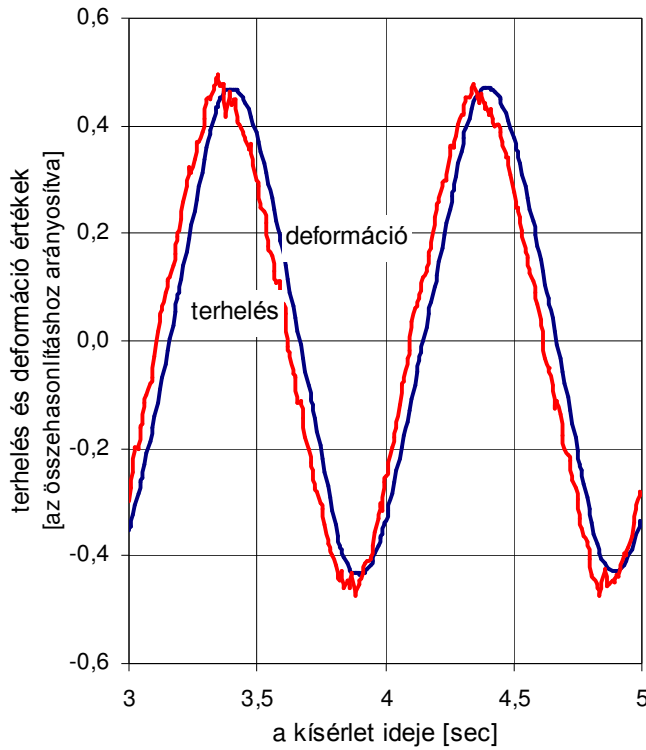
Ez az általános POYNTING-THOMSON-modell, amelynek anyagállandói a reológiában megszokott jellemzők:

τ - a relaxációs idő, τ - a térfogatváltozási relaxációs idő,
 G - a csúsztató rugalmassági modulus, K - térfogatváltozási rugalmassági modulus,
 η - viszkozitási együttható, K_v - térfogatváltozási viszkozitási modulus.

Ez az anyagtörvény 3 torzulási és 3 térfogati (mindösszesen hat) anyagállandót tartalmaz, amely logikusan megfelel annak, hogy az időfüggetlen rugalmas állapothoz egy-egy tartozik, az elsőrendű időderiváltakat tartalmazó részhez pedig kettő-kettő, egy kúszási és egy relaxálási jellemző. Izotróp anyag esetén *rugalmas, egyensúlyi, vagy reverzibilis* esetben *kettő* független anyagállandó létezik. *Nem egyensúlyi, irreverzibilis* esetben pedig kétszer *kettő*, azért mert csak az elsőrendű időbeli deriváltakkal dolgozunk. Ez utóbbiakat szoktuk *reológiai* állandóknak nevezni.

A deformációk (átlagos) késési idejének [t_{def}], valamint a relaxációs időnek [t_{rel}] a különbsége megadja a testre gyakorolt mechanikai hatásra adott válasz *időbeli késését* [Δt]:

$$\begin{aligned} \text{torzulásnál:} \quad t_{def}' &= \frac{\eta}{G}, \quad t_{rel}' = \tau, \quad \Delta t' = t_{def}' - t_{rel}' = \frac{\eta}{G} - \tau, \\ \text{térfogatváltozásnál:} \quad t_{def}^0 &= \frac{K_v}{K}, \quad t_{rel}^0 = \tau_0, \quad \Delta t^0 = t_{def}^0 - t_{rel}^0 = \frac{K_v}{K} - \tau_0. \end{aligned}$$



1. ábra

Az 1. ábra a Debreceni Egyetem Műszaki Főiskolai Karának Biomechanikai Anyagvizsgáló Laboratóriumában – HORVÁTH RÓBERT által – végzett kísérletek közül egyet mutat be.

A 150 mm-es befogási hosszúságú lemez próbatestet (anyaga: műanyag – HDPE) 10 %-os megnyúlásig (432 N), előfeszítették majd 1 Hz frekvenciájú, 0,5 amplitúdójú oszcilláló terhelést adtak rá. Az 1. ábra az időbeli eltolást érzékelteti a mért terhelés és a próbatest középső 10 mm-ének deformációja között.

Egyensúlyi állapotban nincs időbeli eltérés, vagyis

$$\Delta t' = t'_{def} - t'_{rel} = \frac{\eta}{G} - \tau = 0, \quad \Delta t^0 = t^0_{def} - t^0_{rel} = \frac{K_v}{K} - \tau_0 = 0,$$

tehát megkapjuk a HOOKE-törvényt [$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E}$, $\mathbf{T}_0 = 3K\mathbf{E}_0$, $(\sigma_0 = 3K\varepsilon_0)$].

Ha létezne olyan anyag, amelynél a térfogati idődifferencia zérus:

$$\Delta t^0 = t^0_{def} - t^0_{rel} = \frac{K_v}{K} - \tau_0 = 0,$$

azonban a torzulási nem:

$$\Delta t' = t'_{def} - t'_{rel} = \frac{\eta}{G} - \tau \neq 0,$$

akkor annak anyagtörvénye a klasszikus POYNTING-THOMSON-modell lenne: [$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\ddot{\mathbf{T}}$, $\mathbf{T}_0 = 3K\mathbf{E}_0$, $(\sigma_0 = 3K\varepsilon_0)$].

AZ ANYAGVISELKEDÉS ÁBRÁZOLÁSA. Az anyagegyenlet síkbeli ábrázolásához a tenzorok helyett azok egy skalár komponensét szerepeltetjük:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{F} - \mathbf{T}_0 = \mathbf{F} - \sigma_0 \mathbf{I} = \|\sigma_{ij}\| - \sigma_0 \mathbf{I} = \|s_{ij}\|, \quad s_{ij} = (\mathbf{T})_{ij}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{I} = \|\varepsilon_{ij}\| - \varepsilon_0 \mathbf{I} = \|e_{ij}\|, \quad e_{ij} = (\mathbf{E})_{ij}, \end{aligned}$$

s így a következő skaláris egyenleteket ábrázoljuk:

$$(12) \quad \begin{aligned} s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij} &= 2G e_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij}, \\ \sigma_o + \tau \dot{\sigma}_o &= 3K \varepsilon_o + 3K_v \dot{\varepsilon}_o. \end{aligned}$$

Azonban még ebben az esetben is 4 skalár változónk van, s a síkbeli ábrázoláshoz legfeljebb hármat engedhetünk meg. Ezért speciális eseteket választunk, mint

- állandó feszültségváltozási sebesség: $[\dot{s}_{ij} = \frac{d}{dt} s_{ij} = \text{const} = a] [\dot{\sigma}_o = \frac{d}{dt} \sigma_o = \text{const} = a_o]$

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \left[s_{ij} - a_{ij} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta} \frac{s_{ij}}{a_{ij}}} \right) \right]$$

- állandó deformációsebesség: $[\dot{e}_{ij} = \frac{d}{dt} e_{ij} = \text{const} = b] [\dot{\varepsilon}_o = \frac{d}{dt} \varepsilon_o = \text{const} = b_o]$

$$s_{ij} = 2G \left[e_{ij} + b_{ij} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} \frac{e_{ij}}{b_{ij}}} \right) \right]$$

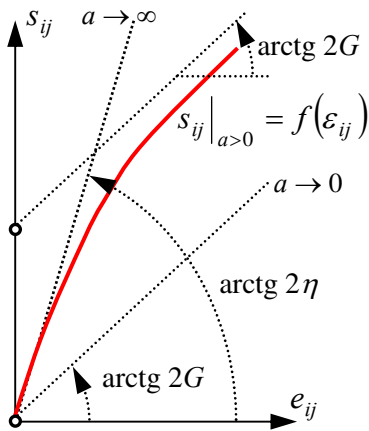
- állandó feszültség (kúszás): $[s_{ij} = \text{const} = c] \quad [\sigma_o = \text{const} = c_o]$

$$e_{ij} = \frac{c_{ij}}{2G} - \left(\frac{c_{ij}}{2G} - e_{ij}^0 \right) e^{-\frac{G}{\eta} t} = e_{ij}^\infty - (e_{ij}^\infty - e_{ij}^0) e^{-\frac{G}{\eta} t}$$

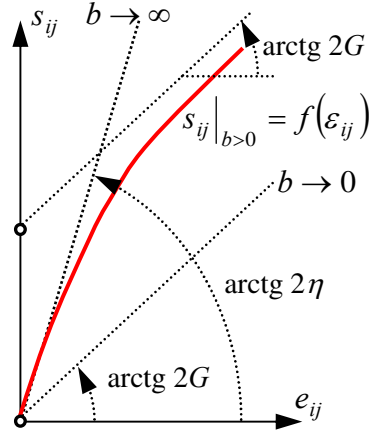
- állandó deformáció (relaxáció): $[e_{ij} = \text{const} = d] \quad [\varepsilon_o = \text{const} = d_o]$

$$s_{ij} = 2G e_{ij}^0 - (d_{ij}^0 - 2G e_{ij}^0) e^{-\frac{1}{\tau} t} = s_{ij}^0 - (s_{ij}^0 - s_{ij}^\infty) e^{-\frac{1}{\tau} t}$$

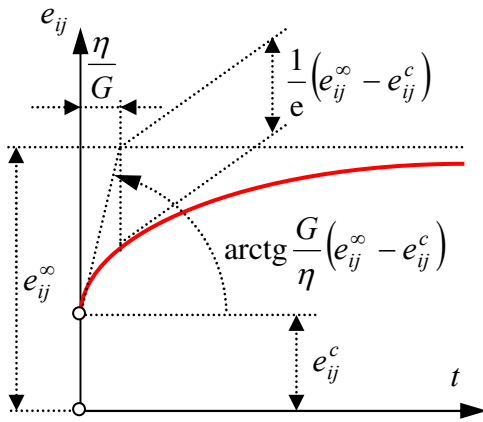
A (12) összefüggésből látszik, hogy a torzulási és térfogatváltozási egyenlet azonos formájú, csupán a benne szereplő állandók mások. Ezért a következőkben csak a torzulási egyenleteket ábrázoljuk:



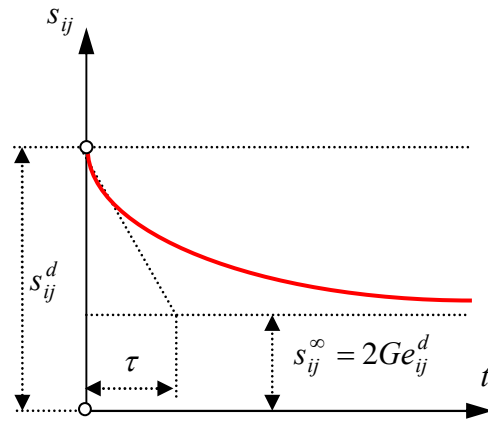
2. ábra. Terhelés egyenletes „a” feszültségváltozási sebességgel



3. ábra. Terhelés egyenletes „b” deformációsebességgel



4. ábra. Kúszási görbe ($s_{ij} = \text{constans}$)



5. ábra. Relaxációs görbe ($e_{ij} = \text{constans}$)

Ebből általánosabb következtetést is levonhatunk, nevezetesen: *a reverzibilis állapotváltozást csak időtől független egyenlet írhatja le.* Ez pedig szilárd testeknél csak két esetben következhet be:

1. „igen lassú” változás esetén, amikor az anyagban a terhelés okozta deformációk lejátszódnak, mielőtt a terhelés tovább folytatódna. Vagy másképpen: a reverzibilis változáshoz azért tartozik nagyon lassú deformálódás, hogy az anyag belső súrlódásának legyőzése ne okozzon energiaveszteséget,
2. olyan anyagtörvény esetén, amelynél a deformációk késési ideje (η/G) megegyezik a relaxációs idővel (τ), tehát a megfigyelő időtől való függetlenséget észlel, mert a terhelés és a deformálódás azonos idejű. Ebben az esetben az anyagviselkedés nem függ sem a terhelési-, sem a deformációsebességtől.

- periodikus terhelés:

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \varphi)}_{e_{ij}^1} - \underbrace{Ae^{-\frac{G}{\eta}t}}_{e_{ij}^2},$$

ahol

$$A = s_k \omega \frac{2G\tau - 2\eta}{4\eta^2 \omega^2 + 4G^2} < 0, \quad B = s_k \frac{2G + 2\eta\tau\omega^2}{4\eta^2 \omega^2 + 4G^2} > 0, \quad \varphi = \arctg \frac{A}{B}.$$

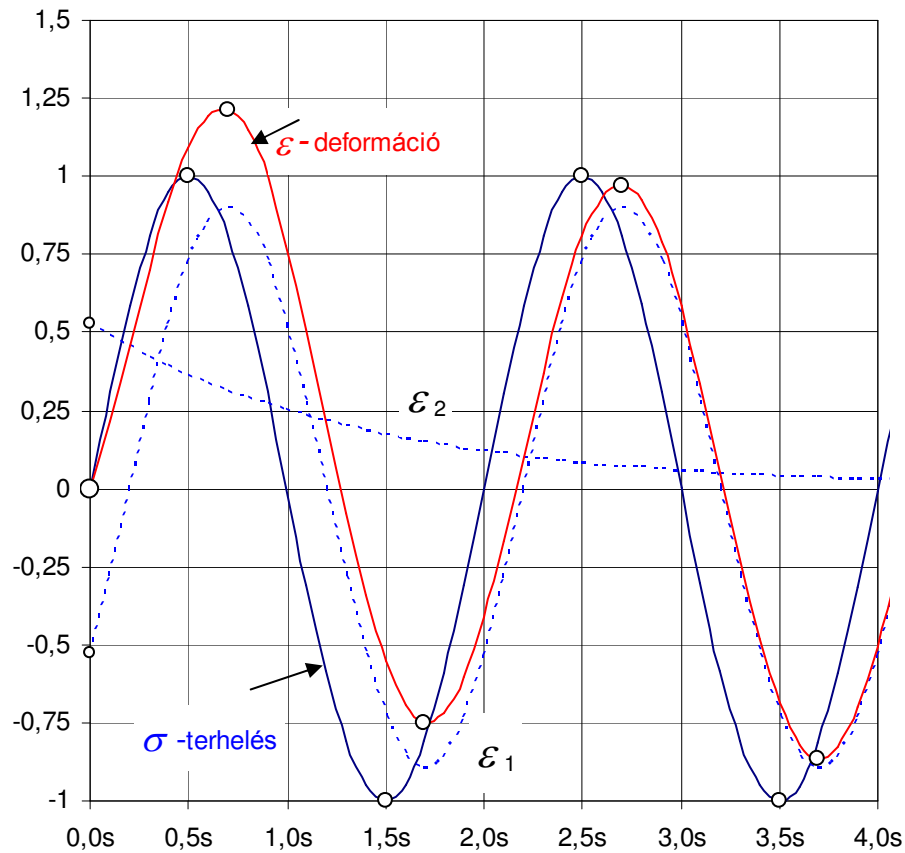
Az előjelet az határozza meg, hogy az entrópiánövekedésből következően a vezetési mátrix pozitív definit, s ebből a következő feltételek adódnak:

$$2G \geq 0, \quad 2\eta \geq 0, \quad \tau \geq 0,$$

$$\frac{\eta}{G} - \tau \geq 0.$$

Ha ez utóbbi feltétel nem pozitív, hanem nulla, akkor az entrópia nem növekszik, tehát az állapotváltozás reverzibilis, s kiadódik a HOOKE-törvény:

$$2\eta = 2G\tau, \quad 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij} + 2Ge_{ij} = s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij}, \quad 2G\tau \dot{\varepsilon}_{ij} + 2Ge_{ij} = s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij}, \quad \Rightarrow \quad s_{ij} = 2Ge_{ij}$$



5. ábra

Az ε_2 nagyon gyorsan lecseng. Gyakorlatilag néhány hullám után (≈ 5 sec, 1Hz-nél). A terhelés és a hozzátartozó deformáció közötti differencia: a φ viszont állandó, nem függ az időtől, csak az E , λ , és ϑ anyagállandóktól, és az ω frekvenciától:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{B} = \omega \frac{2G\tau - 2\eta}{2G + 2\eta\tau\omega^2} < 0,$$

és a terhelés nagyságától (amplitúdójától) is független. (Kiváló kísérleti módszer az anyagtulajdonságok elemzéséhez.)

AZ ANYAGTÖRVÉNY REVERZIBILIS ÉS IRREVERZIBILIS RÉSE A RUGALMAS TARTOMÁNYBAN. *Reverzibilis* az a folyamat (állapotváltozás), amelynek során a alakváltozásra fordított munka *maradéktalanul* (azaz veszteségek nélkül) visszanyerhető. Ebből következik az is, hogy *irreverzibilis* állapotváltozásnál a befektetett munka veszteség nélkül soha sem nyerhető vissza. Mechanikai szempontból (hibásan) reverzibilisnek tekintik az anyagviselkedést rugalmas tartományban, mivel a terhelés hatására létrejövő deformációk a tehermentesítésre megszűnnek, a test visszanyeri eredeti alakját. Ugyanis ha nem, akkor már vannak maradék deformációk, tehát már kiléptünk a rugalmas tartományból. Ez a mechanikai reverzibilitás azonban nem jelent energetikai reverzibilitást is, mert legtöbbször a befektetett munka teljes egészében nem nyerhető vissza.

A már hivatkozott tanulmányban közöltek megismételve:

$$(13) \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^{rev} + \mathbf{T}^{irrev}, \quad \mathbf{T}_o = \mathbf{T}_o^{rev} + \mathbf{T}_o^{irrev},$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{rev} &= 2G\mathbf{E}, & \mathbf{T}^{irrev} &= 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}^{irrev}, \\ \mathbf{T}_o^{rev} &= 3K\mathbf{E}_o, & \mathbf{T}_o^{irrev} &= 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o^{irrev}. \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy az anyagtörvény *reverzibilis* részét, a teljes anyagtörvényből a

$$(15) \quad \begin{aligned} \lim_{\dot{\mathbf{T}} \rightarrow 0} \mathbf{T} &= \lim_{\dot{\mathbf{E}} \rightarrow 0} \mathbf{T} = \lim_{\dot{\mathbf{T}}, \dot{\mathbf{E}} \rightarrow 0} [2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}] = \mathbf{T}^{rev} = (\mathbf{T})_{\min} = 2G\mathbf{E}, \\ \lim_{\dot{\mathbf{T}}_o \rightarrow 0} \mathbf{T}_o &= \lim_{\dot{\mathbf{E}}_o \rightarrow 0} \mathbf{T}_o = \lim_{\dot{\mathbf{T}}_o, \dot{\mathbf{E}}_o \rightarrow 0} [3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o] = \mathbf{T}_o^{rev} = (\mathbf{T}_o)_{\min} = 3K\mathbf{E}_o \end{aligned}$$

határátmenettel kapjuk. A $\min$ indexszel nem a minimális feszültséget jelöljük, hanem azt az anyagtörvényt, amelyik $P_{\min} = 0$ deformációs teljesítményhez tartozik. Hasonlóképpen, a $P \rightarrow P_{\max}$ teljesítményhez tartozó anyagtörvény:

$$(16) \quad \begin{aligned} \lim_{\dot{\mathbf{T}} \rightarrow \infty} \mathbf{T} &= \lim_{\dot{\mathbf{E}} \rightarrow \infty} \mathbf{T} = \lim_{\dot{\mathbf{T}}, \dot{\mathbf{E}} \rightarrow \infty} [2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}] = (\mathbf{T})_{\max} = \frac{2\eta}{\tau} \mathbf{E}, \\ \lim_{\dot{\mathbf{T}}_o \rightarrow \infty} \mathbf{T}_o &= \lim_{\dot{\mathbf{E}}_o \rightarrow \infty} \mathbf{T}_o = \lim_{\dot{\mathbf{T}}_o, \dot{\mathbf{E}}_o \rightarrow \infty} [3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o] = (\mathbf{T}_o)_{\max} = \frac{3K_v}{\tau_o} \mathbf{E}_o. \end{aligned}$$

A (15) és (16) összevetése alapján felírható a teljesítményhez tartozó $P_{\max}$ reverzibilis és irreverzibilis rész:

$$(\mathbf{T})_{\max} = \frac{2\eta}{\tau} \mathbf{E}, \quad (\mathbf{T})_{\max} = (\mathbf{T})_{\max}^{rev} + (\mathbf{T})_{\max}^{irrev},$$

$$(\mathbf{T})_{\max}^{rev} = (\mathbf{T})_{\min} = 2G\mathbf{E}, \quad (\mathbf{T})_{\max}^{irrev} = \frac{2\eta}{\tau} \mathbf{E} - 2G\mathbf{E}.$$

(A $\mathbf{T}_0$ analóg módon felírható.)

A későbbiekben látni fogjuk, hogy ezek az összefüggések magyarázat nélkül félrevezetőek, mert azt a képzetet kelti, hogy a feszültégtenzornak van egy reverzibilis és egy irreverzibilis része, s a kettő összege adja a teljes feszültségállapotot, holott mind kettő a teljes feszültségállapottól függ. Valójában pl. a $\mathbf{T}^{rev}$ azt jelenti, ami az egyenlőség másik oldalán van, vagyis a $\mathbf{T}$ feszültségállapot a rugalmas állapoton belül: létrehozhat egy $2G\mathbf{E}$ reverzibilis változást, és ugyanaz a $\mathbf{T}$ feszültségállapot egy $2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}$ irreverzibilis változást.

Vagyis a rugalmas tartománybeli POYNTING-THOMSON-modell esetén:

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, & \mathbf{T}^{rev} &= 2G\mathbf{E}, & \mathbf{T}^{irrev} &= 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{T}_0 &= 3K\mathbf{E}_0 + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0 - \tau\dot{\mathbf{T}}_0, & \mathbf{T}_0^{rev} &= 3K\mathbf{E}_0, & \mathbf{T}_0^{irrev} &= 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0 - \tau\dot{\mathbf{T}}_0. \end{aligned}$$

Ez a

$$(18) \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^{rev} + \mathbf{T}^{irrev}, \quad \mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_0^{rev} + \mathbf{T}_0^{irrev}$$

felírás azonban csak a *rugalmas tartományban* egyértelmű, nem azért, mert a POYNTING-THOMSON-test egy rugalmas modell, hanem azért, mert az *irreverzibilis rész* itt nem tartalmaz maradó deformációkat. Tehát azt is mondhatnánk, hogy

$$(18a) \quad \mathbf{T}^{elast} = \mathbf{T}^{rev} + \mathbf{T}^{irrev}, \quad \mathbf{T}_0^{elast} = \mathbf{T}_0^{rev} + \mathbf{T}_0^{irrev}.$$

MEGJEGYZÉSEK. A következő fejezetben egy egytengelyű kísérletet tárgyalunk, ahol az adatok a teljes deformációs folyamatot felölelik egészen a törésig. A képlékeny állapotbeli anyagviselkedést viszont csak a 6. és 7. fejezetben tárgyaljuk. Ezért már most felhívjuk a figyelmet arra, hogy a *rugalmas-képlékeny tartományban* megjelennek a *maradó deformációk* is, amelyek teljes egészében *irreverzibilisek*, tehát a deformációk teljes tartományára

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{rug} &= \mathbf{T}^{rev} + \mathbf{T}^{elast,irrev}, & \mathbf{T}^{maradó} &= \mathbf{T}^{m,irrev}, & \mathbf{T} &= \mathbf{T}^{elast} + \mathbf{T}^{maradó}, \\ \mathbf{T}_0^{rug} &= \mathbf{T}_0^{rev} + \mathbf{T}_0^{elast,irrev}, & \mathbf{T}_0^{maradó} &= \mathbf{T}_0^{m,irrev}, & \mathbf{T}_0 &= \mathbf{T}_0^{elast} + \mathbf{T}_0^{maradó} \end{aligned}$$

írható, s így

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{T}^{elast} + \mathbf{T}^{maradó} = \mathbf{T}^{rev} + \underbrace{\mathbf{T}^{elast,irrev} + \mathbf{T}^{m,irrev}}_{\mathbf{T}^{irrev}} = \mathbf{T}^{rev} + \mathbf{T}^{irrev}, \\ \mathbf{T}_0 &= \mathbf{T}_0^{elast} + \mathbf{T}_0^{maradó} = \mathbf{T}_0^{rev} + \underbrace{\mathbf{T}_0^{elast,irrev} + \mathbf{T}_0^{m,irrev}}_{\mathbf{T}_0^{irrev}} = \mathbf{T}_0^{rev} + \mathbf{T}_0^{irrev}.\end{aligned}$$

Ezt ábrázolva nyilvánvaló az összefüggés, ugyanis míg a rugalmas tartományban reverzibilis és irreverzibilis állapotváltozás egyaránt lehetséges, addig a képlékeny tartományban – bár vannak tisztán rugalmas deformációk is, – az állapotváltozás mindig irreverzibilis. A *deformációk* rugalmasak és maradók lehetnek, de maradó deformáció csak a képlékenységi határ átlépése után jelentkezik. Az *állapotváltozás* reverzibilis és irreverzibilis egyaránt lehet, de a reverzibilis része teljes egészében a rugalmas deformációkhoz kötődik.

Az egységes anyagtörvény matematikai felírásához be kellett vezetni a HEAVISIDE-féle egységugrásfüggvényt:

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \text{ha } W < W_f, \text{ vagy } \dot{W} < 0, \\ 1, & \text{ha } W \geq W_f, \text{ és } \dot{W} \geq 0, \end{cases}$$

amely azt a tényt tükrözi, hogy a képlékenységi határ alatt nincs maradó deformáció, s a képlékeny határ túllépése után is csak a deformációs munka növekedésével növekszik a maradó deformáció, csökkenésével változatlan marad. Vagyis az ún. visszaút során a már a maradó deformáció nem csökkenhet (azért maradó!).

Ennek megfelelően a folytonos deformációk teljes tartományán az anyagtörvény:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}^{elast} + \Psi \mathbf{F}^{maradó} = \mathbf{F}^{rev} + \mathbf{F}^{elast,irrev} + \Psi \mathbf{F}^{maradó}, \\ (20) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{T}_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{elast} + \Psi \mathbf{T}^{maradó} \\ \mathbf{T}_0^{elast} + \Psi \mathbf{T}_0^{maradó} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{rev} + \mathbf{T}^{elast,irrev} + \Psi \mathbf{T}^{maradó} \\ \mathbf{T}_0^{rev} + \mathbf{T}_0^{elast,irrev} + \Psi \mathbf{T}_0^{maradó} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5. FEJEZET

EGYTENGELYŰ FESZÜLTSGÁLLAPOT KÍSÉRLETI ADATOK ALAPJÁN

EGY MÉRÉSI EREDMÉNY. Az alapul vett kísérleti adatokat [KLECZEK, Z. (1969)] tanulmánya közölte, s ezek sziléziai feketeszén próbatestek egytengelyű nyomó-kísérleteiből származnak.

1. táblázat

FESZÜLTSG	TENGELYIRÁNYÚ DEFORMÁCIÓ ε [10^{-4}]													
	DEFORMÁCIÓSEBESSÉG $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ [10^{-4}min^{-1}]													
	$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ $0 < \dot{\varepsilon} < \infty$ $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$													
	[MPa]	0,031	0,062	0,146	0,316	0,728	1,93	3,16	5,38	8,87	27,2	54,1	109	1670
0,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7,14	13	13	13	11	11	10	5	5	5	6	6	6	6	6
14,28	30	26	24	23	22	19	11	11	10	11	10	11	11	13
21,42	45	43	36	36	32	28	17	20	18	16	15	18	17	19
28,57	61	54	52	46	41	40	26	27	26	25	22	26	24	26
35,71	75	66	61	57	51	48	33	35	34	32	29	34	31	33
42,85	89	81	70	67	63	59	40	41	41	39	35	43	35	40
50,00	105	97	83	81	75	68	51	48	46	48	42	46	42	47
57,14	122	114	96	92	86	80	62	51	55	55	49	53	47	52
64,28	137	129	113	103	96	89	72	67	63	61	54	60	56	57
71,42	161	147	130	121	108	100	84	75	69	67	61	65	60	62
78,57	184	170	148	135	122	111	95	85	76	75	67	73	67	68
85,71	-	197	181	159	138	128	108	99	84	82	73	76	73	74
86,80	240	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
90,00		231	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
91,87			207	-	160	143	120	-	-	-	-	-	-	-
92,85				181	-	-	-	113	92	89	80	83	79	82
93,00					183	-	-	-	-	-	-	-	-	-
100,00						-	136	129	100	99	87	87	84	86
101,62						167	-	-	-	-	-	-	-	-
103,95							152	-	-	-	-	-	-	-
107,14								-	113	105	93	92	91	92
107,99								143	-	-	-	-	-	-
111,23									122	-	-	-	-	-
115,33										118	101	99	97	97
119,33											108	-	-	-
121,42												106	-	103
123,90												114	-	-
127,33													104	106
133,04														112

A kísérlet során KŁECZEK professzor és munkatársai 14 különböző [$\dot{\varepsilon} = \text{constans}$] deformációsebességgel végeztek méréseket (1. táblázat). Ezen mérések közül azonban csak háromnak az adatait fogjuk a következőkben felhasználni. A „leglassúbbat”, amely jó közelítése a „végtelen lassú” kísérletnek, a „leggyorsabbat”, amely jó közelítése a „végtelen gyors” kísérletnek, és egy közepes sebességű mérést.

Mivel ezek a mérések csak a tengelyirányú terhelés és a tengelyirányú fajlagos nyúlás értékeit tartalmazzák az idő függvényében, és hiányoznak a keresztirányú deformációk értékei, kénytelenek vagyunk elvi engedményeket tenni. Az általános POYNTING-THOMSON-test

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{T}_0 &= 3K\mathbf{E}_0 + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0 - \tau_0\dot{\mathbf{T}}_0, \quad [\sigma_0 = 3K\varepsilon_0 + 3K_v\dot{\varepsilon}_0 - \tau_0\dot{\sigma}_0]\end{aligned}$$

anyagegyenlete – egytengelyű feszültségállapotban [ASSZONYI, 2006, SZARKA, 20006] – mind a tengelyirányú, mind a keresztirányú deformációt tartalmazza:

$$\begin{aligned}\sigma + \tau\dot{\sigma} &= 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) + 2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k), \\ \sigma + \tau_0\dot{\sigma} &= 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k) + 3K_v(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k).\end{aligned}$$

Így első lépésben, és csak a rugalmas tartományban – mivel a teljes térbeli tenzorállapot nem fogható meg, – kénytelenek vagyunk a klasszikus POYNTING-THOMSON-test

$$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{T}_0 = 3K\mathbf{E}_0 + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0 - \tau_0\dot{\mathbf{T}}_0, \quad \text{ahol } \frac{K_v}{K} - \tau_0 = 0,$$

azaz

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{T}_0 &= 3K\mathbf{E}_0, \quad [\sigma_0 = 3K\varepsilon_0]\end{aligned}$$

anyagegyenletét alapul venni. Egytengelyű feszültségállapotnál ekkor a rugalmas tartományban lejátszódó jelenségek leírására *általánosan* a

$$(1) \quad \sigma = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} - \vartheta\dot{\sigma}$$

egyenletet használjuk, ahol

$$(2) \quad E := \frac{9GK}{3K + G}, \quad \lambda := \frac{9GK}{3K + G}, \quad \vartheta := \frac{9GK}{3K + G},$$

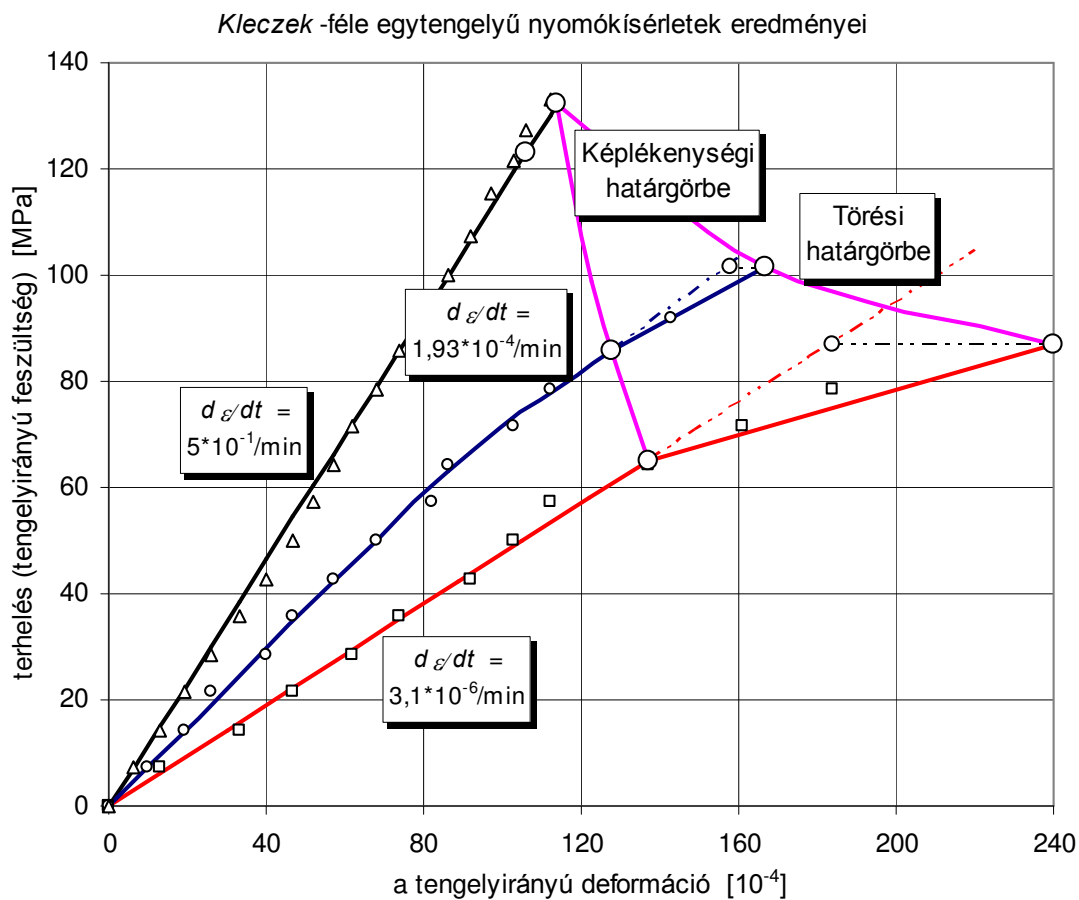
míg *speciálisan* (vagyis az (1) differenciálegyenlet megoldását az $\dot{\varepsilon} = a = \text{constans}$ deformációsebesség feltételezése esetén) a

$$\begin{aligned}
 [\sigma]_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} &= \sigma_0(\varepsilon) = E\varepsilon, \\
 (3) \quad [\sigma]_{0 < \dot{\varepsilon} = a < \infty} &= \sigma_a(\varepsilon) = E \left[\varepsilon + a \left(\frac{\lambda}{E} - g \right) \left(1 - e^{-\frac{1}{g} \frac{\varepsilon}{a}} \right) \right], \\
 [\sigma]_{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty} &= \sigma_{\infty}(\varepsilon) = \frac{\lambda}{g} \varepsilon
 \end{aligned}$$

egyenleteket tekinthetjük.

A mérési adatoknál $\dot{\varepsilon} = 3,1 \cdot 10^{-6}/\text{min} \approx 0$, illetve $\dot{\varepsilon} = 0,5/\text{min} \approx \infty$ feltételezéssel éltünk. Az elsőnél kisebb sebesség gyakorlatilag már érdektelen, mert legalább két nagyságrenddel kisebb deformációt állítunk elő percenként, mint ami anyagainknál jelentkezik, nem beszélve az igen hosszú laboratóriumi mérési időről (a kísérlet 130 óra alatt zajlott le). A $\dot{\varepsilon} = 0,5/\text{min}$ sebesség pedig szinte előállíthatatlan, mert a $0,5/\text{min}$ azt jelenti, hogy egyetlen perc alatt a próbatest eredeti hosszát felére csökkentettük a kísérlet során (valójában a törésig tartó kísérlet csak 1,344 másodpercig ideig tartott).

Az 1. táblázat adataiból szerkesztettük a következő 1. ábrát:



KÖVETKEZTETÉSEK. Az 1. ábrából jól látszanak a Bevezetésben részletezett határgörbék. A koordináta-rendszer által kifeszített teret tekintsük állapotternek, amelyen belül a reális állapotváltozásoknak

- van egy *felső korlátja*, amelynek a másik oldalán már nincsenek folyamatok,
- van egy *alsó korlátja*, amelynek a másik oldalán szintén nincsenek folyamatok, továbbá
- létezik egy *képlékenységi határ*, amely elválasztja a tér két részét, egyik oldalon vannak a rugalmas, másik oldalon a képlékeny (maradó) deformációkkal járó folyamatok,
- ez a határfeltétel az alsó korlátot is két részre osztja, reverzibilis és irreverzibilis részre,
- létezik egy *tönkremeneteli (törési) határ*, amelyen kívüli térrészben már nincs kontinuitás, tehát a folytonos közegekre vonatkozó összefüggések már értelmüket veszítik.

Az 1. ábrából – mindennemű elemzés nélkül is – számos alapvető következtetés vonható le, amelyek megegyeznek [VÁN, P. – ASSZONYI, Cs. (2006)] tanulmányában közöltekkel.

Ezek közül a legszemléletesebbek a következők:

- Az ábra a rugalmas tartományban a POYNTING-THOMSON-test tulajdonságait tükrözi, amely szerint az $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$ és $\dot{\epsilon} \rightarrow \infty$ szélső esetekben az anyagtörvény: *lineáris*.
- A képlékenységi és a tönkremeneteli határfeltétel függ a deformációsebességtől (a feszültségváltozási sebességtől), tehát nem fejezhető ki mint feszültségi, vagy mint deformációs határfeltétel (függvény).
- A „végtelen lassú” kísérlet jól közelíti az *egyensúlyi* anyagtörvényt, amely *reverzibilis* a képlékenységi határig, s *irreverzibilis* a tönkremeneteli határig. Megmutatja azt az ismert tényt, hogy a reverzibilis folyamat maga egy határ, amelynek csak egyik oldalán léteznek reális mechanikai folyamatok.

Az ábrából még nem vonhatunk le következtetést – bármennyire is kínálja magát – a határfeltételekre és a képlékeny állapotban lévő anyag viselkedésére. Viszont meghatározhatjuk azt az utat, amelyen járva fedezhetjük fel a ma még ismeretlen összefüggéseket.

Három megválaszolandó kérdésünk van:

1. Az anyagtörvény általános összefüggésének ismeretében meghatározni a kísérleti adatok alapján az egytengelyű anyagegyenletet, amely nemcsak a rugalmas, hanem a képlékeny tartományban is igaz.
2. Milyen az a feltétel, amelyik elválasztja egymástól a rugalmas és a képlékeny tartományt? S ez milyen általános fizikai törvényből származtatható?

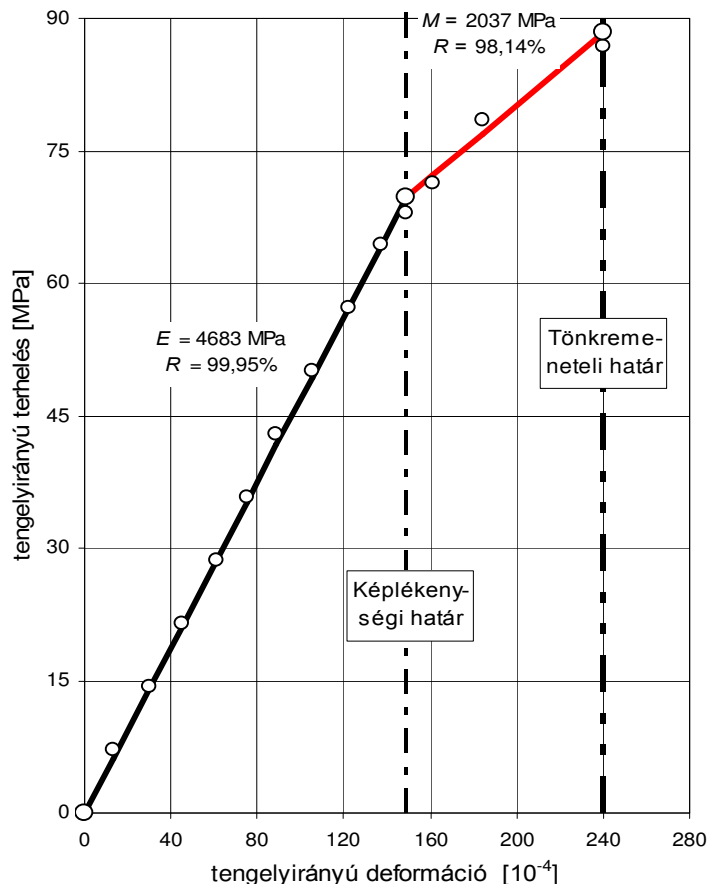
3. Mitől függ a tönkremenetel, és miből vezethető le?

Mind a három kérdésre a választ fokozatos megközelítéssel keressük. Kiindulunk a legegyszerűbb esetből [$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$], mert ekkor lineáris összefüggésünk van, majd a közepes és gyors [$\dot{\varepsilon} > 0$, $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$] alakváltozásokat tekintjük át, s ezekből állítjuk össze az anyagtörvényt, a képlékenységi határfeltételt és tönkremeneteli határfeltételt.

1. A KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓK TARTOMÁNYÁBAN ÉRVÉNYES ÖSSZEFÜGGÉS MEGHATÁROZÁSÁNAK LÉPÉSEI, EGYTENGELYŰ ÁLLAPOTBAN

1.1. AZ ANYAGTÖRVÉNY $P_{\min} = 0$ DEFORMÁCIÓS TELJESÍTMÉNY ESETÉN

Emlékeztetünk rá, hogy $P_{\min} = P|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} = 0$ a "végtelen lassú" alakváltozási sebességhez tartozó teljesítmény. Az $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ végtelen lassú kísérletet közelítő ($\dot{\varepsilon} = 3,1 \cdot 10^{-6}/\text{min}$) esetben kapott mérési adatok, és az azokat közelítő (kiegyenlítő) lineáris függvények a 2. és a 3. ábrákon találhatók. A 98-99 % szorosság jól mutatja, hogy az összefüggések elfogadhatók, nyugodtan használhatók.



Ebben az esetben a probléma gyökereinek felismerését egyrészt a linearitás, másrészt a t időtől való függetlenség segíti.

Ekkor a deformációs (vagy alakváltozási) teljesítmény

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla = \mathbf{F} : (\mathbf{v} \circ \nabla)^S$$

összefüggéséből a deformációs munkára nagyon egyszerű formulát nyerünk:

$$dW = -Pdt = \int_0^{\mathbf{D}'} \mathbf{F} : d\mathbf{D},$$

2. ábra

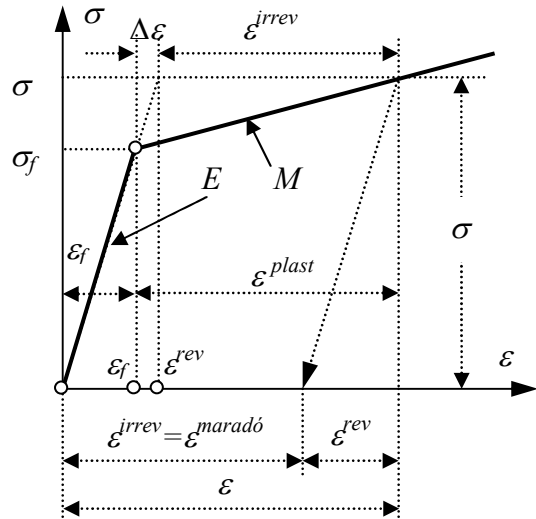
amely azonban időtől függő esetben már nem igaz.

Ha a deformáció mechanizmusát akarjuk megérteni, abban segít a 4. ábrán látható elvi séma, amely szerint az anyagtörvény¹⁴
a rugalmas tartományban:

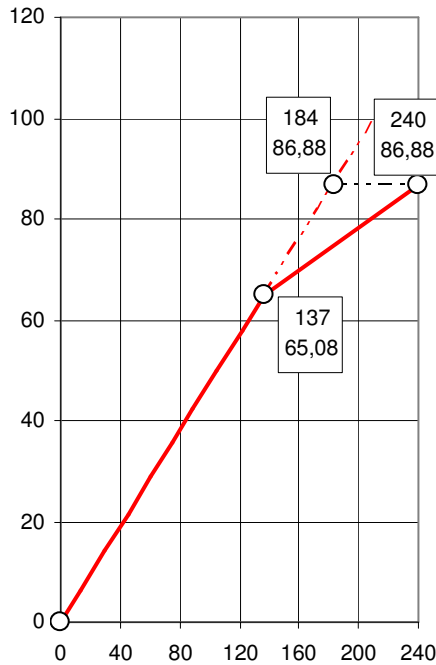
$$(4) \quad \sigma = E\varepsilon, \text{ ha } \varepsilon \leq \varepsilon_f,$$

a képlékeny tartományban:

$$(5) \quad \sigma = E\varepsilon_f + M(\varepsilon - \varepsilon_f), \text{ ha } \varepsilon > \varepsilon_f.$$



4. ábra

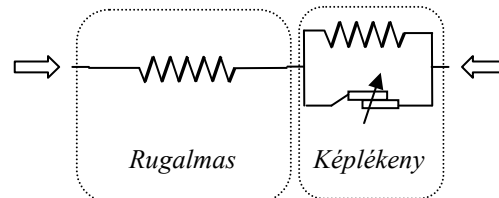


Ebből az a következtetés is levonható lenne, hogy más anyagtörvény érvényes rugalmas esetben és más rugalmas-képlékeny esetben. Ez azonban nem igaz. Most is a tudományos megismerés azon az esetével állunk szemben, amikor a *látszat elfedi a lényegét*. Ehhez még azt is vegyük hozzá, hogy ha a felterhelés során túlléptük a képlékenységi határt, s majd egy tehermentesítés következik, akkor ismét a rugalmas tartománybeli összefüggés érvényes.

A 3. ábrán berajzoltuk a rugalmas változást a képlékenységi határon túl is, a hozzátartozó maradós deformációkkal együtt.

3. ábra

Ez az anyagviselkedés a reológiában megszokott kapcsolási vázlattal is kifejezhető (5. ábra).



5. ábra. Az ideálisan rugalmas-képlékeny¹⁵ test elvi vázlata (mozgássémája)

¹⁴ Átmenetileg a képlékenységi modulusra az E_{pl} helyett az $E_{pl} := M$ jelölést alkalmazzuk.

¹⁵ Az irodalomban megszokott elnevezése: *lineárisan rugalmas, felkeményedő test*.

Anyagtörvény csak egyetlen lehet, nincs rugalmas és képlékeny, és az anyagnak nem lehet kétféle anyagtörvénye: egy az ún. terhelésre, és egy másik a tehermentesítésre. Ez ui. azt jelentené, hogy az anyagtörvény függ az alakváltozási útvonaltól. Ebben az esetben az ilyen összefüggés nem lehet fizikai törvény.

Ekkor viszont kell még valamit találnunk, mert a fizikai viselkedésben az anyag képlékeny viselkedése is bennfoglaltatik. Lehet, hogy a választ a képlékeny deformációk természetének másságában kell keresni? Például abban, hogy a feszültség a *konduktív* impulzusáram sűrűsége, a deformáció viszont ettől függ, így az anyagtörvény valójában csak a *konduktív* deformációkat írja le, viszont a képlékeny (maradó) deformáció *konvektív*, amely már nem fordítható vissza konduktívvá. Ennek lényege pontosan kiolvasható a 4. ábrából, ha felírjuk az ábrából kiolvasható elemi összefüggéseket:

$$(6) \quad \varepsilon = \varepsilon^{rev} + \varepsilon^{irrev} = \varepsilon_f + \varepsilon^{plast}.$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon^{rev} = E(\varepsilon - \varepsilon^{irrev}), \\ \sigma &= E\varepsilon_f + M(\varepsilon - \varepsilon_f), \end{aligned}$$

amelyek azt mutatják, hogy feszültség csak egyetlen van, a hozzátartozó deformációt viszont különböző deformációk összegeként írhatjuk fel.¹⁶ Ezek a következők:

A REVERZIBILIS (VAGY RUGALMAS ÉS EGYENSÚLYI) DEFORMÁCIÓ:

$$(8) \quad \varepsilon^{rev} = \frac{\sigma}{E},$$

amely az ábrából kiolvashatóan a képlékenységi határ túllépése után *is* jelentkezik, s mindaddig növekszik, ameddig a σ nő, és arányosan csökken, ha a terhelés csökken;

A PLASZTIKUS (VAGY KÉPLÉKENY) DEFORMÁCIÓ:

$$(9) \quad \varepsilon^{plast} = \varepsilon - \varepsilon_f,$$

amely a képlékeny határ túllépése utáni deformációk összessége, ez is mindaddig növekszik, ameddig a σ nő, és arányosan csökken, ha a terhelés csökken; és végül

AZ IRREVERZIBILIS (VAGY MARADÓ) DEFORMÁCIÓ:

$$(10) \quad \varepsilon^{maradó} := \varepsilon^m = \varepsilon - \varepsilon^{rev} = \left(1 - \frac{M}{E}\right)(\varepsilon - \varepsilon_f),$$

¹⁶ A képlékenységi határfeltétellel még nem foglalkozunk, így most csak annyit teszünk fel, hogy az a jelen egyszerű egytengelyű esetben egy *pont*, amelynek koordinátái σ_f, ε_f , s hogy milyen összefüggésből adódik, milyen felület egy pontja stb., nem törődünk.

amely végülis vissza már nem alakítható. Ez mindaddig növekszik, ameddig a σ nő, de nem csökken – hanem állandó marad – ha a terhelés csökken. Ezt tekinthetjük a deformációk *konvektív részének*.

A RUGALMASSÁGI MODULUS LÁTSZÓLAGOS MEGVÁLTOZÁSA. A (10) egyenletből az M képlékenységi modulus:

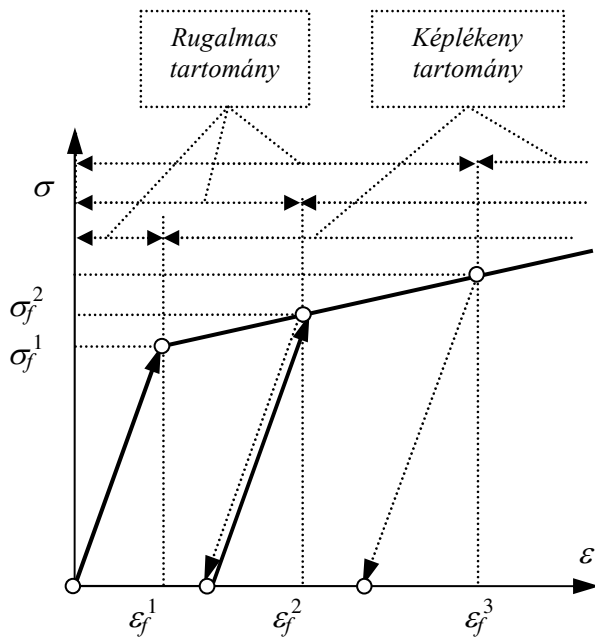
$$(11) \quad M = E \left(1 - \frac{\varepsilon^m}{\varepsilon - \varepsilon_f} \right), \quad M = E \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_f}, \quad M = E \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon^{plast}}.$$

Az M képlékenységi modulus tehát nem más, mint az E rugalmassági modulusnak a képlékenységi határon túli *látszólagos megváltozása*. E miatt az M nem is anyagállandó. Azért mondjuk, hogy ez látszólagos megváltozás, mert a rugalmassági modulus úgy is felírható, hogy

$$E = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon^{rev}},$$

viszont a képlékenységi határ túllépése után jelentkezik a $\Delta \varepsilon^m$ maradó deformáció, s így

$$M = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon^{rev} + \Delta \varepsilon^m}, \text{ illetve } \frac{M}{E} = \frac{\Delta \varepsilon^{rev}}{\Delta \varepsilon^{rev} + \Delta \varepsilon^m}$$



6. ábra

Az ε^m maradó deformáció az M/E hányadoson kívül attól függ, hogy a fellépő deformáció mennyivel nagyobb, mint a folyáshatár.

Mivel az M az E -től függ, kimondható, hogy a maradó deformáció az E modulus és a plasztikus deformáció függvénye.

Láttuk, hogy a folyáshatár a múltban lejátszódott folyamatok függvénye (6. ábra), amelyek értékei az ábra szerinti

$$\{\sigma_f^1, \varepsilon_f^1\} \leq \{\sigma_f^2, \varepsilon_f^2\} \leq \{\sigma_f^3, \varepsilon_f^3\} \leq \dots,$$

sorozatot alkotják, amelyek elvileg a törési határig növelhetők. Az M értéke viszont nem növekszik. Tehát a (11) összefüggésben az ε_f értéke bármekkora is, nem játszik szerepet.

A (11) összefüggés azért is szenzációs, mert a folyáshatár és a maradó deformációk közötti összefüggésre mutat rá:

$$(11a) \quad \frac{\varepsilon^m}{\varepsilon - \varepsilon_f} = \text{const} = \frac{E - M}{M}.$$

A 3. ábrából kiolvasható, hogy az alapul vett kísérletnél a képlékenységi határ túllépése [$\varepsilon_f = 137 \cdot 10^{-4}$] után, az $\varepsilon_t = 240 \cdot 10^{-4}$ törési határnál (a törés bekövetkezte előtti pillanatban)

$$\text{a plasztikus deformáció:} \quad \varepsilon^{plast} = (240 - 137) \cdot 10^{-4} = 103 \cdot 10^{-4},$$

$$\text{a maradó deformáció pedig:} \quad \varepsilon^{maradó} = (240 - 184) \cdot 10^{-4} = 56 \cdot 10^{-4}.$$

Ebből a képből látszik, s most megismételjük, hogy:

$$(12) \quad \begin{aligned} &A \text{ mechanikai anyagtörvény nem más, mint a} \\ &konduktív impulzusáram sűrűsége és a \\ &konduktív deformáció közötti összefüggés. \end{aligned}$$

A konduktív deformációhoz hozzájárul még a konvektív (irreverzibilis, vagy maradó) deformáció, s a kettő adja a teljes deformációt. Talán kezdettől meg kellene különböztetni ezt a kettőt: a teljes $\mathbf{w}$ sebességet két részre bontani, egy $\mathbf{v}$ konduktív sebességre és egy $\mathbf{s}$ konvektívra, vagy az elmozdulást bontani két részre, stb. Azonban ehhez bizonyítani kellene, hogy a konvektív sebesség már a kezdeteknél megjelenik. Gyakorlati – de nem bizonyított – tapasztalatunk, hogy amikor a testet mechanikai hatásnak tesszük ki – vagyis vele $\rho \mathbf{w}$ fajlagos impulzust és $1/2 \rho \mathbf{w}^2$ fajlagos kinetikai energiát közlünk –, akkor a maradó deformáció csak akkor jelenik meg, amikor a kinetikus energia egy kritikus értéket túllép, vagyis az anyag már nem tudja teljes egészében belső energiává alakítani, s a differencia továbbra is kinetikai energiaként van jelen.

A 4. ábra a maga egyszerűségével és világos áttekinthetőségével azért nagyszerű, mert benne visszatükröződik – mint cseppben a tenger – minden általános és specifikus törvényszerűség. Az ábrából látjuk, hogy feszültség csak egy van, de a hozzátartozó deformáció már több, de csak a képlékenységi határ túllépése után. Ebből következik, hogy egy általános mechanikai feladat megoldása során elégséges a feszültségmezőt meghatározni [a mechanikai alapegyenletek egyetlen változóra történő visszavezetésével, pl. az ún. erőmódszerrel (ld. BELTRAMI-egyenlet)]. Ha ez rugalmas állapotbeli anyagegyenlettel történik, akkor a kapott deformációmező az ε^{rev} deformáció komponenseket tartalmazza, amelyhez hozzá kell adni az ε^{rev} -től függő ε^m komponenseket tartalmazó deformációmezőt, és máris rendelkezésünkre áll a

végleges megoldás. Ezáltal a *képlékenységtan* irodalmában található önkényes és bonyolult összefüggéseket és módszereket átadhatjuk a múltnak.

Vegyük most csak példaként azt a feltevést, hogy a képlékenységi határfeltétel:

$$(13) \quad \psi(W) = W - W_f,^{17}$$

amely a linearitás miatt $\varepsilon = \varepsilon_f$ alakban is felírható.¹⁸ Ez az $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ esetben természetesen igaz, bár még nem tudjuk, hogy az ε_f miért annyi, mint amit a kísérlet kimutatott.

Ezt felhasználva már felírható az anyagtörvény, a 4. ábra alapján:

Rugalmas állapotban:

$$(14) \quad \sigma = E\varepsilon, \quad \text{ha } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_f,$$

Képlékeny állapotban:

$$(15) \quad \sigma = \begin{cases} E\varepsilon_f + M(\varepsilon - \varepsilon_f), \\ M\varepsilon + (E - M)\varepsilon_f, \end{cases} \quad \text{ha } \varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_t,$$

s így az egységes anyagtörvény:

A deformációk teljes tartományán [ha $0 \leq \varepsilon < \infty$]

$$(16) \quad \sigma = E\varepsilon - \Psi(E - M)(\varepsilon - \varepsilon_f),$$

ahol Ψ a 2. fejezetben már bevezetett HEAVISIDE-féle egységugrás:

$$(17) \quad \begin{cases} \Psi = 0, & [\varepsilon \leq \varepsilon_f], \Rightarrow \sigma = E\varepsilon, \\ \Psi = 1, & [\varepsilon \geq \varepsilon_f], \Rightarrow \sigma = M\varepsilon + (E - M)\varepsilon_f. \end{cases}$$

Gondolatmenetünket itt félbe kell szakítanunk, mert a (15) végleges formájához a tényleges határfeltétel is kell. Ami jelen esetben azt jelenti, hogy ismerni kellene a

¹⁷ W -vel most azt a még ismeretlen változót jelöltük, amitől a képlékenységi küszöb függ. Erre azért van szükség, mert az már bizonyítást nyert [ASSZONYI (1975)], hogy a képlékenységi határfeltétel nem lehet sem feszültségi, sem deformációs feltétel. A W -vel a deformációs munkára kívántunk utalni, ui. mivel a termodinamika II. főtétele, az entrópiatermelés növekedése és az anyagstabilitás összefüggéseiben a $P = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla = dW / dt$ deformációs teljesítmény szerepel, feltehető, hogy a W határozza meg a képlékeny állapot létrejöttének feltételét. Olyan feltevés ui. nem fogadható el, amelyik nem az általános fizikai törvényekből következik. Továbbá ebben fejeződik ki a közölt kinetikus energia küszöbértéke is, vagyis az anyag ott folyik meg, ahol a közölt kinetikus energia már több, mint amennyit az anyag képes belső energiává alakítani.

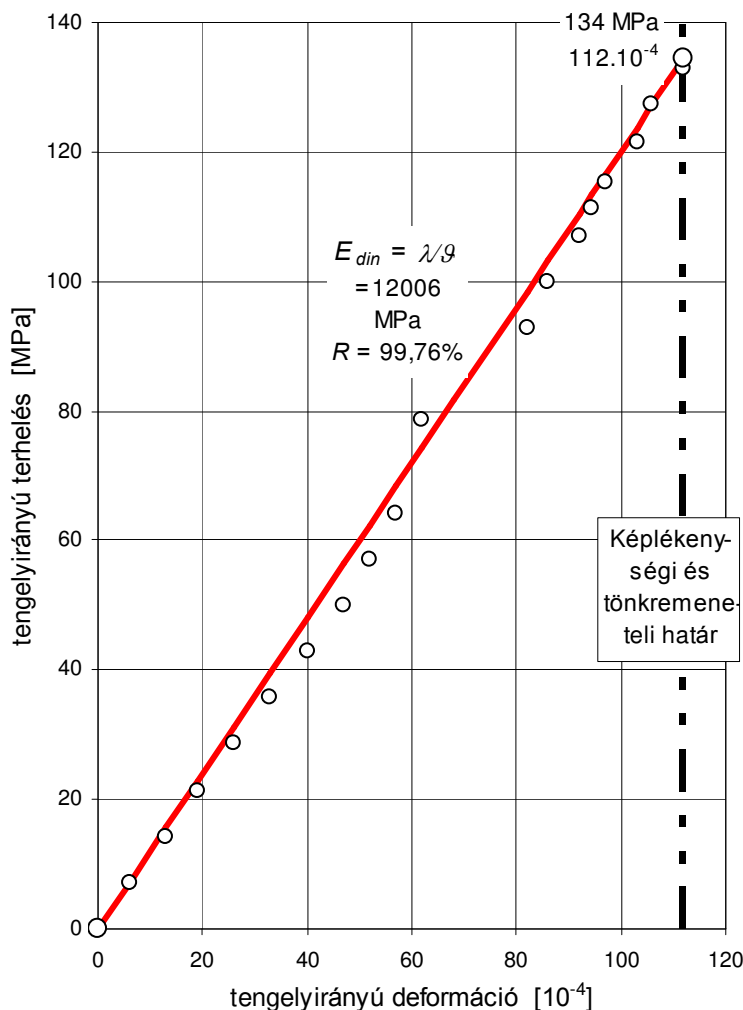
¹⁸ Tekintsük ezt provizórikusan képlékenységi határfeltételnek. Mivel jelen esetben lineáris összefüggéseink vannak, így a $W = W_f$ képlékenységi határfeltételt felírhatjuk σ_f -fel és ε_f -fel is.

Mivel $W_f = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_f \varepsilon_f = \frac{1}{2} E \varepsilon_f^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_f^2}{E}$, így $\sigma_f = \sqrt{2EW_f}$, illetve $\varepsilon_f = \sqrt{2W_f / E}$.

határfeltételből következő $\varepsilon_f = \varepsilon_f(\dot{\varepsilon})$ függvényt. Ezt még nem írhatjuk fel az $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ esetre sem, mert ahhoz elméleti megfontolások kellenek, továbbá a három különböző $[\dot{\varepsilon} \rightarrow 0, 0 < \dot{\varepsilon} < \infty, \dot{\varepsilon} \rightarrow \infty]$ eset összehasonlítására is szükség van. Ezért vizsgálatainkat az állapottér másik határesetével (felső határgörbével), az $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$ feltételezéssel folytatjuk.

1.2. AZ ANYAGTÖRVÉNY $P_{\max}$ DEFORMÁCIÓS TELJESÍTMÉNY ESETÉN

Emlékeztetünk rá, hogy $P_{\max} = P|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty}$ a "végtelen gyors" alakváltozási sebességhez tartozó teljesítmény. A mérési adatokat, és az azt közelítő lineáris függvényt a 7. ábra mutatja. Ebben az esetben a képlékenységi határt és a törési határt – első lépésben – nem sikerült különválasztani. Két eset lehetséges:



7. ábra

1. az $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$ sebesség nem engedi, hogy a képlékeny állapotot érzékeljük, mert már rögtön be is következik a törés,

2. ennél a sebességnél a két határfeltétel egybeesik.

A kísérleti adatokból nem dönthető el az igazság.

Az viszont tisztán látszik, hogy ebben az esetben sem az ε_f , sem az ε_t nem egyezik meg az előző pontban kapott értékekkel.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a határfeltételek függnek a változási sebességtől.

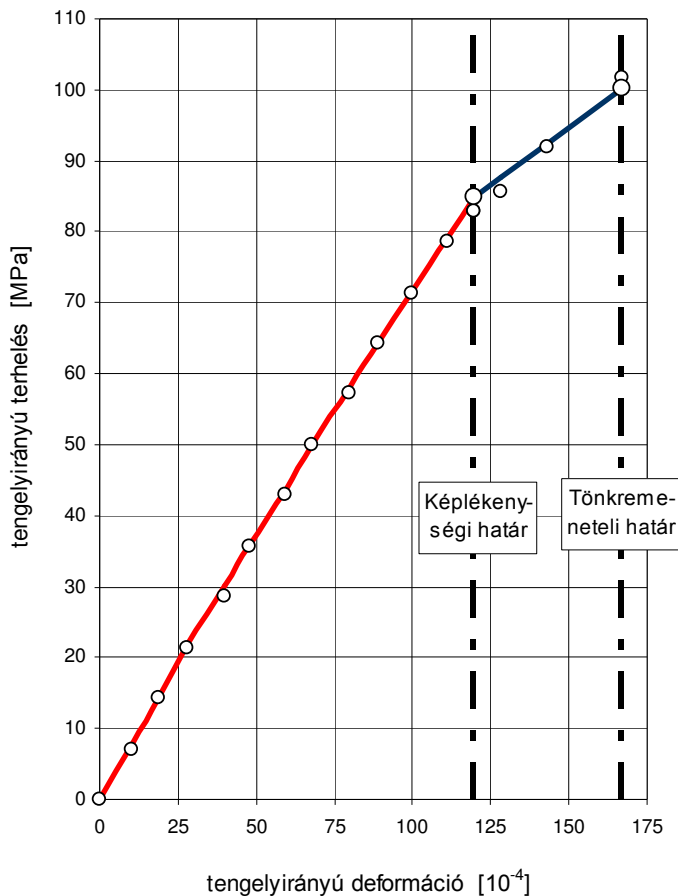
Jelen esetben az anyagviselkedés egyetlen egyenlőssel írható le, melynek egyenlete:

$$(18) \quad \sigma = \frac{\lambda}{9} \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t.$$

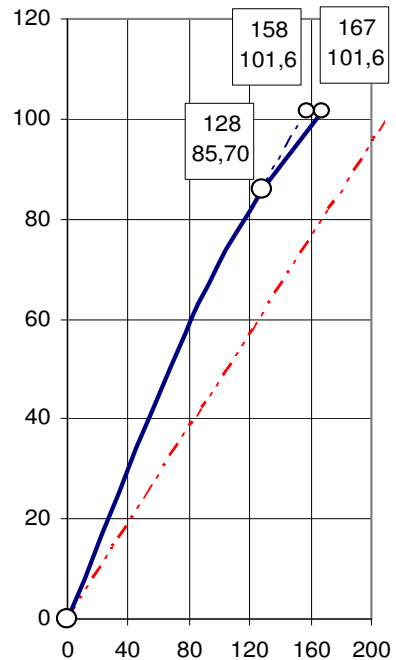
1.3. AZ ANYAGTÖRVÉNY $0 < P < P_{\max}$ DEFORMÁCIÓS TELJESÍTMÉNY ESETÉN

A kísérleti adatokat és a $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ közelítő görbét a 8. ábra baloldali része mutatja, míg a jobboldali rész nemcsak megadja a képlékenységi és a tönkremeneteli határnál érvényes feszültség-deformáció értékeket, hanem

- feltünteti, hogyan változott volna a $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ összefüggés, ha nem ott lenne az ε_f képlékenységi küszöb, vagyis ábrázolja a további $\varepsilon_{rug} := \varepsilon^{rev}$ deformációkhoz tartozó σ értékeket, ezáltal számíthatóan bemutatja az $\varepsilon^{maradó} = \varepsilon - \varepsilon^{rev}$ értékeket,
- az ábra jobb oldali részén szaggatott vonal jelzi a végtelen lassú kísérlethez tartozó összefüggést, hogy szemléltesse, mennyivel több munkát kellett ahhoz végezni, hogy a végtelen gyors kísérletnél ugyanolyan nagyságú deformációt hozzunk létre, mint a végtelen lassúnál.



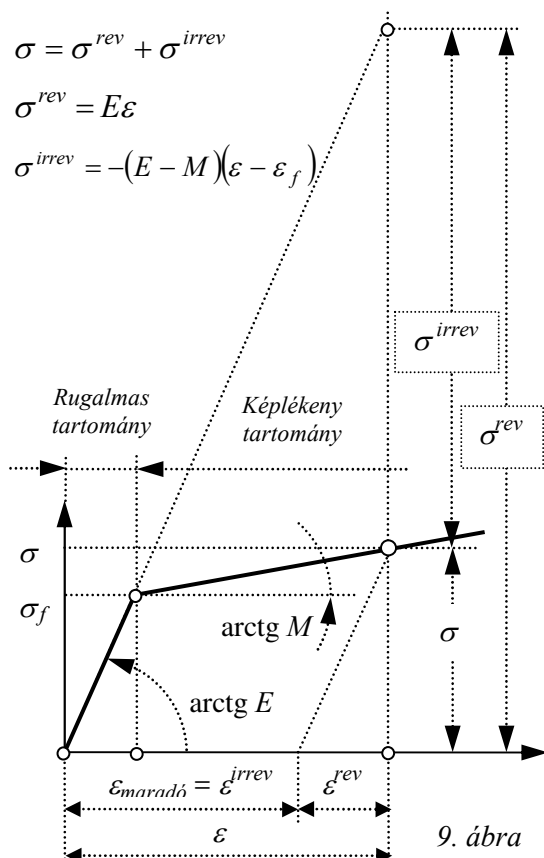
Vagyis szemléltetjük a $P = 0$ teljesítményhez és a $P > 0$ teljesítményhez tartozó értékeket.



8. ábra. A $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ összefüggés $\dot{\varepsilon} = 1,94 \cdot 10^{-4}$ / min deformációsebesség esetén

1.4. A REVERZIBILIS ÉS IRREVERZIBILIS FESZÜLTSÉGEK

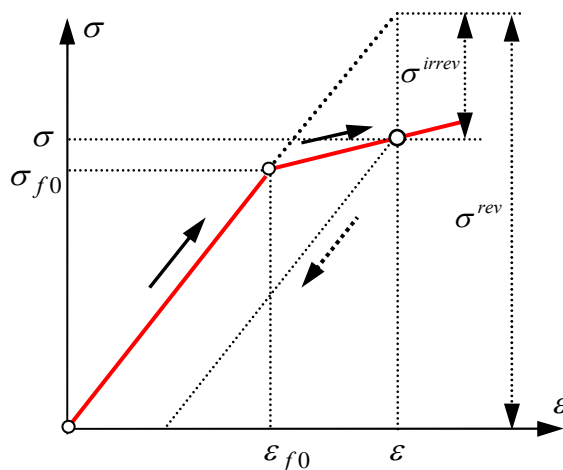
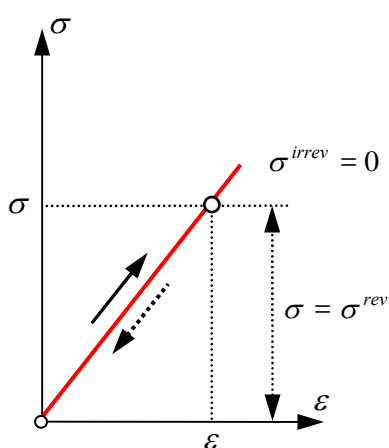
Azonban, ahogy az irodalomban mások, úgy mi is használjuk az entrópiaprodukciónak növekedésénél a *reverzibilis* és az *irreverzibilis* feszültségek fogalmát, holott láttuk, hogy egyetlen feszültség hozza létre a reverzibilis és irreverzibilis deformációkat.



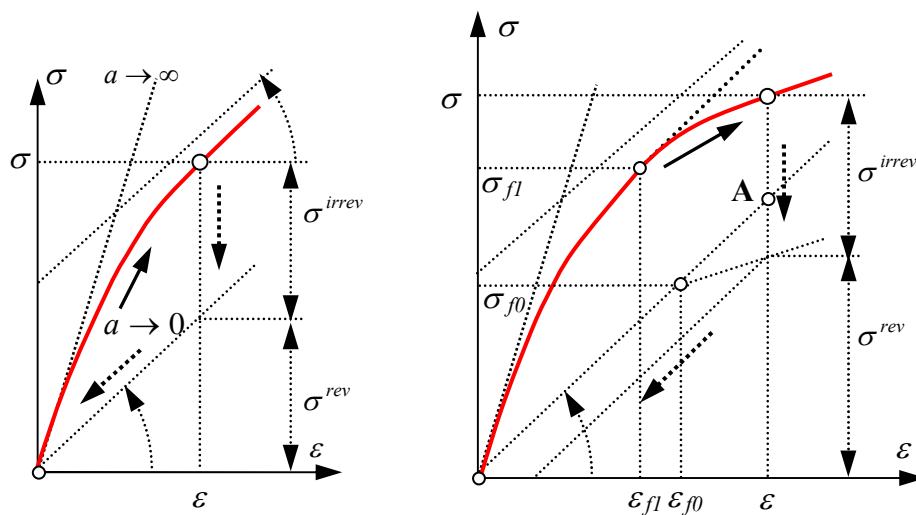
Természetesen a feszültségek ilyen szétválasztásának nincsen akadálya. Azonban, hogy ez eléggé mesterkelt, azt a 9. ábrán mutatjuk be, amely a 4. ábra kiegészítése az irreverzibilis feszültséggel.

Az ábrából látható, hogy jelen egytengelyű feszültségállapotban mindkét összetevő jóval – adott esetben többszörösen – nagyobb, mint maga a feszültség. Ez a megszokott képünket tehát ugyancsak megzavarja.

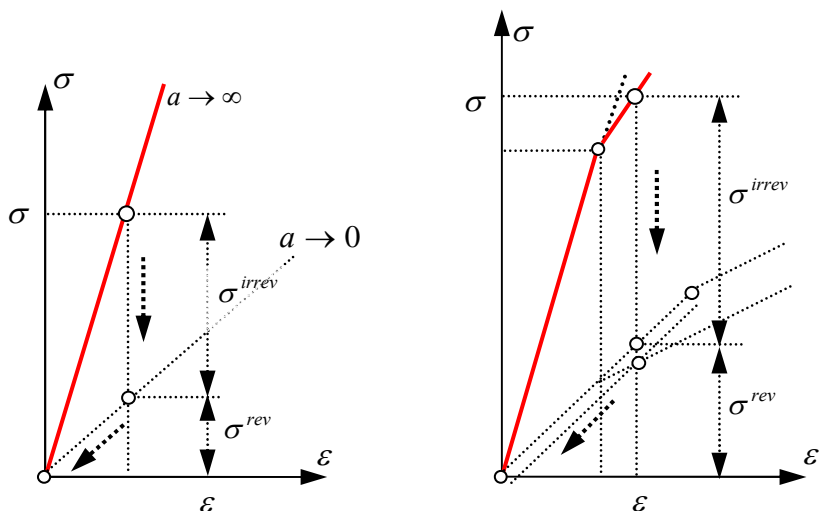
Mivel a 9. ábra a nagyon lassú terhelési sebességhez tartozó elvi összefüggés, ezért a következőkben a vizsgált mindhárom esethez tartozó elvi görbéket felrajzoltuk (10-12. ábrák). Az ábrák bal oldala a rugalmas tartománybeli, jobb oldala a képlékeny tartománybeli viselkedést is reprezentálja. Bejelöltük pontozott vonallal egy esetleges tehermentesítés esetét is.



10. ábra. Felterhelés egyenletes „ $a \rightarrow 0$ ” feszültség-változási sebességgel



11. ábra. Felterhelés egyenletes „ $a > 0$ ” feszültség-változási sebességgel



12. ábra. Felterhelés egyenletes „ $a \rightarrow \infty$ ” feszültség-változási sebességgel

2. A KÉPLÉKENYSÉGI ÉS TÖNKREMENTELI HATÁROK AZ EGYTENGELYŰ KÍSÉRLETEK ALAPJÁN

2.1. ENERGIA- ÉS MUNKA-ÖSSZEFÜGGÉSEK

Vázlatosan foglaljuk össze azokat az összefüggéseket, amelyek szóba jöhetnek a határfeltételek fizikai (és ennek megfelelően matematikai) formájának meghatározásánál.

A P deformációs teljesítmény és a deformációs munka közötti alapvető összefüggés

$$(19) \quad P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla = \mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1},$$

ahonnan

$$(20) \quad W = - \int_0^t P dt = \int_0^t (\mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla) dt = \int_0^{W'} dW'.$$

A deformációs munka többféle felosztása ismert:

Egyrészt, energia-szempontról két részre bontható, egy Φ reverzibilis részre, amelyet potenciális energiának, a deformációs munka potenciális részének is neveznek, és egy $\mathcal{L}$ irreverzibilis részre, amelyet disszipációs munkának is neveznek:

$$(21) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d\mathcal{L}}{dt}.$$

Másrészt, a feszültség- illetve deformációtenzor deviátoros és gömbi (izotróp) felbontásából következően, egy W' torzulási részből és egy W_o térfogatváltozási részből:

$$(22) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{dW'}{dt} + \frac{dW_o}{dt}.$$

A (21) és (22) alapján

$$\begin{aligned} \frac{dW'}{dt} &= \frac{d\Phi'}{dt} + \frac{d\mathcal{L}'}{dt}, & \frac{dW_o}{dt} &= \frac{d\Phi_o}{dt} + \frac{d\mathcal{L}_o}{dt}, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d\Phi'}{dt} + \frac{d\Phi_o}{dt}, & \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}'}{dt} + \frac{d\mathcal{L}_o}{dt}. \end{aligned}$$

Az elemi (infinitesimális) dW deformációs munka a (20)-ból látható módon nem írható fel közvetlenül a deformációkkal kifejezve, $\mathbf{F} : d\mathbf{D}$ formában, ahogy a kis deformációkra vonatkozó és időfüggetlen kontinuumokkal foglalkozó munkákban szokás.

Egytengelyű feszültségállapot esetén azonban (ld. [VÁN-ASSZONYI (2006)]) a $\mathbf{H}$ mozgásgradiens szimmetrikus, aminek eredményeként a kis és nagy deformációkra egyaránt érvényes deformációs tenzor,

$$\mathbf{D} = \sqrt{\mathbf{H}^T \mathbf{H}} - \mathbf{I},$$

anélkül, hogy csak a kis deformációkra lenne érvényes, a CAUCHY-féle deformációtenzorra egyszerűsödik:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}],$$

ahol $\mathbf{u}$ az elmozdulásvektor. Ha most figyelembe vesszük, hogy a két $[\dot{\epsilon} \rightarrow 0, \dot{\epsilon} \rightarrow \infty]$ határesetben a változások időfüggetlen jellegűt öltönek, *akkor és csak akkor*

$$(23) \quad dW = \mathbf{F} : d\mathbf{D}$$

is igaz. Így ezekre az esetekre

$$(24a) \quad dW = \mathbf{F} : d\mathbf{D} = dW' + dW_o = \mathbf{T} : d\mathbf{E} + \mathbf{T}_o : d\mathbf{E}_o,$$

$$(24b) \quad dW' = \mathbf{T} : d\mathbf{E} = d\Phi' + d\mathcal{L}',$$

$$(24c) \quad dW_o = \mathbf{T}_o : d\mathbf{E}_o = d\Phi_o + d\mathcal{L}_o,$$

illetve, ha azt is figyelembe vesszük, hogy ekkor az anyagegyenlet lineáris, akkor

$$(25a) \quad dW = \mathbf{F} : d\mathbf{D} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

$$(25b) \quad dW' = \mathbf{T} : d\mathbf{E} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_o \varepsilon_o,$$

$$(25c) \quad dW_o = \mathbf{T}_o : d\mathbf{E}_o = \frac{1}{2} \sigma_o \varepsilon_o.$$

2.2. HATÁRFELTÉTEL A MÉRÉSI ADATOK TÜKRÉBEN

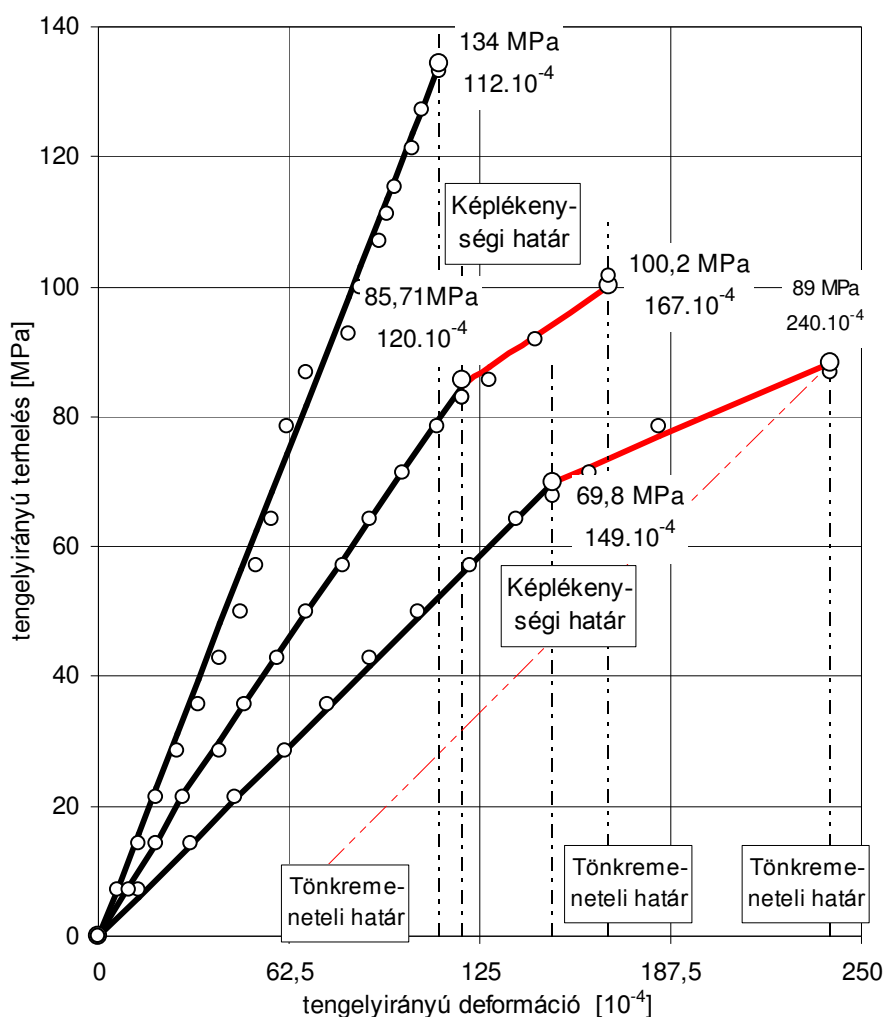
Ezek után nézzük meg, hogy az energia- és munkakifejezések hogyan alakulnak mérési adatainknál.

A három kísérletnél a képlékenységi és tönkremeneteli határhoz tartozó σ - ε értékek a következők:

2. táblázat

	KÉPLÉKENYSÉGI HATÁR ÉRTÉKEI			TÖNKREMENETELI HATÁR ÉRTÉKEI		
	$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$	$0 < \dot{\varepsilon} < \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$	$0 < \dot{\varepsilon} < \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$
σ	69,8 MPa	85,7 MPa	134 MPa	89 MPa	100,2 MPa	134 MPa
ε	$149 \cdot 10^{-4}$	$120 \cdot 10^{-4}$	$112 \cdot 10^{-4}$	$240 \cdot 10^{-4}$	$167 \cdot 10^{-4}$	$112 \cdot 10^{-4}$

s a hozzájuk tartozó függvényeket a 13. ábrán megismételtük, és szaggatott vonallal a végtelen lassú tehermentesítéshez tartozó egyenest ábrázoltuk, amely alatti terület a visszanyerhető munkát (Φ potenciális energiát) reprezentálja.



13. ábra

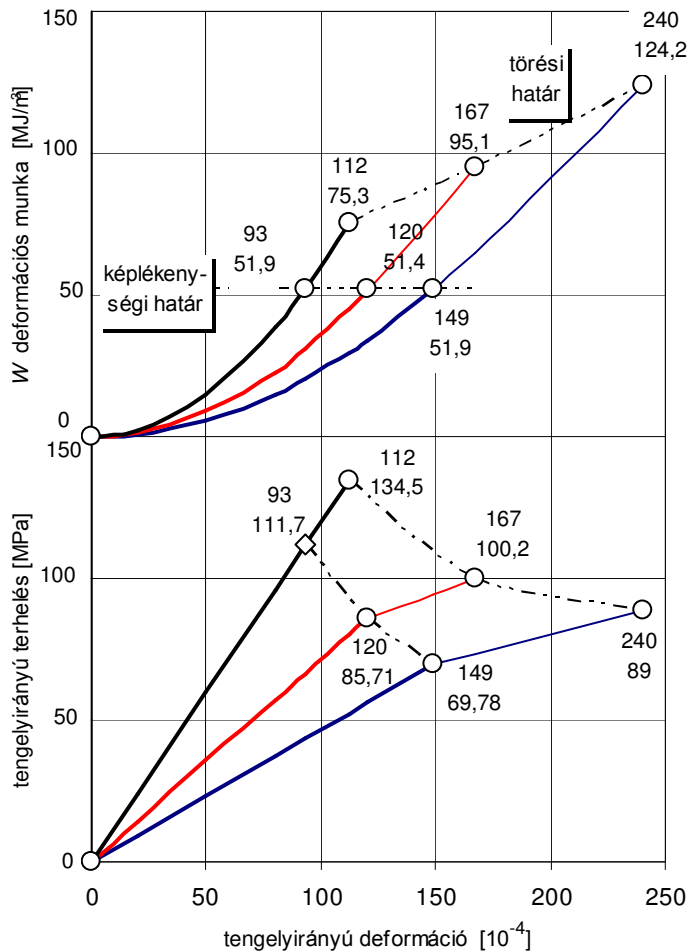
A KÉPLÉKENYSÉGI HATÁRFELTÉTEL A W DEFORMÁCIÓS MUNKÁVAL KIFEJEZVE. Ebben az egyszerű esetben a görbék alatti területek nagysága a W térfogategységre jutó deformációs munkát mutatják:

$$W = \int_0^{\varepsilon'} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \Phi = W|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} = \int_0^{\varepsilon'} E \varepsilon d\varepsilon, \quad \mathcal{L} = W - \Phi = \int_0^{\varepsilon'} [\sigma(\varepsilon) - E\varepsilon] d\varepsilon.$$

Ha a W munkaértékeket kiszámoljuk:

$$\begin{aligned} W|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0 \approx 0,031 \cdot 10^{-4}} &= \int_0^{\varepsilon_f} E \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_f = \frac{1}{2} E \varepsilon_f^2 = \frac{1}{2E} \sigma_f^2 = \frac{1}{2} 69,8 \cdot 149 \cdot 10^{-1} \approx 51,9 \text{ MJ/m}^3, \\ W|_{0 < \dot{\varepsilon} < \infty} &= \int_0^{\varepsilon_f} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon, &= & \approx 51,4 \text{ MJ/m}^3, \\ W|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty \approx 0,5} &= \int_0^{\varepsilon_f} \frac{\lambda}{g} \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_f = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{g} \varepsilon_f^2 = \frac{g}{2\lambda} \sigma_f^2 = \frac{1}{2} 134 \cdot 112 \cdot 10^{-1} \approx 75,3 \text{ MJ/m}^3, \end{aligned}$$

és egyetlen ábrába összefoglaljuk, akkor a 14. ábrán látható képet kapjuk. Ez egy nagyon érdekes kép, ugyanis



14. ábra

- egyrészt azt sugallja, hogy ha a képlékenységi határ a deformációs munka függvénye lenne, akkor olyan egyszerű összefüggés is lehetne, mint

$$\begin{aligned}\psi_{\text{képlékeny}} &= \psi_k(\varepsilon, W) = \\ &= W - W_f = 0,\end{aligned}$$

vagyis az anyag akkor kerül képlékeny állapotba, ha a deformációs munka egy küszöbértéket elér. Mivel ez a küszöbérték függvénye a deformációsebességnek, a képlékeny állapot tehát különböző $\sigma - \varepsilon$ értékeknél következik be;

- másrészt azt is sugallja, hogy a végtelen gyors terhelésnél is létezhet képlékenységi határ [$\diamond$], de ez a nagy sebesség miatt nem különböztethető meg, ill. nincs markáns változás;¹⁹

- harmadrészt olyan borzongtató, hogy a W értéke a képlékenységi határon szinte mindegyik görbénél megegyezik, ha a végtelen gyors terhelésnél bejelölünk egy pontot:

$$51,43 \text{ MJ/m}^3 < W < 51,98 \text{ MJ/m}^3.$$

Ez azonban természetesen nem jelent bizonyítást, mert mérési adatok csak valószínűsíthetnek, bizonyítani csupán elméletileg és tudományos eszközökkel lehet.

¹⁹ A feltüntetett P pont nem válik el markánsan környezetétől, azonban itt a $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ függvény nagyon érdekesen viselkedik. Ugyanis, ha külön választjuk az adatsort és a $93 \cdot 10^{-4}$ értéknél, s az előtte lévő értékekre is illesztünk egy kiegyenlítő egyenest (rug), s az utána lévő értékekre is illesztünk a közös pontból induló kiegyenlítő egyenest (képl), akkor ez utóbbi iránytangense egy gondolatnyival kisebb. Tehát az érintőben ugrás van [$(\partial \sigma / \partial \varepsilon)_{\text{rug}} > (\partial \sigma / \partial \varepsilon)_{\text{képl}}$], ami a képlékenységi határ jellemzője.

A képlékenységi és tönkremeneteli határhoz tartozó σ - ε értékek – az $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$ mérésnél a módosított $[\diamond]$ értékekkel – a következők:

3. táblázat

	KÉPLÉKENYSÉGI HATÁR ÉRTÉKEI			TÖNKREMENETELI HATÁR ÉRTÉKEI		
	$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$	$0 < \dot{\varepsilon} < \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$	$0 < \dot{\varepsilon} < \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$
σ	69,8 MPa	85,7 MPa	111,7 MPa	89 MPa	100,2 MPa	134,5 MPa
ε	$149 \cdot 10^{-4}$	$120 \cdot 10^{-4}$	$93 \cdot 10^{-4}$	$240 \cdot 10^{-4}$	$167 \cdot 10^{-4}$	$112 \cdot 10^{-4}$

A KÉPLÉKENYSÉGI ÉS TÖNKREMENETELI HATÁR A Φ POTENCIÁLIS ENERGIAÁVAL. A visszanyerhető Φ energia szintjét a reverzibilis állapotváltozás határozza meg. Ennek értékét a $\sigma = E\varepsilon$ összefüggés alapján kapjuk meg. A 15. ábráról leolvasható a $W = \Phi + \mathcal{L}$ összefüggés alapján, geometriailag területekkel:

KÉPLÉKENYSÉGI ÉS TÖNKREMENETELI
HATÁRON:

$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ esetén:

$$W|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} = OGKO, \quad W|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} = OGHMO$$

$$\Phi|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} = OGKO, \quad \Phi|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} = NHMN$$

$$\mathcal{L}|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} = OABO = 0, \quad \mathcal{L}|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} = OGHNO$$

$0 < \dot{\varepsilon} < \infty$ esetén:

$$W|_{0 < \dot{\varepsilon} < \infty} = ODIO, \quad W|_{0 < \dot{\varepsilon} < \infty} = ODELO$$

$$\Phi|_{0 < \dot{\varepsilon} < \infty} = OIJO, \quad \Phi|_{0 < \dot{\varepsilon} < \infty} = OFLO$$

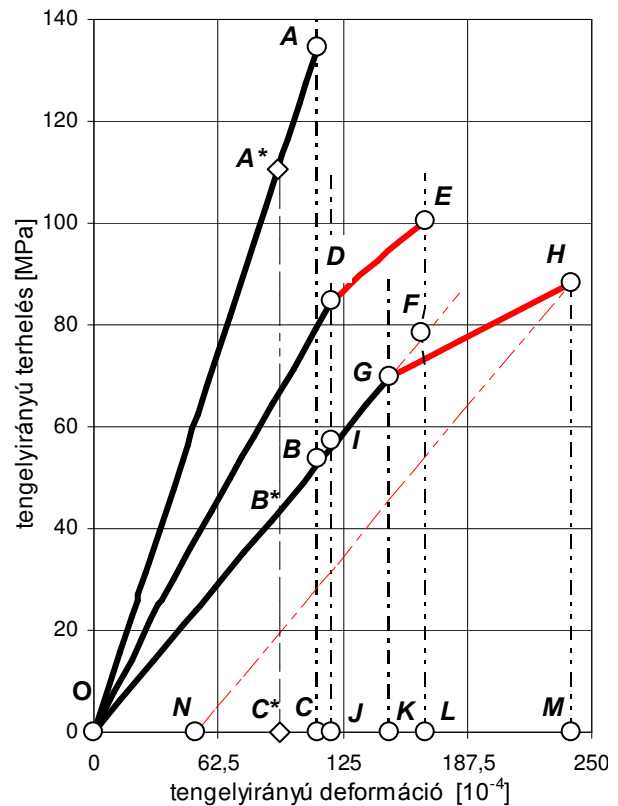
$$\mathcal{L}|_{0 < \dot{\varepsilon} < \infty} = ODIO, \quad \mathcal{L}|_{0 < \dot{\varepsilon} < \infty} = ODEFO$$

$\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$ esetén:

$$W|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty} = OA^*C^*O, \quad W|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty} = OACO$$

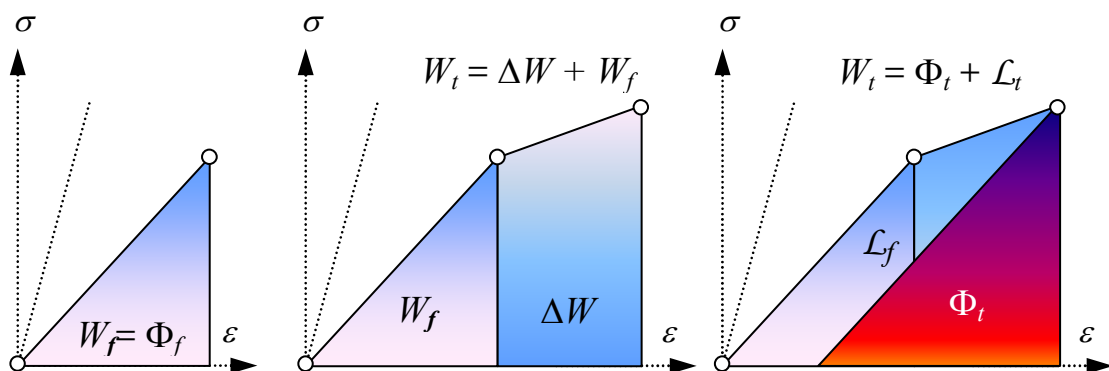
$$\Phi|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty} = OB^*C^*O, \quad \Phi|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty} = OBCO$$

$$\mathcal{L}|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty} = OA^*B^*O, \quad \mathcal{L}|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty} = OABO$$

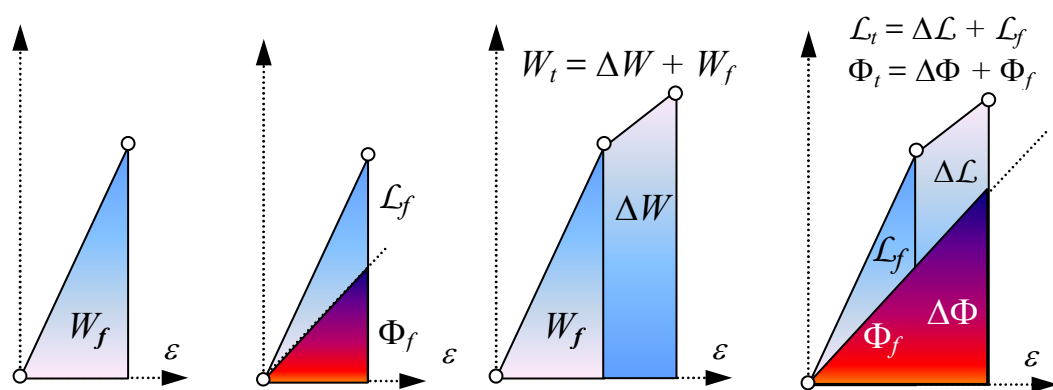


15. ábra

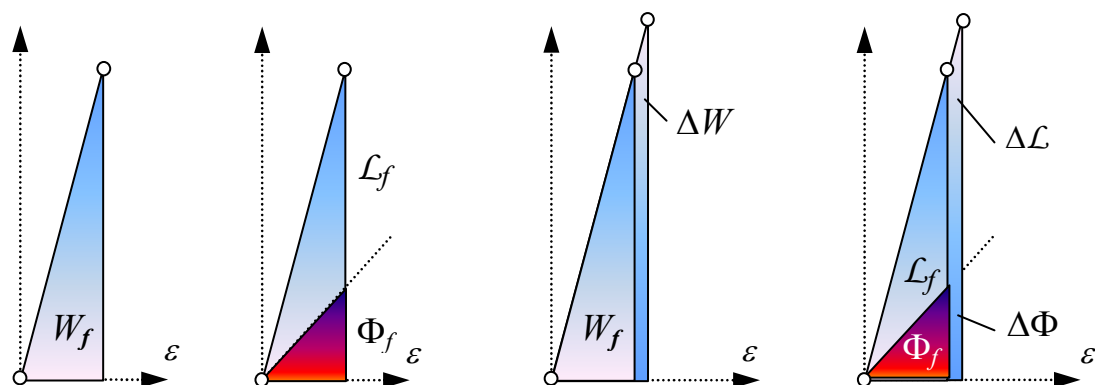
Jelöljük f indexszel a képlékenységi határhoz (folyáshatárhoz) tartozó energia- és munkaértékeket, és t indexszel a tönkremeneteli határhoz tartozókat. A 22. ábra mutatja a háromféle deformációsebességhez tartozó értékeket: a rugalmas tartományban, a képlékeny tartományon át a törésig.



16.a) ábra. $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ deformációsebesség



16.b) ábra. $0 < \dot{\varepsilon} < \infty$ deformációsebesség esetén



16.c) ábra. $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$ deformációsebesség esetén

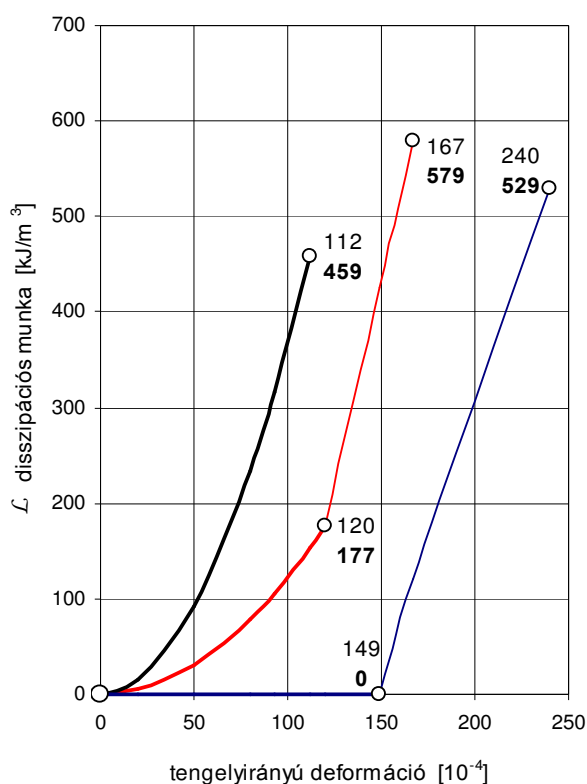
$\Phi _{\dot{\varepsilon}=0,031 \cdot 10^{-4}} \approx \Phi _{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0}$	$\Phi_f _{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} \approx 520 \text{ kJ/m}^3,$	$\Phi_t _{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} \approx 607 \text{ kJ/m}^3,$
$\Phi _{\dot{\varepsilon}=1,93 \cdot 10^{-4}} = \Phi _{0 < \dot{\varepsilon} < \infty}$	$\Phi_f _{0 < \dot{\varepsilon} < \infty} \approx 337 \text{ kJ/m}^3,$	$\Phi_t _{0 < \dot{\varepsilon} < \infty} \approx 371 \text{ kJ/m}^3,$
$\Phi _{\dot{\varepsilon}=0,5} \approx \Phi _{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty}$	$\Phi_f _{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty} \approx 203 \text{ kJ/m}^3,$	$\Phi_t _{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty} \approx 224 \text{ kJ/m}^3.$

Ennek a Φ értéknek az alakulása azt mutatja, hogy a határpontok jelentős törvényszerűségeket nem tükröznek. Tehát *nem valószínű*, hogy a képlékenységi vagy a tönkremeneteli határ a rugalmas potenciálnak lenne a függvénye. Más szóval, a folyás bekövetkezése, illetve az anyag törése nem attól függ, hogy mennyi reverzibilis (potenciális) munkát végeztünk az anyagon.

AZ $\mathcal{L}$ DISSZIPÁCIÓS MUNKA. Ennek alakulását a kísérleti adatoknál, a 17. ábra mutatja. A disszipáció mértékét két körülmény határozza meg:

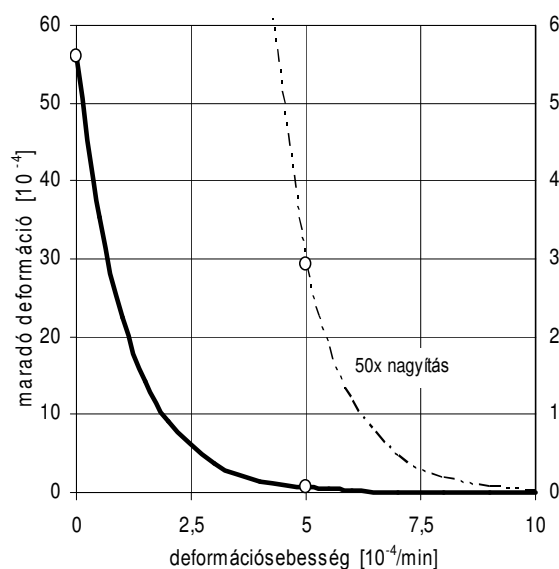
- egyrészt a deformációs sebesség, vagyis az a körülmény, hogy egy adott deformációt milyen rövid idő alatt kívánunk létrehozni: minél gyorsabban, annál nagyobb az energiaveszteség,
- másrészt a képlékeny állapotban a maradó deformációk nagysága (18. ábra).

A 17. ábra azt sugallja, hogy a képlékenységi határ nem valószínű, hogy az $\mathcal{L}$ -től függne. A törésnek esetleg lehetne jellemzője, de akkor magyarázatot kellene találni a disszipációs munka



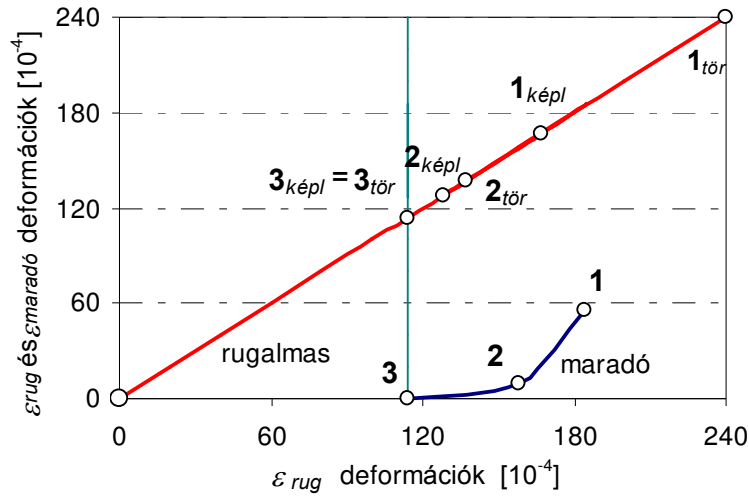
17. ábra

$459 < 529 < 579 \text{ kJ/m}^3$
nagyságú szórására. Ennek a feltételnek a vizsgálatát tehát még nem lehet lezárni.



18. ábra

Ha ábrázoljuk a rugalmas és a maradó deformációkat a képlékenységi és a törési határon, akkor a 19. ábrán látható eredményt kapjuk.



25. ábra

1: $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ „végtelen lassú” esetben:

$1_{képl}$ – a képlékeny határ,

$1_{tör}$ – a törési határ,

2: $0 < \dot{\varepsilon} < \infty$ „közepes sebességű” esetben:

$2_{képl}$ – a képlékeny határ,

$2_{tör}$ – a törési határ,

3: $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$ „végtelen gyors” esetben:

$3_{képl}$ – a képlékeny határ,

$3_{tör}$ – a törési határ.

A $W = \Phi + \mathcal{L}$ kifejezés mindhárom elemét megvizsgáltuk, most már a deviátoros (torzulási) és gömbi (térfogatváltozási) munkák vizsgálata van hátra. Ezzel kapcsolatban azonban az a nehézség jelentkezik, hogy a mérések nem tartalmazták a keresztirányú deformációk értékét. Emiatt legfeljebb becslést lehet tenni, ami azt jelenti, hogy a következőkben közöltek csupán durva közelítések lehetnek.

A KÉPLÉKENYSÉGI HATÁRFELTÉTEL A W' TORZULÁSI DEFORMÁCIÓS MUNKÁVAL KIFEJEZVE. Ha az anyag ismeretében a POISSON-számot $m = 3 \dots 4,3$ közötti értékűnek vesszük, akkor az egytengelyű állapotban

$$\sigma_o = \frac{1}{3} \sigma \text{ és az } \varepsilon_o = \frac{1}{3} (\varepsilon - 2\varepsilon_k) \approx \left(\frac{1}{6} \dots \frac{1}{9}\right) \varepsilon,$$

vagyis az ε_o arányos az ε -nal, ezért W és a W' között jelleghen nincs komoly eltérés.

Ebből következik, hogy ugyanilyen valószínűséggel kimondható a W' torzulási munkára is, hogy az anyag akkor kerül képlékeny állapotba, ha a torzulási deformációs munka egy küszöbértéket elér. Tehát az egytengelyű kísérletekből további következtetés nem adódik.

A KÉPLÉKENYSÉGI FELTÉTEL A W_0 DEFORMÁCIÓS MUNKÁVAL KIFEJEZVE. A W_0 térfogatváltozási deformációs munkára nem mondjuk ugyanezt, mert az a gyakorlati tapasztalatunk, – ami persze nem jelent semmit, – hogy a tisztán térfogatváltozás, a hidrosztatikus nyomás nem okoz maradó deformációt.²⁰ A W_0 konkrét értékeinek kiszámítása a mérési adatokból gondot jelent, mivel KLECZEK, Z. nem rögzítette az ε_k keresztirányú deformációkat, tehát nem tudjuk az ε_0 átlagos deformációt meghatározni, következésképp nem tudunk a σ_0, ε_0 értékpárok között kiegyenlítő függvényt számolni, s így a anyagegyenlet térfogati részét meghatározni.

Egy durva közelítést azonban alkalmazhatunk, amire nagyon építeni természetesen nem lehet. ASSZONYI (1975) bemutatta, hogy a tengelyirányú és keresztirányú deformáció hányadosából képzett $m = -\varepsilon / \varepsilon_k$ POISSON-szám értéke 2,96 ... 4,32 közé eshet. Azonban azt is tudjuk, hogy az m nem anyagállandó, értéke a kísérlet során változik, bár igaz, hogy meghatározott értékhez konvergál. Ha a „speciális” POYNTING-THOMSON-modell és a „klasszikus” POYNTING-THOMSON-modell összeházasítását vennénk alapul, akkor erre egy becslést tehetnénk. Vagyis a térfogatváltozási egyenlet időtől függetlennek vennénk és a K kompresszibilitási tényezőt az E rugalmassági modulusból és az m -ből származtathatjuk:

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad 3K = \frac{Em}{m-2}, \quad \varepsilon_k = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_k}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon - 2\varepsilon_k) = \frac{m-2}{3m}\varepsilon, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma.$$

Nincs értelme ezt a gondolatmenetet tovább folytatni, mert az így számított Φ' és Φ_0 , valamint $\mathcal{L}'$ és $\mathcal{L}_0$ -ról is csak azt mondhatjuk biztosra, hogy összegük megegyezik a Φ -vel és az $\mathcal{L}$ -lel.

A HATÁRFELTÉTELEKBEN SZEREPLŐ KIFEJEZÉSEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA.

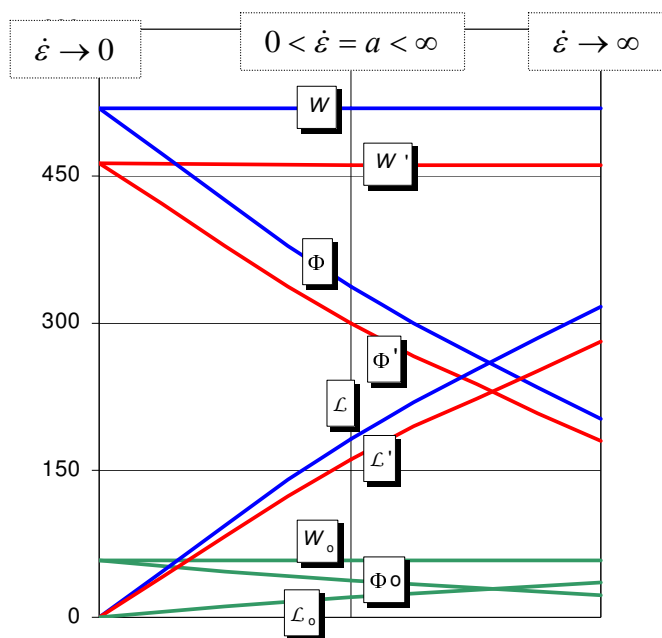
4. táblázat

		A KÉPLÉKENYSÉGI HATÁR ÉRTÉKEI			A TÖNKREMETETELI HATÁR ÉRTÉKEI		
		$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$	$0 < \dot{\varepsilon} < \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$	$0 < \dot{\varepsilon} < \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$
σ	[MPa]	69,8	85,7	117	89	100,2	134,5
ε	$[10^{-4}]$	149	120	93	240	167	112
W	[kJ/m ³]	520	519	519	1243	956	753
W'	[kJ/m ³]	462	462	462	1104	850	670
W_0	[kJ/m ³]	58	58	58	138	106	84

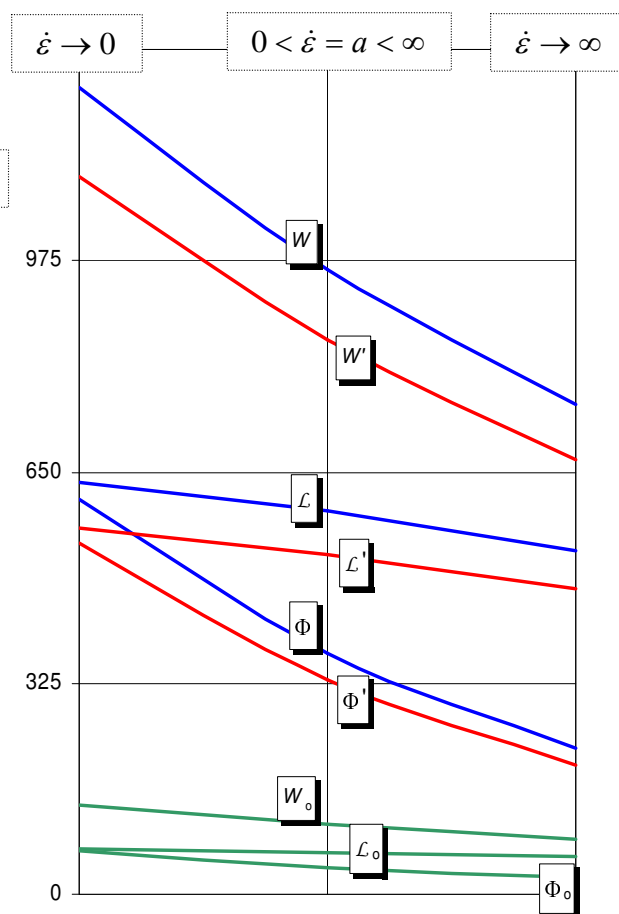
²⁰ Legalábbis az általunk megvalósítható nyomások tartományában. Bár annak a közszájon forgó megállapításnak a bizonyítását sehol sem találtuk, hogy tetszőleges W_0 térfogati igénybevétellel sem maradó deformációt, sem tönkremenetelt nem lehet létrehozni.

4. táblázat folytatása

		A KÉPLÉKENYSÉGI HATÁR ÉRTÉKEI			A TÖNKREMENTETELI HATÁR ÉRTÉKEI		
		$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$	$0 < \dot{\varepsilon} < \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$	$0 < \dot{\varepsilon} < \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$
Φ	[kJ/m ³]	520	337	203	838	583	391
Φ'	[kJ/m ³]	462	300	180	741	518	347
Φ_o	[kJ/m ³]	58	37	23	93	65	43
$\mathcal{L}$	[kJ/m ³]	0	182	317	405	373	362
$\mathcal{L}'$	[kJ/m ³]	0	162	282	360	332	332
$\mathcal{L}_o$	[kJ/m ³]	0	20	35	45	41	40



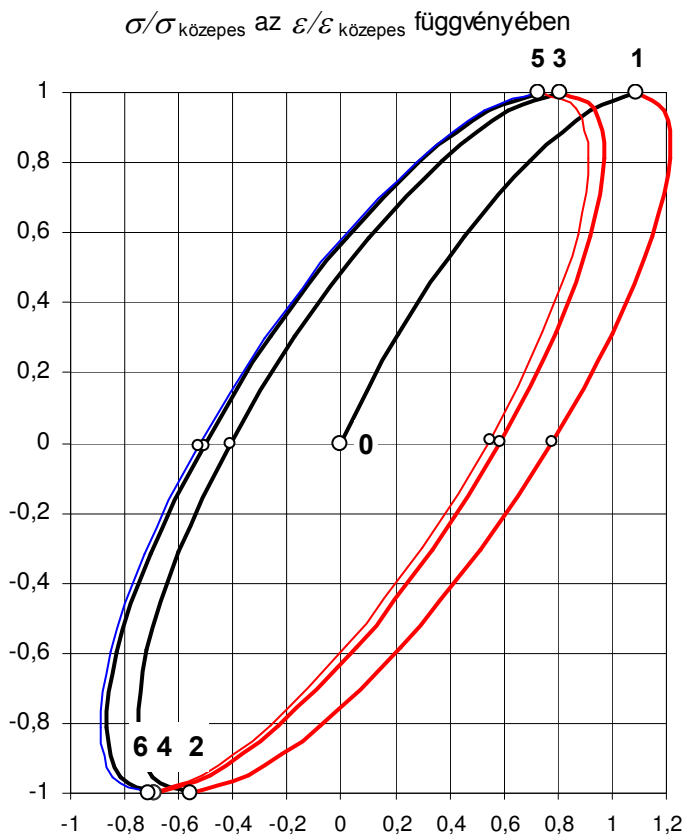
26. ábra. A deformációs munka értéke [kJ/m³-ben] a képlékenységi határon, a három különböző terhelési sebesség esetén



27. ábra. A deformációs munka értéke [kJ/m³-ben] a tönkremeneteli határon, a három különböző terhelési sebesség esetén

ZÁRÓ MEGJEGYZÉSEK. Az anyagtörvény általános meghatározásánál a képlékenységi feltételre a W deformációs munka adódott. Ez alatt természetesen azt kell érteni, hogy a teljes munka és bármelyik komponense $[W, W', W_0, \Phi, \Phi', \Phi_0, \mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{L}_0]$, illetve ezek kombinációja viheti a szerepet.

Ezek közül a térfogatváltozással kapcsolatos tagok általában kizárhatók, mert ezidáig nem tudunk olyan esetről, hogy csak hidrosztatikus terhelésekkel maradó alakváltozást sikerült volna létrehozni.



28. ábra. Periodikus terhelés σ - ε görbéje

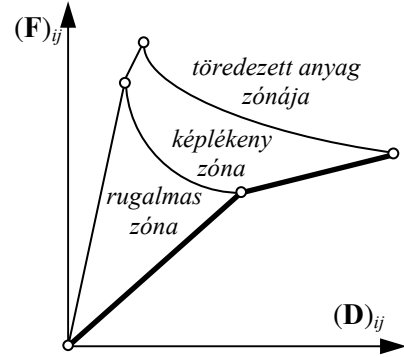
Ugyanez a helyzet a disszipációs munka esetében is. Például ismétlődő terhelések esetén (egy lemez hajlítgatása a rugalmas határ alatti igénybevétellel) nem tudunk képlékeny folyási jelenségekről, azonban a bizonyossághoz kiterjedt kísérleteket kell még végezni. Gondoljunk az előző fejezet 1. és 5. ábrájára, ahol periodikusan ismétlődő kísérlet eredményei láthatók. Ha ezeket az adatokat nem az idő függvényében ábrázoljuk, hanem a megszokott σ - ε síkon, akkor az ábrán látható görbét kapjuk. A görbék által határolt terület (a hiszterézis) a disszipációs munkával arányos. Néhány periódus után ez már nem változik. A W és az $\mathcal{L}$ értéke nyomon követhető ($\mathcal{L} = \oint \sigma d\varepsilon$).

6. FEJEZET
EGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY A KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓK
TARTOMÁNYÁBAN

A FEJLŐDÉSI (EVOLÚCIÓS) EGYENLET. Az entrópia-növekedés általános formájából a 2. fejezetben [(27a) formula] az

$$(1) \quad \left[\left(1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)^S \right] : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})^S - \rho T \xi : \dot{\xi} \geq 0$$

egyenlőtlenséget vezettük le. Ez a fejlődési (evolúciós) egyenlet rugalmas és képlékeny állapotra egyaránt érvényes, az eddigi megkötésekkel: a kémiai, elektromágneses kölcsönhatástól eltekintettünk, s a termikus kölcsönhatást pedig izotermikus ($T = \text{constans}$), vagy adiabatikus ($Tds = 0$, termikus munkavégzés nincs) feltevással blokkoltuk.



MECHANIKAI EGYENSÚLY esetén a termodinamikai erők $[\mathbf{J}]$ és termodinamikai áramok $[\mathbf{X}]$ egyaránt zérusok:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_A : \mathbf{J}_A + \mathbf{X}_\xi : \mathbf{J}_\xi &\geq 0, \\ \mathbf{X}_A &\equiv \left(1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)^S = \mathbf{0}, & \mathbf{X}_\xi &\equiv \dot{\xi} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{J}_A &\equiv (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})^S = \mathbf{0}, & \mathbf{J}_\xi &\equiv -\rho T \xi = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ennek megfelelően

$$(2) \quad \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \mathbf{F} \right) = \mathbf{0},$$

ezért *egyensúlyi állapotban* az anyagtörvény:

$$(3) \quad \mathbf{F}^{eq} = - \frac{\rho T}{1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right).$$

A (3) egyenlet magába foglalja a *rugalmas esetet* [$\Psi = 0$] is:

$$(4) \quad \mathbf{F}^{eq} \Big|_{elast} := \mathbf{F}^{rev} = -\rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right),$$

amelyet a 3. fejezetben részletesen tárgyaltunk, és a *képlékeny esetet is* [$\Psi = 1$] is, a melyet a 4. fejezet vizsgált:

$$(5) \quad \mathbf{F}^{eq} \Big|_{plast} = \mathbf{F}^{eq,irrev} = -\frac{\rho T}{1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right).$$

A (4) és a (5) különbsége az egyensúlyi állapotban jelentkező maradó deformációs állapothoz tartozó feszültség²¹: $\mathbf{F}^{maradó} := \mathbf{F}^m$

$$\mathbf{F}^m = \mathbf{F}^{eq,irrev} - \mathbf{F}^{rev} = -\frac{\rho T}{1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) = \frac{\rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}}{1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right).$$

A reverzibilis feszültség értékét behelyettesítve a (3) egyensúlyi anyagtörvény a reverzibilis feszültségtenzorral felírva:

$$(6) \quad \mathbf{F}^{eq} = -\frac{\rho T}{1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) = \frac{1}{1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \mathbf{F}^{rev}.$$

Attól függően, hogy az egyensúlyi anyagtörvényt az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzorral, a $\mathbf{D}$ deformációtenzorral, vagy az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{E}_0$ deformációs deviátor- és gömbtenzorral adjuk meg, az egységes anyagtörvény különböző alakjait kapjuk:

$$(7) \quad \mathbf{F}^{eq} = \begin{cases} -\rho T (\mathbf{D} + \mathbf{I}) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{D}}, & \text{ha } \Psi = 0, \\ -\frac{\rho T}{1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} (\mathbf{D} + \mathbf{I}) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{D}}, & \text{ha } \Psi = 1. \end{cases}$$

$$(8) \quad \mathbf{T}^{eq} = \begin{cases} -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right], & \text{ha } \Psi = 0, \\ -\frac{\rho T}{1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right], & \text{ha } \Psi = 1. \end{cases}$$

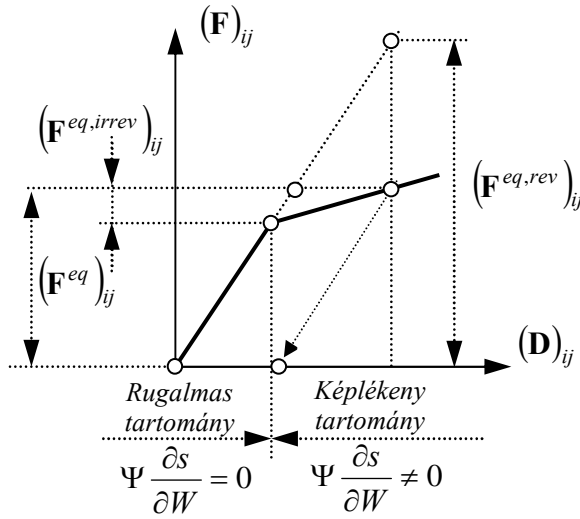
$$(9) \quad \mathbf{T}_0^{eq} = \begin{cases} -\rho T \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0) \right], & \text{ha } \Psi = 0, \\ -\frac{\rho T}{1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0) \right], & \text{ha } \Psi = 1. \end{cases}$$

²¹Ez nem azonos a mechanikában használt maradó (remanens) feszültséggel, mert az alatt a $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ állapothoz tartozó $\mathbf{F}$ feszültségtenzort értik. Itt pedig a plasztikus és rugalmas feszültségállapot különbségéről van szó.

A REVERZIBILIS FESZÜLTÉG-TENZOR²² – a rugalmas állapotbeli egyensúlyi feszültség-tenzor - összefüggései [3. fej. (15) és (16)]:

$$(10) \quad \mathbf{F}^{rev} = -\rho T (\mathbf{I} + \mathbf{D}) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{D}} = -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0) \mathbf{I} \right],$$

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{rev} &= \mathbf{F}^{rev} - \sigma_0^{rev} \mathbf{I} = -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right], \\ \mathbf{T}_0^{rev} &= \sigma_0^{rev} \mathbf{I} = -\rho T \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0) \right] \mathbf{I}. \end{aligned}$$



1. ábra

A reverzibilis és az irreverzibilis összetevők közötti összefüggéseket az 1. ábrán mutatjuk be egy tetszőleges ij indexű skalár komponensre vonatkozóan. (Az ábrán az egyszerűbb áttekinthetőség kedvéért lineáris összefüggést vettünk.) Az ábrából látható, hogy mivel a tényleges $\mathbf{F}^{eq}$: az $\mathbf{F}^{eq,rev}$ és $\mathbf{F}^{eq,irrev}$ különbsége, az $\mathbf{F}^{eq,rev}$ általában nagyobb, mint ami egyáltalán elérhető, sokszor túl van a tönkremeneteli határon is.

Ez magától értetődő, mert a képlékenységi határ után az anyag rugalmas viselkedése pont olyan, mint a határ alatt. Szerepe ebben ki is merül az (a) és (b) állapot kijelölésében.

A reverzibilis feszültség-tenzor konkrét lineáris összefüggése (a HOOKE-törvény):

$$(10a) \quad \mathbf{F}^{rev} = 2G \left[\mathbf{D} + \frac{1}{3} \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \text{Tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right] = 2G \left[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \varepsilon_0 \mathbf{I} \right],$$

$$(11a) \quad \mathbf{T}^{rev} = 2G \mathbf{E}, \quad \mathbf{T}_0^{rev} = 3K \mathbf{E}_0, \quad [\sigma_0 = 3K \varepsilon_0]$$

alapján:

$$\begin{aligned} -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right] &= 2G \mathbf{E}, \\ -\rho T \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0) \right] \mathbf{I} &= 3K \varepsilon_0 \mathbf{I}, \end{aligned}$$

²² A feszültségállapotban a reverzibilis változáshoz tartozó tenzor.

Így a rugalmas anyagállandókra a

$$\begin{aligned} 2GI &:= -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \right] \mathbf{E}^{-1}, \\ 3K &:= -\rho T \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0) \right] \end{aligned}$$

összefüggést vezettük le [3. fej. (17)].

A (7) összefüggés egytengelyű feszültségállapot esetén a

$$\begin{aligned} (10) \quad \sigma &= -2\rho T \left(\frac{m+1}{3m} \right)^2 \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon} \varepsilon, \\ \sigma_0 &= -2\rho T \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_0} (1 + \varepsilon_0). \end{aligned}$$

skalár egyenletekre egyszerűsödik, ahol az $\hat{s}$, az egytengelyű állapothoz tartozó egyensúlyi entrópia.

A HOOKE-törvény pedig a már megszokott

$$\sigma = E\varepsilon, \quad E := 2G \frac{m+1}{m} := 3K \frac{m-2}{m}, \quad m = \frac{2G}{E-2G} = \frac{6K}{3K-E} = \frac{6K+2G}{3K-2G}$$

egyszerű alakot ölti, s a (10) két egyenletéből - a $\sigma = E\varepsilon$ és a $\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$ egyenlőség alapján – az anyagállandók termodinamikai összefüggései

$$\begin{aligned} (11) \quad E &= -2\rho T \left(\frac{m+1}{3m} \right)^2 \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon}, \\ 3K &= -2\rho T \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_0} \frac{1 + \varepsilon_0}{\varepsilon_0}, \\ 2G &= -2\rho T \frac{m-2}{m+1} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \varepsilon_0} \frac{1 + \varepsilon_0}{\varepsilon_0}, \end{aligned}$$

formájúra egyszerűsödnek.

AZ ÁLTALÁNOS EGYENSÚLYI FESZÜLTSEGTENZOR KONKRÉT ALAKJA. Ha a (7)-(9) anyagegyenletekbe a (10a)-(11a) HOOKE-törvényt behelyettesítjük, akkor

$$(12) \quad \mathbf{F}^{eq} = \begin{cases} 2G \left[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \varepsilon_0 \mathbf{I} \right], & \text{ha } \Psi = 0, \\ -\frac{2G}{1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \varepsilon_0 \mathbf{I} \right], & \text{ha } \Psi = 1. \end{cases}$$

$$(13) \quad \mathbf{T}^{eq} = \begin{cases} 2G\mathbf{E}, & \text{ha } \Psi = 0, \\ -\frac{2G}{1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \mathbf{E}, & \text{ha } \Psi = 1. \end{cases}$$

$$(14) \quad \mathbf{T}_o^{eq} = \begin{cases} 3K\mathbf{E}_o, & \text{ha } \Psi = 0, \\ -\frac{3K}{1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \mathbf{E}_o, & \text{ha } \Psi = 1. \end{cases}$$

Az 5. fejezetben *egytengelyű állapotban* elemeztük az anyagtörvényt, s ekkor a következő eredményt kaptuk:²³

<i>Az anyagtörvény</i>	
$\sigma = E\varepsilon - \Psi(E - E_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f)$	
<i>Rugalmas tartományban</i> [$\Psi = 0$]	<i>Képlékeny tartományban</i> [$\Psi = 1$]
$\sigma = E\varepsilon$	$\sigma = E\varepsilon - (E - E_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f) = E\varepsilon_f + E_{pl}(\varepsilon - \varepsilon_f)$

A

$$\tilde{\psi}(W) = \Psi \psi(W)$$

képlékenységi határfeltételt egy Ψ egységugrásfüggvény egy $\psi(W)$ függvény szorzataként vettük fel, amelynek legegyszerűbb esete, ha

$$(15) \quad \psi(W) \equiv W - W_f,$$

ahol W_f a képlékenységi határhoz tartozó, térfogategységre jutó deformációs munka (vagy torzulási deformációs munka). Vagyis (15) szerint rugalmas állapotban van a test mindaddig, amíg $W - W_f \leq 0$, s képlékeny állapotba kerül (vagyis megjelennek a maradó deformációk is), ha $W - W_f \geq 0$. Az is köztudott, hogy a képlékenységi határ túllépése után, ha tehermentesítünk, akkor a deformációk csak rugalmasak lehetnek (ui. a maradók nem alakulhatnak vissza). Ez azt jelenti, hogy amennyiben a deformációs munka csökken: $\Delta W < 0$, vagyis negatív, akkor csak a rugalmas deformációk változhatnak. Ezért a $\tilde{\psi}$ függvény:

²³ A klasszikus POYNTING-THOMSON-test estére, amelynél a térfogatváltozási egyenlet a $\sigma_o = 3K\varepsilon_o$ alakú, a $\sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o - \tau_o\sigma_o$ helyett, vagyis $K_v / K - \tau_o = 0$.

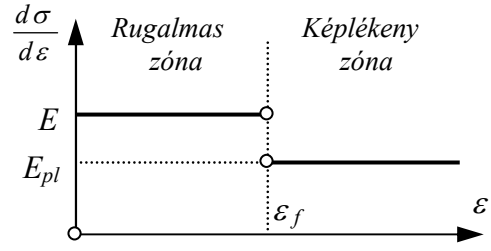
$$(16) \quad \tilde{\psi}(W) = \begin{cases} 0, & \text{ha } W - W_f \leq 0, \text{ vagy } \Delta W \leq 0, \\ W - W_f, & \text{ha } W - W_f \geq 0, \text{ és } \Delta W \geq 0. \end{cases}$$

A Ψ ugrásfüggvény bevezetése nem egy önkényes feltevésből fakadt, hanem az entrópia-függvényből, vagyis az ugrás tényéből. Az egytengelyű kísérletnél láttuk, hogy az anyagtörvény két lineáris összefüggésből áll:²⁴

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{ha } \varepsilon \leq \varepsilon_f, \\ E\varepsilon_f + E_{pl}(\varepsilon - \varepsilon_f), & \text{ha } \varepsilon \geq \varepsilon_f, \end{cases}$$

amelynél E és E_{pl} az iránytangens, s

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \begin{cases} E, & \text{ha } \varepsilon \leq \varepsilon_f, \\ E_{pl}, & \text{ha } \varepsilon \geq \varepsilon_f. \end{cases}$$



2. ábra

A hosszadalmas levezetéseket mellőzve – mivel a rugalmas és a képlékeny tartományban egyaránt lineáris anyagegyenletet veszünk – a

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= -\frac{\rho T}{1 + \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left[\mathbf{E} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right] = \mathbf{T}^{eq}|_{elast} + \mathbf{T}^{eq}|_{plast} = \mathbf{T}^{rev} + \mathbf{T}^{eq,irrev} = \\ &= -\rho T \underbrace{\left[\mathbf{E} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right]}_{2GE} + \underbrace{\frac{\rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}}{1 + \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left[\mathbf{E} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right]}_{-\Psi(2G-2G_{pl})(\mathbf{E}-\mathbf{E}_f)}, \end{aligned}$$

és

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}_o^{eq} &= -\frac{\rho T}{1 + \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right] \mathbf{I} = \mathbf{T}_o^{eq}|_{elast} + \mathbf{T}_o^{eq}|_{plast} = \mathbf{T}_o^{rev} + \mathbf{T}_o^{eq,irrev} = \\ &= -\rho T \underbrace{\left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right] \mathbf{I}}_{3K\mathbf{E}_o = 3K\varepsilon_o \mathbf{I}} + \underbrace{\frac{\rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}}{1 + \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right] \mathbf{I}}_{-\Psi(3K-3K_{pl})\mathbf{E}_o = -\Psi(3K-3K_{pl})\varepsilon_o \mathbf{I}}. \end{aligned}$$

egyenletekből a *anyagtörvényre* a következő összefüggések adódnak:

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \\ \mathbf{T}_o^{eq} &= 3K\mathbf{E} - \Psi(3K - 3K_{pl})(\mathbf{E}_o - \mathbf{E}_{of}), \quad [\sigma_o^{eq} = 3K\varepsilon_o - \Psi(3K - 3K_{pl})(\varepsilon_o - \varepsilon_{of})]. \end{aligned}$$

²⁴ Ott az E_{pl} -t M -mel jelöltük.

$$(19a) \quad \mathbf{T}^{eq} = \begin{cases} 2G\mathbf{E}, & \text{ha } \Psi = 0, \\ 2G_{pl}\mathbf{E} + (2G - 2G_{pl})\mathbf{E}_f, & \text{ha } \Psi = 1, \end{cases}$$

$$(19b) \quad \mathbf{T}_o^{eq} = \begin{cases} 3K\mathbf{E}_o, & \text{ha } \Psi = 0, \\ 3K_{pl}\mathbf{E}_o + (3K - 3K_{pl})\mathbf{E}_{of}, & \text{ha } \Psi = 1. \end{cases}$$

A (17) és (19a), valamint (18) és (19b) egyenlővé tétele

$$(20) \quad \begin{aligned} & -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right] = 2G\mathbf{E}, \\ \Psi = 0 & \quad -\rho T \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right] \mathbf{I} = 3K\varepsilon_o \mathbf{I}, \\ & \frac{\rho T}{1 + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} 2G\mathbf{E} = (2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \\ \Psi = 1 & \quad \frac{\rho T}{1 + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} 3K\varepsilon_o \mathbf{I} = (3K - 3K_{pl})\varepsilon_o \mathbf{I}, \end{aligned}$$

alapján, az anyagtörvényben szereplő *anyagállandók termodinamikai összefüggései* egyszerűen kiadódnak:

$$(21) \quad \begin{aligned} 2G\mathbf{I} &:= -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \right] \mathbf{E}^{-1}, \\ 2G_{pl}\mathbf{I} &:= 2G \left(\mathbf{I} - \frac{\rho T}{1 + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \mathbf{E}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f)^{-1} \right), \\ 3K &:= -\rho T \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right], \\ 3K_{pl} &:= 3K \left(1 - \frac{\rho T}{1 + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \right). \end{aligned}$$

A *plasztikus* anyagállandók, mint látjuk, nem függetlenek a rugalmastól, a $2G_{pl}$ a $2G$, míg a $3K_{pl}$ pedig a $3K$ látszólagos megváltozása.

A maradó deformációk – a definícióból következően – pedig

$$\mathbf{E}^m = \mathbf{E} - \mathbf{E}^{rev} = \left(1 - \frac{G_{pl}}{G} \right) (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \quad \mathbf{E}_o^m = \mathbf{E}_o - \mathbf{E}_o^{rev} = \left(1 - \frac{G_{pl}}{G} \right) (\mathbf{E}_o - \mathbf{E}_{of})$$

formában írhatók fel.

EGYTENGELYŰ FESZÜLTSGÁLLAPOT esetén az anyagegyenlet

$$(22) \quad \sigma^{eq} = \begin{cases} E\varepsilon, \\ E_{pl}\varepsilon + (E - E_{pl})\varepsilon_f, \end{cases} \quad \sigma_o^{eq} = \begin{cases} 3K\varepsilon_o, \\ 3K_{pl}\varepsilon_o + (3K - 3K_{pl})\varepsilon_{of}, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ha } \Psi = 0, \\ \text{ha } \Psi = 1. \end{matrix}$$

alakú. Ha bevezetjük az m POISSON-számot, a tengely- és a keresztirányú fajlagos nyúlás jellemzésére [$m = -\varepsilon / \varepsilon_k$], akkor a $\Psi = 0$ rugalmas állapotban a közismert

$$E := 2G \frac{m+1}{m} := 3K \frac{m-2}{m}, \quad m = \frac{6K+2G}{3K-2G} = \frac{2G}{E-2G} = \frac{6K}{3K-E}$$

összefüggéseket kapjuk. A $\Psi = 1$ képlékeny állapotban is fenn kell állni az arányosságnak:

$$E_{pl} := 2G_{pl} \frac{m_{pl}+1}{m_{pl}} := 3K_{pl} \frac{m_{pl}-2}{m_{pl}}, \quad m_{pl} = \frac{6K_{pl}+2G_{pl}}{3K_{pl}-2G_{pl}} = \frac{2G_{pl}}{E_{pl}-2G_{pl}} = \frac{6K_{pl}}{3K_{pl}-E_{pl}}.$$

Azonban itt már dilemmáink vannak.

Az irodalomra általánosan az a jellemző, hogy kimondja azt a – semmivel nem bizonyítható – feltevést, miszerint „a képlékeny állapotban az anyag összenyomhatatlan”, vagyis

$$E_{pl} := 3G_{pl} \quad m_{pl} = 2.$$

Képlékeny állapotban az anyag, ha előtte nem volt összenyomhatatlan, akkor itt sem lesz az, de létezhet a képlékenységi határfeltétel és a törési határfeltétel között egy olyan határ, amely után már az eredetileg összenyomható anyag is összenyomhatatlanná válik. Az is előfordulhat, hogy egyes anyagoknál nincs ilyen határ, hamarabb bekövetkezik a tönkremenetel, minthogy összenyomhatatlanná válna az anyag. [ASSZONYI, 1975] a *tökéletesen kifejlődött képlékeny állapot tartományának* nevezte azt a tartományt, ahol az anyag már összenyomhatatlan.

Feltevésünk szerint, ha az anyagi testre, egyensúlyi állapotban (akkor és csakis akkor) jellemző POISSON-szám $m > 2$, akkor a képlékenységi határ nagyon kicsi $\Delta\varepsilon$ átlépése után sem csökkenhet le 2-re. Ha pedig ez nem történik meg, akkor később se történhet meg, mert az E_{pl} , vagy G_{pl} értéke konstans kell, hogy legyen. Ez nem zárja ki, hogy a későbbiekben ne létezzen még egy határ, ami után a tökéletesen kifejlődött képlékeny állapot tartománya következik. Ez viszont azt jelenti, hogy addig

$$m = m_{pl},$$

tehát

$$E_{pl} := 2G_{pl} \frac{m+1}{m} := 3K_{pl} \frac{m-2}{m}, \quad m = \frac{6K_{pl}+2G_{pl}}{3K_{pl}-2G_{pl}} = \frac{2G_{pl}}{E_{pl}-2G_{pl}} = \frac{6K_{pl}}{3K_{pl}-E_{pl}},$$

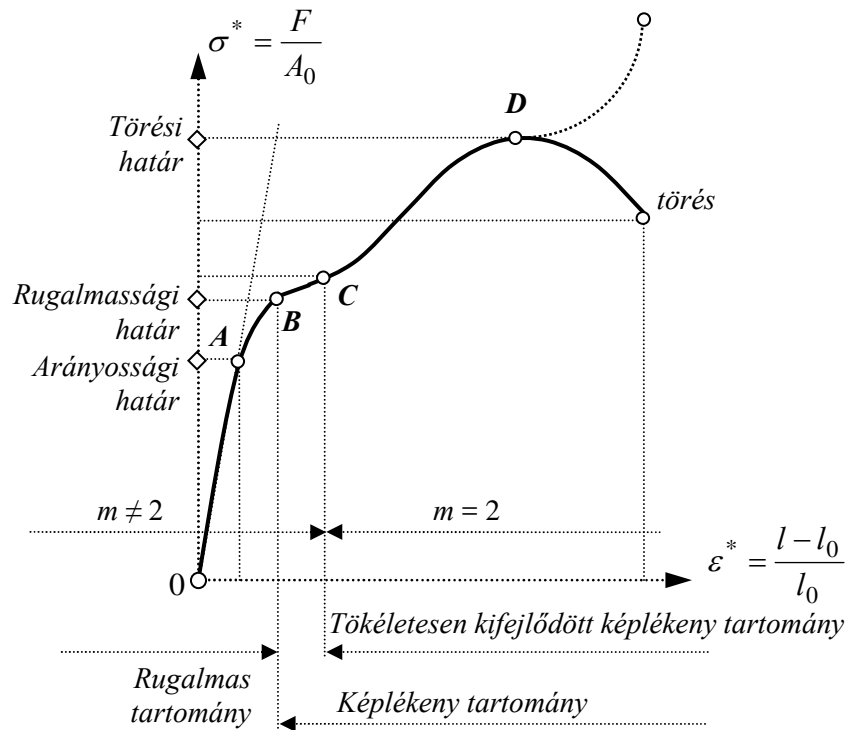
s ekkor az

$$m = \frac{6K_{pl} + 2G_{pl}}{3K_{pl} - 2G_{pl}} = \frac{6K + 2G}{3K - 2G} = \frac{2G_{pl}}{E_{pl} - 2G_{pl}} = \frac{2G}{E - 2G} = \frac{6K_{pl}}{3K_{pl} - E_{pl}} = \frac{6K}{3K - E}$$

összefüggésből

$$\frac{2G_{pl}}{2G} = \frac{E_{pl}}{E}, \quad \frac{K}{G} = \frac{K_{pl}}{G_{pl}}.$$

A „képlékeny állapotban az anyag összenyomhatatlan” tévhitnek azonban nagyon is reális alapjai vannak. A 3. ábrán egy laboratóriumi görbét tüntettünk fel, amelynél bejelöltük azt a *C* pontot, ahol valószínűsíthető (de nem bizonyított), hogy az anyag utána összenyomhatatlanná válik.

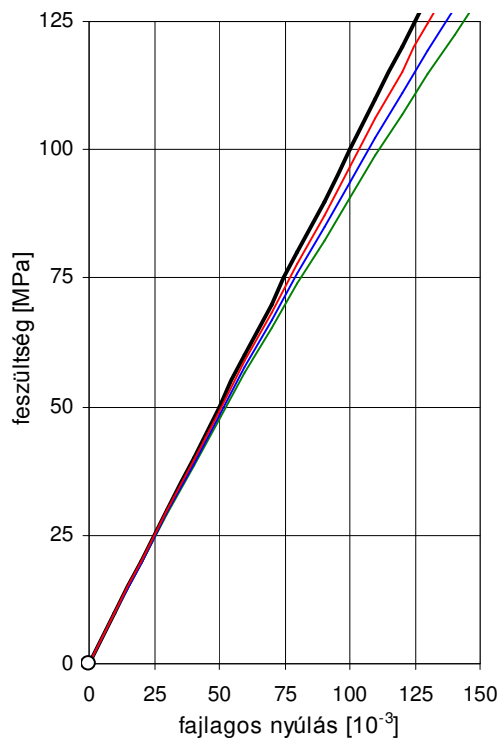


3. ábra

A törést a *D* pontban célszerű elképzelni, mert az utána lévő szakasz már kontrollálhatatlan.

Ha *D* utáni görbe lefelé megy, az azt mutatja, hogy a keresztmetszet már leszűkül (pl. húzásnál a kontrakció miatt), nyomásnál a törési diszkontinuitások miatt. Ha felfelé, akkor már a vizsgálati berendezés tehetetlenségének hatása jelenik meg.

Az *A* és *B* pontok közötti görbületet esetleg annak is tekinthetnénk, hogy a kísérleteknél a feszültségeket és deformációkat a kezdeti állapottal adjuk meg:

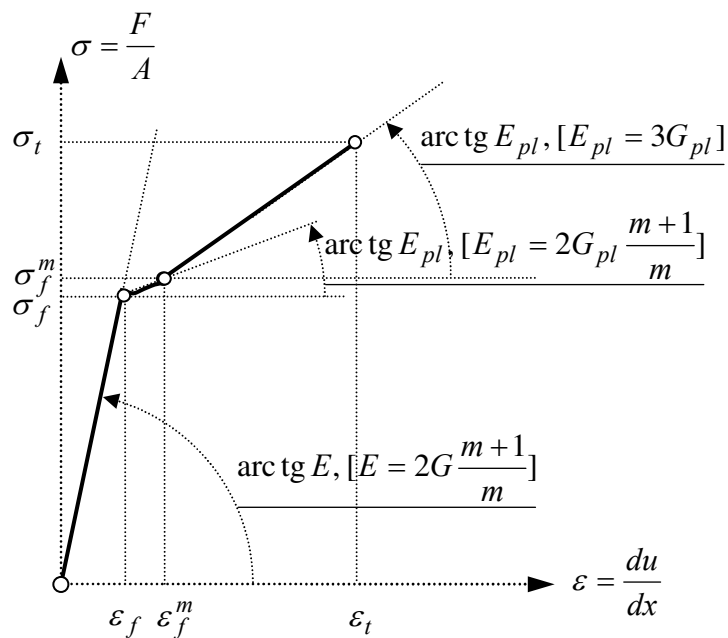


$$\sigma^* = \frac{F}{A_0}, \quad A = A_0(1 + \varepsilon_k)^2 = A_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\right)^2$$

módon. Az F/A és F/A_0 közötti differencia jelenik meg a 4. ábrán.

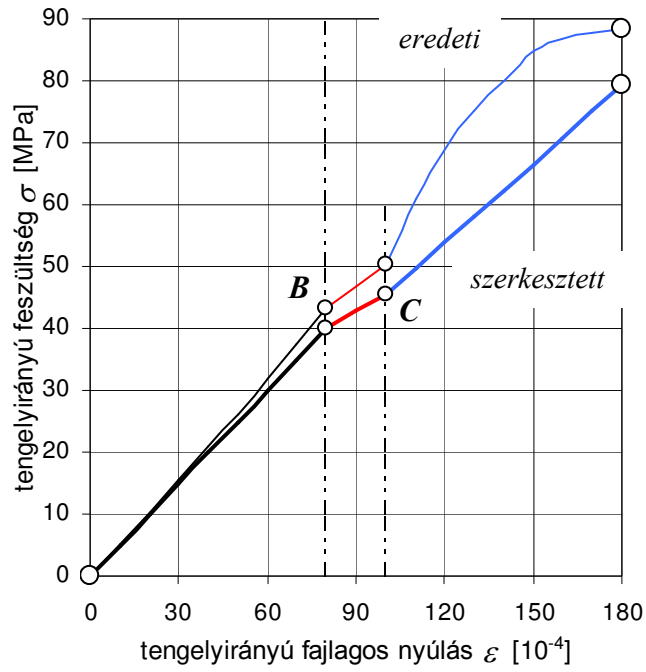
Ha elfogadnánk azt a feltételezést, hogy van olyan állapot, mely után az anyag összenyomhatatlan ($m = 2$), akkor az 5. ábrán látható elvi összefüggéssel dolgozhatunk.

4. ábra



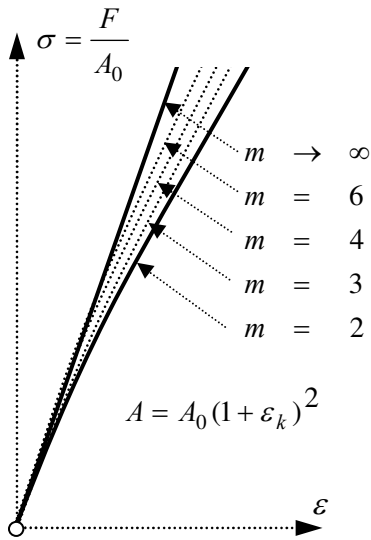
5. ábra

A 3. ábrán lévő $\sigma^* = f(\varepsilon^*)$ görbét átszerkesztve (az 5. ábra bejelölt összefüggéseivel) a valódi (tényleges) $\sigma = f(\varepsilon)$ összefüggésre, a 6. ábrán látható képhez jutunk.



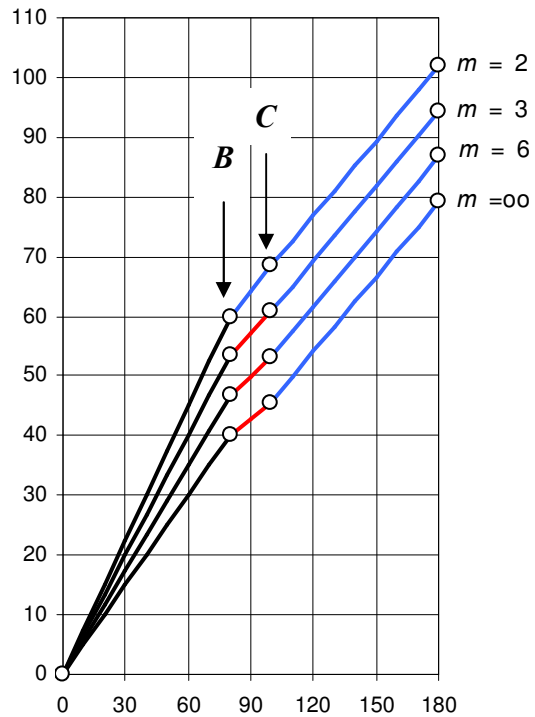
6. ábra

Innen már érthető, hogy a képlékenységtan klasszikus irodalmában miért hanyagolják el a $[B-C]$ még összenyomható részt.



7. ábra

A 7. ábrán lévő összefüggésekkel, a 8. ábrán adott $2G$ és $2G_{pl}$ értékekhez felrajzoltuk a különböző m POISSON-számok esetére vonatkozó egyensúlyi egytengelyű anyagegyenleteknek megfelelő görbéket, bár ez csak egy elvi spekuláció.



8. ábra

NEMEGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY A KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓK
TARTOMÁNYÁBAN

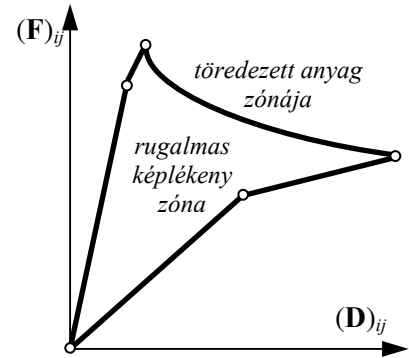
A FEJLŐDÉSI EGYENLET. A 2 fejezetből [(27a) formula] az anyagtörvényt determináló összefüggés a termodinamikai erőkre és termodinamikai áramokra az

$$(1) \quad \mathbf{X}_A : \mathbf{J}_A + \mathbf{X}_\xi : \mathbf{J}_\xi \geq 0,$$

illetve kiírva az

$$\left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}} + \rho T \Psi \frac{\partial s}{\partial W} \mathbf{F} \right) : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} - \rho T \xi : \dot{\xi} \geq 0$$

egyenlőtlenségeket szolgáltatatta.



EGYENSÚLY esetére, amikor a termodinamikai erők $[\mathbf{J}]$ és termodinamikai áramok $[\mathbf{X}]$ egyaránt zérusok:

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_A &\equiv \left(1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W} \right) \mathbf{F} + \rho T \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}, & \mathbf{X}_\xi &\equiv \dot{\xi} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{J}_A &\equiv \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}, & \mathbf{J}_\xi &\equiv -\rho T \xi = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

a

$$(3) \quad \mathbf{F}^{eq} = - \frac{\rho T}{1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)^S = \frac{1}{1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \mathbf{F}^{rev}$$

egyensúlyi anyagtörvényt vezettük le.

Áttérve az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzorról a $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{I}$ deformációtenzorra, az egyensúlyi feszültségtenzor reverzibilis része:

$$(4) \quad \mathbf{F}^{rev} = -\rho T (\mathbf{I} + \mathbf{D}) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{D}},$$

és a teljes egyensúlyi feszültségtenzor (reverzibilis és irreverzibilis együtt):

$$(5) \quad \mathbf{F}^{eq} = - \frac{\rho T}{1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} (\mathbf{I} + \mathbf{D}) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{D}}$$

alakban írható fel, illetve deviatorikus felbontásban a következő:

$$(6) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{rev} &= -\rho T \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right], \\ \mathbf{T}_o^{rev} &= -\rho T \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right] \mathbf{I}, \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= -\frac{\rho T}{1 + \rho T \psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left[\mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right], \\ \mathbf{T}_o^{eq} &= -\frac{\rho T}{1 + \rho T \psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left[\frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right]. \end{aligned}$$

EGYENSÚLYON TÚLI ÁLLAPONTBAN a (2) összefüggés – figyelembe véve a (3), illetve (4)-(7) jelöléseket – az

$$(8) \quad \mathbf{F}^{irrev} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} - \rho T \xi : \dot{\xi} \geq 0$$

formában írható fel, ahol

$$\mathbf{F}^{irrev} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^{eq}.$$

Vezessünk be új jelöléseket. A megszokott $\mathbf{D}$ deformációtenzor mellett egy további $\tilde{\mathbf{D}}$ szintén deformációszerű tenzort értelmezve,

$$\mathbf{J}_A := \mathbf{J} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = \dot{\mathbf{D}} (\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1} =: \tilde{\mathbf{D}},$$

illetve

$$\tilde{\mathbf{D}} = \left[\dot{\mathbf{D}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\mathbf{D}}) \mathbf{I} \right] + \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\mathbf{D}}) \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{D}}_d + \tilde{\mathbf{D}}_o := \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}}_o = \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\varepsilon}_o \mathbf{I}$$

formában. Továbbá, a 4. fejezetben alkalmazott módon a ξ dinamikai változót is bontsuk fel

$$\xi = \left[\xi - \frac{1}{3} \text{tr}(\xi) \mathbf{I} \right] + \frac{1}{3} \text{tr}(\xi) \mathbf{I} := \xi_d + \xi_o = \xi_d + \xi_o \mathbf{I}$$

alakúra.

Ekkor a (8) helyett írható:

$$(9) \quad \mathbf{F}^{irrev} : \tilde{\mathbf{D}} - \rho T \xi : \dot{\xi} \geq 0,$$

illetve

$$(10) \quad \underbrace{\mathbf{T}^{irrev} : \tilde{\mathbf{E}} - \rho T \dot{\xi}_d : \xi_d}_{\geq 0} + \underbrace{\sigma_o^{irrev} \dot{\varepsilon}_o - \rho T \dot{\xi}_o \xi_o}_{\geq 0} \geq 0.$$

Ez a felírás korrektül megmutatja, hogy a pozitivitásnak minden tenzori rangú áramra külön-külön teljesülnie kell.

Ezek után az anyagtörvény meghatározása a 2. és 4. fejezetben már gyakorolt módon történhet.

A (10) egyenlőtlenség megoldása, mint már láttuk, a LAGRANGE-féle középértéktétel felhasználásával történhet az

$$(11) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{irrev} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{D}} \\ -\rho T \dot{\xi} \end{pmatrix}, \text{ illetve } \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{irrev} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_d \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ -\rho T \dot{\xi} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_o^{irrev} \\ \dot{\xi}_o \end{pmatrix} = \mathbf{L}_o \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_o \\ -\rho T \dot{\xi}_o \end{pmatrix}$$

egyenletrendszerek megoldásával, amelyek kiírva a következők:

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{irrev} &= L_{11} \dot{\mathbf{E}} + L_{12} \dot{\xi}_d, & \sigma_o^{irrev} &= l_{11} \dot{\varepsilon}_o + l_{12} \dot{\xi}_o, \\ \dot{\xi} &= L_{12} \dot{\mathbf{E}} + L_{22} \dot{\xi}_d, & \dot{\xi} &= l_{12} \dot{\varepsilon}_o + l_{22} \dot{\xi}_o. \end{aligned}$$

A levezetések mellőzésével – amelyek analógok a 4. fejezetben leírtakkal – a végeredmény:

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{irrev} - L_{22}^{-1} \dot{\mathbf{T}}^{irrev} &= L_{11} L_{22}^{-1} \ddot{\mathbf{E}} + (L_{12}^2 L_{22}^{-1} - L_{11}) \ddot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_o^{irrev} - l_{22}^{-1} \dot{\sigma}_o^{irrev} &= l_{11} l_{22}^{-1} \ddot{\varepsilon}_o + (l_{12}^2 l_{22}^{-1} - l_{11}) \ddot{\varepsilon}_o, \end{aligned}$$

s ez az izotróp kontinuumok *anyagtörvényének legáltalánosabb formája*.

Ahhoz, hogy a (13) teljes legyen, be kell helyettesíteni még a

$$\mathbf{T}^{irrev} = \mathbf{T} - \mathbf{T}^{eq}, \quad \dot{\sigma}^{irrev} = \dot{\sigma} - \dot{\sigma}^{eq}$$

összefüggést, amelyhez a 6. fejezet (19) alatti formát

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \\ \sigma_o^{eq} &= 3K\varepsilon_o - \Psi(3K - 3K_{pl})(\varepsilon_o - \varepsilon_{of}) \end{aligned}$$

használjuk fel, illetve a $\mathbf{E}^{pl} := \mathbf{E} - \mathbf{E}_f$, $\mathbf{E}_o^{pl} := \mathbf{E}_o - \mathbf{E}_{of}$, (ill. $\varepsilon_o^{pl} := \varepsilon_o - \varepsilon_{of}$) jelölésekkel:

$$(14a) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})\mathbf{E}^{pl}, \\ \sigma_o^{eq} &= 3K\varepsilon_o - \Psi(3K - 3K_{pl})\varepsilon_o^{pl}. \end{aligned}$$

A (13)-ba behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} - \mathbf{T}^{eq} - L_{22}^{-1}(\dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{T}}^{eq}) &= L_{11} L_{22}^{-1} \ddot{\mathbf{E}} + (L_{12}^2 L_{22}^{-1} - L_{11}) \ddot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_o - \sigma_o^{eq} - l_{22}^{-1}(\dot{\sigma}_o - \dot{\sigma}_o^{eq}) &= l_{11} l_{22}^{-1} \ddot{\varepsilon}_o + (l_{12}^2 l_{22}^{-1} - l_{11}) \ddot{\varepsilon}_o, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} - 2G\mathbf{E} + \Psi(2G - 2G_{pl})\mathbf{E}^{pl} - \\
- L_{22}^{-1}[\dot{\mathbf{T}} - 2G\dot{\mathbf{E}} + \Psi(2G - 2G_{pl})\dot{\mathbf{E}}] &= L_{11}L_{22}^{-1}\ddot{\mathbf{E}} + (L_{12}^2L_{22}^{-1} - L_{11})\ddot{\mathbf{E}}, \\
\sigma_o - 3K\varepsilon_o + \Psi(3K - 3K_{pl})\varepsilon_o^{pl} \\
- l_{22}^{-1}[\dot{\sigma}_o - 3K\dot{\varepsilon}_o + \Psi(3K - 3K_{pl})\dot{\varepsilon}_o^{pl}] &= l_{11}l_{22}^{-1}\ddot{\varepsilon}_o + (l_{12}^2l_{22}^{-1} - l_{11})\ddot{\varepsilon}_o,
\end{aligned}$$

majd átrendezve:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} - L_{22}^{-1}\dot{\mathbf{T}} &= L_{11}L_{22}^{-1}\ddot{\mathbf{E}} + (L_{12}^2L_{22}^{-1} - L_{11})\ddot{\mathbf{E}} + \\
&+ 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})\mathbf{E}^{pl} + 2GL_{22}^{-1}\dot{\mathbf{E}} - \Psi L_{22}^{-1}(2G - 2G_{pl})\dot{\mathbf{E}}^{pl}, \\
\sigma_o - l_{22}^{-1}\dot{\sigma}_o &= l_{11}l_{22}^{-1}\ddot{\varepsilon}_o + (l_{12}^2l_{22}^{-1} - l_{11})\ddot{\varepsilon}_o + \\
&+ 3K\varepsilon_o - \Psi(3K - 3K_{pl})\varepsilon_o^{pl} + 3Kl_{22}^{-1}\dot{\varepsilon}_o - \Psi l_{22}^{-1}(3K - 3K_{pl})\dot{\varepsilon}_o^{pl}.
\end{aligned}$$

Bevezetve a

$$\begin{aligned}
\tau &:= -L_{22}^{-1}, & \tau_o &:= -l_{22}^{-1}, \\
\alpha_d &:= L_{11}L_{22}^{-1} = -L_{11}\tau, & \alpha_o &:= l_{11}l_{22}^{-1} = -l_{11}\tau_o, \\
\beta_d &:= L_{12}^2L_{22}^{-1} - L_{11} = -L_{12}^2\tau - L_{11}, & \beta_o &:= l_{12}^2l_{22}^{-1} - l_{11} = -l_{12}^2\tau_o - l_{11},
\end{aligned}$$

jelöléseket, az izotróp kontinuumok *legáltalánosabb* rugalmas-képlékeny *anyagtvörvénye*:

$$\begin{aligned}
(16) \quad \mathbf{T} + \tau\dot{\mathbf{T}} &= \alpha_d\ddot{\mathbf{E}} + \beta_d\ddot{\mathbf{E}} + [2G - \Psi(2G - 2G_{pl})]\tau\dot{\mathbf{E}} + \\
&+ 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \\
\mathbf{T}_o + \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o &= \alpha_o\ddot{\mathbf{E}}_o + \beta_o\ddot{\mathbf{E}}_o + [3K - \Psi(3K - 3K_{pl})]\tau_o\dot{\mathbf{E}}_o + \\
&+ 3K\mathbf{E}_o - \Psi(3K - 3K_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f).
\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}
(16a) \quad \mathbf{T} + \tau\dot{\mathbf{T}} &= \alpha_d\ddot{\mathbf{E}} + \beta_d\ddot{\mathbf{E}} + 2G\tau\dot{\mathbf{E}} - \Psi(2G - 2G_{pl})\tau\dot{\mathbf{E}} + \\
&+ 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \\
\mathbf{T}_o + \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o &= \alpha_o\ddot{\mathbf{E}}_o + \beta_o\ddot{\mathbf{E}}_o + 3K\tau_o\dot{\mathbf{E}}_o - \Psi(3K - 3K_{pl})\tau_o\dot{\mathbf{E}}_o + \\
&+ 3K\mathbf{E}_o - \Psi(3K - 3K_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f).
\end{aligned}$$

ANYAGTÖRVÉNY LINEÁRIS KÖZELÍTÉSBEN. Ha a második időderivált hatásától eltekintünk, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} - L_{22}^{-1}\dot{\mathbf{T}} &= (L_{12}^2L_{22}^{-1} - L_{11})\ddot{\mathbf{E}} - L_{22}^{-1}[2G + \Psi(2G - 2G_{pl})]\dot{\mathbf{E}} \\
&+ 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \\
\sigma_o - l_{22}^{-1}\dot{\sigma}_o &= (l_{12}^2l_{22}^{-1} - l_{11})\ddot{\varepsilon}_o - l_{22}^{-1}[3K + \Psi(3K - 3K_{pl})]\dot{\varepsilon}_o \\
&+ 3K\varepsilon_o - \Psi(3K - 3K_{pl})(\varepsilon_o - \varepsilon_{of}),
\end{aligned}$$

és ha a $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1} \approx \dot{\mathbf{D}}$ közelítéssel élünk, amelynek eredményeként a kétféle deformációsebesség egyenlő lesz [$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\varepsilon}_o = \dot{\varepsilon}_o$], akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{T} - L_{22}^{-1} \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) + \\ &+ [L_{12}^2 L_{22}^{-1} - L_{11} - L_{22}^{-1} 2G + \Psi L_{22}^{-1} (2G - 2G_{pl})] \dot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_o - l_{22}^{-1} \dot{\sigma}_o &= 3K\varepsilon_o - \Psi(3K - 3K_{pl})(\varepsilon_o - \varepsilon_{of}) + \\ &+ [l_{12}^2 l_{22}^{-1} - l_{11} - l_{22}^{-1} 3K + \Psi l_{22}^{-1} (3K - 3K_{pl})] \dot{\varepsilon}_o. \end{aligned}$$

A már megszokott jelölésekkel, a feszültségváltozási sebesség együtthatója a relaxációs idő a rugalmas és képlékeny tartományban egyaránt:

$$\tau := -L_{22}^{-1} \quad \tau_o := -l_{22}^{-1},$$

a deformációsebesség együtthatója a viszkozitási tényező:

$$\text{rugalmas tartományban} \quad 2\eta := L_{12}^2 \tau - L_{11} + 2G\tau, \quad 3K_v := L_{12}^2 \tau - l_{11} + 3K\tau,$$

$$\text{képlékeny tartományban} \quad 2\eta_{pl} := L_{12}^2 \tau - L_{11} + 2G_{pl}\tau, \quad 3K_{v,pl} := L_{12}^2 \tau - l_{11} + 3K_{pl}\tau,$$

az anyagegyenlet a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} (17) \quad \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) - \Psi(2\eta - 2\eta_{pl}) \dot{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o &= 3K\mathbf{E}_o + 3K_v \dot{\mathbf{E}}_o - \Psi(3K - 3K_{pl})(\mathbf{E}_o - \mathbf{E}_{of}) - \Psi(3K_v - 3K_{v,pl}) \dot{\mathbf{E}}_o, \end{aligned}$$

Ha különválasztjuk a *rugalmas* és a *képlékeny* állapotot, akkor

$$\Psi = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o &= 3K\mathbf{E}_o + 3K_v \dot{\mathbf{E}}_o, \end{aligned}$$

$$\Psi = 1 \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} - (2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) + 2\eta \dot{\mathbf{E}} - (2\eta - 2\eta_{pl}) \dot{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o &= 3K\mathbf{E}_o - (3K - 3K_{pl})(\mathbf{E}_o - \mathbf{E}_{of}) + 3K_v \dot{\mathbf{E}}_o - (3K_v - 3K_{v,pl}) \dot{\mathbf{E}}_o. \end{aligned}$$

EGYTENGELYŰ FESZÜLTÉGÁLLAPOT. Nemegyensúlyi esetben az anyagtörvény egytengelyű feszültségállapot esetén nem írható le egyetlen egyenlettel, mivel a tengely- és a keresztirányú deformációk hányadosa nem konstans, hanem az idő függvényében változik. A skaláris felírás érdekében térjünk át a klasszikus POYNTING-THOMSON-testre, amelynél a térfogatváltozás független az időtől, vagyis

$$\frac{K_v}{K} - \tau_o = 0 \quad \text{és} \quad \frac{K_{v,pl}}{K_v} - \tau_o = 0, \quad \frac{K_{v,pl}}{K_v} = \frac{K_v}{K},$$

s ennek megfelelően $\sigma_o = 3K\varepsilon_o - \Psi(3K - 3K_{pl})(\varepsilon_o - \varepsilon_{of})$.

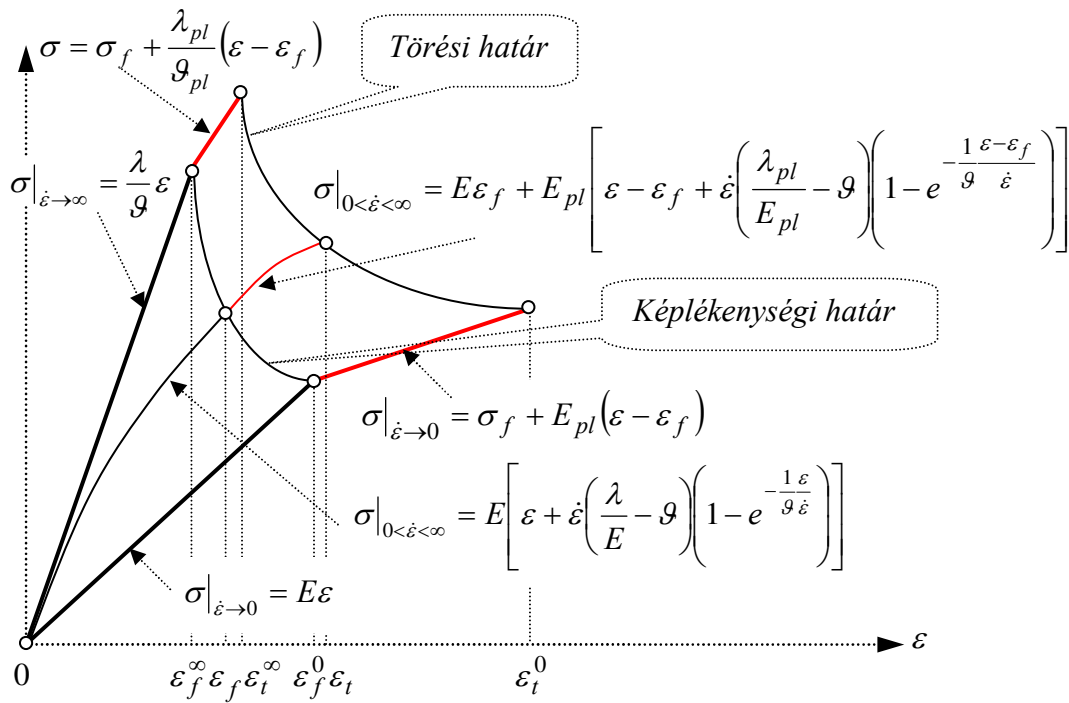
Ennél a modellnél már csak egy skalár egyenletünk van:

$$\sigma + \vartheta \dot{\sigma} = E\varepsilon + \lambda \dot{\varepsilon} - \Psi(E - E_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f) - \Psi(\lambda - \lambda_{pl})\dot{\varepsilon},$$

ahol

$$E = \frac{9GK}{3K + G}, \quad \lambda = \frac{9\eta K}{3K + G}, \quad E = \frac{3K\tau + \eta}{3K + G}, \quad E_{pl} = \frac{9G_{pl}K_{pl}}{3K_{pl} + G_{pl}}, \quad \lambda_{pl} = \frac{9G_{pl}K_{pl}}{3K_{pl} + G_{pl}}.$$

Az alábbi ábra mutatja ebben az esetben az összefüggéseket.



8. FEJEZET
A HATÁRFELTÉTELEKRŐL

1. ELŐZETES MEGJEGYZÉSEK

A 2. fejezetben az anyagtörvény általános formájának levezetése alapján, kiegészítve az 5. fejezetben az egytengelyű kísérlet elemzéséből levont következtetésekkel, kimondhatjuk, hogy a *képlékenységi határfeltétel* a W deformációs munka függvénye. A W azonban még számos összetevőből áll, s nemcsak az összmunkának, hanem valamelyik komponensének is a függvénye lehet.

A W TÉRFOGATEGYSÉGRE JUTÓ DEFORMÁCIÓS MUNKA FELBONTÁSA. Az egyszerűség kedvéért dolgozzunk most kivételesen²⁵ a

$$\dot{W} = \mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{F} : \dot{\mathbf{D}} (\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1} \approx \mathbf{F} : \dot{\mathbf{D}}$$

$$W \approx \int \mathbf{F} : \dot{\mathbf{D}} dt \approx \int \mathbf{F} : d\mathbf{D}$$

közelítő összefüggéssel.²⁶

Ez kétféleképpen bontható fel:

- egyrészt Φ rugalmas deformációs munkára és $\mathcal{L}$ disszipációs munkára:

$$(1) \quad W = \Phi + \mathcal{L},$$

ahol

$$W = \int \mathbf{F} : \dot{\mathbf{D}} dt \approx \int \mathbf{F} : d\mathbf{D}^{rug} + \int \mathbf{F} : d\mathbf{D}^{reol}.$$

- másrészt a megszokott deviátoros és gömbi felbontással W' torzulási deformációs munkára és W_o térfogatváltozási deformációs munkára:

$$(2) \quad W = W' + W_o,$$

ahol

$$W = \int \mathbf{F} : \dot{\mathbf{D}} dt \approx \int \mathbf{T} : d\mathbf{E} + \int \mathbf{T}_o : d\mathbf{E}_o.$$

²⁵Megjegyezzük, hogy a következtetések nem csak ebben a közelítő esetben érvényesek.

²⁶ $\|\mathbf{D}\| \ll 1$.

Ezek együtt összesen:

$$(3) \quad W = W' + W_o, \quad \Phi = \Phi' + \Phi_o, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}' + \mathcal{L}_o.$$

Ha a rugalmas tartományban a POYNTING-THOMSON-féle modellt vesszük alapul, akkor a

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, & \Rightarrow \mathbf{T}^{rug} &= 2G\mathbf{E}, & \Rightarrow \mathbf{T}^{reol} &= \frac{d}{dt}(2\eta\mathbf{E} - \tau\mathbf{T}), \\ \mathbf{T}_o &= 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o, & \Rightarrow \mathbf{T}_o^{rug} &= 3K\mathbf{E}_o, & \Rightarrow \mathbf{T}_o^{reol} &= \frac{d}{dt}(3K_v\mathbf{E}_o - \tau_o\mathbf{T}_o), \end{aligned}$$

akkor

$$W = \underbrace{\int \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} dt}_{W'} + \underbrace{\int \mathbf{T}_o : \dot{\mathbf{E}}_o dt}_{W_o} = \underbrace{\int \mathbf{T}^{rug} : \dot{\mathbf{E}} dt}_{\Phi'} + \underbrace{\int \mathbf{T}^{reol} : \dot{\mathbf{E}} dt}_{\mathcal{L}'} + \underbrace{\int \mathbf{T}_o^{rug} : \dot{\mathbf{E}}_o dt}_{\Phi_o} + \underbrace{\int \mathbf{T}_o^{reol} : \dot{\mathbf{E}}_o dt}_{\mathcal{L}_o}.$$

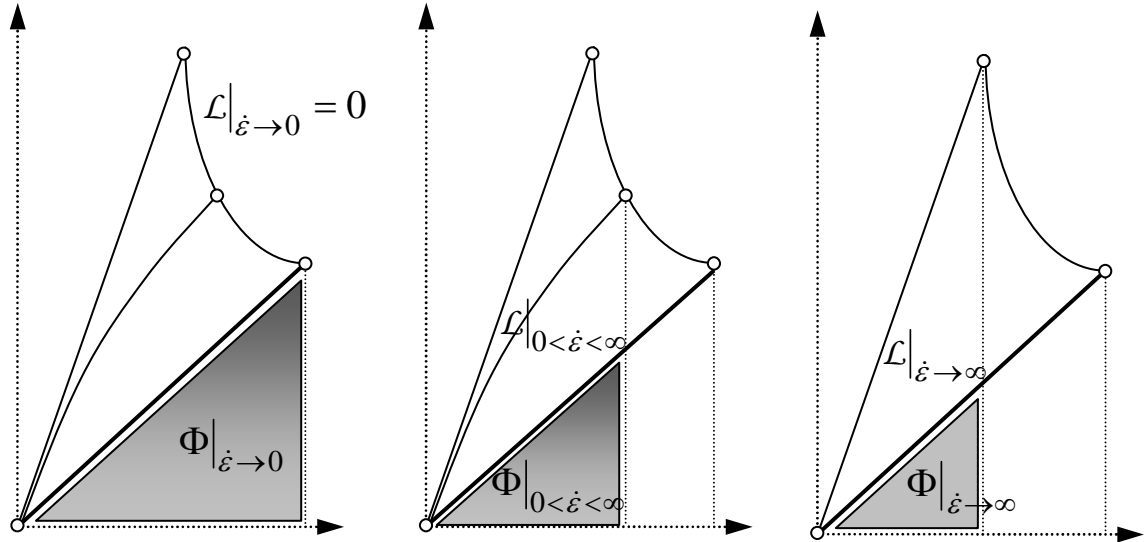
A LEHETSÉGES KÉPLÉKENYSÉGI HATÁRFELTÉTELEK. Az összes szóbijhető munkafelosztás alapján a következő 9 darab képlékenységi feltétel lehet:

$\psi = W - W_f = 0$ <i>a maximális deformációs munka elve</i>	$\psi = W' - W'_f = 0$ <i>a maximális torzulási deformációs munka elve</i>	$\psi = W_o - W_{of} = 0$ <i>a maximális térfogatváltozási deformációs munka elve</i>
$\psi = \Phi - \Phi_f = 0$ <i>a maximális rugalmas deformációs munka elve</i>	$\psi = \Phi' - \Phi'_f = 0$ <i>a maximális rugalmas torzulási deformációs munka elve</i>	$\psi = \Phi_o - \Phi_{of} = 0$ <i>a maximális rugalmas térfogatváltozási deformációs munka elve</i>
$\psi = \mathcal{L} - \mathcal{L}_f = 0$ <i>a maximális disszipációs munka elve</i>	$\psi = \mathcal{L}' - \mathcal{L}'_f = 0$ <i>a maximális torzulási disszipációs munka elve</i>	$\psi = \mathcal{L}_o - \mathcal{L}_{of} = 0$ <i>a maximális térfogatváltozási disszipációs munka elve</i>

A lehetőségek száma összesen 9, de ezek közül csak 1 lehet az igazi.

Próbáljuk meg szűkíteni a kört. Az egytengelyű kísérletből származó információt használjuk fel annak ellenére, hogy egytengelyűből nem határozható meg a térbeli határfeltétel. Viszont ha valami egytengelyűnél nem igaz, akkor az a térbelinél sem lehet igaz. Tehát így csak azok a feltevések zárhatók ki, amelyeket az egytengelyű tapasztalatok kizárnak. Amelyeket megengednek, azoknak viszont mindegyike lehetséges.

1. Az egyensúlyi (reverzibilis) esetben a disszipációs munka zérus értékű. Tehát, ha az $\mathcal{L}$, vagy valamelyik komponense lenne a képlékenységi határfeltétel, akkor egyensúlyi esetben nem jöhetne létre a képlékeny állapot. A disszipációs munka tehát kizárható.



1.ábra

2. A rugalmas deformációs munka értéke a képlékenységi határnál annyira különböző (1.ábra), hogy határfeltételként nyugodtan kizárható. Ha a három különböző deformációs sebességnél azonos lenne az ϵ_f értéke, akkor megegyeznének a Φ értékek is. Ez azt jelenti, hogy a képlékenységi határfeltétel görbájének egy függőleges egyenesnek kellene lennie. A rugalmas munka tehát nem lehet a képlékenység feltétele.

KÖVETKEZMÉNY: Ennélfogva, kizárásos alapon már csak 3 feltételünk maradt.

- $\psi = W - W_f = 0$ a maximális *deformációs munka* elve, amely BELTRAMI nevéhez fűződik,
- $\psi = W' - W'_f = 0$ a maximális *torzulási deformációs munka*²⁷ elve, amely HUBER, MISES, és VON HENCKY nevéhez fűződik.
- $\psi = W_o - W_{of} = 0$ a maximális *térfogatváltozási deformációs munka*²⁸ elve.

Ezek közül nem véletlen, hogy az irodalomban a térfogatváltozáshoz magához senki nem kötötte a képlékeny állapot kialakulását.

²⁷ Alaktorzulási munka

²⁸ Térfogati munka

Ennek több oka is lehet:

- egyik, hogy feltételezték, hogy a hidrosztatikus állapot nem hoz létre folyást,
- másik, hogy általában a W_o jóval kisebb, mint a W . Egytengelyű állapotnál pl.

$$W_f|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} = \int_0^{\varepsilon_f^0} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_f^0} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_f^0 \varepsilon_f^0 = \frac{1}{2} E (\varepsilon_f^0)^2 = \frac{1}{2E} (\sigma_f^0)^2,$$

$$W_{of}|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0} = \int_0^{\varepsilon_{of}^0} \sigma_o d\varepsilon_o = \int_0^{\varepsilon_{of}^0} 3K\varepsilon_o d\varepsilon_o = \frac{3}{2} K (\varepsilon_{of}^0)^2 = \frac{1}{2} E \frac{m-2}{9m} (\varepsilon_f^0)^2$$

A kettő egymáshoz viszonyított aránya:

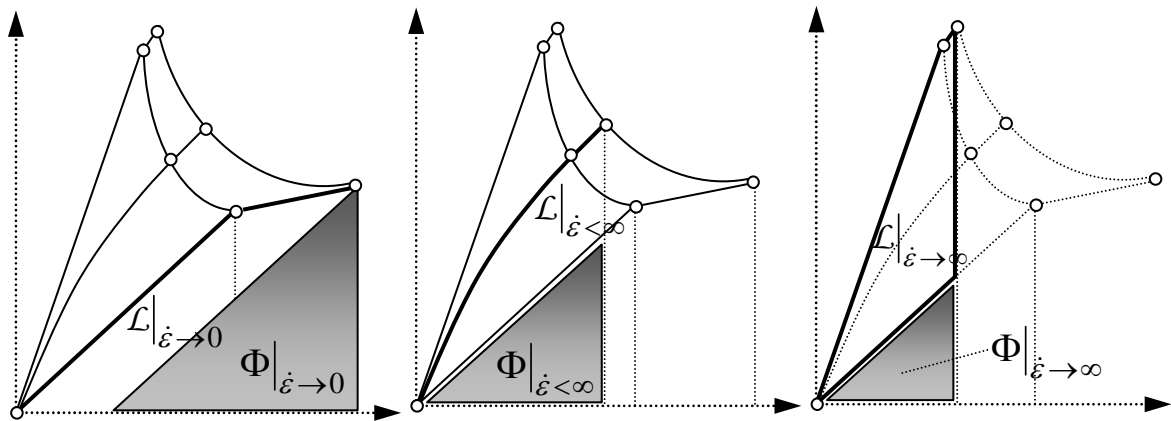
$$\frac{W_{of}|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0}}{W_f|_{\dot{\varepsilon} \rightarrow 0}} = \frac{m-2}{9m}, \quad \begin{array}{ll} \min : & m=2 \quad 0, \\ \max : & m \rightarrow \infty \quad \frac{1}{9}, \end{array}$$

tehát maximálisan csak a 11,11%-ot érheti el.

Ezek alapján a deformációs munka elve vagy a torzulási deformációs munka elve jöhet számításba képlékenységi határfeltételként. ASSZONYI, Cs. (1975)-ben ez utóbbit valószínűsítette.

Ne felejtsük el azonban, hogy ezek gondolati kísérletek, nekünk fizikai bizonyítékokra van szükségünk.

A TÖNKREMENETELI HATÁRFELTÉTEL. Egytengelyű kísérleteink adatai alapján a következő elvi ábra rajzolható fel:

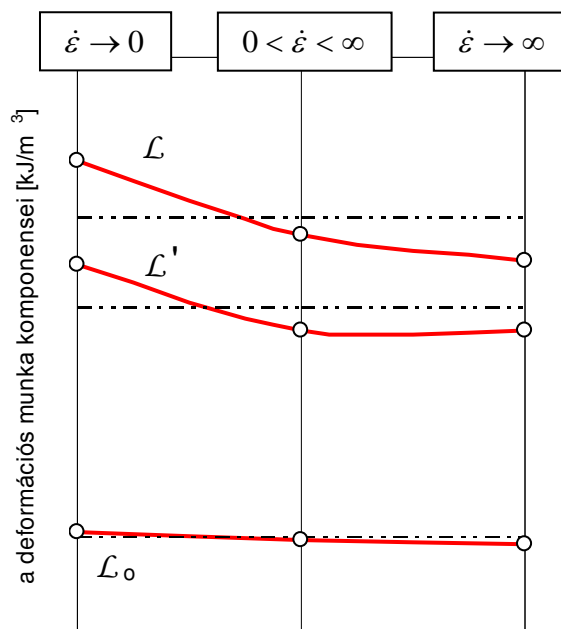


2. ábra

Az ábra alapján törési határfeltételnek csak egyetlen lehetőség kínálkozik, a *maximális disszipációs munka elve*, annak ellenére, hogy a mérési adatok jelentősen szórnak: $(-11\% < L < 12\%)$, $(-7\% < L' < 12\%)$, $(-5\% < L_o < 7\%)$.

		A TÖNKREMENETELI HATÁR ÉRTÉKEI		
		$\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$	$0 < \dot{\varepsilon} < \infty$	$\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$
$\mathcal{L}$	[kJ/m ³]	405	373	362
$\mathcal{L}'$	[kJ/m ³]	360	332	332
$\mathcal{L}_o$	[kJ/m ³]	45	41	40

KÖVETKEZMÉNY: Ennélfogva, kizárásos alapon már csak 3 feltételünk maradt:



- $\psi_t = \mathcal{L} - \mathcal{L}_t = 0$ a maximális *disszipációs munka* elve,
- $\psi_t = \mathcal{L}' - \mathcal{L}'_t = 0$ a maximális *torzulási disszipációs munka* elve,
- $\psi_t = \mathcal{L}_o - \mathcal{L}_{ot} = 0$ a maximális *térfogatváltozási disszipációs munka* elve.

Az állásfoglalást megnehezíti, hogy

- a törés pillanatában a mérési eredmények már bizonytalanok, tehát nagy a szórásuk,
- a képlékeny állapot kezdete és a törés bekövetkezte között valószínűsíthető, hogy az anyag összenyomhatatlanná válik. Ez az a pont, ahonnan a *tökéletesen kifejlődött képlékeny állapot tartományát* vesszük. Ha az anyag összenyomhatatlan, akkor a térfogati munkája onnantól kezdve zérus.

E miatt csak két lehetséges munka-feltétel marad a törési határfeltételként: az $\mathcal{L}$ és az $\mathcal{L}'$.

2. A KÉPLÉKENY ÁLLAPOT LÉTREJÖTTE ÉS A TÖRÉS KIALAKULÁSA

Amikor egy testen mechanikai munkát végzünk, impulzust és kinetikai energiát közlünk vele. Az impulzus és a kinetikai energia egymástól elválaszthatatlan, ha van impulzus [$m\mathbf{v}$], akkor van kinetikus energia [$\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$] is, és fordítva.

Az impulzust a szilárd test kötött részei nem képesek úgy tovább szállítani, mint a folyadékok, *konvektív* vezetés révén, hanem csak *konduktíve* (diffúz úton). Létrejön az impulzus konduktív áramsűrűsége, a feszültség [$\mathbf{j}_{imp} := \mathbf{F}$].

A kinetikus energia általában a rendszer belső energiájává alakul, disszipálódik. Ezt az energiamérleg fejezi ki időegységre jutó deformációs munkaként, teljesítményként [$\dot{W} = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla$]. Ez a W deformációs munka két részre bontható:

- egyrészt rugalmas potenciálra (amely a befektetett munkának az a része, amely elvben visszanyerhető, s mint potenciál, azaz energia független az úttól),
- másrészt disszipációra, amely az anyag belső súrlódásának legyőzése folytán, már felemésztődik, s mechanikai munkaként nem nyerhető vissza (pl. hővé alakul).

Ha az anyagi rendszerünkkel közölt kinetikai energia egy – az anyagtól függő W_f – mértéket, küszöbértéket meghalad, akkor anyagunk azt abban a pillanatban azt már nem képes teljes egészében belső energiává alakítani. A küszöb fölötti $|W - W_f|$ differencia még továbbra is kinetikai energiaként funkcionál. Ez a rész a konduktív vezetés mellett kénytelen konvektív vezetésre fanyalodni.²⁹ Ez eredményezi a folyást, a képlékenységet és a visszafordíthatatlan maradó deformációkat. Ez a pont, ez a küszöbérték a *képlékenységi határ*.

Ha az impulzus- és energiaközlés tovább folytatódik, akkor ezt a többletet az anyag már csak tönkremenetel útján tudja disszipálni, kilökni magából.

3. A KÉPLÉKENYSÉGI HATÁRFELTÉTEL A DEFORMÁCIÓS HULLÁM ALAPJÁN

Az elmondottaknak megfelelően a képlékenységi határfeltétel a deformációs munka (vagy teljesítmény) függvénye. Mivel a munka maga torzulási és térfogatváltozási részre bontható (deviátoros és gömbi felosztás), a határfeltétel is a deformációs munkának, vagy valamelyik komponensének függvénye lehet:

$$W = W' + W_o.$$

Köztudott, hogy a mechanikai hatások izotróp közegben *longitudinális* és *transzverzális* hullám formájában terjednek a közegben, s ezek terjedési sebessége jelentősen eltér egymástól. A longitudinális hullám a térfogati, a transzverzális hullám a torzulási deformációs hatásokat viszi tova. Tehát azt is mondhatjuk, hogy a deformációs munka és a hullámok között a

²⁹ Mivel zárt rendszerben az összenergia és az összimpulzus megmaradó mennyiség.

$W \Rightarrow$ longitudinális + transzverzális hullám együtt,
 $W' \Rightarrow$ transzverzális (torzulási) hullám,
 $W_0 \Rightarrow$ longitudinális (térfogati) hullám,

megfeleltetés van.

Képlékenységi feltétel azonban csak egy lehet. Továbbá, ez a feltétel nem lehet anyagonként más és más, mert az általános fizikai törvényekkel dolgozunk, amelyeknek minden anyag alá van vetve. A fenti hátról kettőt ki kell zárni.

A $\psi = W_0 - W_f = 0$ FELTÉTEL KIZÁRÁSÁRA TETT KÍSÉRLET. Le kell rögzíteni, hogy ilyen feltevessel a mechanikai irodalomban még nem találkoztunk. Általában azt mondják, hogy a tiszta hidrosztatikus állapot nem hoz létre folyást, de erre bizonyítékot eddig nem találtunk. Az is igaz, hogy ehhez igen nagy nyomásokat kellene létrehozni. Ebből talán az lehet az igaz, hogy normális mechanikai viszonyok mellett a W_0 csak néhány százaléka a W -nek, ezért a képlékeny állapot létrejöttét a nagyobb értékhez kötik. Azonban hidrosztatikus állapotban: $W = W_0$ és $W' = 0$. Ebből következik, hogy akár ki is zárható, mert úgyis benne van a W -ben. De ez nem igazán korrekt érv.

Kizárására talán a longitudinális hullám természete adhat választ, amely jelentősen nagyobb sebességű, mint a torzulási hullám, vagyis vélhetően hamarabb adna képlékeny változást. Ennek azonban nyoma kellene legyen a kísérletekben is.

Ezért, bár kizárjuk ezt a feltevést mi is, de erre tudományos magyarázatot vagy cáfolatot kellene megkeresni.

A $\psi = W - W_f = 0$ FELTÉTEL KIZÁRÁSÁRA TETT KÍSÉRLET. Az alapul vett kísérlet-sorozat erre nem tud választ adni, mivel a W és W' között csak egy szorzótényező a különbség a rugalmas tartományban. A döntéshez további – célirányosan tervezett - kísérletekre van szükség, bár fizikai törvényeket kísérleti úton bizonyítani nem lehet. Valószínűsítenünk azonban igen, s ez utat mutathat arra, hogyan kísérjük meg fizikai törvényekből levezetett feltételünket finomítani. Nekünk nyomós érv az is, hogy a két hullám elkülönül, ezért hátha nem a kompozíciójuk adja a fizikai feltételt.

Így hiányos tudásunk jelenlegi szintjén a következő *képlékenységi* feltétellel dolgozunk:

A MAXIMÁLIS TORZULÁSI DEFORMÁCIÓS³⁰ MUNKA ELVE.

Az anyag mindaddig rugalmas állapotban marad, amíg a

W' torzulási munka egy W'_f küszöbértéket el nem ér.

$\psi = W' - W'_f = 0$. (HUBER-MISES-HENCKY-féle feltétel).

³⁰ Alaktorzulási munka

4. A TÖNKREMENETELI HATÁRFELTÉTEL

Ha a képlékenységi határfeltételnél igazunk lenne, akkor a törési feltételnél is figyelembe kell venni az ottani indokokat.

Így, hiányos tudásunk jelenlegi szintjén a következő *törési* feltétellel dolgozunk:

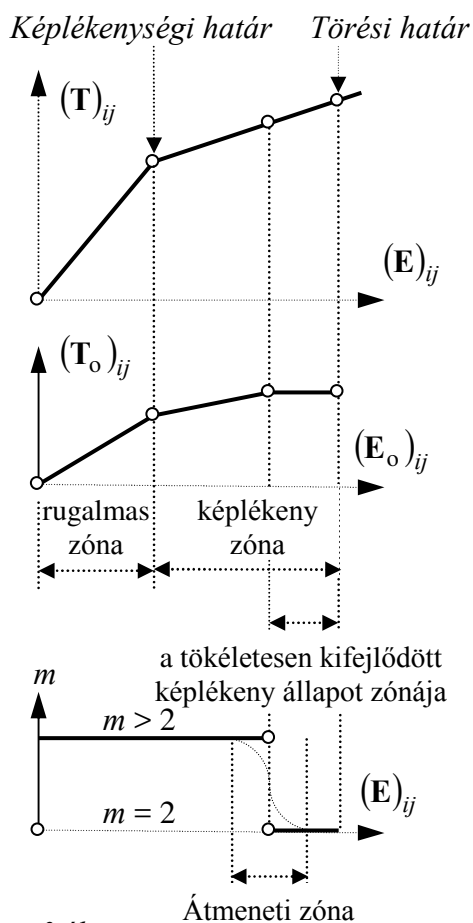
A MAXIMÁLIS TORZULÁSI DISSZIPÁCIÓS MUNKA ELVE. *Az anyag mindaddig megőrzi kontinuitását, amíg a $\mathcal{L}'$ torzulási disszipációs munka egy $\mathcal{L}'_t$ küszöbértéket el nem ér:*

$$\psi = \mathcal{L}' - \mathcal{L}'_t = 0 .$$

5. NÉHÁNY GONDOLATI KÍSÉRLET

AZ ANYAG A KÉPLÉKENYSÉGI HATÁRON TÚL ÉS A TÖRÉSI HATÁRON INNEN

TÖKÉLETESEN KIFEJLŐDÖTT KÉPLÉKENYSÉG TARTOMÁNYA. Azzal a körülménnyel



3.ábra

szembe kell néznünk, hogy az anyag egy bizonyos határ után összenyomhatatlanná válhat. Ez a képlékenységi határ előtt nem következhet be, csak utána. De mivel ez az anyagi tulajdonságok függvénye, az is lehet, hogy a törés hamarabb bekövetkezik, mint az összenyomhatatlanság állapota. Ez nem lehet általános eset, csupán az anyag-állandók olyan egy máshoz viszonyított aránya, amely ezt lehetővé teszi.

A képlékeny állapotban az anyag, ha előtte nem volt összenyomhatatlan, akkor itt sem lesz az, de létezhet a képlékenységi határfeltétel és a törési határfeltétel között egy olyan határ, amely után már az eredetileg összenyomható anyag is összenyomhatatlanná válik. [ASSZONYI, 1975] (3. ábra.) a *tökéletesen kifejlődött képlékeny állapot tartományának* nevezte azt a tartományt,

ahol az anyag már összenyomhatatlan. Nem tudjuk, hogy ez egy éles határ-e, vagy egy átmeneti zóna?

TÖNKREMENETEL - KÉPLÉKENY ÁLLAPOT NÉLKÜL. Hasonló gondolatot felvethetünk a képlékenységi határral kapcsolatosan is. Nem lehetséges olyan anyagtulajdonság, amelynél az anyag azelőtt tönkremegy, mielőtt képlékeny állapot megjelenne? Miért ne? Ismerjük is ezt a jelenséget.

Itt két különböző jelenség is lehet, az egyik az anyagtulajdonságokból következhet, a másik a terhelés fajtájából.

Az anyagtörvényben szereplő anyagállandók

$$2G, 2\eta, \tau, \quad 2G_{pl}, 2\eta_{pl}, \tau \quad E, \lambda, \vartheta, \quad E_{pl}, \lambda_{pl}, \vartheta,$$

amelyekre az entrópiánövekedés tényéből a

$$\frac{\eta}{G} - \tau \geq 0, \quad \frac{\eta_{pl}}{G_{pl}} - \tau \geq 0, \quad \frac{\lambda}{E} - \vartheta \geq 0, \quad \frac{\lambda_{pl}}{E_{pl}} - \vartheta \geq 0$$

feltételeknek kell teljesülniük. Ha ezeknek az anyagállandóknak olyan az értékük és az arányuk, hogy az $\mathcal{L}' - \mathcal{L}'_t = 0$ törési határfeltétel előbb teljesül, mint a $W' - W'_f = 0$ képlékenységi feltétel, akkor előbb törik az anyag, minthogy megfolyna. (Pl. egytengelyű állapotban

$$W'_f = \frac{1}{2} \sigma_f \varepsilon_f = \frac{1}{2} E \varepsilon_f^2 = \frac{1}{2E} \sigma_f^2$$

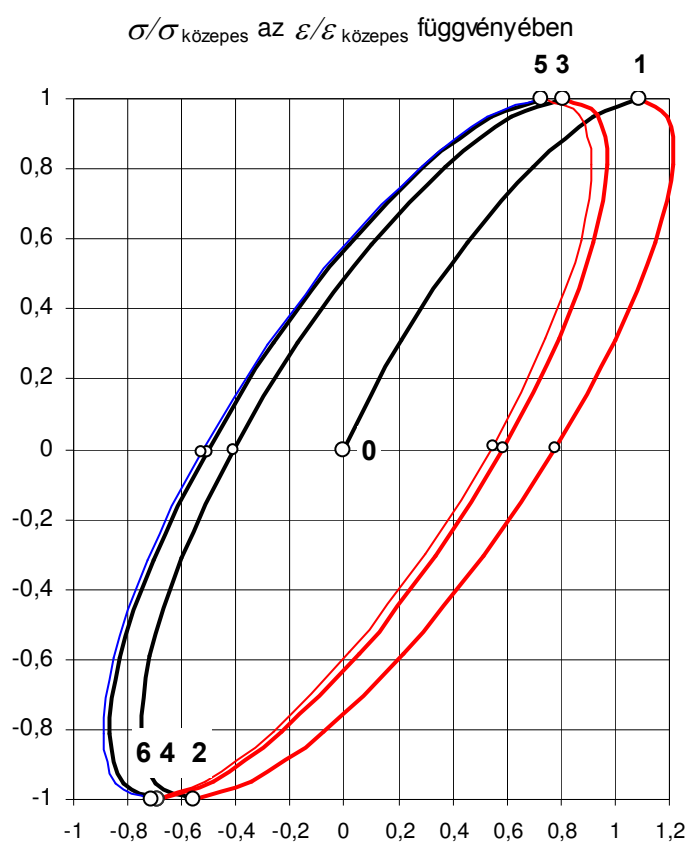
a képlékenységi feltétel, és

$$\mathcal{L}'_t = \frac{1}{2} \sigma_t \varepsilon_t - \frac{1}{2} E \varepsilon_t^2$$

a törési határfeltétel. Lehetséges olyan ε_t deformáció érték, amely $\varepsilon_t < \varepsilon_f$, és ennél $W(\varepsilon_t)$ értéke még kisebb, mint W_f , de az már teljesül.) Erre az anyagra az a jellemző, hogy nincs képlékeny állapota.

Másik esetben az anyagnak van képlékeny állapota, mégis tönkremegy anélkül, hogy képlékeny állapotba került volna. Ez minden reális anyagnál megvalósítható. Ugyanis az ismételt terhelés hatására, ha ez a terhelés nem éri el a képlékenységi határt, akkor az anyag sose kerülhet képlékeny állapotba.

Ismételt igénybevételnél az energiadiSSIPáció viszont állandóan összeadódik. Pl. lemez hajlítgatása során, anélkül, hogy az igénybevétel elérné a képlékenységi határ töredékét, bekövetkezik a tönkremenetel. Ezt az irodalom a kifáradás, a rideg törés jelenségének nevezi. Ismételt igénybevétel hatására az anyag eltörik, anélkül, hogy képlékeny állapotba került volna. Ezeket mutatják az ún. WÖHLER-görbék.



4. ábra

1.periódus: 0-1-2-3

2.periódus: 3-4-5

3.periódus: 5-6-5

a továbbiak már egybeesnek.

Ez az eset áll fenn az 5. fejezetben közölt, itt megismételt ábrán látható kísérletnél is. A deformációs munka két határ, W^+ és W^- között változik, míg az energiadisszipáció – amely a görbe által határolt terület – minden periódusnál egy meghatározott $\mathcal{L}_i$ értékkel növekszik a $\mathcal{L}_t$ -ig, s ekkor

$$\mathcal{L}_t = \sum_{i=1}^M \mathcal{L}_i$$

alapján, az M -edik periódusnál bekövetkezik a törés.

9. FEJEZET
ÖSSZEFOGLALÁS
IZOTRÓP KONTINUUMOK ELMÉLETE

Az előző fejezetek levezetéseivel bizonyítani kívántuk, hogy az *izotróp kontinuumok anyagtörvénye* fizikai alapokon elméletileg meghatározható, cáfolva azt az általános nézetet, amely ezt tagadta, s csak azt rögzítette, hogy az anyagtörvény köteles figyelembe venni a fizikai törvényeket, nem sértheti azokat. Az előző fejezetekben remélhetőleg demonstráltuk, hogy a II. főtétel konstruktívan is használható, és lényegében megszabja az anyagtörvények formáját.

Bizonyítani kívántuk továbbá azt is, hogy az *izotróp kontinuumoknak* csak egy *anyagtörvénye* létezik, amely azonban

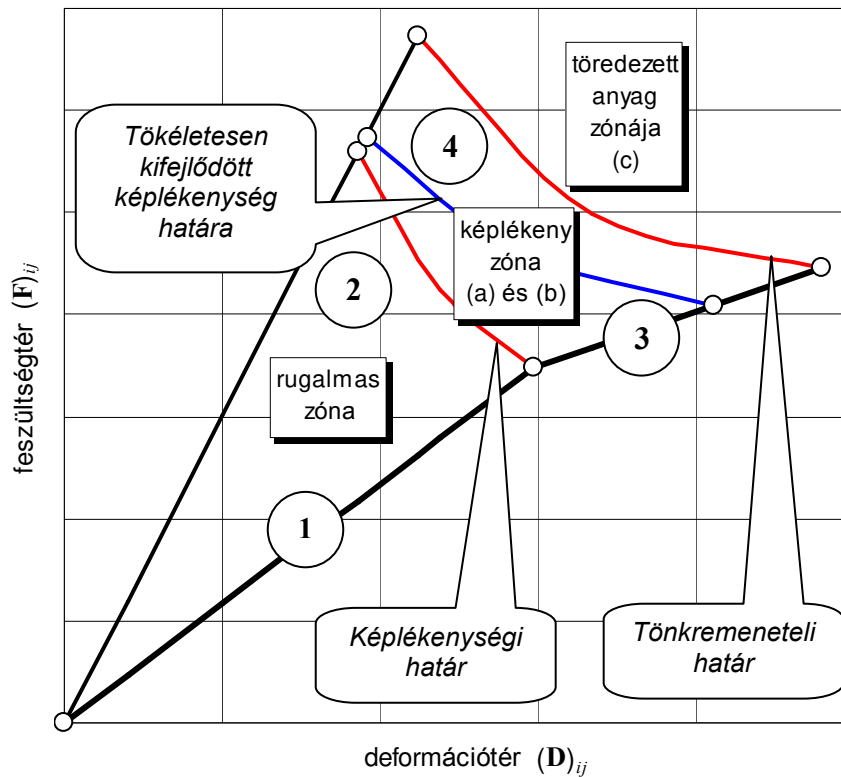
- kis és nagy deformációk tartományán,
- rugalmas deformációktól a képlékenyen át a törésig,
- egyensúlyban és nemegyensúlyi állapotban

egyaránt érvényes. Nincs tehát külön anyagtörvény a rugalmas tartományban és külön anyagtörvény a képlékeny tartományban. Továbbá, nincs külön anyagtörvény, ha növekszik a terhelés (igénybevétel), és külön anyagtörvény, ha csökken. Ennek, mint látni fogjuk, igen nagy elméleti, de főként gyakorlati jelentősége van. Mivel mostanáig nem ez a nézet uralkodott, ezért mesterségesen szétvált egymástól a rugalmasságtan és a képlékenységtan.

A deformációk teljes folytonos tartományán érvényes anyagtörvény azonban csak egy része a kontinuummechanika új elméletének. Szükség van ezen kívül az értelmezési tartomány határainak termodinamikai alapokon történő kijelölésére. Egy matematikai összefüggés csak az értelmezési tartományával együtt értelmezhető.

Ebben a könyvben a kontinuummechanika alapegyenletei közül csak az anyagtörvényt tárgyaltuk, holott a mechanikai feladatok megoldásához a többi egyenletre is szükség van. Ezekre külön figyelmet már nem fordítunk. Ugyanis az 1. fejezetben a geometriai egyenlet kérdését lezártuk a deformációk kinematikájával, a dinamikai (illetve egyensúlyi) egyenletet pedig mérlegegyenletek – ezen belül az impulzusmérleg (impulzus kontinuitási egyenlet), mint megmaradási egyenlet – tárgyalásával.

A következőkben a kapott eredményeket vázlatosan összefoglaljuk a már megszokott – de kiegészített – 1. ábrának megfelelően.



1. ábra

Az általános anyagtörvény a 4. tartományra kell, hogy vonatkozzon [amikor $\Psi \neq 0$, és $\dot{\mathbf{A}} \neq \mathbf{0}$], így belőle lehet az egyszerűbbeket korlátozással felírni:

- $\Psi = 0$ feltevessel megkapjuk a csak rugalmas tartományra vonatkozó összefüggést [1 és 2], ahol 1 esetén $\dot{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{0}$, 2 esetén $\dot{\mathbf{A}} \neq \mathbf{0}$,
- $\dot{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{0}$ feltevessel megkapjuk az anyagtörvény egyensúlyban érvényes formáját [1 és 3], mikor az anyagegyenlet független az időtényezőtől (nemreológiai).

Vagyis

- 1, ha $\Psi = 0$ és $\dot{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{0}$,
- 2, ha $\Psi = 0$ és $\dot{\mathbf{A}} \neq \mathbf{0}$,
- 3, ha $\Psi = 1$ és $\dot{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{0}$,
- 4, ha $\Psi = 1$ és $\dot{\mathbf{A}} \neq \mathbf{0}$.

Az egységes anyagegyenlettel szemben számos ellenvetés van. Legegyszerűbben így fogalmazható meg:

- (a) Miért lenne jobb egyetlen egyenlet, mint az előbbi ábrán látható négy?
 (b) Ugyanúgy külön van a rugalmas, mint a képlékeny anyagegyenlet, mi a haszna annak, hogy egy Ψ egységugrás függvénnyel egyetlen összefüggésbe van összefogva?

A válaszunk csak egy lehet. Ezek a kérdések a természet meg nem értéséből, vagy félreértéséből fakadnak. Ugyanis ez a látszólag bonyolult rugalmas-képlékeny-reológiai anyagegyenlet visszatükrözi a természet egyszerűség utáni vágyát, és megérteti velünk a fizikai feladatok egyszerű megoldását. Kicsit prózaibban fogalmazva: egységes elméleti keretek nélkül az anyagtörvény látszólag különböző részeit nagyon nehezen lehet egyeztetni, és a különböző eredetű jelenségek egymásra hatását szinte lehetetlen elkülöníteni.

1. ANYAGTÖRVÉNY LINEÁRIS KÖZELÍTÉSBEN A $\mathbf{D}$ DEFORMÁCIÓTENZORRAL KIFEJEZVE

Ha az anyagtörvényben

- (i) az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzor helyére a $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$ deformációtenzort vesszük: $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{I}$, és
 (ii) a $\ddot{\mathbf{D}} := \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}$ kifejezés helyett a $\ddot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1} \approx \dot{\mathbf{D}}$ közelítést használjuk,
 (iii) a másodrendű időderivált hatásától

$$\begin{aligned} \overbrace{(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1})}^{\bullet} &= \ddot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} + \dot{\mathbf{A}}\overbrace{(\mathbf{A}^{-1})}^{\bullet} = \ddot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} - \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} = \ddot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1} - (\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1})^2 = \\ &= \ddot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1} - [\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}]^2 \end{aligned}$$

eltekintünk, továbbá

- (iv) az egyensúlyi, reverzibilis feszültségtenzort az $\mathbf{F} = f_0\mathbf{I} + f_1\mathbf{D} + f_2\mathbf{D}^2$ általános kvadratikus összefüggés helyett a lineáris (HOOKE-törvény) vesszük egyezőnek, akkor a deviatorikus felbontásban az anyagegyenlet

$$\begin{aligned} (2) \quad \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}} - \Psi \left[(2G - 2G_{pl}) (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) - (2\eta - 2\eta_{pl}) \dot{\mathbf{E}} \right] \\ \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o &= 3K\mathbf{E}_o + 3K_v \dot{\mathbf{E}}_o - \Psi \left[(3K - 3K_{pl}) (\mathbf{E}_o - \mathbf{E}_{of}) - (3K_v - 3K_{v,pl}) \dot{\mathbf{E}}_o \right] \end{aligned}$$

adódik.

Az anyagtörvény képlékeny állapotban felírható még

egyensúlyban

$$\mathbf{T}^{eq} = 2G_{pl}\mathbf{E} + (2G - 2G_{pl})\mathbf{E}_f$$

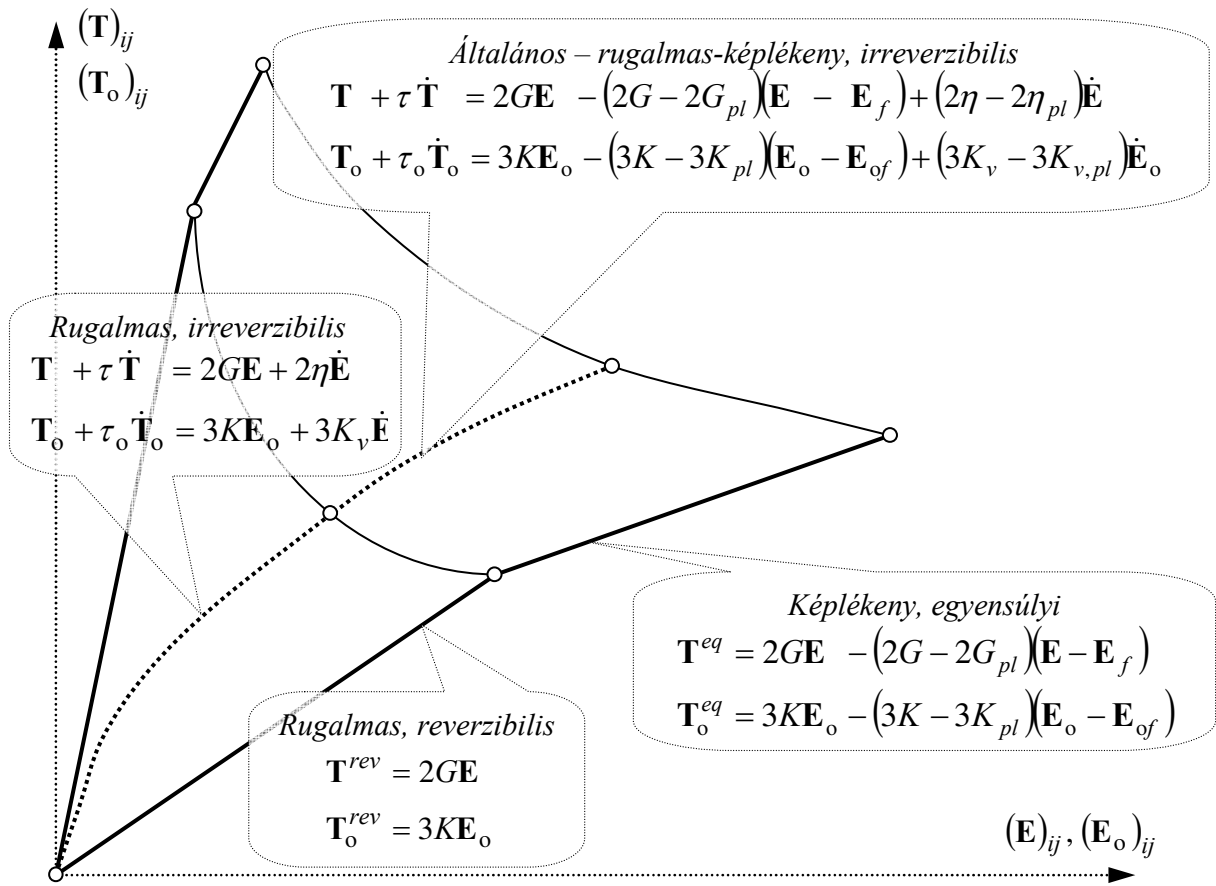
$$\mathbf{T}_o^{eq} = 3K_{pl}\mathbf{E}_o + (3K - 3K_{pl})\mathbf{E}_{of}$$

egyensúlyon túli állapotban

$$\mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} = 2G_{pl}\mathbf{E} + (2G - 2G_{pl})\mathbf{E}_f + (2\eta - 2\eta_{pl})\dot{\mathbf{E}}$$

$$\mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o = 3K_{pl}\mathbf{E}_o + (3K - 3K_{pl})\mathbf{E}_{of} + (3K_v - 3K_{v,pl})\dot{\mathbf{E}}_o$$

alakban is.



2. ábra

2. ANYAGTÖRVÉNY EGYTENGELYŰ FESZÜLTÉGÁLLAPOTBAN

Egytengelyű feszültségállapotban egyetlen skaláregyenlettel csak a (rugalmas, és a képlékeny) egyensúlyi állapotban írható fel az anyagtörvény. Ugyanis nemegyensúlyi

(időfüggő – reológiai) esetben a hosszirányú és keresztirányú fajlagos nyúlások hányadosa az idő függvényében nem állandó.

Az egytengelyű állapotnál alkalmazott jelölések:

$$\mathbf{F} = \|\sigma_{ij}\| = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \sigma_o = \frac{1}{3} \sigma, \quad \mathbf{T} = \mathbf{F} - \sigma_o \mathbf{I} = \|\sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}\| := \|s_{ij}\| = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \|\varepsilon_{ij}\| = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} \end{Bmatrix} \varepsilon, \quad \varepsilon_o = \frac{m-2}{3m} \varepsilon,$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} - \varepsilon_o \mathbf{I} = \|\varepsilon_{ij} - \varepsilon_o \delta_{ij}\| := \|s_{ij}\| = \frac{m+1}{3m} \begin{Bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \varepsilon.$$

(a) *Rugalmas, reverzibilis, egyensúlyi* esetben a $\mathbf{T}^{rev} = 2G\mathbf{E}$, $\mathbf{T}_o^{rev} = 3K\mathbf{E}_o$ összefüggésbe történő behelyettesítéssel az anyagegyenlet

$$\sigma = E\varepsilon$$

alakúra egyszerűsödik, ahol

$$E := \frac{9KG}{3K+G} = 2G \frac{m+1}{m} := 3K \frac{m-2}{m}, \quad m = \frac{2G}{E-2G} = \frac{6K}{3K-E} = \frac{6K+2G}{3K-2G}.$$

(b) *Rugalmas-képlékeny egyensúlyi* esetben a

$$\mathbf{T}^{eq} = 2G\mathbf{E} - (2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \quad \mathbf{T}_o^{eq} = 3K\mathbf{E}_o - (3K - 3K_{pl})(\mathbf{E}_o - \mathbf{E}_{of})$$

összefüggésbe történő behelyettesítéssel az anyagtörvény

$$\sigma = E\varepsilon - (E - E_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f), \text{ ill. } \sigma = E_{pl}\varepsilon + (E - E_{pl})\varepsilon_f$$

alakú lesz, ahol

$$E := \frac{9KG}{3K+G}, \quad E_{pl} := \frac{9K_{pl}G_{pl}}{3K_{pl}+G_{pl}}.$$

A kettő együtt, az egységes *egyensúlyi* anyagtörvény:

$$\sigma = E\varepsilon - \Psi(E - E_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f).$$

(c) *Rugalmas, reológiai* esetben a

$$\mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} = 2G\mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o = 3K\mathbf{E}_o + 3K_v \dot{\mathbf{E}}_o$$

egyenletbe történő behelyettesítésnél már nem használhatjuk fel az $\varepsilon_k = -\varepsilon/m$ összefüggést, ugyanis ekkor már $m = -\varepsilon/\varepsilon_k \neq const$, ezért az egytengelyű anyagegyenlet

$$\begin{aligned}\sigma + \vartheta \dot{\sigma} &= E\varepsilon + \lambda \dot{\varepsilon}, \\ \sigma + \vartheta_k \dot{\sigma} &= E_k \varepsilon_k + \lambda_k \dot{\varepsilon}_k,\end{aligned}$$

ahol az anyagállandók:

$$\begin{aligned}E &:= \frac{9GK}{3K+G}, & \lambda &:= \frac{9\eta K}{3K+G}, & \vartheta &:= \frac{3K\tau + \eta}{3K+G}, \\ E_k &:= \frac{6EK}{E-3K}, & \lambda_k &:= \frac{6\lambda K}{E-3K}, & \vartheta_k &:= \frac{\lambda - 3K\vartheta}{E-3K}.\end{aligned}$$

Innen kiolvasható, hogy milyen feltétel teljesülése esetén zsugorodik a 2 egyenlet eggyé. Ha

$$\frac{K_v}{K} - \tau_o = 0,$$

akkor $\mathbf{T}_o = 3K\mathbf{E}_o$, s ekkor a klasszikus POYNTING-THOMSON-teszthez jutottunk, amelynél a térfogati deformációk késése megegyezik a térfogati relaxációval, így a térfogatváltozás időtől függetlennek tűnik. Ekkor az anyagegyenlet már egyetlen egyenletből áll:

$$\sigma + \vartheta \dot{\sigma} = E\varepsilon + \lambda \dot{\varepsilon}.$$

(d) Rugalmas-képlékeny, reológiai esetben ekkor az anyagtörvény:

$$\sigma + \vartheta \dot{\sigma} = E\varepsilon + \lambda \dot{\varepsilon} - \Psi \left[(E - E_{pl}) (\varepsilon - \varepsilon_f) + (\lambda - \lambda_{pl}) \dot{\varepsilon} \right].$$

3. ÁLTALÁNOS ANYAGTÖRVÉNY ALKALMAZÁSA MÉRNÖKI FELADATOK MEGOLDÁSÁNÁL

A legbonyolultabb rugalmas-képlékeny reológiai feladat is megoldható az eddig tárgyalt ismeretek tükrében, egyszerű rugalmasságtani megoldások alapján. Erre konkrét példákat a függelék ismertet körszelvényű vágatok esetére.

A következőkben elvileg követjük végig az egyes lépéseket.

Egy kontinuummechanikai feladatot közismerten megoldottnak tekintünk, ha ismerjük az

$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ - feszültségmezőt, mint a hely és idő függvényét, vagyis a feszültség-állapotot a test minden pontjában, minden időpillanatban, a

$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ - deformációmezőt; az

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ - elmozdulásmező pedig számítható az ún. geometriai egyenletből, a $\mathbf{D}$ és $\mathbf{u}$ közötti definíciós egyenletből.

A mezőfüggvények meghatározásához ismernünk kell az anyagtörvényt, illetve a benne szereplő anyagállandók értékét, s rendelkezésünkre állnak – az illusztráció kedvéért most csak statikai feladatra koncentrálnak – az alábbi összefüggések:

$$\text{Egyensúlyi egyenlet: } \mathbf{f}_e(\mathbf{F}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Div } \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned} \text{Anyagegyenlet: } \mathbf{f}_a(\mathbf{F}, \mathbf{D}) = \mathbf{0} & \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \Psi) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{f}'_a(\mathbf{T}, \mathbf{E}, \Psi) = \mathbf{0} & \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f}'_a(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}, \Psi) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{f}^o_a(\mathbf{T}_o, \mathbf{E}_o, \Psi) = \mathbf{0} & \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f}^o_a(\mathbf{T}_o, \dot{\mathbf{T}}_o, \mathbf{E}_o, \dot{\mathbf{E}}_o, \Psi) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Geometriai egyenlet: } \mathbf{f}_g(\mathbf{D}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} & \quad \Leftrightarrow \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{u}) = \sqrt{(\mathbf{I} + \mathbf{u} \circ \nabla)(\nabla \circ \mathbf{u} + \mathbf{I})} - \mathbf{I},^{31} & \\ \mathbf{f}_g(\mathbf{E}, \mathbf{E}_o, \mathbf{u}) = \mathbf{0} & \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_o = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I}. \end{aligned}$$

KÖVETKEZMÉNY: Bármilyen mechanikai feladat megoldásánál elégséges a legegyszerűbb 1. szerinti feladatot – ld. 1. ábra – megoldani, s a többi már – legalábbis az általunk vizsgált egyszerű esetekben – meghatározható. Az alább vázolt megoldási stratégiát reményeink szerint sokkal általánosabb körülmények között is sikeresen alkalmazhatjuk.

Általában a mechanikai feladat megoldása azt jelenti, hogy meghatározzuk az

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t, \Psi) \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t, \Psi) \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t, \Psi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t, \Psi) + \mathbf{T}_o(\mathbf{r}, t, \Psi) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t, \Psi) + \mathbf{E}_o(\mathbf{r}, t, \Psi) \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t, \Psi) \end{Bmatrix}.$$

mechanikai mezőt, adott kezdeti és kerületi feltételek mellett, az

$$\mathbf{L} = \left\{ \begin{array}{l|l} \mathbf{f}_e & \mathbf{F} \nabla = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_g & \mathbf{D} = \sqrt{\mathbf{H}(\mathbf{u})^T \mathbf{H}(\mathbf{u})} - \mathbf{I} \\ \mathbf{f}_a & \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{D}, \Psi) \end{array} \right\}$$

mechanikai alapegyenletek megoldásával [$\mathbf{M} \in \mathbf{L}$], vagy más szóval: az $\mathbf{L}$ értelmezési tartományon.

Vegyük sorba a lehetséges eseteket.

A REOLÓGIAI MEGOLDÁS A RUGALMAS TARTOMÁNYON. Ekkor a $\Psi = 0$ korlátozású anyagtörvénnyel van dolgunk. Legyen a kiindulás a rugalmas egyensúly [1], s keressük a mechanikai mező alakulását a $0 \leq t < \infty$ időintervallumon [1 $\Rightarrow$ 2].

³¹ Kis deformációk esetén $\mathbf{D} \approx \frac{1}{2}(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u})$.

Ekkor az alapegyenletek:

$$\mathbf{L} = \left\{ \begin{array}{l|l} \mathbf{f}_e & \mathbf{F}\nabla = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{T}_o \end{pmatrix} \nabla = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_g & \mathbf{D} = \begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{E}_o = \mathbf{E}_o(\mathbf{u}) \end{cases} \\ \mathbf{f}_a & \mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}} - \tau \dot{\mathbf{T}} \\ \mathbf{T}_o = 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\mathbf{E}_o - \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o \end{cases} \end{array} \right\}.$$

Első lépés: Megoldjuk a feladatot a klasszikus HOOKE-törvény [$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E}$, $\mathbf{T}_o = 3K\mathbf{E}_o$] felhasználásával, s tudjuk, hogy az általános megoldás ehhez konvergál a $t \rightarrow \infty$ esetben. Ezzel tehát rendelkezésünkre áll az

$$\mathbf{M}^\infty = \mathbf{M}(\mathbf{r}, \infty) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^\infty(\mathbf{r}) \\ \mathbf{D}^\infty(\mathbf{r}) \\ \mathbf{u}^\infty(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^\infty + \mathbf{T}_o^\infty \\ \mathbf{E}^\infty + \mathbf{E}_o^\infty \\ \mathbf{u}^\infty \end{pmatrix}$$

megoldás.

Második lépés: Szükség van még a $t = 0$ időpontbeli megoldásra is. Ehhez meg kell határoznunk a $t = 0$ időpontban érvényes HOOKE-törvényt. Pl. földalatti üregnyitásnál ezt általában *végtelen gyors* terhelés-átrendezésnek tekintjük, s ebben az esetben a HOOKE-törvény anyagállandói módosulnak csak [$\mathbf{T} = (2\eta/\tau)\mathbf{E}$, $\mathbf{T}_o = (K/K_v)\mathbf{E}_o$] formában. (Azt is mondhatjuk, hogy a statikai modulusok helyett a dinamikai modulusokat használjuk.) Az ismételt számítással megkapjuk az

$$\mathbf{M}^0 = \mathbf{M}(\mathbf{r}, 0) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{D}^0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{u}^0(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^0 + \mathbf{T}_o^0 \\ \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}_o^0 \\ \mathbf{u}^0 \end{pmatrix}$$

megoldást.

Az általános megoldás az előző két megoldás összekapcsolásából, az

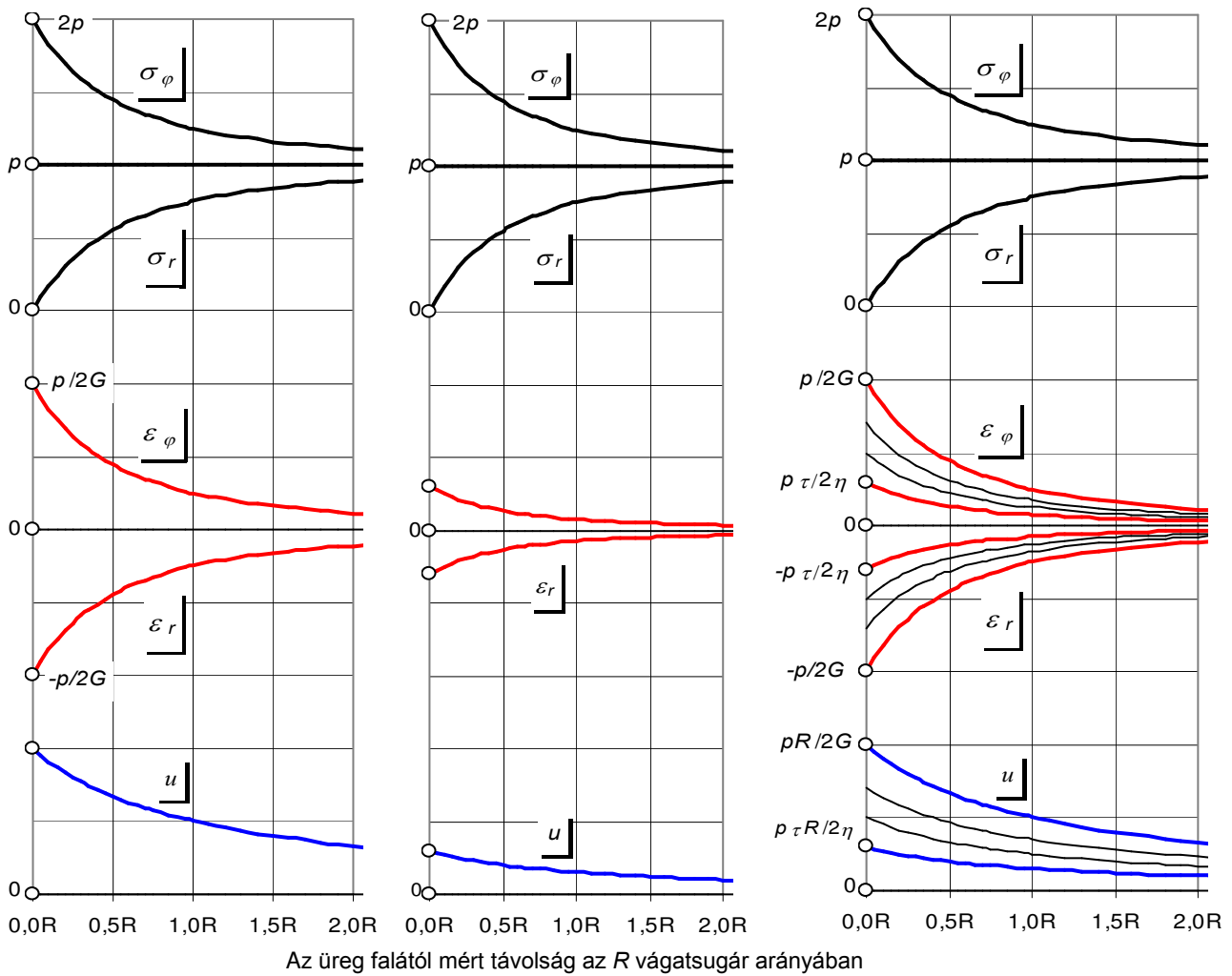
$$e^{-\alpha_i t}$$

átviteli függvénnyel adódik:

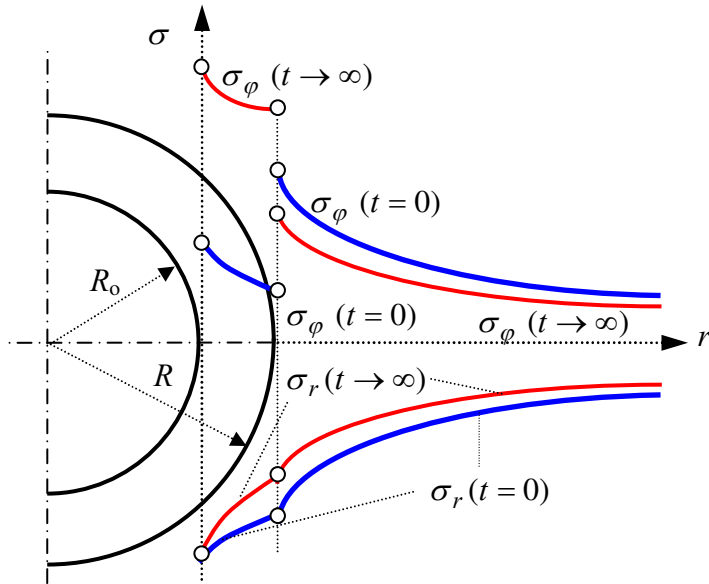
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T} = \mathbf{T}^\infty + (\mathbf{T}^0 - \mathbf{T}^\infty) e^{-\frac{1}{\tau}t}, \\ \mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_0^\infty + (\mathbf{T}_0^0 - \mathbf{T}_0^\infty) e^{-\frac{1}{\tau_0}t}, \\ \mathbf{E} = \mathbf{E}^\infty + (\mathbf{E}^0 - \mathbf{E}^\infty) e^{-\frac{G}{\eta}t}, \\ \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0^\infty + (\mathbf{E}_0^0 - \mathbf{E}_0^\infty) e^{-\frac{K}{K_v}t}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^\infty + (\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^\infty) e^{-\frac{G}{\eta}t}. \end{array} \right.$$

formában, amely a POYNTING-THOMSON-modell differenciálegyenletének megoldásából vezethető le.

A mellékelt 3. ábrával illusztrálnánk az elmondottakat, ahol p nyomású hidrosztatikus primér feszültségmezőben kihajtott R sugarú vágat körüli mechanikai mezőt látjuk (levezetések a Függelékben találhatóak).



3. ábra. A mechanikai mező (a) – a végső ($t \rightarrow \infty$) állapotban, (b) – a kezdeti ($t = 0$ időpontban) állapotban, és (c) – a $0 \leq t < \infty$ időtartam során



A 4. ábra azt az esetet mutatja a kezdeti és végső állapotban, amikor a vágatba egy R_0 sugarú, $R - R_0$ falvastagságú biztosítás került beépítésre.

A reológiai mechanikai mező meghatározási módja független a feladat jellegétől.

4. ábra

A MECHANIKAI MEZŐ EGYENSÚLY ESETÉN. Ekkor a $\dot{\Psi} \neq 0$, és $\dot{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{0}$ korlátozású anyagtörvénnyel van dolgunk., vagyis klasszikus rugalmas-képlékeny feladattal. A kiindulás most is a rugalmas egyensúly [1], s keressük a képlékeny egyensúlyt[1⇔3].

Első lépés: Megoldjuk a feladatot a már ismert módon klasszikus HOOKE-törvény [$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E}$, $\mathbf{T}_0 = 3K\mathbf{E}_0$] felhasználásával. A mechanikai állapotváltozók ebben az esetben időfüggetlenek:

$$\mathbf{M}^{elast} = \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{elast}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{D}^{elast}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{u}^{elast}(\mathbf{r}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}^{elast} + \mathbf{T}_0^{elast} \\ \mathbf{E}^{elast} + \mathbf{E}_0^{elast} \\ \mathbf{u}^{elast} \end{Bmatrix}.$$

Második lépés: Meghatározzuk a képlékenytartománybeli megoldást a $\Psi = 1$ esetre érvényes anyagtörvénnyel. Ezt kétféleképpen tehetjük, mivel a deformációknak kétféle felírási módja is lehet:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0, \text{ amelyben } \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_f + \mathbf{E}^{plast} &= \mathbf{E}^{rev} + \mathbf{E}^{maradó}, \\ \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}_{of} + \mathbf{E}_0^{plast} &= \mathbf{E}_0^{rev} + \mathbf{E}_0^{maradó}. \end{aligned}$$

(a) Meghatározzuk a megoldást a plasztikus anyagtörvénnyel:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} - \mathbf{T}_f &= 2G_{pl}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), & \mathbf{T}^{plast} &= 2G_{pl}\mathbf{E}^{plast}, \\ \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_{of} &= 3K_{pl}(\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_{of}), & \mathbf{T}_0^{plast} &= 3K_{pl}\mathbf{E}_0^{plast}. \end{aligned}$$

Az előző megoldásból rendelkezésünkre áll a

$$W_f = \int_0^{\mathbf{E}_f} \mathbf{T} : d\mathbf{E} + \int_0^{\mathbf{E}_{of}} \mathbf{T}_o : d\mathbf{E}_o = \frac{1}{2} (\mathbf{T}_f : \mathbf{E}_f + \mathbf{T}_{of} : \mathbf{E}_{of})$$

képlékenységi határhoz tartozó feszültség és deformáció: $\mathbf{T}_f, \mathbf{E}_f, \mathbf{T}_{of}, \mathbf{E}_{of}$ konkrét értéke. Így voltaképp az első feladatnak megfelelően járunk el, csak most a plasztikus anyagállandókat alkalmazzuk, nem elfelejtve, hogy csak a képlékeny tartományra érvényes eredményt kapunk:

$$\mathbf{M}^{plast} = \mathbf{M}^{plast}(\mathbf{r}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{plast}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{D}^{plast}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{u}^{plast}(\mathbf{r}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}^{plast} + \mathbf{T}_o^{plast} \\ \mathbf{E}^{plast} + \mathbf{E}_o^{plast} \\ \mathbf{u}^{plast} \end{Bmatrix}, \text{ ha } W' \geq W_f'.$$

Ekkor a rugalmas tartományban az $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{elast}$ az érvényes megoldás, s a képlékeny tartományban pedig az $\mathbf{M} = \mathbf{M}_f + \mathbf{M}^{plast}$.

$$\mathbf{M}(\mathbf{r})_{(a)} = \begin{cases} \mathbf{M}^{elast} & = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{elast}, \\ \mathbf{D}^{elast}, \\ \mathbf{u}^{elast}, \end{Bmatrix} & \text{ha } W' \leq W_f', \\ \mathbf{M}_f + \mathbf{M}^{plast} & = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_f + \mathbf{F}^{plast}, \\ \mathbf{D}_f + \mathbf{D}^{plast}, \\ \mathbf{u}_f + \mathbf{u}^{plast}, \end{Bmatrix} & \text{ha } W' > W_f'. \end{cases}$$

(b) A másik lehetőség, hogy az első megoldás alapján számított $\mathbf{T}_f, \mathbf{E}_f, \mathbf{T}_{of}, \mathbf{E}_{of}$ értékekből meghatározzuk a maradó deformációkat az $\mathbf{E}^m = \mathbf{E} - \mathbf{E}^{rev}$, és $\mathbf{E}_o^m = \mathbf{E}_o - \mathbf{E}_o^{rev}$ összefüggésnek megfelelően, azaz

$$\mathbf{E}^m = \left(1 - \frac{G_{pl}}{G}\right)(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \quad \mathbf{E}_o^m = \left(1 - \frac{K_{pl}}{K}\right)(\mathbf{E}_o - \mathbf{E}_{of}).$$

Vagyis a képlékeny tartomány minden $\mathbf{r}$ pontjánál az ott érvényes rugalmas deformációkhoz hozzáadjuk, az ott érvényes maradó deformációkat.

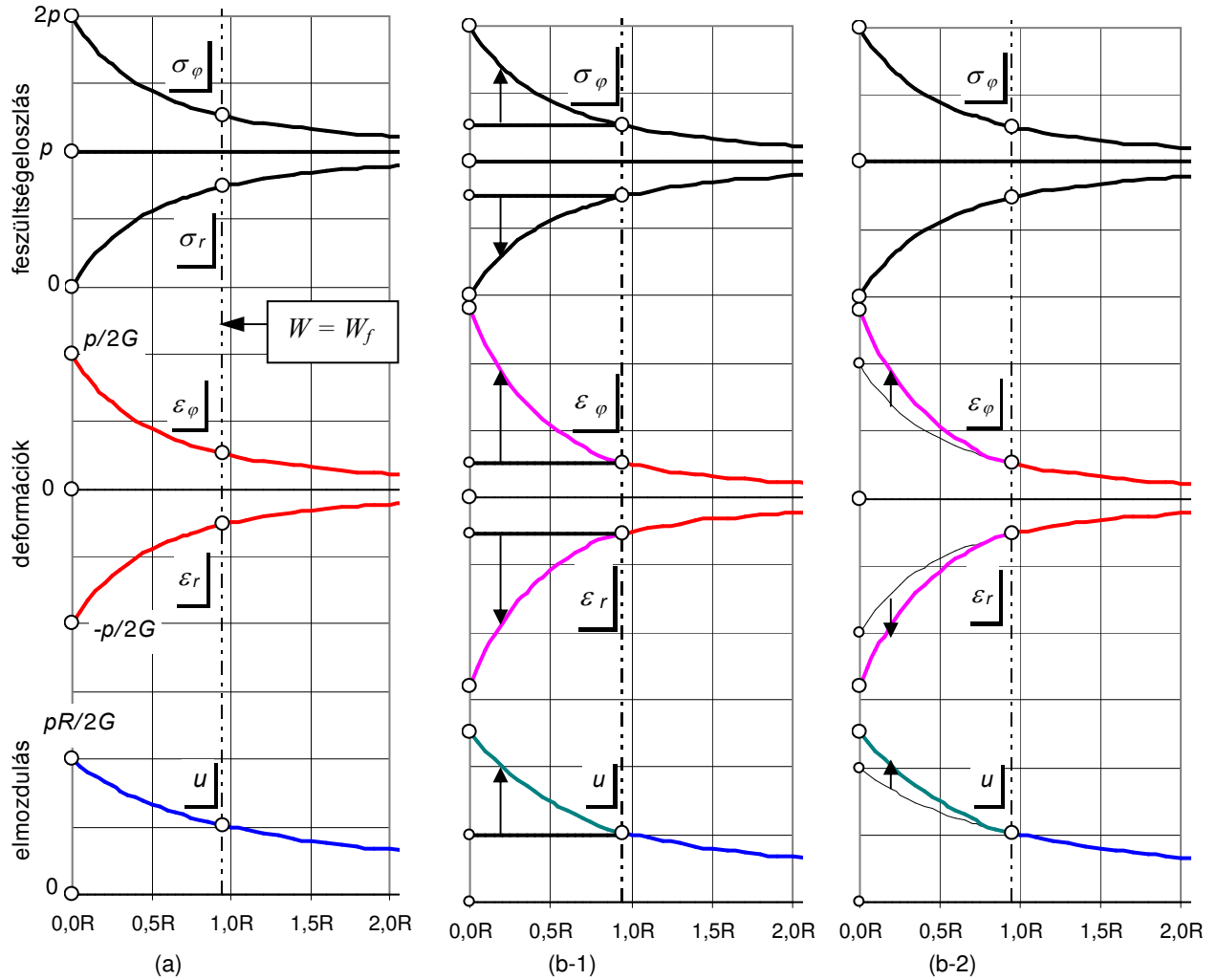
A két módszer:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r})_{(b)} = \begin{cases} \mathbf{M}^{elast} & = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}, \\ \mathbf{D}^{elast}, \\ \mathbf{u}^{elast}, \end{Bmatrix} & \text{ha } W' \leq W_f', \\ \mathbf{M}^{elast} + \mathbf{M}^{plast} & = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}, \\ \mathbf{D}^{elast} + \mathbf{D}^m, \\ \mathbf{u}^{elast} + \mathbf{u}^m, \end{Bmatrix} & \text{ha } W' > W_f'. \end{cases}$$

Az 5. ábrán ezt illusztráljuk a körszelvényű vágat példájával. Az (a) annyiban tér el ettől képileg, hogy a képlékeny tartományban egy konstans, azaz vízszintes egyenes adja a folyáshatárhoz tartozó feszültség-, deformáció- és elmozdulásértékeket, s ehhez adódnak a

$$\sigma_{\varphi}^{plast}(r), \quad \sigma_r^{plast}(r), \quad \varepsilon_{\varphi}^{plast}(r), \quad \varepsilon_r^{plast}(r), \quad u^{plast}(r)$$

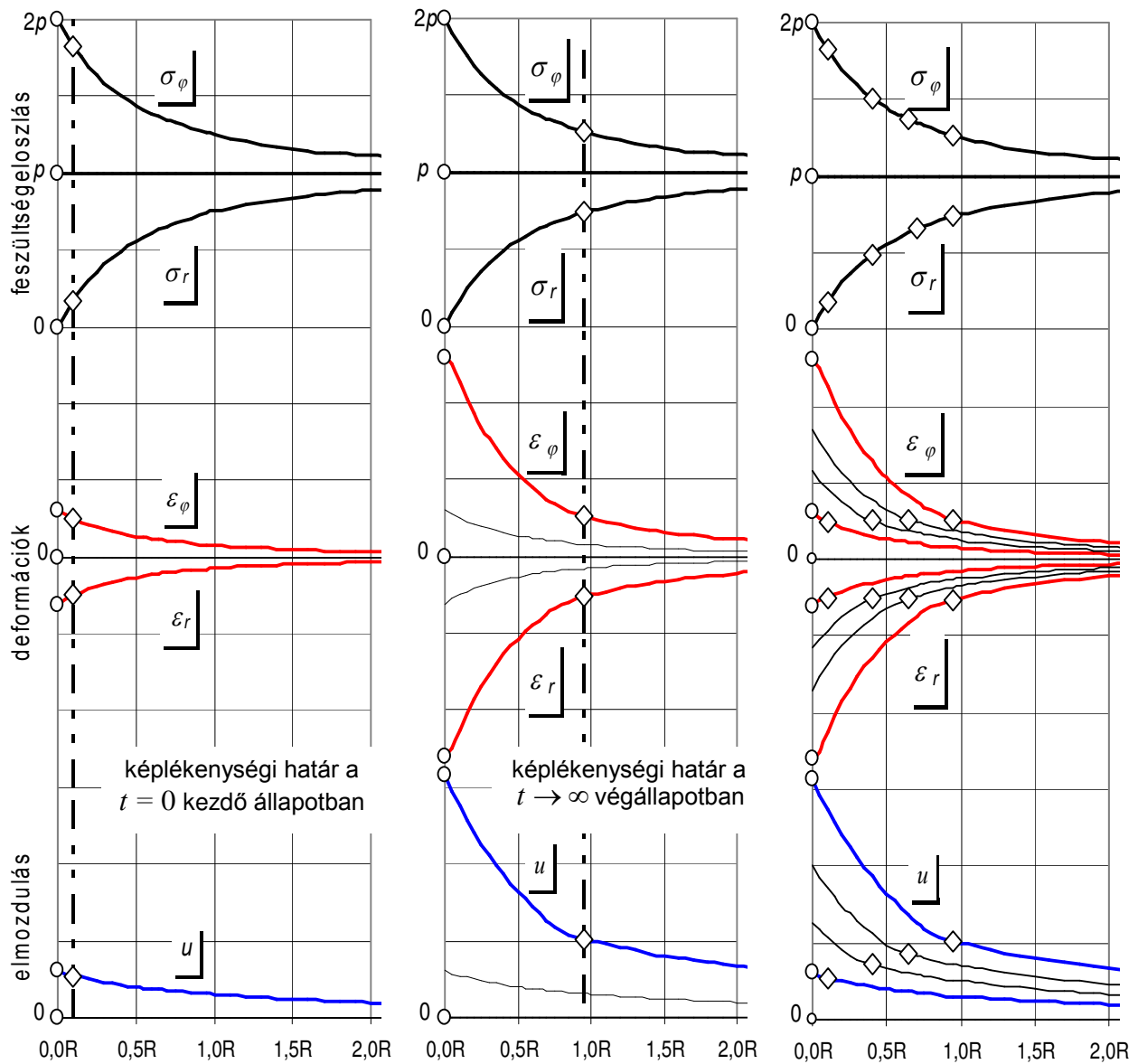
értékek.



Az üreg falától mért távolság az R vágatsugár arányában

5. ábra. A mechanikai mező az üreg falától mért távolság az R vágatsugár arányában
 (a) - rugalmas állapotban, (b) – rugalmas képlékeny állapotban, (b-1) - folyáshatár és a
 plasztikus deformációk összesen), (b-2) - a rugalmas és maradó deformációk együttesen

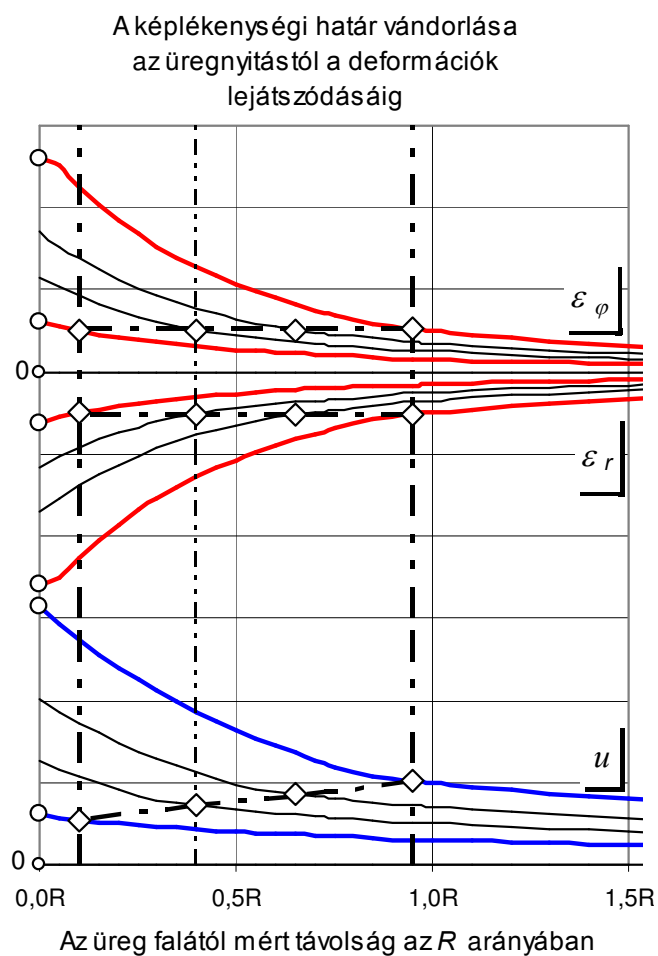
AZ ÁLTALÁNOS ESET. Az előző két esetből - $[1 \Rightarrow 2]$ és $[1 \Rightarrow 3]$ - már levezetés nélkül is evidensen következik az $[1 \Rightarrow 4]$ esetre, azaz az általános esetre vonatkozó megoldás előállítására.



Az üreg falától mért távolság az R vágatsugár arányában
 6. ábra. A mechanikai mező (a) – a kezdeti ($t = 0$ időpontban) állapotban, (b) – a végső ($t \rightarrow \infty$) állapotban, és (c) – a $0 \leq t < \infty$ időtartam során

A 6. ábra a két számítási lépést és a végeredményt mutatja be.

A 7. ábrán a képlékenységi határidőbeli vándorlása – a képlékeny állapot kifejlődése - látható.



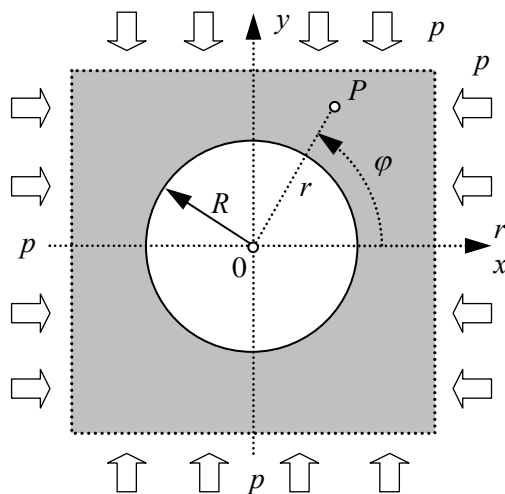
7.ábra

FÜGGELÉK

KÖRSZELVÉNYŰ ALAGÚT KÖRÜLI MECHANIKAI MEZŐ

1. A FELADAT ELŐKÉSZÍTÉSE ÉS MEGFOGALMAZÁSA

KIINDULÁSI FELTÉTELEK. A feladat egy hidrosztatikus, minden irányban állandó p nyomású, primer mezőben kihajtott körszelvényű, nyitott folyosó (vágat) körüli mechanikai mező meghatározása (1. ábra). A megfogalmazás szerint tehát az adott hidrosztatikus állapothoz kell keresni egy olyan, másik mechanikai mezőt, hogy ezeket szuperponálva, a kitűzött feladat megoldását kapjuk.



1. ábra. Körszelvényű vágat hidrosztatikus nyomású primer mezőben

A feladat és annak megoldása a szilárdságtanban, illetve a közetmechanikában kissé jártas olvasó számára is ismert, mint a vastagfalú, hosszú, nyitott csőre vonatkozó feladat egyik változata, mely szerint a cső külső palástja a végtelenben van, és erre p intenzitású radiális irányú nyomás hat, a belső palást pedig terheletlen. Ezt a közelítést fogjuk alkalmazni. A megoldás bizonyos részleteit átvehetnénk onnan is, ennek ellenére inkább a részletesebb bemutatás mellett döntöttünk, ugyanis tanulságos részek is vannak benne, amelyek mellőzése csorbítaná a teljességet.

Az egyenes tengelyű, körszelvényű vágat nyitásával egy irányt kitüntetünk. legyen ez a DESCARTES-koordináta-rendszer z tengelye.

Ugyanakkor a hidrosztatikus terhelés egyben körszimmetrikus és tengelyszimmetrikus, a vágat pedig z tengelyű körhenger. Mindezek miatt a megoldás során célszerű hengerkoordinátákat bevezetni. Ha a hengerkoordináta-rendszer z tengelye és a DESCARTES-koordináta-rendszer z tengelye egybeesik, úgyszintén a két origó is, továbbá az x tengely pozitív fele és a $\varphi = 0$ tengely, akkor – mint ismeretes –

az x, y, z DESCARTES-féle és az r, φ, z hengerkoordináták között az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctg \frac{y}{x} \\ z &= z. \end{aligned} \right\}$$

Kihangsúlyozzuk, hogy r a tartomány P pontjának a z tengelytől (és nem az origótól) mért távolságát jelenti.

Az említett szimmetriaviszonyok miatt a mechanikai mezőben mind az r , mind a φ (tangenciális), mind a z irányok főirányok, ezért a csúsztatófeszültségek és a szögtorzulások mindegyike nulla. Továbbá a feszültségek csak az r változótól függenek. Mindezek következtében

$$\begin{array}{lll} \text{a feszültségtenzor:} & \text{az alakváltozási tenzor:} & \text{az elmozdulásvektor:} \\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, & \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, & \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_z \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \end{array}$$

alakú lesz. Az $u := u_r$, $v := u_\varphi = 0$, $w := u_z$ jelöléseket célszerűségi okokból vezettük be.

A rugalmasságtan alapegyenletei ennek megfelelően egyszerűsödnek, és így a megoldás is egyszerűsödik. Feladatunk megoldásához tehát az alábbi egyenleteket használjuk fel:

(1) *Egyensúlyi egyenletek:*

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0;;$$

(2) *Geometriai egyenletek:* $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$ ³²

(3) *Anyagegyenletek:*
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2G \left[\varepsilon_r + \frac{\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z}{m-2} \right], \\ \sigma_\varphi &= 2G \left[\varepsilon_\varphi + \frac{\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z}{m-2} \right], \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z}{m-2} \right]. \end{aligned} \right\}$$

³² Itt kell megjegyezni, hogy ezek az egyenletek a CAUCHY-féle deformációs tenzor definíciós összefüggései. Mivel a mozgásgradiens ennél a feladatnál szimmetrikus, ezért ezek az összefüggések nem csak a kis deformációk tartományában értelmezhető közelítések, hanem tetszőleges nagyságrendű deformációk esetén pontos – tehát nem közelítő – formulák.

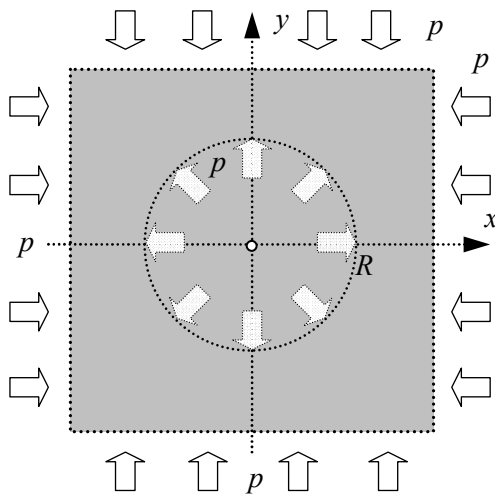
A (3) alatti (HOOKE-törvény) egyenleteket a deformációkra megoldva:

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{m}{2G(m+1)} \left[\sigma_r - \frac{\sigma_\varphi + \sigma_z}{m} \right], \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{m}{2G(m+1)} \left[\sigma_\varphi - \frac{\sigma_r + \sigma_z}{m} \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{m}{2G(m+1)} \left[\sigma_z - \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{m} \right]. \end{aligned} \right\}$$

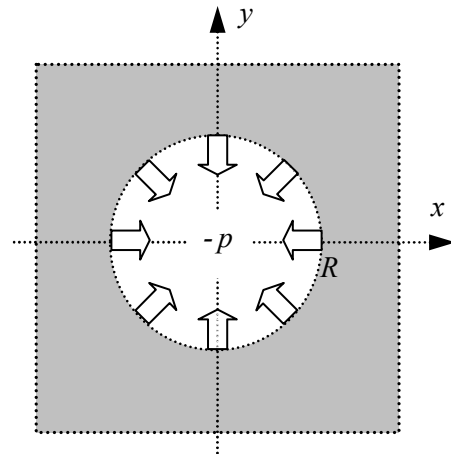
Mint látható, a 9 skálár egyenletben 9 skálár ismeretlen van ($\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, u, v, w$), míg G a csúsztató rugalmassági modulus, m pedig a POISSON-szám ($m \geq 2$) adott (anyag-) állandók. Egyértelmű megoldáshoz tehát még egy egyenletet, vagy egy feltételt meg kell adni. A feladat tehát egyértelműen megoldható, de természetesen szükséges még bizonyos peremfeltételek megadása is.

A megoldást illetően jelen esetben az látszik célszerűnek, és a megfogalmazás is ezt sugallja, hogy a feladatot bontsuk fel az alábbi két feladatra:

ELSŐ FELADAT [AZ ÖSFESZÜLTSÉGI, VAGY PRIMER ÁLLAPOT SZÁMÍTÁSA]. Meghatározandó egy hidrosztatikus, minden irányban állandó p intenzitású nyomással³³ terhelt, végtelen tartomány mechanikai állapota (2. ábra). Az ehhez tartozó mechanikai mezőt hívjuk *primer* mezőnek, s az $\mathbf{F}^p, \mathbf{D}^p, \mathbf{u}^p$ jelöléseket alkalmazzuk.



2. ábra. Primer állapotú, vágat nélküli mező



3. ábra. Körszelvényű vágat, peremén $-p$ intenzitású húzóterheléssel

³³ A fizikában és a kontinuummechanikában a p nyomás mindig negatív ($p < 0$), de a közetmechanika konvencionálisan a nyomást tekinti pozitívnak. Ezen ok miatt, hogy bármelyik szakterület képviselőjének értelmezhetőek legyenek a levezetett képletek, p alatt előjeltől függetlenül a nyomás, vagy húzás intenzitását (nagyságát) értjük. Így nem okozhat gondot a deformációkban, illetve elmozdulásokban az előjelváltás.

MÁSODIK FELADAT [AZ ÜREGNYITÁS HATÁSÁNAK SZÁMÍTÁSA]. Meghatározandó annak az R sugarú körhengerrel átfűrt végtelen tartománynak a mechanikai állapota, amelyet a henger palástján p intenzitású, radiális irányú húzóerő terhel (3. ábra). Ezt az állapotot hívjuk *kiegészítő*, vagy *üregnyitási* állapotnak, s a mezőfüggvényeket $\mathbf{F}^*$, $\mathbf{D}^*$, $\mathbf{u}^*$ formában jelöljük.

Az első feladat megoldásának a feszültségekre vonatkozó része nyilván $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = p$ a tér bármely pontján. Így $\sigma_r = p$ azon képzeletbeli hengerpaláston is, amelynek tengelye a z tengely, sugara pedig R . Ezt a hengerpalástot tehát p nyomás terheli. A 2. ábrán ezt pontozva jelöltük.

A vágatnyitás után ez a hengerpalást (a belső felületén) szabaddá válik, ezért ott $\sigma_r = 0$ lesz. Ez úgy valósulhat meg, ha a hidrosztatikus állapotra egy olyan állapotot szuperponálunk, amely ezen a hengerpaláston p intenzitású húzóerőt képvisel.³⁴ A 3. ábrán ezt ábrázoltuk. (Így lesz a p nyomóerő és a $-p$ húzóerő összege nulla). Ez indokolja a 2. feladat megfogalmazását. Mivel ebben a feladatban a végtelen tartományra csak a p intenzitású húzóerő hat, és ez csak véges ($2R\pi$) hosszúságú szakaszon (peremen), ezért ennek hatása a vágattól nagy távolságra gyakorlatilag elenyészik.

Ha a henger belsejéből eltávolítanánk az anyagot, de a peremen és a végtelenben meghagynánk a p nyomást, akkor a keletkező $r \geq R$ tartomány bármely pontjában $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = p$ feszültség működne (merítsük vízbe a tartományt!). Ez az $r \geq R$ tartomány tehát mechanikai szempontból egyenértékű az eredeti végtelen tartomány $r \geq R$ részével (az adott terhelések mellett). Ezért a fenti eredeti feladat helyett erre a „csonkított” tartományra vonatkozó feladatot is vehetjük, ahol az R sugarú körön és a végtelenben egyaránt p intenzitású, radiális irányú nyomóerő működik. Ez azzal az előnnyel jár, hogy ez utóbbi feladathoz és a második feladathoz tartozó értelmezési tartomány azonos lesz ($r \geq R$), így a szuperpozíciónak elvi akadálya sincs.

A két feladat megoldásának „összege” az eredeti feladat megoldása lesz, amelyet *szekunder állapotnak* hívunk: $\mathbf{F}^{\text{secunder}} := \mathbf{F} = \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^*$, $\mathbf{D}^{\text{secunder}} := \mathbf{D} = \mathbf{D}^p + \mathbf{D}^*$, $\mathbf{u}^{\text{secunder}} := \mathbf{u} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^*$.

Megjegyezzük, hogy számunkra a második feladat megoldása a lényeges, hiszen elsősorban a vágatnyitás következtében előálló változások érdekelnek bennünket.

³⁴ Ne felejtjük el, hogy a szuperpozíció csak homogén-lineáris anyagtörvény esetén lehetséges, sem reológiai, sem képlékeny esetben már nem. (Helyesebben nem egyszerű összeadás révén, hanem valamivel bonyolultabb szuperpozíciós törvénnyel.)

2. A PRIMER FELADAT MEGOLDÁSA

Tekintettel arra, hogy itt nincs kitüntetett irány, a terhelések és az anyagegyenletek szimmetriái miatt

$$(5) \quad \sigma_r^p = \sigma_\phi^p = \sigma_z^p = p.$$

A deformációk is azonosak, így a (4) szerint

$$(6) \quad \varepsilon_r^p = \varepsilon_\phi^p = \varepsilon_z^p = \frac{p}{2G} \frac{m-2}{m+1}.$$

A (2) geometriai egyenletek szerint pedig

$$(7) \quad u^p = \frac{p}{2G} \frac{m-2}{m+1} r, \quad v^p = 0, \quad w^p = \frac{p}{2G} \frac{m-2}{m+1} z.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy ezek az értékek kielégítik az (1)-(4) egyenletrendszerét és a $\sigma_r(\infty) = \sigma_\phi(\infty) = \sigma_z(\infty) = p$ feltételeket, tehát az (5), (6), (7) valóban megoldása az (1) - (4) rendszernek. Figyelemreméltó, hogy az elmozdulás az origóban (azaz $r = 0$ és $z = 0$ esetén) nulla, miközben u és w tetszőlegesen nagy lehet. Ebben az esetben tehát az origót tekintjük fixnek.

Ugyanakkor meg kell említeni, hogy az érintőirányú elmozdulás, $v = 0$. Ez a kissé furcsának tűnő jelenség egyrészt a körszimmetriából, másrészt a hengerkoordináta-rendszer jellegéből következik. Így a primer állapotot jellemző feszültségi tenzor, alakváltozási tenzor és elmozdulásvektor:

$$(8) \quad \mathbf{F}^p = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^p = \frac{p}{2G} \frac{m-2}{m+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^p = \frac{p}{2G} \frac{m-2}{m+1} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

A primér állapothoz tartozó mozgások az ösfeszültségi állapot kialakulásakor már régen lejátszódtak, így az üregnyitás során észlelt tényleges primer állapot, amelyet figyelembe kell venni: $\mathbf{F}^p = p\mathbf{I}$, $\mathbf{D}^p = \mathbf{0}$, $\mathbf{u}^p = \mathbf{0}$.

3. A MÁSODIK FELADAT MEGOLDÁSA RUGALMAS TARTOMÁNYON

Mint már korábban megfogalmaztuk, annak az R sugarú körhengerrel átfűrt végtelen tartománynak a mechanikai állapotát kell meghatározni, amelyet a henger palástján p intenzitású, radiális irányú húzóerő terhel. Matematikailag ez azt jelenti, hogy meg kell oldani az (1) - (4) egyenletrendszerét a

$$(9) \quad \sigma_r(R) = -p, \quad \sigma_r(\infty) = 0$$

peremfeltételek mellett. A henger tengelyére merőleges bármelyik síkban, a palást menti $-p$ terhelés hatására ugyanaz a mechanikai állapot keletkezik. A feladat tehát síkbeli feladatként kezelhető.

A megoldás előállításához az (1)-(4) rendszerből kieszőröljük ki a deformációkat. Ehhez helyettesítsük be a (2)-ben szereplő ε_r és ε_φ deformációkat a (3)-ba. Ekkor a

$$(10) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \left[(m-1) \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_z \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{2G}{m-2} \left[\frac{du}{dr} + (m-1) \frac{u}{r} + \varepsilon_z \right], \\ \sigma_z &= \frac{2G}{m-2} \left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + (m-1)\varepsilon_z \right] \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. A továbbiakban feltételezzük, hogy ε_z állandó. A (10) első és második egyenletét helyettesítsük be az (1) egyensúlyi egyenletbe. Rendezések és összevonások után az

$$(11) \quad r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = 0$$

másodrendű, lineáris differenciálegyenlethez jutunk, melynek általános megoldása

$$(12) \quad u = C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

Ezt visszahelyettesítve a (10) rendszerbe:

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \left[mC_1 - (m-2) \frac{C_2}{r^2} + \varepsilon_z \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{2G}{m-2} \left[mC_1 + (m-2) \frac{C_2}{r^2} + \varepsilon_z \right], \\ \sigma_z &= \frac{2G}{m-2} [2C_1 + (m-1)\varepsilon_z] \end{aligned} \right\}$$

SÍKALAKVÁLTOZÁSI ÁLLAPOT esetén, azaz ha $\varepsilon_z = 0$, akkor

$$\sigma_r = \frac{2G}{m-2} \left[mC_1 - (m-2) \frac{C_2}{r^2} \right].$$

Kihasználva itt a $\sigma_r(\infty) = 0$ és a $\sigma_r(R) = -p$ feltételeket, a C_1, C_2 integrációs állandókra a

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{p}{2G} R^2$$

értékeket kapjuk. A $C_1 = 0$ és $\varepsilon_z = 0$ eredményeként a (13) harmadik egyenletéből $\sigma_z = 0$ adódik. Mindezeket visszahelyettesítve a (13) rendszerbe, a feszültségek:

$$(14) \quad \sigma_r = -p \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \sigma_\varphi = p \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \sigma_z = 0.$$

Célszerű lehet a feszültségeket a dimenzió nélküli $\delta = \left(\frac{R}{r} \right)^2$ változó segítségével felírni. Ezzel a transzformációval σ_r és σ_φ a

$$(14a) \quad \sigma_r = -p\delta, \quad \sigma_\varphi = p\delta$$

lineáris – tehát egyszerű és jól szemléltethető – alakban írható fel.

Az alakváltozások a (4) szerint

$$(15) \quad \varepsilon_r = -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \varepsilon_z = 0.$$

Az elmozdulások, a (2) geometriai egyenletekből:

$$(16) \quad u = \frac{p}{2G} \frac{R^2}{r}, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

A 2. feladat megoldása tehát, egyúttal a vágatnyitás következtében létrejövő mechanikai állapotot jellemző feszültségi tenzor, alakváltozási tenzor és elmozdulásvektor:

$$(17) \quad \mathbf{F}^* = p \left(\frac{R}{r} \right)^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

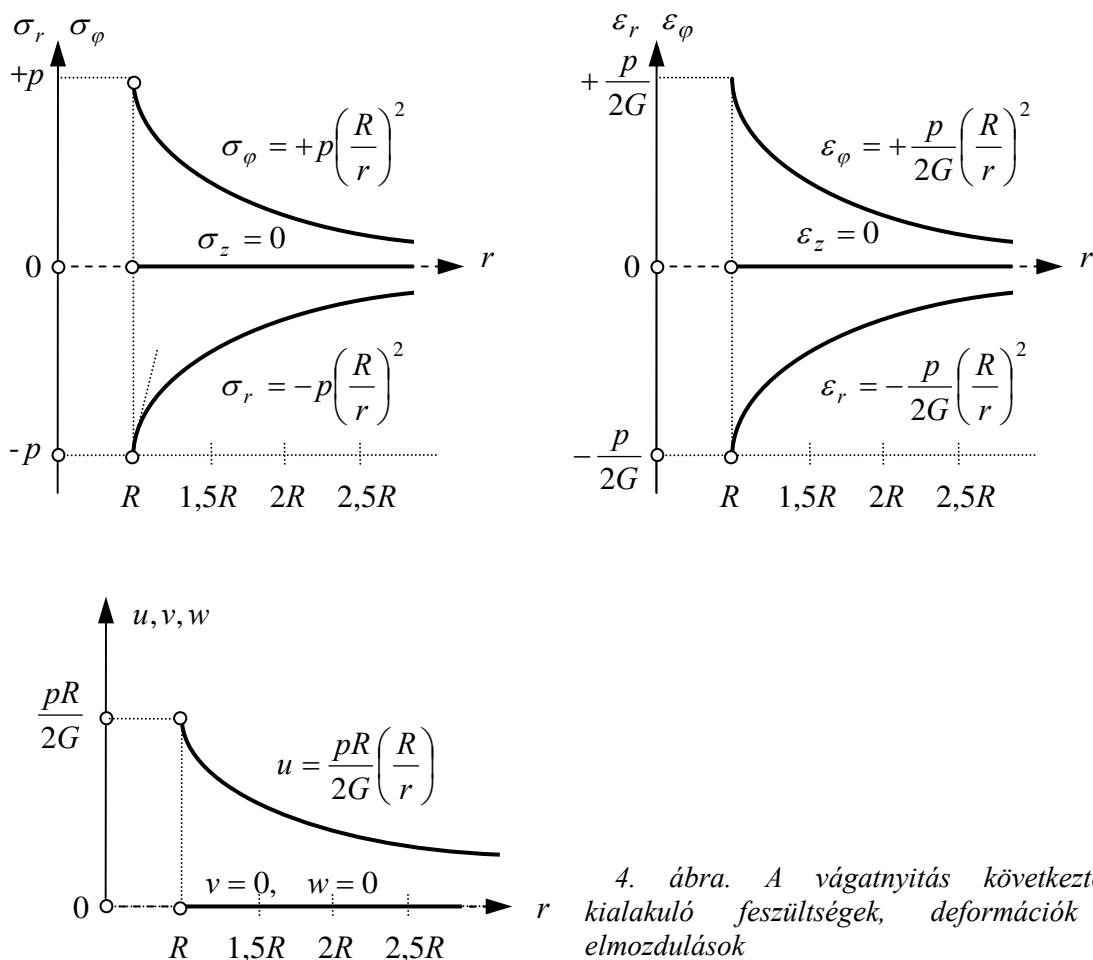
A (14) képletekben is talán logikusabb lenne a „csillagos” jelölés (σ_r^* stb.). A kényelmesebb írásmód kedvéért azonban ettől eltekintünk, s a továbbiakban is ezt követjük.

A feszültségek, a deformációk, illetve az elmozdulások jelleggörbéi a következő oldalon lévő 4. ábrán láthatók.

Példaképpen számítsuk ki a vágat peremének elmozdulását, ha $p = 100 \text{ MPa}$, $2G = 4.000 \text{ MPa}$, $m = 4$, $R = 2.000 \text{ mm}$. Ekkor $r = R$, és így a (16) szerint

$$u(R) = \frac{pR}{2G} = 50 \text{ mm}.$$

Ugyanakkor a vágatnyitás előtti (azaz primer) elmozdulás a (7) szerint, ugyanezekkel az adatokkal, 20 mm (ami már nem jelentkezik).



4. ábra. A vágatnyitás következtében kialakuló feszültségek, deformációk és elmozdulások

SÍKFESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT esetén, azaz ha $\sigma_z = 0$, akkor a (13) rendszer első, ill. harmadik egyenlete

$$(18) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \left[mC_1 - (m-2) \frac{C_2}{r^2} + \epsilon_z \right] \\ 0 &= 2C_1 + (m-1)\epsilon_z \end{aligned} \right\}$$

Kihasználva a $\sigma_r(\infty) = 0$ peremfeltételt, a C_1 és ϵ_z ismeretlenekre az

$$(19) \quad \left. \begin{aligned} mC_1 + \epsilon_z &= 0 \\ 2C_1 + (m-1)\epsilon_z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

homogén lineáris egyenletrendszert kapjuk. Ennek a triviálistól különböző megoldása akkor van, ha a determinánsa nulla, azaz, ha

$$m(m-1) - 2 = 0.$$

Ez csak $m = -1$ vagy $m = 2$ esetén teljesül. Mivel ez a két gyök fizikailag számunkra nem ad lehetséges állapotot, ezért a (19) egyenletrendszer megoldásaként csak $C_1 = 0$ és $\epsilon_z = 0$ jöhet szóba. Ez viszont azt jelenti, hogy $\sigma_z = 0$, így

$$\sigma_r = -p \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \sigma_\varphi = p \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \sigma_z = 0.$$

Tehát a második (üregnyitási) feladat megoldása a (17)-ben adott $\mathbf{F}^*$, $\mathbf{D}^*$, $\mathbf{u}^*$, akár síkalakváltozást, akár síkfeszültségi állapotot tételezünk fel. Ez a feladat speciális jellegéből következik.³⁵

A (16) elmozdulással kapcsolatban megjegyezzük, hogy most az $r = \infty$ hengert tekintjük fixnek, vagyis az u elmozdulás az ε_r deformációk „végtelentől r -ig terjedő összegezésével” kapható, azaz

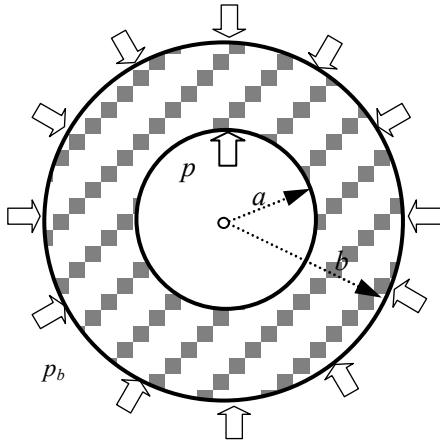
$$u = \int_{\infty}^r \left(-\frac{p}{2G} \frac{R^2}{r^2} \right) dr = \frac{p}{2G} R^2 \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = \frac{p}{2G} \frac{R^2}{r},$$

ami természetesen megegyezik $r\varepsilon_\varphi$ -vel.

A (12) és (13) egyenlőségekből látható, hogy ilyen és ehhez hasonló feladatoknál az u radiális elmozdulás, és a radiális, ill. tangenciális feszültség az alábbi alakban állítható elő:

$$(20) \quad u = C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

$$(21) \quad \sigma_r = A - \frac{B}{r^2}, \quad \text{ill.} \quad \sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2}.$$



5. ábra. Vastagfalú cső p_b belső és p_b külső terheléssel

Például tekintsük az 5. ábrán látható vastagfalú csövet, amelyre kívülről p_b , belülről p_a intenzitású nyomás hat.

A feszültségek meghatározásánál a $\sigma_r(a) = p_a$ és $\sigma_r(b) = p_b$ peremfeltételeket kell alkalmazni.

A $\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}$ feszültség esetében

$$p_a = A - \frac{B}{a^2}, \quad p_b = A - \frac{B}{b^2},$$

ahonnan A és B könnyen meghatározható.

³⁵ Figyeljük meg, hogy mind az (5)-nél, mind a (14)-nél teljesül a $\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi)$ összefüggés,

ami megfelel a Hooke-törvényből adódó $\sigma_z = \frac{1}{m}(\sigma_r + \sigma_\varphi)$ összefüggésnek $m = 2$ mellett, ugyanis a közeg ennél a speciális esetnél (hidrosztatikus állapot – körszimmetria) tetszőleges Poisson szám ($m \neq 2$) esetén is úgy viselkedik, mintha értéke 2 lenne.

Alkalmazva ezt a mi esetünkre, ha $p_a = -p$, $p_b = 0$ és $a = R$, $b = \infty$, akkor

$$A = p_b = 0, \quad B = pR^2.$$

Ekkor a (21) alapján

$$\sigma_r = -p \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \sigma_\varphi = p \left(\frac{R}{r} \right)^2,$$

ami egyezik (14)-gyel.

Az u elmozdulás C_1 és C_2 együtthatói is könnyen előállíthatók a (12) és (13) együtthatóinak összehasonlításával, és a peremfeltételek felhasználásával.

5. AZ EREDETI FELADAT MEGOLDÁSA RUGALMAS TARTOMÁNYON

Az 1. feladat megoldásából látható, hogy a képzeletbeli vágat peremére, az $r = R$ hengerre, egyrészt p megoszló terhelés hárul. Másrészt 2. feladat megoldása szerint ugyanerre a hengerre $-p$ megoszló terhelés hat. A két megoldás szuperpozíciójaként az $r = R$ sugarú hengerre $p - p \equiv 0$ radiális terhelés hat, vagyis a vágat pereme terheletlen lesz. A szuperpozíció eredménye tehát az eredeti feladat megoldása:

$$(22) \quad \sigma_r = p \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \quad \sigma_\varphi = p \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \quad \sigma_z = p;$$

$$(23) \quad \varepsilon_r = \frac{p}{2G} \left[\frac{m-2}{m+1} - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_\varphi = \frac{p}{2G} \left[\frac{m-2}{m+1} + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_z = \frac{p}{2G} \frac{m-2}{m+1};$$

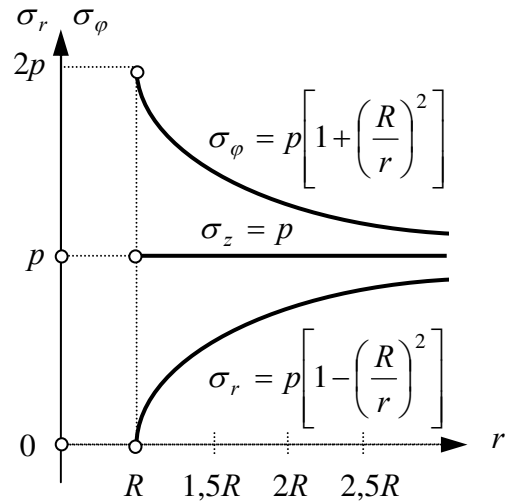
$$(24) \quad u = \frac{p}{2G} \left[\frac{m-2}{m+1} r + \frac{R^2}{r} \right], \quad v = 0, \quad w = \frac{p}{2G} \frac{m-2}{m+1} z.$$

Ugyanez tenzoros alakban:

$$(25) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^*, \quad \mathbf{D} = \underbrace{\mathbf{D}^p}_{=0} + \mathbf{D}^*, \quad \mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{u}^p}_{=0} + \mathbf{u}^*.$$

A vágatnyitás után ténylegesen a most meghatározott feszültségek – az ún. szekunder állapot feszültségei - lépnek fel, ezeket észleljük, szemben a deformációkkal és az elmozdulásokkal. Ez utóbbiakból ugyanis a primer állapothoz tartozó részek már korábban lejátszódtak (kialakultak), és így „eltűntek” számunkra.

A 6. ábrán a (22) feszültségek görbéi láthatók.



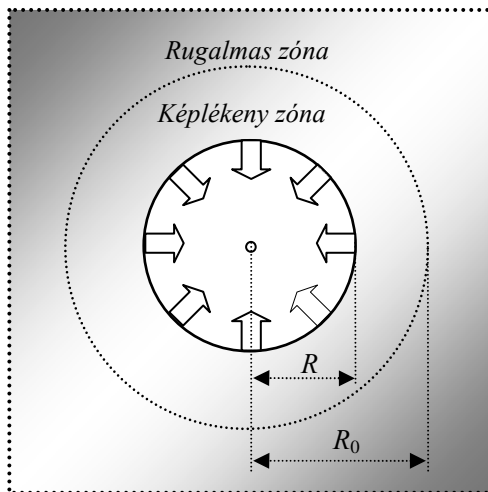
6. ábra. A szekunder állapot feszültségei

A kitűzött feladatot tehát megoldottuk, de számunkra tulajdonképpen a 2. feladat megoldása a lényeges. Ugyanis vágatnyításkor azok a változások érdekelnek bennünket, amelyek a vágatnyitás következtében lépnek fel. Ezeket pedig éppen a (14), (15), (16) értékek adják.

Ezért a továbbiakban erre fordítjuk figyelmünket.

6. A 2. FELADAT MEGOLDÁSA IDEÁLISAN KÉPLÉKENY ANYAGMODELLNÉL, KONVENCIONÁLIS FELTÉTELEZÉS MELLETT

Akkor mondjuk, hogy a tartomány rugalmas-képlékeny állapotban van, ha a terhelés folyamán a tartomány egyik része rugalmas, másik része képlékeny állapotba kerül (7. ábra).



7. ábra. A vágat körül kialakuló képlékeny zóna

Tételezzük fel, hogy a terhelés valamely értékénél a tartomány $r \geq R_0$ része rugalmas, $R \leq r \leq R_0$ része képlékeny állapotban van. A két zónát tehát az $r = R_0$ sugarú körhenger választja el egymástól. Az $r \geq R_0$ rugalmas tartományon változatlanul érvényesek az (1) - (5) egyenlőségek. A képlékeny tartományban azonban az eddig használt anyagegyenletek már nem érvényesek. Ugyanakkor az egyensúlyi és geometriai egyenletekhez egy ún. *képlékenységi feltétel* járul. Jelölje ezt a feltételt

$$\psi = 0.$$

Abban az esetben, amikor *ideális* képlékenységről beszélünk, vagyis amikor egytengelyű feszültségállapot esetén az anyagtörvényt leíró $\sigma = f(\varepsilon)$ függvény a képlékeny tartományban állandó, tehát azonos feszültséghez különböző deformációk tartozhatnak, ekkor az irodalomban azzal a fogással élnek, hogy a képlékenységi határfeltételt veszik anyagtörvénynek.³⁶

Így a képlékeny tartományon a feladat megoldása az alábbi egyenletekből álló rendszer megoldásából áll:

$$(26) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Egyensúlyi egyenlet:} \\ \text{Képlékenységi feltétel:} \\ \text{Geometriai egyenletek:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \psi = 0, \\ \varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dr}. \end{array}$$

5.1. KÉT KONVENCIONÁLIS KÉPLÉKENYSÉGI FELTÉTEL

A terhelés növekedésével a korábban rugalmas tartomány, vagy annak egy része, képlékeny állapotba kerül. Ennek a képlékeny tartománynak a határát jelöli ki a képlékenységi határfeltétel. Az irodalomban található számos feltétel közül a legnevesebbek időrendben: 17. század: GALILEI, MARIOTTE, 18. század: COULOMB, 19. század: LAMÉ, De SAINT-VENANT, DUGUET, 20. század: GUEST, MOHR, BELTRAMI, HUBER-MISES-HENCKY, stb.

A képlékeny állapot létrejötte annak következménye, hogy a *torzulási deformációs munka* túllépi azt a határt, amelyet az anyag még képes elviselni anélkül, hogy maradó alakváltozást szenvedne. A mi esetünkben ez a torzulási deformációs munka, a (14), (15) és (17) felhasználásával:

$$(27) \quad \begin{aligned} W' &= \frac{1}{2} \mathbf{T} : \mathbf{E} = W = \frac{1}{2} \mathbf{F} : \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi) = \frac{p^2}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^4 = \frac{1}{2G} \sigma_r^2. \end{aligned}$$

Ez az egyenlőség

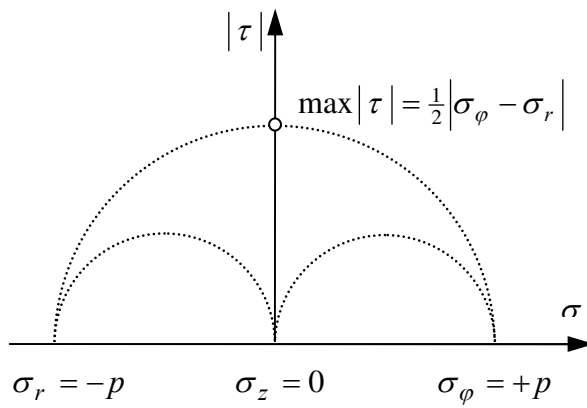
³⁶ Természetes, hogy ennek a feltevésnek semmi fizikai alapja nincs, csupán a matematikai megoldás érdekében alkalmazott szubjektív konstrukció.

$$(28) \quad |\sigma_r| = \sqrt{2GW} = \frac{1}{2}|\sigma_\varphi - \sigma_r|,$$

alakban is felírható, ugyanis jelen esetben $\sigma_\varphi - \sigma_r = 2|\sigma_r|$.

Ha W a tartomány valamely pontjában eléri az említett határt, jelölje ezt W_f , akkor ebben a pontban az anyag képlékeny állapotba kerül. A TRESKA-féle elmélet szerint ez akkor következik be, ha ebben a pontban a legnagyobb nyírófeszültség eléri a folyást előidéző τ_f folyási határt. A mi esetünket szemléltetve, 8. ábrán vázolt MOHR-körök alapján látható, hogy

$$|\tau_{\max}| = \frac{1}{2}|\sigma_\varphi - \sigma_r|.$$



8. ábra. A legnagyobb nyírófeszültség meghatározása

A HUBER-MISES-HENCKY-elmélet szerint a képlékeny állapot akkor következik be, ha az oktaéderez nyírófeszültség eléri a $\sqrt{\frac{2}{3}}\tau_f$ értéket. Mindkét elmélet esetén lényeges kihangsúlyozni, hogy ha az anyag nemcsak egy pontban, hanem egy tartományban képlékeny állapotban van, akkor mind a fajlagos torzulási munka, mind a legnagyobb nyírófeszültség a tartomány minden pontjában

ugyanakkora (állandó).

Mindezek alapján a $\psi = 0$ képlékenységi feltétel

$$(29) \quad \psi \equiv \sigma_\varphi - \sigma_r - 2k = 0, \text{ azaz } \sigma_\varphi - \sigma_r = 2k$$

alakban írható fel, ahol

$$(30) \quad k = \tau_f = |\tau_{\max}|, \text{ ill. } k = \tau_f = \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}}$$

attól függően, hogy a TRESKA-féle, ill. a HUBER-MISES-HENCKY-féle elmélet szerint járunk el. Az alkalmazásoknál természetesen τ_f és σ_f értékét ismerni kell (σ_f a folyási határ tiszta húzás esetén).

5.2. MEGOLDÁS A RUGALMAS ZÓNÁBAN

Tételezzük fel, hogy ismerjük a rugalmas és képlékeny zóna R_0 határát. A tartomány rugalmas része az $r \geq R_0$ térrész. Keressük ennek a térrésznek (résztartománynak) a mechanikai állapotát, ha az R_0 zónahatáron már érvényesül a (29) képlékenységi feltétel, azaz

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k.$$

Ugyanakkor a végtelenben már sem a vágatnyításnak, sem a képlékeny zóna kialakulásának nincs hatása, vagyis $\sigma_r(\infty) = 0$.

Keressük a feszültségeket a (21) szerint

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi)$$

alakban. A $\sigma_r(\infty) = 0$ feltételből az következik, hogy $A = 0$, így

$$\sigma_r = -\frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_z = 0.$$

Az $r = R_0$ zónahatáron

$$(\sigma_\varphi - \sigma_r)|_{r=R_0} = \frac{2B}{R_0^2} = 2k \Rightarrow B = kR_0^2.$$

Ezeket felhasználva,

$$(31) \quad \sigma_r = -k \frac{R_0^2}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = k \frac{R_0^2}{r^2}, \quad \sigma_z = 0, \quad r \geq R_0.$$

A deformációk a (4) szerint:

$$(32) \quad \varepsilon_r = -\frac{k}{2G} \frac{R_0^2}{r^2}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{k}{2G} \frac{R_0^2}{r^2}, \quad \varepsilon_z = 0, \quad r \geq R_0.$$

Az elmozdulások:

$$(33) \quad u = \frac{k}{2G} \frac{R_0^2}{r}, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad r \geq R_0.$$

6.3. MEGOLDÁS A KÉPLÉKENY ZÓNÁBAN

Az $R \leq r \leq R_0$ képlékeny zónában – a klasszikus felfogás szerint ideális képlékenységi esetén – érvényesnek tekintik a (29) képlékenységi feltételt, tehát nem csak a képlékenységi határ kijelölésére használják, hanem anyagegyenletként is. Ezt az egyensúlyi egyenlettel együtt érvényesítjük. Tehát most meg kell oldani a

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad \sigma_r - \sigma_\varphi = -2k, \quad k \text{ állandó}$$

rendszer. Ez a

$$(34) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2k}{r} = 0$$

differentiálegyenletre vezet, melynek általános megoldása

$$\sigma_r = 2k \ln r + C.$$

Az R_0 zónahatáron ennek a σ_r -nek és a rugalmas zónában érvényes (a (31)-ben adott) σ_r -nek, egyeznie kell, vagyis $\sigma_r(R_0) = -kR_0^2 / R_0^2 = -k$ kell, hogy legyen. Ezt a feltételt a

$$\sigma_r = -k - 2k \ln \frac{R_0}{r}$$

megoldás elégíti ki. A $\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k$ feltételből σ_φ , a $\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi)$ összefüggésből pedig σ_z számítható. A feszültségek tehát:

$$(35) \quad \sigma_r = -k - 2k \ln \frac{R_0}{r}, \quad \sigma_\varphi = k - 2k \ln \frac{R_0}{r}, \quad \sigma_z = -2k \ln \frac{R_0}{r}, \quad R \leq r \leq R_0.$$

Mint ahogy a rugalmas tartomány esetében a (14) feszültségek transzformációjánál, itt is célszerű lehet bevezetni a

$$\delta_0 = \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \text{ jelölést.}$$

Ekkor

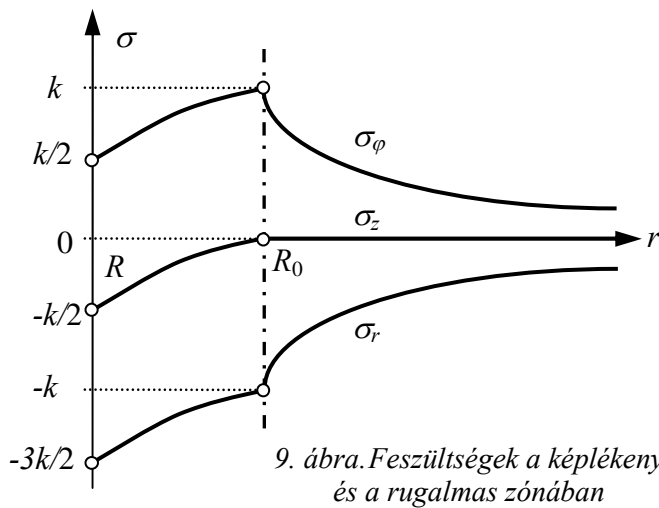
$$\sigma_r = -k - 2k \ln \delta_0,$$

$$\sigma_\varphi = k - 2k \ln \delta_0,$$

$$\sigma_z = -2k \ln \delta_0,$$

azaz $\delta_0 = 1$ -nél.

A σ_r, σ_φ és σ_z feszültségeket a $p = 1,5k$ terhelés esetén a 9. ábrán vázoltuk.



Az $r = R_0$ zónahatáron $\sigma_r = -k$, $\sigma_\varphi = k$, $\sigma_z = 0$, és ezek az értékek megegyeznek a (31)-ben adott feszültségek zónahatáron felvett értékeivel. A zónahatáron való átmenet tehát a feszültségek tekintetében folytonos.

A σ_r ismeretében most már meghatározható a R_0 zónahatár is abból a feltételből, hogy a vágat peremén $\sigma_r(R) = -p$. Ha ezt kihasználjuk a (35) első egyenleténél, akkor

$$(36) \quad -p = -k - 2k \ln \frac{R_0}{R} \Rightarrow R_0 = R \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} + \frac{p}{2k}\right).$$

Ezzel megkaptuk az eddig ismeretlen zónahatár értékét. Ha például

$$\begin{aligned} p &= 2k, & \text{akkor } R_0 &= R e^{0,50} \approx 1,65R, \\ p &= 1,5k, & \text{akkor } R_0 &= R e^{0,25} \approx 1,28R, \\ p &= k, & \text{akkor } R_0 &= R e^0 = R. \end{aligned}$$

Ez utóbbi esetben látható, hogy a $p = k$ terhelés elérésekor a vágat pereme kezd megfolyni. A terhelés növelésével pedig a zónahatár exponenciálisan tolódik kifelé, mind nagyobb tartományrész válik képlékennyé.

Az u elmozdulás, a képlékeny tartományban is érvényes

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = \frac{m-2}{2G(m+1)}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)$$

összefüggés alapján számítható, ahol $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$, $\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$, $\varepsilon_z = 0$, a σ_r , σ_φ , σ_z feszültségek pedig a (35) rendszerben adóttak. Ezeket felhasználva, az

$$(37) \quad r \frac{du}{dr} + u = \alpha r \ln \frac{R_0}{r}, \quad \alpha = -\frac{6k(m-2)}{2G(m+1)}$$

differenciálegyenletet kapjuk. Általános megoldása

$$(38) \quad u = \frac{C}{r} + \frac{\alpha}{2} r \ln \frac{R_0}{r} + \frac{\alpha}{4} r.$$

A C állandót abból a feltételből határozzuk meg, hogy az R_0 zónahatáron a (33)-ban szereplő $u = \frac{k}{2G} \frac{R_0^2}{r}$ elmozdulás értéke és a (38) értéke egyenlő, azaz

$$u(R_0) = \frac{k}{2G} R_0.$$

A (37) differenciálegyenletnek ezt a feltételt kielégítő megoldása:

$$(39) \quad u = \frac{k}{4G(m+1)} \left[(5m-4) \frac{R_0^2}{r} - 6(m-2)r \left(\ln \frac{R_0}{r} + \frac{1}{2} \right) \right], \quad R \leq r \leq R_0.$$

A két másik elmozdulás-koordináta: $v = 0$, $w = 0$.

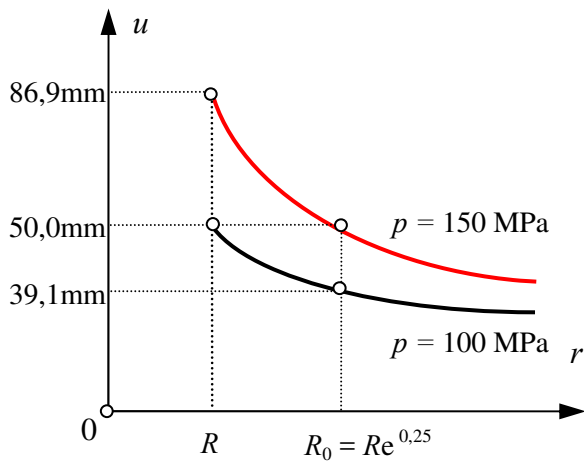
A deformációk a geometriai egyenletek segítségével számíthatók:

$$(40) \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{k}{4G(m+1)} \left[-(5m-4) \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 - 6(m-2) \left(\ln \frac{R_0}{r} - \frac{1}{2} \right) \right], \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} = \frac{k}{4G(m+1)} \left[+ (5m-4) \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 - 6(m-2) \left(\ln \frac{R_0}{r} + \frac{1}{2} \right) \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{dw}{dz} = 0, \end{aligned} \right\} \quad R \leq r \leq R_0.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy mind az elmozdulások, mind a deformációk a zónahatáron átlépve, folytonosan változnak. Például $u(R_0) = kR_0 / 2G$ mind a (33), mind a (39) függvény esetén.

Összehasonlítandó, számítsuk ki még a palást eltolódását rugalmas esetben is, és képlékeny esetben is, az alábbi adatok mellett:

$$2G = 4000 \text{ MPa}, \quad m = 4, \quad R = 2000 \text{ mm}, \quad p = 100 \text{ MPa}, \quad k = 100 \text{ MPa}.$$



10. ábra

A $k = p$ terhelés esetén még éppen rugalmas állapotban van az egész tartomány. Ekkor a vágat pereme kezd megfolyni. Ebben az esetben $R_0 = R$. Így az elmozdulás számítható akár a (33), akár a (39) képlet alapján:

$$u(R) = u(R_0) = \frac{kR_0}{2G} = \frac{pR}{2G} = 50 \text{ mm}$$

Ha $p = 150 \text{ MPa}$ -ra növeljük a terhelést, akkor $R_0 = Re^{0,25} \approx 1,28R$, tehát kialakul egy $0,28R$ szélességű képlékeny zóna, akkor a (39) képlet

alapján a kerületi pontok sugárirányú elmozdulása:

$$u(R) \approx 86,90 \text{ mm.}$$

Az elmozdulások a várakozással összhangban pozitív előjelűek, ami azt jelenti, hogy a hengerpalást befelé tolódik el. A $p = 100 \text{ MPa}$, illetve a $p = 150 \text{ MPa}$ terhelésekhez tartozó elmozdulásokat a 10. ábrán vázoltuk.

Összefoglalva, a rugalmas-képlékeny tartomány mechanikai állapotát jellemző mennyiségek:

A feszültségek:

$$(41) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \begin{cases} -k - 2k \ln \frac{R_0}{r}, & \text{ha } R \leq r \leq R_0, \\ -k \left(\frac{R_0}{r} \right)^2, & \text{ha } R_0 \leq r < \infty, \end{cases} \\ \sigma_\varphi &= \begin{cases} +k - 2k \ln \frac{R_0}{r}, & \text{ha } R \leq r \leq R_0, \\ +k \left(\frac{R_0}{r} \right)^2, & \text{ha } R_0 \leq r < \infty, \end{cases} \\ \sigma_z &= \begin{cases} -2k \ln \frac{R_0}{r}, & \text{ha } R \leq r \leq R_0, \\ 0, & \text{ha } R_0 \leq r < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

A deformációk:

$$(42) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \begin{cases} \frac{k}{4G(m+1)} \left[- (5m-4) \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 - 6(m-2) \left(\ln \frac{R_0}{r} - \frac{1}{2} \right) \right], & \text{ha } R \leq r \leq R_0, \\ -\frac{k}{2G} \left(\frac{R_0}{r} \right)^2, & \text{ha } R_0 \leq r < \infty, \end{cases} \\ \varepsilon_\varphi &= \begin{cases} \frac{k}{4G(m+1)} \left[+ (5m-4) \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 - 6(m-2) \left(\ln \frac{R_0}{r} + \frac{1}{2} \right) \right], & \text{ha } R \leq r \leq R_0, \\ +\frac{k}{2G} \left(\frac{R_0}{r} \right)^2, & \text{ha } R_0 \leq r < \infty, \end{cases} \\ \varepsilon_z &= 0, & \text{ha } R \leq r < \infty. \end{aligned}$$

Az elmozdulások:

$$(43) \quad \begin{aligned} u &= \begin{cases} \frac{k}{4G(m+1)} \left[+ (5m-4) \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 - 6(m-2) \left(\ln \frac{R_0}{r} + \frac{1}{2} \right) \right] r, & \text{ha } R \leq r \leq R_0, \\ \frac{kR_0}{2G} \left(\frac{R_0}{r} \right), & \text{ha } R_0 \leq r < \infty, \end{cases} \\ v &= 0, \quad w = 0, & \text{ha } R \leq r < \infty. \end{aligned}$$

A fenti függvények mindegyike folytonos az $r = R_0$ helyen.

A (41) feszültségek esetében még vizsgáljuk meg azt, hogy mi történik az $R_0 \rightarrow R$ határátmenetnél. Tekintettel arra, hogy $R \leq r \leq R_0$, az $R_0 \rightarrow R$ esetén r is tart R -hez. Ekkor

$$\lim_{R_0 \rightarrow R} \sigma_r = \lim_{R_0 \rightarrow R} \left(-k - 2k \ln \frac{R_0}{r} \right) = -k + 0 = -k = -p,$$

mert a hengerpalást a $p = k$ terhelésnél kezd megfolyni. Ha viszont $k = p$, és ennek következtében $R_0 = R$, akkor a (31)-ben szereplő feszültségek:

$$\sigma_r = -p \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \sigma_\varphi = p \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \sigma_z = 0,$$

amelyek megegyeznek a (14)-ben adott, a rugalmas tartományra érvényes feszültségekkel. Ugyanezzel a határátmenettel juthatunk el a rugalmas-képlékeny tartományra érvényes deformációkból, ill. elmozdulásokból a rugalmas tartományra érvényes deformációkhoz, ill. elmozdulásokhoz.

5.4. MEGJEGYZÉSEK A KÉPLÉKENY ZÓNABELI MEGOLDÁSHOZ

1. A (35) összefüggésekkel megadtuk azokat a feszültségeket, amelyek az $R \leq r \leq R_0$ képlékeny zónában érvényesek. Ezek:

$$\sigma_r = -k - 2k \ln \frac{R_0}{r}, \quad \sigma_\varphi = -k + 2k \ln \frac{R_0}{r}, \quad \sigma_z = -2k \ln \frac{R_0}{r}, \quad R \leq r \leq R_0,$$

ahol $k = \frac{1}{2}(\sigma_\varphi - \sigma_r)$ a legnagyobb csúsztatófeszültség (állandó). A képletekben látszólag nem tükröződik az, hogy ezek a feszültségek függenek a p terheléstől. Valójában azonban függenek, csak ez a függés az R_0 zónahatárban van „elrejtve”. A (36) összefüggés szerint ugyanis

$$R_0 = R \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} + \frac{p}{2k} \right).$$

Helyettesítsük ezt be például a σ_r képletébe. Ekkor

$$\sigma_r = -k - 2k(\ln R_0 - \ln r) = -k - 2k \left(\ln R - \frac{1}{2} + \frac{p}{2k} - \ln r \right) = -p - 2k \ln \frac{R}{r}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a σ_r feszültség lineáris (de nem homogén) függvénye p -nek (a terhelésnek). Ez azért lényeges, mert a feszültségek a rugalmas tartományban is

lineárisan függenek a p -tól. Tehát a képlékeny, ill. a rugalmas tartománybeli σ_r feszültségek nincsenek csillagászati távolságban egymástól. Annyira nem, hogy a vágat peremén ($r = R$ -nél) $\sigma_r(R) = -p$, amely egyezik a rugalmas tartományon érvényes

$$\sigma_r|_{r=R} = -p \frac{R^2}{r^2}|_{r=R} = -p$$

értékkel.

2. Ránézve a 9. ábrára szembetűnő, hogy míg a σ_r feszültség a képlékeny és rugalmas zónában – jellegét tekintve – hasonló (mindkét tartományban monoton növekvő és alulról konkáv függvénye r -nek), addig a σ_φ -nél ez messze nincs így. Ugyanis ez a függvény az $R < r < R_0$ tartományon növekvő és konkáv, a $r > R_0$ tartományon csökkenő és konvex. Ennek a műszaki szempontból kedvezőtlen jelenségnek az az oka, hogy az alkalmazott képlékenységi feltétel szerint a képlékeny zónában $\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k = \text{const}$. Tehát úgy tűnik, hogy matematikailag minden rendben van, de a valóság mást lehet. Ez a jelenség a módszer gyenge pontjának tűnik.

3. A alakváltozások számításánál változatlanul feltételeztük, hogy $\varepsilon_z = 0$ a képlékeny zónában is.

6. A TÉNYLEGES MEGOLDÁS A RUGALMAS-KÉPLÉKENY TARTOMÁNYON

Az előzőekben kihangsúlyoztuk, hogy a képlékeny határon, vagyis $r = R_0$ -nál mindkét oldali feszültségek megegyeznek. Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{r \rightarrow R_0+0} \sigma_r = \lim_{r \rightarrow R_0-0} \sigma_r, \quad \lim_{r \rightarrow R_0+0} \sigma_\varphi = \lim_{r \rightarrow R_0-0} \sigma_\varphi,$$

tehát σ_r és σ_φ folytonos az $r = R_0$ helyen. Feltételezve azt, hogy a feszültségek a képlékeny zónában is

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2},$$

szerkezetűek, az említett folytonosságok miatt a rugalmas tartományra érvényes (14) képletek érvényesek a képlékeny tartományra is, azaz

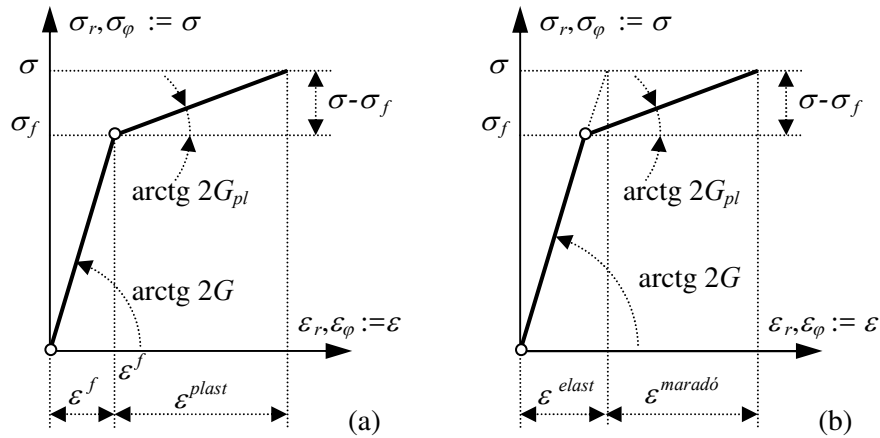
$$(44) \quad \sigma_r = -p \frac{R^2}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = p \frac{R^2}{r^2}, \quad \sigma_z = 0, \quad r \geq R.$$

Ekkor a tartomány (csak!) rugalmas részén

$$(45) \quad \varepsilon_r = -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \varepsilon_z = 0, \quad r \geq R_0,$$

$$(46) \quad u = \frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right), \quad v = 0, \quad w = 0, \quad r \geq R_0.$$

Lényeges különbség az előző szakaszban tárgyalt módszerrel szemben az is, hogy a képlékeny tartománybeli deformációk és elmozdulások számításánál szintén a HOOKE-törvényt alkalmazzuk, de a képlékeny tartományra érvényes csúsztató rugalmassági modulussal. Jelölje ezt G_{pl} . Itt két utat járhatunk aszerint, hogy az anyagtörvény alábbi két formája közül melyiket alkalmazzuk.



11. ábra. Húzó-nyomó diagram a rugalmas-képlékeny tartományhoz

- (i) A deformációt a folyáshatárhoz tartozó és a plasztikus deformáció összegként írjuk fel $\varepsilon = \varepsilon^f + \varepsilon^{plast} := \varepsilon^f + \varepsilon^{pl}$ alakban (11. ábra-(a)).
- (ii) A deformációt a rugalmas és a maradó deformációk összegeként írjuk fel: $\varepsilon = \varepsilon^{elast} + \varepsilon^{maradó} := \varepsilon^{el} + \varepsilon^m$ alakban (11. ábra-(b)).

Az ábrák alapján

$$\varepsilon^f = \frac{\sigma^f}{2G}, \quad \varepsilon^{pl} = \frac{\sigma - \sigma^f}{2G_{pl}}, \quad \varepsilon^{el} = \frac{\sigma}{2G}, \quad \varepsilon^m = (\sigma - \sigma_f) \left(\frac{1}{2G_{pl}} - \frac{1}{2G} \right).$$

A folyáshatárhoz tartozó feszültségek, deformációk és elmozdulások:

$$\sigma_r^f = -p \left(\frac{R}{R_0} \right)^2, \sigma_\varphi^f = p \left(\frac{R}{R_0} \right)^2, \varepsilon_r^f = -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2, \varepsilon_\varphi^f = \frac{p}{2G} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2, u^f = \frac{p}{2G} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2.$$

Ezeket felhasználva, az (i) esetben

$$(47) \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_r^f + \varepsilon_r^{pl} = -p \left[\frac{1}{2G_{pl}} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{2G_{pl}} \right) \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_\varphi &= \varepsilon_\varphi^f + \varepsilon_\varphi^{pl} = p \left[\frac{1}{2G_{pl}} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{2G_{pl}} \right) \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right], \\ u &= r \varepsilon_\varphi = p \left[\frac{1}{2G_{pl}} \frac{R^2}{r} + \left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{2G_{pl}} \right) \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 r \right]. \end{aligned} \right\} \quad R \leq r \leq R_0$$

Az (ii) esetben

$$(48) \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_r^{el} + \varepsilon_r^m = \frac{-p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - p \left(\frac{1}{2G_{pl}} - \frac{1}{2G} \right) \left[\left(\frac{R}{r} \right)^2 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_\varphi &= \varepsilon_\varphi^{el} + \varepsilon_\varphi^m = \frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + p \left(\frac{1}{2G_{pl}} - \frac{1}{2G} \right) \left[\left(\frac{R}{r} \right)^2 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right], \\ u &= r \varepsilon_\varphi = \frac{p}{2G} \frac{R^2}{r} + p \left(\frac{1}{2G_{pl}} - \frac{1}{2G} \right) \left[\frac{R^2}{r} - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 r \right]. \end{aligned} \right\} \quad R \leq r \leq R_0.$$

Ez az eredmény ekvivalens az (i) alattival, de van egy nagy előnye, hogy az ε_r^m és ε_φ^m maradó deformációk a képlékenységi határon ($r = R_0$ -nál) zérus értékűek, és csak a határ átlépése után ($r < R_0$ -nál) jelennek meg (és r csökkenésével növekednek). Másik előnye, hogy a jobboldalak első tagja a tartomány rugalmas részén érvényes alakváltozások, ill. elmozdulás. Így ha alkalmazzuk a

$$\Psi = \begin{cases} 1, & \text{ha } R \leq r \leq R_0, \\ 0, & \text{ha } R_0 \leq r < \infty \end{cases}$$

ugrásfüggvényt, akkor a mechanikai mezőt formailag egységesen írhatjuk fel olyan formulákkal, amelyek az egész tartományon érvényesek. Eszerint

$$\begin{aligned}
(49) \quad & \left. \begin{aligned}
& \sigma_r = -p \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad \sigma_\varphi = p \left(\frac{R}{r^2} \right)^2, \quad \sigma_z = 0, \quad r \geq R, \\
& \varepsilon_r = -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - p \Psi \left(\frac{1}{2G_{pl}} - \frac{1}{2G} \right) \left[\left(\frac{R}{r} \right)^2 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right], \\
& \varepsilon_\varphi = \frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + p \Psi \left(\frac{1}{2G_{pl}} - \frac{1}{2G} \right) \left[\left(\frac{R}{r} \right)^2 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_z = 0,
\end{aligned} \right\} r \geq R, \\
& \left. \begin{aligned}
& u = \frac{p}{2G} \frac{R^2}{r} + p \Psi \left(\frac{1}{2G_{pl}} - \frac{1}{2G} \right) \left[\left(\frac{R}{r} \right)^2 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right] r \\
& v = 0, \quad w = 0.
\end{aligned} \right\} r \geq R.
\end{aligned}$$

A (47), (48) és (49) összefüggésekben észrevehető, hogy ha $G_{pl} = G$, vagyis az anyag nincs képlékeny állapotban, akkor itt a $G_{pl} = G$ formális helyettesítés a rugalmas állapotnak megfelelő (44)-(46) értékeket adja. Tehát nagyon egyszerű, természetes úton juthatunk a képlékenységre jellemző képletekhez. Ez azt jelenti, hogy gyakorlatilag elegendő lenne pl. a (48) képletek ismerete azzal a kiegészítéssel, hogy rugalmas esetben $G_{pl} = G$. Ez egyúttal fölöslegessé tenné a Ψ ugrásfüggvény bevezetését. Ugyanakkor megjegyezzük, hogy $G_{pl} = 0$ esetet, amely az ideálisan képlékeny állapotnak felel meg, gyakorlatilag elvetjük, de minden kicsiny pozitív értékűnek elfogadjuk.

Ezekben az összefüggésekben még nem ismert az R_0 zónahatár értéke. Viszont az eddigiekben nem használtuk fel a képlékenységi határfeltételt. Ez azt jelenti, hogy ezek az összefüggések a képlékenységi határfeltételtől függetlenül érvényesek. Ezt a feltételt most az R_0 zónahatár meghatározására használjuk fel.

Akár a TRESKA-féle, akár a HUBER-MISES-HENCKY-féle feltételt tekintjük, mindkettő abból is származtatható, hogy az anyag mindaddig rugalmas állapotban marad, amíg a torzulási deformációs munka egy W_f' küszöbértéket el nem ér, amelytől kezdve az anyag a vele közölt munkát (energiát) már csak szerkezeti részeinek maradó megváltozásával képes felvenni. Mivel a mi esetünkben $\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z \equiv 0$ és $\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z \equiv 0$, ezért a torzulási munka megegyezik az alakváltozási munkával. Az 5.1. szakaszban ezt a munkát már felírtuk (27,28). Ennek értéke az $r = R_0$ értéknél

$$(50) \quad W_f' = \frac{1}{2} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi) \Big|_{r=R_0} = \frac{p^2}{2G} \left(\frac{R}{R_0} \right)^4 = \frac{1}{2G} \frac{(\sigma_\varphi - \sigma_r)^2}{4}.$$

Ez felírható

$$(51) \quad \frac{1}{2}(\sigma_\varphi - \sigma_r) = \sqrt{2GW_f'} \Rightarrow (\sigma_\varphi - \sigma_r) = 2k, \quad k = \sqrt{2GW_f'}$$

alakban is. Az (50) egyenletet R_0 -ra megoldva,

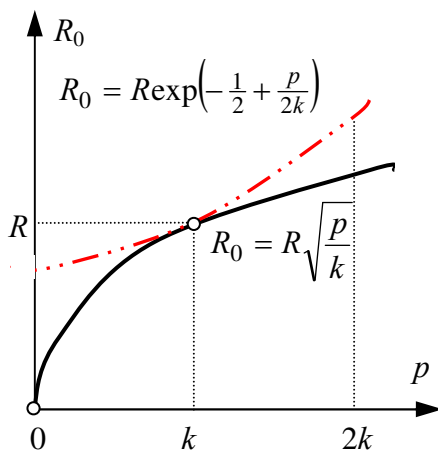
$$(52) \quad R_0 = R \sqrt{\frac{p}{k}}.$$

Ezzel megkaptuk a zónahatár értékét. Ha ezt behelyettesítjük a (49) képletbe, megkapjuk a mechanikai mezőt alkotó paramétereket a terheléssel és az anyagot jellemző állandókkal kifejezve. A G_{pl} modulus értékét természetesen labormérésekkel előzetesen meg kell határozni.

A feladat képlékenységgel kapcsolatos részének ilyen megoldása talán szokatlannak tűnhet. Végeredményben mind a rugalmas, mind a képlékeny tartományban a *Hooke*-törvényt alkalmaztuk.

Vegyük azonban figyelembe, hogy a tartomány képlékeny részében egy másik rugalmassági modulust (G_{pl}) vezettünk be. Ezáltal egyszerűsítettük a számításokat, és ugyanakkor nem sértettünk fizikai törvényt.

Hasonlítsuk még össze a zónahatár (36)-ban, ill. (52)-ben megadott értékét, vagyis az



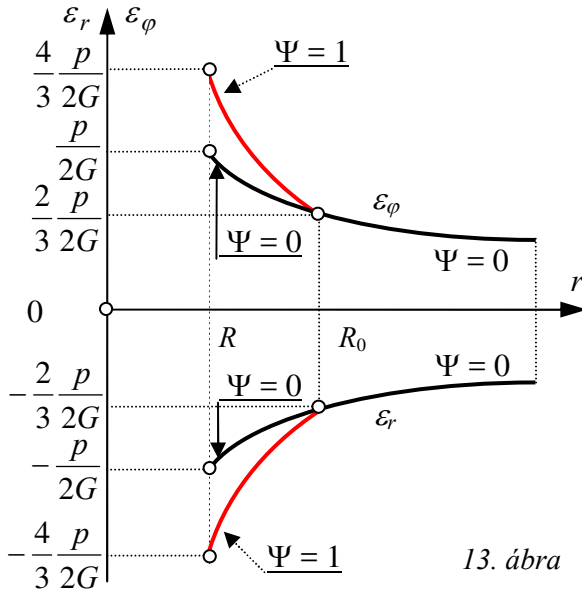
12. ábra. Zónahatárok a terhelés függvényében

$$R_0 = R_0(p) = R \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} + \frac{p}{2k}\right) \quad \text{és}$$

$$R_0 = R_0(p) = R \sqrt{\frac{p}{k}}$$

értékeket. Az első a p terheléssel exponenciálisan, a második négyzetgyökösen változik. De ha $k = p$ (azaz $p = k$), akkor mindkét esetben $R_0 = R$. Tehát ennek a két függvénynek az értéke ennél a kritikus terhelésnél (amikor éppen folyni kezd a henger palástja) megegyezik. De a két első derivált is megegyezik, és $R'_0(k) = \frac{R}{2k}$. Ez azt jelenti,

hogy a $p = k$ környezetében a két függvény elsőrendben közelíti egymást. (12. ábra). Példaképpen kiszámítottuk mindkét függvény értékét a $p = 1,5k$ terhelésnél.



13. ábra

A két érték:

$$R_0 = Re^{0,25} \approx 1,28R, \text{ ill.}$$

$$R_0 = R\sqrt{1,5} \approx 1,22R.$$

Ha $p = 2k$, akkor

$$R_0 = Re^{0,5} \approx 1,65R, \text{ ill.}$$

$$R_0 = R\sqrt{2} \approx 1,41R.$$

A deformációkat $p = 1,5k$ terhelés és $G_{pl} = 0,5G$ esetén a 13. ábrán vázoltuk.

Figyelembe véve azt, hogy ekkor $R_0 = \sqrt{1,5}R$, a (49) képletek alapján

$$\varepsilon_r = \begin{cases} -\frac{p}{2G} \left[2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{2}{3} \right], & \text{ha } R \leq r \leq R_0, \\ -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2, & \text{ha } r \geq R_0, \end{cases} \quad \varepsilon_\phi = -\varepsilon_r, \quad \varepsilon_z = 0.$$

Mint látható, mind az ε_r , mind az ε_ϕ függvény, jellegét tekintve hasonló a (15)-ben szereplő függvényekhez. Ha ugyanilyen terhelés mellett rugalmasnak tételeznénk fel a tartományt, akkor az $R \leq r \leq R_0$ intervallumon a $\Psi = 0$ görbék lennének érvényesek.

Számítsuk még ki a hengerpalást eltolódását mind a (43), mind a (49)-ben adott képlettel az alábbi adatok mellett:

$$p = 150 \text{ MPa}, \quad k = 100 \text{ MPa}, \quad m = 4, \quad R = 2000 \text{ mm}, \quad 2G = 4000 \text{ MPa}, \quad 2G_{pl} = 2000 \text{ MPa}.$$

A (43) képlettel:

$$u(R) = \frac{k}{4G(m+1)} \left[(5m-4) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 - 6(m-2) \left(\ln \frac{R_0}{R} + \frac{1}{2} \right) \right] R \approx 86,9 \text{ mm}$$

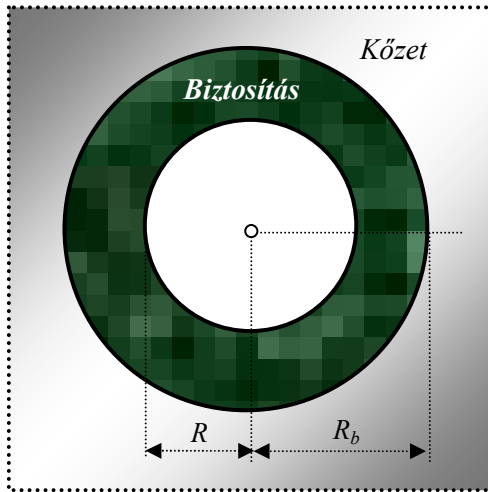
A (49) képlettel:

$$u(R) = \frac{pR}{2G} + p \left(\frac{1}{2G_{pl}} - \frac{1}{2G} \right) \left[1 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right] R = 100 \text{ mm}.$$

Szükségesnek tartjuk megemlíteni, hogy a (49) megoldás kielégíti mind az egyensúlyi, mind a geometriai, mind az anyagegyenleteket. Úgyszintén teljesülnek a peremfeltételek is.

7. RUGALMAS TARTOMÁNY, RUGALMAS BIZTOSÍTÁSSAL

Ebben a szakaszban ugyancsak a vágatnyitás következtében fellépő, ún. járulékos feszültségeket, deformációkat és elmozdulásokat határozzuk meg, feltételezve azt, hogy a vágatnyítással egyidőben egy $R_b - R$ falvastagságú biztosítást (csövet) építünk be (14. ábra).



A biztosítás szabad felülete nyilván terheletlen kell legyen, míg a biztosítás és a közet közös érintkező felületén

$$\sigma_r^b(R_b) = \sigma_r(R_b).$$

Ugyanakkor ennek a beavatkozásnak a hatása a vágattól eléggé távol már gyakorlatilag elenyésző, azaz

$$\sigma_r(\infty) = 0, \quad \sigma_\varphi(\infty) = 0, \quad u(\infty) = 0.$$

14. ábra. Körszelvényű vágat, biztosítással

Tekintettel arra, hogy a járulékos paramétereket határozzuk meg, ezért a 2. feladatot kell megoldani mind a biztosítás, mind a közet által kitöltött tartományon.

7.1. MEGOLDÁS A BIZTOSÍTÁSBAN ($R \leq r \leq R_b$)

A beavatkozás a $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = p$ feszültségi állapotban lévő tartományban történik, amelynek tehát minden pontjában $\sigma_r = p$, bármilyen irányú is legyen r . E miatt a biztosítás szabad felülete, az $r = R$ henger akkor lesz terheletlen, ha ezen a paláston p intenzitású húzóerő működik. Ugyanis a p nyomóerőt így lehet ellensúlyozni. Ennek a $\sigma_r^b(R) = -p$ peremfeltétel felel meg. A biztosítás és a közet közös határán, az R_b sugarú hengeren, legyen a terhelés, vagyis a radiális feszültség $-p + p_b$, ahol p_b egyelőre ismeretlen. A másik peremfeltétel tehát: $\sigma_r^b(R_b) = -p + p_b$. A p értéket abból a feltételből fogjuk meghatározni, hogy az $r = R_b$ hengeren (ha úgy tetszik, körön) a biztosításbeli és a közetbeli elmozdulás egyenlő. Látszólag bonyolultnak tűnik a peremfeltétel ilyen felvétele, de mint látni fogjuk ez a praktikusabb.

Ezek után keressük a feszültségeket

$$(53) \quad \sigma_r^b = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi^b = A + \frac{B}{r^2}$$

alakban. A $\sigma_r^b(R) = -p$, ill. a $\sigma_r^b(R_b) = -p + p_b$ peremfeltételeket felhasználva, az

$$A - \frac{B}{R^2} = -p, \quad A - \frac{B}{R_b^2} = -p + p_b$$

egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása:

$$(54) \quad A = -p + p_b \frac{R_b^2}{R_b^2 - R^2}, \quad B = p_b \frac{R^2 R_b^2}{R_b^2 - R^2}.$$

Bevezetve a $Q := \frac{R_b^2}{R_b^2 - R^2}$ jelölést, a feszültségek:

$$(55) \quad \begin{aligned} \sigma_r^b &= -p + p_b Q \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], & \sigma_\varphi^b &= -p + p_b Q \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_z^b &= \frac{2}{m} (-p + p_b Q), & R &\leq r \leq R_b. \end{aligned}$$

Egyszerű helyettesítéssel belátható, hogy

$$\sigma_r^b(R) = -p, \quad \sigma_r^b(R_b) = -p + p_b \frac{R_b^2}{R_b^2 - R^2} \left[1 - \left(\frac{R}{R_b} \right)^2 \right] = -p + p_b,$$

tehát a peremfeltételek teljesülnek.

A (4) anyagegyenletek szerint a deformációk:

$$(56) \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_r^b &= -\frac{p}{2G^b} \frac{m^b - 2}{m^b} + \frac{p_b Q}{2G^b} \left[\frac{m^b - 2}{m^b} - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_\varphi^b &= -\frac{p}{2G^b} \frac{m^b - 2}{m^b} + \frac{p_b Q}{2G^b} \left[\frac{m^b - 2}{m^b} + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_z^b &= 0, \end{aligned} \right\} \quad R \leq r \leq R_b$$

Az elmozdulás az $u = r\varepsilon_\varphi$ összefüggés alapján:

$$(57) \quad u^b = -\frac{p}{2G^b} \frac{m^b - 2}{m^b} r + \frac{p_b Q}{2G^b} \left[\frac{m^b - 2}{m^b} + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] r, \quad v^b = 0, \quad w^b = 0, \quad R \leq r \leq R_b.$$

Ezzel a biztosításban ébredő feszültségeket, deformációkat és elmozdulásokat meghatároztuk. Hangsúlyozzuk, hogy ezek csupán a beavatkozás (a vágatnyitás és a biztosítás behelyezése) következtében kialakuló paraméterek. Valójában nem is

lényeges a tényleges (fizikailag megvalósuló) beavatkozás, hiszen az szilárdságtani szempontból ekvivalens azzal, hogy érvényesítjük a két peremfeltételt.

7.2. MEGOLDÁS A KÖZETBEN ($r \geq R_b$)

A megoldást ismét az (53) alakban kereshetjük, de most a peremfeltételek

$$\sigma_r(R_b) = -p + p_b, \quad \sigma_\varphi(\infty) = 0$$

formájúak. Ekkor az

$$A - \frac{B}{R_b^2} = -p + p_b, \quad A = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása:

$$(58) \quad A = 0, \quad B = (p - p_b)R_b^2.$$

Ez alapján a feszültségek:

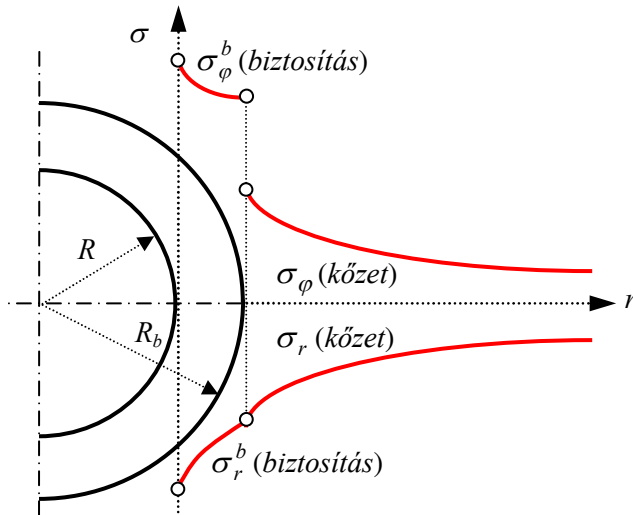
$$(59) \quad \sigma_r = -(p - p_b)\left(\frac{R_b}{r}\right)^2, \quad \sigma_\varphi = (p - p_b)\left(\frac{R_b}{r}\right)^2, \quad \sigma_z = 0, \quad r \geq R_b.$$

A (4) egyenletek szerint a deformációk:

$$(60) \quad \varepsilon_r = -\frac{p - p_b}{2G}\left(\frac{R_b}{r}\right)^2, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{p - p_b}{2G}\left(\frac{R_b}{r}\right)^2, \quad \varepsilon_z = 0, \quad r \geq R_b.$$

Az elmozdulások:

$$(61) \quad \begin{aligned} u^b &:= u = r\varepsilon_\varphi \\ &= \frac{p - p_b}{2G}\left(\frac{R_b}{r}\right)^2 r, \\ v &= 0, \quad w = 0, \quad r \geq R_b. \end{aligned}$$



Ezzel megkaptuk a közetben ébredő feszültségeket, deformációkat és elmozdulásokat. Természetesen ezek is a beavatkozás következtében keletkező paraméterek. A σ_r és σ_φ görbéi a 15. ábrán láthatók.

15. ábra. A közetben és a biztosításban ébredő feszültségek biztosítás beépítése esetén

7.3. AZ ISMERETLEN p_b MEGHATÁROZÁSA

Említettük, hogy a p_b paramétert abból a feltételből határozzuk meg, hogy a biztosítás és a közet elmozdulása az R_b hengeren egyenlő, azaz

$$(62) \quad u^b(R_b) = u(R_b).$$

Részletesen kiírva, ez azt jelenti hogy az (57) és (61) összevetésével

$$-\frac{p}{2G^b} \frac{m^b - 2}{m^b} R_b + \frac{p_b Q}{2G^b} \left[\frac{m^b - 2}{m^b} + \left(\frac{R}{R_b} \right)^2 \right] R_b = \frac{p - p_0}{2G} \left(\frac{R_b}{R_b} \right)^2 R_b.$$

Átalakítások után innen

$$(63) \quad p_b = p \frac{\frac{m^b - 2}{m^b} + \lambda}{Q \left(\frac{m^b - 2}{m^b} + \frac{R^2}{R_b^2} \right) + \lambda}, \quad \lambda = \frac{2G^b}{2G}, \quad Q = \frac{R_b^2}{R_b^2 - R^2}.$$

Mielőtt ezt az eredményt ellenőriznénk, számítsuk ki p_b értékét a biztosítás nélküli esetre. A (14) formula szerint ekkor

$$(*) \quad \sigma_r = -p \frac{R^2}{r^2} \Rightarrow \sigma_r(R_b) = -p \left(\frac{R}{R_b} \right)^2.$$

Ugyanakkor akár az (55) akár az (59) alapján

$$(**) \quad \sigma_r^b(R_b) = \sigma_r(R_b) = -p + p_b.$$

A (*) és a (**) egyenlőségéből

$$-p + p_b = -p \left(\frac{R}{R_b} \right)^2 \Rightarrow p_b = p \left[1 - \left(\frac{R}{R_b} \right)^2 \right].$$

Ezek után az ellenőrzésnek azt a módját választjuk, hogy kiszámítjuk a (63) értékét arra az esetre, amikor a biztosítás és a közet anyaga azonos, vagyis nincs biztosítás. A (64) képletben ezt úgy érvényesítjük, hogy $G^b \equiv G$, vagyis $\lambda = 1$, és m^b helyett formálisan m -et írunk (bár az utóbbinak nincs jelentősége). Ezeket kihasználva

$$p_0|_{\lambda=1} = p \frac{\frac{m-2}{m} + 1}{Q \left(\frac{m-2}{m} + \frac{R^2}{R_b^2} \right) + 1} = p \frac{(2m-1)(R_b^2 - R^2)}{(2m-1)R_b^2} = p \left(1 - \frac{R^2}{R_b^2} \right).$$

A várt értéket kaptuk, tehát a (63)-ban felírt p_b értéke helyes.

7. A POYNTING-THOMSON-MODELL ALKALMAZÁSA

Az eddigi megoldásnál feltételeztük a HOOKE-törvény érvényességét, és nem vettük figyelembe a mechanikai mező vágatnyitás utáni időbeli változását. Ha ezt is figyelembe akarjuk venni, akkor a klasszikus POYNTING-THOMSON-féle reológiai modell adta lehetőségeket is ki kell használni, amely az alábbi két egyenletből áll:

$$(64) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{T}_0 + \tau_0 \dot{\mathbf{T}}_0 &= 3K\mathbf{E}_0 + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0. \end{aligned} \right\}$$

Tekintettel arra, hogy jelen esetben

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z), \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi),$$

ezért

$$\mathbf{T} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2\sigma_r - \sigma_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_\varphi - \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ezt felhasználva a (64) rendszer első egyenlete skaláris alakban

$$\left. \begin{aligned} 2\eta(2\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\varphi) + 2G(2\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi) &= (2\sigma_r - \sigma_\varphi) + \tau(2\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\varphi), \\ 2\eta(2\dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{\varepsilon}_r) + 2G(2\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) &= (2\sigma_\varphi - \sigma_r) + \tau(2\dot{\sigma}_\varphi - \dot{\sigma}_r). \end{aligned} \right\}$$

Egyszerű átalakítások után az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$(65) \quad \left. \begin{aligned} 2\eta\dot{\varepsilon}_r + 2G\varepsilon_r &= \sigma_r + \tau\dot{\sigma}_r, \\ 2\eta\dot{\varepsilon}_\varphi + 2G\varepsilon_\varphi &= \sigma_\varphi + \tau\dot{\sigma}_\varphi. \end{aligned} \right\}$$

Ha ebben a rendszerben mindegyik derivált nulla, akkor

$$(66) \quad \sigma_r = 2G\varepsilon_r, \quad \sigma_\varphi = 2G\varepsilon_\varphi,$$

vagyis megkaptuk a jól ismert *Hooke-törvényt*. Nevezhetjük ezt a *lassú változás* esetének. Ha viszont a deriváltak mindegyike végtelenhez tart, akkor a (65) helyett a

$$2\eta\dot{\varepsilon}_r = \tau\dot{\sigma}_r, \quad 2\eta\dot{\varepsilon}_\varphi = \tau\dot{\sigma}_\varphi$$

egyenleteket használhatjuk. Integrálás után a

$$(67) \quad 2\eta\varepsilon_r = \tau\sigma_r, \quad 2\eta\varepsilon_\varphi = \tau\sigma_\varphi$$

összefüggéseket kapjuk. Ezt nevezhetjük a *gyors változás* esetének. Itt kihasználtuk azt, hogy a vágatnyitás utáni pillanatban σ_r , ill. σ_φ a teljes feszültségek, ε_r , ill. ε_φ pedig az ún. kezdeti deformációk.

Összehasonlítva a (66) és a (67) eredményeket, azok csak formailag különböznek egymástól. Mondható az is, hogy a (66) egy olyan HOOKE-törvény, amelynél a $2G$ modulus helyett $2\eta/\tau$ szerepel. Ez utóbbit szokás *dinamikai rugalmassági modulusnak* is nevezni.

A tapasztalat azt mutatja, hogy az üregnyitás pillanatában a teljes feszültségek és a kezdeti deformációk azonnal, tehát igen gyorsan lejátszódnak. Így a (67) eredmények reálisak. Mindezt alátámasztja az a fizikai törvény is, hogy szilárd anyagokban a mechanikai impulzus konduktív áramlás útján terjed, ezért a teljes (66) feszültség igen gyorsan, a nyitás pillanatában kialakul. Az elmozdulás, és ennek következtében a teljes alakváltozás ezt nem tudja követni, mert ezek konvektív azaz makroszkopikus áramlás útján terjednek. A tömegáramlás nyilván lassúbb, mint a konduktív áram, ahol a részecskék az impulzust diffúzió útján továbbítják.

Ha ekkor a kialakult maximális feszültség σ_r , ill. σ_φ , akkor a (67) szerint a kezdeti deformációk

$$(68) \quad \varepsilon_r^0 := \frac{\tau}{2\eta} \sigma_r, \text{ ill. } \varepsilon_\varphi^0 := \frac{\tau}{2\eta} \sigma_\varphi.$$

Az ε_r és ε_φ deformációk a későbbiek során változnak, és számításukhoz ε_r^0 és ε_φ^0 kezdőértékeként vehetők figyelembe.

Miután a vágatnyitás megtörtént, és kialakult a maximális σ_r és σ_φ feszültség, ezek időben már nem változnak, ezért $\dot{\sigma}_r = 0$ és $\dot{\sigma}_\varphi = 0$. Ezt kihasználva, a (65) egyenletek újabb alakja:

$$(69) \quad 2\eta\dot{\varepsilon}_r + 2G\varepsilon_r = \sigma_r, \quad 2\eta\dot{\varepsilon}_\varphi + 2G\varepsilon_\varphi = \sigma_\varphi,$$

ahol σ_r és σ_φ adott állandók (az időtől nem függenek). Az ε_r és ε_φ időtől (t -től) való függésének meghatározásához ezt a két egyenletet kell megoldani.

Összefoglalva, a kétféle HOOKE-törvénynek megfelelő megoldások:

1. *Hooke* - modell ($t \rightarrow \infty$), a lassú változás modellje esetén

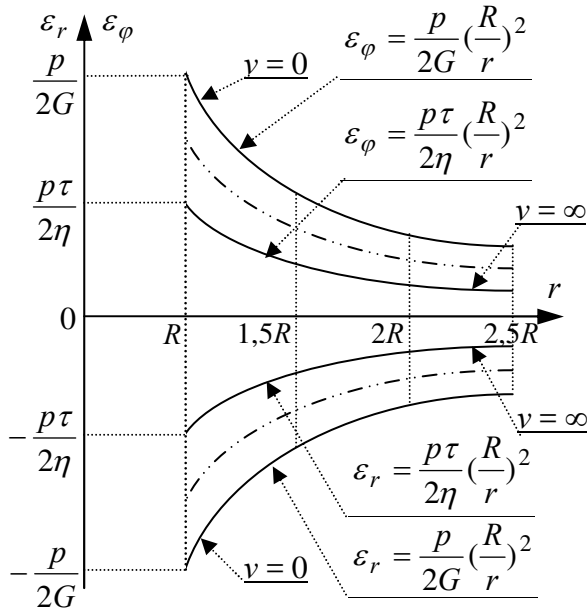
$$(70) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r^\infty &= -p\left(\frac{R}{r}\right)^2, & \sigma_\varphi^\infty &= p\left(\frac{R}{r}\right)^2; \\ \varepsilon_r^\infty &= -\frac{p}{2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2, & \varepsilon_\varphi^\infty &= \frac{p}{2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2; \\ u^\infty &= \frac{pR}{2G}\left(\frac{R}{r}\right). \end{aligned} \right\}$$

2. *Hooke* – modell ($t \rightarrow 0$), a gyors változás modellje esetén

$$(71) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r^0 &= -p \left(\frac{R}{r} \right)^2, & \sigma_\varphi^0 &= p \left(\frac{R}{r} \right)^2; \\ \varepsilon_r^0 &= -\frac{p\tau}{2\eta} \left(\frac{R}{r} \right)^2, & \varepsilon_\varphi^0 &= \frac{p\tau}{2\eta} \left(\frac{R}{r} \right)^2; \\ u^0 &= \frac{p\tau R}{2\eta} \left(\frac{R}{r} \right). \end{aligned} \right\}$$

A 16. ábra az ε_r és ε_φ értékeinek változását szemlélteti a vágat tengelyétől mért távolság függvényében mind a gyors ($v = \infty$), mind a lassú ($v = 0$) változás esetére. A folytonos görbék e két határesetnek (nulla sebességű, ill. végtelen sebességű változásnak) megfelelő állapotot jellemzik. A közbülső ($0 < t < \infty$) állapotnak megfelelő görbék a szaggatott vonallal rajzoltak. Az ábrán látható, hogy a gyors változáshoz ($\dot{\sigma} = \infty$) tartozó, értékek kisebbek, mint a lassú változáshoz ($\dot{\sigma} = 0$) tartozók. Ez következik abból, hogy

$$\frac{\eta}{G} - \tau > 0 \Rightarrow \frac{\tau}{2\eta} < \frac{1}{2G}.$$



Mint említettük, a gyors változás (a gyors vágatnyitás) következtében fellépő, hirtelen kialakuló feszültség és deformációk (71)-ben felírt értékeiből kiindulva, a (69) egyenleteket kell megoldani.

Felhasználva, hogy

$$\sigma_r = \sigma_r^0 = -p \left(\frac{R}{r} \right)^2,$$

a (69) első egyenlete

$$(72) \quad 2\eta \dot{\varepsilon}_r + 2G\varepsilon_r = -p \left(\frac{R}{r} \right)^2.$$

16. ábra. Deformációk a POYNTING-THOMSON-modell esetén

Ennek a differenciálegyenletnek az $\varepsilon_r(0) = -\frac{p\tau}{2\eta} \frac{R^2}{r^2}$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$(73) \quad \varepsilon_r = \varepsilon_r(r, t) = -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[1 - \left(1 - \frac{G\tau}{\eta}\right) e^{-\frac{G}{\eta}t} \right] = \varepsilon_r^\infty + (\varepsilon_r^0 - \varepsilon_r^\infty) e^{-\frac{G}{\eta}t}.$$

Ez az eredmény azt igazolja, hogy az időtől is függő $\varepsilon_r(r, t)$ alakváltozás a két *Hooke*-törvény alapján kapott (ε_r^∞ és ε_r^0) alakváltozás „lineáris” kombinációjaként is felírható, ahol a kombináció $e^{-\frac{G}{\eta}t}$ együtthatója nyilván t -től is függ.

Bevezetve az

$$(74) \quad 1 - \left(1 - \frac{G\tau}{\eta}\right) e^{-\frac{G}{\eta}t} = \alpha(t)$$

jelölést,

$$(75) \quad \varepsilon_r = \varepsilon_r(r, t) = \varepsilon_r^\infty \alpha(t) = -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \alpha(t)$$

alakban is előállítható. Ez utóbbi eredmény szerint $\varepsilon_r(r, t)$ értéke – a klasszikus HOOKE-törvénynek megfelelő – ε_r^∞ kezdőérték és $\alpha(t)$ szorzataként írható fel.

Hasonlóképpen, a (69) második egyenletét az

$$\varepsilon_\varphi(r, t = 0) = \frac{p\tau}{2\eta} \frac{R^2}{r^2}$$

kezdeti feltétel mellett megoldva, az $\varepsilon_\varphi(r, t)$ deformációt kapjuk. Ennek ismeretében az $u = r\varepsilon_\varphi$ összefüggés alapján az elmozdulás számítható.

Összefoglalva:

$$(76) \quad \begin{cases} \sigma_r = \sigma_r(r, t) = \sigma_r^\infty = \sigma_r^0 = -p \left(\frac{R}{r}\right)^2, \\ \sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r, t) = \sigma_\varphi^\infty = \sigma_\varphi^0 = p \left(\frac{R}{r}\right)^2, \quad \sigma_z = 0; \end{cases}$$

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_r = \varepsilon_r(r, t) = \varepsilon_r^\infty + (\varepsilon_r^0 - \varepsilon_r^\infty) e^{-\frac{G}{\eta} t} = -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \alpha(t) = \\ \quad = -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - \left(1 - \frac{G\tau}{\eta} \right) e^{-\frac{G}{\eta} t} \right], \\ \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi(r, t) = \varepsilon_\varphi^\infty + (\varepsilon_\varphi^0 - \varepsilon_\varphi^\infty) e^{-\frac{G}{\eta} t} = \frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \alpha(t) = \\ \quad = +\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - \left(1 - \frac{G\tau}{\eta} \right) e^{-\frac{G}{\eta} t} \right], \\ \varepsilon_z = \varepsilon_z(r, t) = 0. \end{array} \right.$$

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = (r, t) = u^\infty + (u^0 - u^\infty) e^{-\frac{G}{\eta} t} = \frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right) \alpha(t) = \\ \quad = \frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{G\tau}{\eta} \right) e^{-\frac{G}{\eta} t} \right], \\ v = 0, \\ w = 0. \end{array} \right.$$

Ellenőrzésképpen érdemes kiszámítani az alábbi határértékeket:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_r(r, t) &= \varepsilon_r^0 = -\frac{p\tau}{2\eta} \left(\frac{R}{r} \right)^2, & \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_r(r, t) &= \varepsilon_r^\infty = -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_\varphi(r, t) &= \varepsilon_\varphi^0 = \frac{p\tau}{2\eta} \left(\frac{R}{r} \right)^2, & \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_\varphi(r, t) &= \varepsilon_\varphi^\infty = \frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2, \\ \lim_{t \rightarrow 0} u(r, t) &= u^0 = \frac{p\tau R}{2\eta} \left(\frac{R}{r} \right), & \lim_{t \rightarrow \infty} u(r, t) &= u^\infty = \frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right). \end{aligned}$$

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. – KAPOLYI L. (1976): Kőzetek mechanikai jellemzőinek meghatározása. *MTA Veszprémi Akadémiai Bizottsága Monográfiái*, Veszprém. pp. 1-192.
- ASSZONYI, CS. – KAPOLYI L. (1981): A bányászat mechanikai rendszere II. kötet: Kőzetkontinuumok mechanikája. *MTA Veszprémi Akadémiai Bizottsága Monográfiái*, Veszprém. pp. 1-421.
- ASSZONYI, CS. – RICHTER, R. (1979): The Continuum Theory of Rock Mechanics. *Trans Tech Publications*, USA. p. 332.
- ASSZONYI, CS. (1967): Feszültségeloszlás az időtényező figyelembe vételével. *Országos Magyar Bányászati Egyesület - Műszaki Élet Tatabányán* **3**: 1-29.
- ASSZONYI, CS. (1975): Kőzetkontinuumok reológiai elméletéről. Akadémiai doktori értekezés, Budapest. p. 78.
- ASSZONYI, CS. (1998): Modellalkotás és a tudományos megismerés. „Kertész Pál születésének 70. évfordulója tiszteletére”. *Budapesti Műszaki Egyetem Mérnökgeológiai Tanszéke Tudományos Ülésszaka*, Budapest, pp. 1-12.
- ASSZONYI, CS. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye 3. A POYNTING-THOMSON-féle ún. standard modell. In.: Asszonyi Cs. (szerk). *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye. (Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 3)*, Műegyetemi Kiadó, Budapest. pp. 89-118.
- BAGI, K. (2005): Szemcsehalmazok mikroszerkezetének vizsgálata, MTA doktori értekezés, (2005), 3. fejezet: A gördülés.
- BARTON, N. (1990): *Scale effects or sampling bias?* In.: Pinto da Cunha (Ed.) *Proc. Scale effect in rock masses*, 1. Int. workshop, Loen, 31-55.
- BÉDA, GY. – KOZÁK, I. - VERHÁS, J. (1986): *Kontinuummechanika. Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.
- BÉDA, GY. – KOZÁK, I. (1984): *Rugalmas testek mechanikája. Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.
- BÉDA, GY. (1996): *Szilárdságtan. Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- BERTRAM, A. (2005): *Elasticity and Plasticity of Large Deformations*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2005.
- BEZUHOV, N.I. (1958): Bevezetés a rugalmasságtanba és képlékenységtanba. *Tankönyvkiadó*, Budapest, p.228.

- BIRD, B.R. - ARMSTRONG, R.C. - HASSAGER, O. (1977): Dynamics of polymeric liquids I., *John Wiley and Sons, Inc.*, New York-Santa Barbara-etc.
- BOJTÁR, I. (1988): Mechanikai anyagmodellek. *Tankönyvkiadó*, Budapest. p.290.
- BRAY, J.W. (1967): A study of jointed and fractured rock. Part 1. *Rock Mech. Engng. Geol.* **5-6**(2-3): 117-136.
- BRENNER, H.(2006): Fluid mechanics revisited, *Physica A*, **370**: 190-224.
- CRISTESCU, N.D. (1993): Rock rheology, in: *Comprehensive Rock Engineering I. Fundamentals*, ed. Brown, E.T., *Pergamon Press*, Oxford-etc., pp. 523-544.
- DELI, Á. – GÁLOS, M. – VÁSÁRHELYI, B. – VÁN, P. (2006): A laboratory method for determining the dissipated energy. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*.
- DOBRÓKA, M. (1983): On a Generalized Poynting-Thomson Model. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungaricae*. **18**: 281-290.
- FÉNYES I. (1971): *Modern fizikai kisenciklopédia*. Gondolat Könyvkiadó, Budapest.
- FILCEK, H. (1963): Stan naprezenia i odkształcenia wokół wyrobiska chodnikowego jako funkcja czasu. *Zeszyty Problemowe Górnictwa, Komitet Górnictwa PAN* **1**.
- GYARMATI I. (1967): Nemegyensúlyi termodinamika, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, (1967).
- HAUPT, P. (1993): Thermodynamics of Solids. Non-Equilibrium Thermodynamics with Application to Solids. Springer-Verlag, Wien-New York. pp.65-138.
- HEITFELD, K.H. – DÜLLMANN, H. (1978): Mechanische Eigenschaften Anisotroper Gesteine in Abhängigkeit vom Korngefüge. *Grundlagen und Anwendung der Felsmechanik. Felsmechanik Kolloquium Karlsruhe. Trans Tech Publications*, pp. 85-105.
- HOEK, E. – DIEDERICH, M.S. (2006): Empirical estimation of rock mass modulus. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **43**: 203-215.
- HOEK, E. (1994): Strength of rock and rock masses. – *ISRM News Journal*, Vol. **2**(2): 4-16.
- HUSZÁR, I. (1953): A szilárdságtan felépítése és módszerei. *Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványa* **1007**, Budapest.
- JAEGER, J.C. – COOK, N.G.W. – ZIMMERMAN, R.W. (2006): Fundamentals of Rock Mechanics. 3. ed.
- KALISZKY S. – KURUTZNÉ KOVÁCS, M. – SZILÁGYI GY. (2000): Szilárdságtan. *Nemzeti Tankönyvkiadó*, Budapest.
- KALISZKY S. (1975): Képlékenységtan. Elmélet és mérnöki alkalmazások. *Akadémiai Kiadó*, Budapest, p.504.
- KAUDERER, H. (1958) : Nichtlineare Mechanik. *Springer-Verlag*, Berlin-Göttingen-Heidelberg. p. 684.
- KERTÉSZ, P. – VÁSÁRHELYI, B. (2006): *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye I. A kontinuum, a homogenitás és az anyagmodell*. In.: Asszonyi Cs. (szerk). *Izotróp kontinuumok*

- anyagtörvénye. (Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **3**), *Műegyetemi Kiadó*, Budapest, pp. 11-24.
- KLECZEK, Z. (1969): Wpłyn czasu na wytrzymałość skal. *Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej, Górnictwo* **Z-15**.
- KOZÁK, I. (1980): Szilárdságtan III. *Tankönyvkiadó*, Budapest. Egyetemi jegyzet, Miskolc.
- LÁMER, G. (2007): Áttekintés az integrálhatósági feltételekről az izotróp, hiperelasztikus testek egyensúlyi entrópiájára nézve. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007 (szek: Török Á. & Vásárhelyi B.) Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 4. *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. p. 20.
- LÁMER, G. (2007): Az integrálhatósági feltételekről az izotróp, hiperelasztikus testek egyensúlyi entrópiájára nézve. *ETTE³⁷ pályázat* (díjnyertes pályamű). Budapest. p. 141.
- MARTINEC, J. (2003): Continuum mechanics (Lecture Notes).
- MATOLCSI T. (1993): Spacetime Without Reference Frames, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- MATOLCSI T. (2005): Ordinary Thermodynamics, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- MATOLCSI, T. – VÁN, P. (2006): Can material time derivative be objective?, *Physics Letters A*, **353**: 109-112.
- MATOLCSI, T. – VÁN, P. (2007): Absolute time derivatives, *J. of Mathematical Physics*, **48**: 053507-19.
- MAUGIN, G.A. – MUSCHIK, W. (1994): Thermodynamics with Internal Variables. Part I. General Concepts, *J. of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **19**: 217-249.
- MAUGIN, G.A. (1999): The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviors (An introduction), *World Scientific*, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong,
- MÓZES, GY. – VÁMOS, E. (1968): Reológia és reometria. *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.
- MUSCHIK, W. (1993): Fundamentals of Nonequilibrium Thermodynamics. Non-Equilibrium Thermodynamics with Application to Solids. Springer-Verlag, Wien-New York. pp.1-63.
- PALMSTRÖM, A. (1995): *RMi – a rock mass characterization system for rock engineering purposes*. Univ. Oslo, Norway, p. 400. (www.rockmass.net)
- PETRYK, H (1993): *Stability and Constitutive Inequalities in Plasticity. Non-Equilibrium Thermodynamics with Application to Solids*. Springer-Verlag, Wien-New York. pp.259-329.
- PONOMARJOV, SZ.D. (1965): Szilárdsági számítások a gépészetben. 1. kötet: Elméleti alapok, vizsgálati módszerek. p. 400 - 4. kötet: Képlékeny alakváltozás, tartós folyás. *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, p.380.
- PRAGER, W. (1961): *Introduction to the Mechanics of Continua*. Ginn Publications, Boston.
- PRIGOGINE, I. – STENGERS, I. (1995): Az új szövetség (A tudomány metamorfózisa), *Akadémiai Kiadó*, Budapest.

³⁷ EGYESÜLET A TUDOMÁNY ÉS TECHNOLÓGIA EGYSÉGÉÉRT

- REUSS, E. (1953): Nagy viszkozitású folyadék anyagegyenlete és alkalmazása ultrahangra. *MTA Műszaki Tudományok Oszt. Közleményei IX.* (1-4): 57-70.
- RICE, J. R. (1971): Inelastic Constitutive Relations for Solids: a Internal-variable Theory and its Application to Metal Plasticity. *J. of Mechanics and Physics of Solids*, **19**: 433-455.
- SALUSTOWITZ, A. (1968): Zarys mechaniki górotworu. *Wydawnictwo „Slask”*. Katowice.
- SCIPIO, L.A. (1967): Principles of Continua with Applications. *John Wiley Sons*, New York-London-Sydney.
- SZARKA, Z. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye 5. Anyagjellemzők laboratóriumi meghatározása. In.: Asszonyi Cs. (szerk). *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye.* (Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár **3**), Műegyetemi Kiadó Budapest. pp. 131-165.
- SZOKOLOVSKIJ, V.V. (1953): A képlékenységtan elmélete. *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- TÓTH, J. (2007): Anyagtörvény egyszerűsítése. *ETTE pályázat* (díjnyertes pályamű). Budapest. p. 9.
- TRUESDELL, C. – NOLL, W. (1965): The non-linear field theories of mechanics, (Handbuch der Physik, III/3.) *Springer Verlag*,.
- VÁN, P. – ASSZONYI, CS. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye. 2. Az általános törvényszerűségek levezetése. In.: Asszonyi Cs. (szerk). *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye.* (Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár **3**), Műegyetemi Kiadó Budapest. pp. 25-88.
- VÁN, P. – SZARKA, Z. (2006): *Rock Rheology – Time Dependence of Dilatation and Stress Around a Tunnel*. EUROROCK 2006 – Multiphysics Coupling and Long Term Behavior in Rock Mechanics. *Procs of the Int. Symp. ISRM*. Liège, Belgium. 357-363.
- VÁN, P. – VÁSÁRHELYI B. (2001): *Second Law of thermodynamics and the failure of rock materials*, in Rock Mechanics in the National Interest V1, ed. D. Elsworth, J. P. Tinucci and K. A. Heasley, Procs of 9th North American Rock Mechanics Symp. Washington, USA. Balkema, pp. 767-773
- VÁN, P. (2001): Internal thermodynamic variables and the failure of microcracked
- VÁN, P. (2001): Internal Thermodynamic Variables and the Failure of Microcracked materials, *J. of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **26**(2): 167-189.
- VÁN, P. (2003): Weakly Nonlocal Irreversible Thermodynamics, *Annalen der Physik Leipzig*, **12**(3): 142-169.
- VÁN, P. (2007): Objektív anyagfüggvények felé a reológiában. Mérnökgeológia-Közetmechanika 2007 (szerk: Török Á. & Vásárhelyi B.) (Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár **4**. Műegyetemi Kiadó Budapest.
- VÁSÁRHELYI, B. – DELI, Á. – GÁLOS, M. – VÁN, P. (2000): Relationship between the critical dissipated energy per unit volume and the mechanical properties of different rocks. Pacific

Rocks 2000, Girard, Liebman and Breeds (ed.) *Procs of 8th North American Rock Mech. Symp.*, Seattle, USA, pp. 1289-1293.

VERHÁS, J. (1985) : Termodinamika és reológia, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest

WANG, C.C. (1970): A new representation theorem for isotropic functions: An answer to professor G. F. Smith's criticism of my papers on representations of isotropic functions, Part 1. Scalar valued isotropic functions, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **36**(3): 166-197.

SZERZŐK



ASSZONYI CSABA DR. (1941) okl. gépészmérnök (NME, 1964), műszaki doktor (NME, 1965), a műszaki tud. kandidátusa (1972), a műszaki tud. doktora (1976). Kutatási területe: a kontinuumok mechanikája és az irreverzibilis termodinamika. Eredményeit 192 publikációban és 8 könyvben tette közre. Főbb mérnöki eredményei és szabadalmai az alagút- és épület-rekonstrukciók, víz- és környezetvédelem területén találhatók. A bányászatban volt kutatómérnök, osztályvezető, gazdasági igazgató, trösztí főosztályvezető, kutatóintézeti igazgató. 1988-as megalakulásától kezdve a MONTAVID Csoport vezetője, s a MONTAVID INVESTMENT TECHNOLOGIES TRUST elnökö-vezérigazgatója 2006-ig. Jelenleg kutatással, műszaki fejlesztéssel foglalkozik a MONTAVID RESEARCH GROUP keretei között. 1112 Budapest, Táncos u.6. Telefon: (06) 309 215 684, (1) 215 8463, asszonyi@mail.datanet.hu



SZARKA ZOLTÁN DR. (1927) okl. mérnök (1950). 1950-től a Nehézipari Műszaki Egyetem – ma Miskolci Egyetem – Matematikai Tanszékének (jelenleg Intézetének) oktatója. 1967-től egyetemi docens, közben két időszakban tanszékvezető, 1991-től nyugdíjas, de oktatói munkáját 2006-ig folytatta. Szakterülete a kiegyenlítőszámítás, de 56 évi egyetemi munkája során a matematika számos területét (analízis, parciális differenciálegyenletek, valószínűség-számítás, komplex függvénytan, stb.) művelte. Számos hazai és külföldi előadása mellett 46 szakcikke és 30 könyve és mintegy 21 egyetemi jegyzete jelent meg, részben társszerzőkkel.

3529 Miskolc, Csabai kapu 34. Telefon: (46) 362 905, matedit@gold.uni-miskolc.hu



VÁN PÉTER DR. (1964). okl. fizikus (ELTE, 1990), egyetemi doktor (BME, 1994), PhD (BME, 2002). 2005-ig a BME Kémiai Fizika Tanszékének munkatársa, jelenleg a KFKI, RMKI Elméleti Főosztályán dolgozik. Az ELFT Termodinamikai Szak-csoportjának elnöke. Több ízben dolgozott külföldön, Olaszországban, Németországban és Észtországban. Kutatási területe a nemegyensúlyi termodinamika, mint általános fizikai keretelmélet, ennek alapjai, illetve különféle alkalmazásai. A termodinamika variációs elveiről és a nemegyensúlyi termodinamika gyengén nemlokális kiterjesztésével kapcsolatban vannak eredményei. Érdeklődési területéhez tartozik pl. károsodás-

mechanika, reológia, téridő modellek. Eddig mintegy 40 szakcikke jelent meg. 1012 Budapest, Lovas utca 18. Tel: (70) 332 2831, vpet@eik.bme.hu. E: <http://newton.phy.bme.hu/~van/>