

Szerkesztette:
Asszonyi Csaba

Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai



Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6



IZOTROP KONTINUUMOK
ANYAGTULAJDONSÁGAI

*International Society for Rock Mechanics
Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 Konferencia, Budapest*

IZOTROP KONTINUUMOK ANYAGTULAJDONSÁGAI

SZERKESZTETTE

ASSZONYI CSABA

Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

IRTA

ASSZONYI CSABA, VÁN PÉTER, SZARKA ZOLTÁN,
FÜLÖP TAMÁS, HORVÁTH RÓBERT



MŰEGYETEMI KIADÓ
2008

SZERKESZTETTE

DR. ASSZONYI CSABA

Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

IRTA

DR. ASSZONYI CSABA, DR. VÁN PÉTER, DR. SZARKA ZOLTÁN,
DR. FÜLÖP TAMÁS, DR. HORVÁTH RÓBERT

LEKTORÁLTA

DR. BÉDA GYULA

a műszaki tudomány doktora

DR. MATOLCSI TAMÁS

a matematikai tudomány kandidátusa

A KUTATÁST ÉS A KÖTET MEGJELENÉSÉT

A MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT,
A MAGYAR MÉRNÖKI KAMARA,
AZ ETTE EGYESÜLET TUDOMÁNY ÉS TECHNOLÓGIA EGYSÉGÉÉRT ÉS
AZ ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS KUTATÁSI ALAP,
TÁMOGATÁSA TETTE LEHETŐVÉ

ISBN 978-963-420-965-2

ISSN 1789-0454

Megjelent a *Műegyetemi Kiadó* gondozásában
www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 14,80 (A/5) ív

Nyomdai Munkák:

Hungarian Printing House

Felelős vezető:

Kovács-Sebestyén Szabolcs

©2008 BUDAPEST, ASSZONYI CSABA, VÁN PÉTER, SZARKA ZOLTÁN, FÜLÖP TAMÁS, HORVÁTH RÓBERT

IZOTROP KONTINUUMOK ANYAGTULAJDONSÁGAI

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó	9
IZOTROP KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE ÉS SPECIÁLIS ESETEI <i>(Ván Péter – Asszonyi Csaba)</i>	
BEVEZETÉS	13
1. AZ ANYAGTÖRVÉNY TERMODINAMIKAI ALAPJAI	16
A termodinamika második főtétele	16
Melyek a fajlagos (tömegegységre jutó) entrópia változói?	17
Feltevés	18
A belső dinamikai változók	20
A $\psi(W)$ a képlékenységi határfeltétel	21
A rugalmas és képlékeny alakváltozás	22
Egyik lehetőség	24
Másik lehetőség	25
2. A MUNKA ALAPÚ HATÁRFELTÉTELEK	25
A képlékenységi határ	28
A maximális torzulási deformációs munka elve	28
Tökéletesen kifejlődött képlékeny zóna	29
A maximális rugalmas térfogati munka elve	29
A maximális térfogati deformációs munka elve	29
A maximális térfogati disszipációs munka elve	29
A tönkremeneteli határ	29
A maximális torzulási disszipációs munka elve	30
3. AZ ANYAGTÖRVÉNY LEVEZETÉSÉNEK ALAPJAI	31
4. AZ ANYAGTÖRVÉNY EGYENSÚLYI ÁLLAPOTBAN	34
Általánosan	34
Rugalmas állapot	35
Képlékeny állapot	36
Az anyagállandók termodinamikai összefüggése	37
Rugalmas-képlékeny állapot	37
6. AZ ANYAGTÖRVÉNY TÚL AZ EGYENSÚLYI ÁLLAPOTON	38
A különböző deformációk	41
Az anyagtörvény egyetlen deformációval	42
7. REOLÓGIAI ANYAGMODELLEK ALKALMAZÁSA MAGYARORSZÁGON	45
Első – csupán rugalmas – modell [1967]	45
Második – rugalmas-képlékeny – modell [1973]	46
Harmadik – csupán rugalmas – modell [1983]	46
Termodinamikai alapok	47
Negyedik – csupán rugalmas – modell [2006]	47
Ötödik – rugalmas-képlékeny – modell [2007]	47
Hatodik – rugalmas-képlékeny – modell [2008]	49
IRODALOM	49

REOLÓGIAI ALAPMODELLEK ÉS ÖSSZEKAPCSOLÁSUK
(Asszonyi Csaba – Fülöp Tamás – Ván Péter – Szarka Zoltán – Horváth Róbert)

1. BEVEZETÉS	52
1.1. Rugalmas állapot	53
1.2. Képlékeny állapot	54
1.3. Az anyagtörvény változói	54
1.4. Termodinamikai egyenlőtlenségek – az anyagtörvény származtatása	54
2. ALAP- (VAGY EGYELEMŰ) MODELLEK	56
(A) Ideális rugó	56
(B) Ideálisan viszkózus elem	56
(C) Ideális tehetetlenségi elem	57
(D) Ideális képlékenységi elem	57
Soros kapcsolásnál [H~SV]	58
Párhuzamos kapcsolásnál [H SV]	58
Három elemes kapcsolásnál [H~ (H SV)]	59
3. KÉT ELEM ÖSSZEKAPCSOLÁSÁVAL ALKOTOTT MODELLEK	60
(E) KELVIN test	62
(F) MAXWELL test	62
4. HÁROM ELEM ÖSSZEKAPCSOLÁSÁVAL ALKOTOTT MODELLEK	62
(G) POYNTING-THOMSON (vagy standard) test	64
(H) Tehetetlenségi viszkózus (Maxwell) test	66
5. NÉGY ELEM ÖSSZEKAPCSOLÁSÁVAL ALKOTOTT MODELLEK	67
(I) Tehetetlenségi standard test	68
(J) BURGERS-modell	68
6. A RUGALMASSÁGTANI MODELLEK ÖSSZEFOGLALÁSA	72
A rugalmas-relaxációs test	73
7. RUGALMASSÁGTANI MODELLEK VERHÁS-ELEMMEK	74
8. NÉGYNÉL TÖBB ELEM ÖSSZEKAPCSOLÁSÁVAL ALKOTOTT MODELLEK	79
(L) Ötparaméteres tehetetlenségi standard modell	80
9. KÉPLÉKENY ÁLLAPOT	81
Az anyagtörvény a VERHÁS-elem nélkül	82
Az anyagtörvény a VERHÁS-elem felhasználásával	85
10. AZ IDŐFÜGGÉS	87
11. AZ EGYSEGES ANYAGTÖRVÉNY	90
IRODALOM	92

REOLÓGIAI ELEMKAPCSOLÁSOK

(Fülöp Tamás)

1. BEVEZETÉS	93
2. AZ EREDMÉNYEK	95
2.1. Jelölések, elnevezések	95
2.2. Két modell párhuzamos és soros kapcsolásának eredő egyenlete	96
2.2.1. $(A\sigma = \tilde{P}\varepsilon) \parallel (B\sigma = \tilde{Q}\varepsilon)$ eredő egyenlete	96
2.2.2. $(A\sigma = \tilde{P}\varepsilon) \sim (B\sigma = \tilde{Q}\varepsilon)$ eredő egyenlete	96
2.3. A rugókból, olajfékekből és tehetetlenségi elemekből építhető összes legfeljebb négyelemes kapcsolás és eredő egyenlete	97
2.3.1. Egyelemesek	97
2.3.2. Kételemesek	97
2.3.3. Háromelemesek	99
2.3.4. Négyelemesek	100
2.4. Rugók, olajfékek és tehetetlenségi elemek tehetetlenségi standard modellre vezető négyelemű kapcsolásainak néhány jellemzője	106

2.4.1. Az (50) kapcsolás: $[(C_1 \parallel \mu_2) \sim C_3] \parallel \mu_4$	106
2.4.2. Az (52) kapcsolás: $[(C_1 \parallel \mu_2) \sim \mu_3] \parallel C_4$	106
2.4.3. A (70) kapcsolás: $[(\mu_1 \parallel M_2) \sim \mu_3] \parallel C_4$	107
2.4.4. A (76) kapcsolás: $(C_1 \sim \mu_2) \parallel C_3 \parallel \mu_4$	107
2.4.5. A (82) kapcsolás: $(\mu_1 \sim M_2) \parallel C_3 \parallel \mu_4$	107
2.4.6. A (85) kapcsolás: $(C_1 \parallel \mu_2) \sim (C_3 \parallel \mu_4)$	108
2.5. Néhány négynél több elemes kapcsolat viszonya a tehetetlenségi standard modellhez	109
2.5.1. $[(C_1 \sim \mu_2) \parallel C_3] \sim (C_4 \parallel \mu_5)$	109
2.5.2. $(C_1 \sim \mu_2) \parallel (\mu_3 \sim M_4) \parallel C_5$ a $\mu_2/C_1 = M_4/\mu_3$ feltétel mellett	109
2.5.3. $(C_1 \sim C_2) \parallel (C_3 \sim C_4)$ két ága közé hídaként kapcsolva μ_5	110
2.6. Tehetetlenségi standard modellre vezető soros és párhuzamos kapcsolások csillapítási és tehetetlenségi indexe általánosan	110
3. AZ EREDMÉNYEKHEZ VEZETŐ RÉSZLETES ÚT	112
3.1. Eljárás F -fajta reológiai elem összes lehetséges, legfeljebb N -elemű kapcsolatának előállítására	113
3.2. Általános formula reológiai modellek soros és párhuzamos kapcsolásainak eredő egyenletére	114
3.3. Számítógépes MARPLE-program F -fajta reológiai elem összes, legfeljebb N -elemű soros és párhuzamos kapcsolatának előállítására és eredő egyenleteik kiszámolására	114
3.4. Rugók, olajfűkek és tehetetlenségi elemek legfeljebb négyelemű soros és párhuzamos kapcsolásai és eredő egyenleteik	117
3.5. Rugók, olajfűkek és tehetetlenségi elemek tehetetlenségi standard modellre vezető négyelemű kapcsolásainak néhány jellemzője	117
3.6. Néhány négynél több elemes kapcsolat viszonya a tehetetlenségi standard modellhez	119
3.7. Tehetetlenségi standard modellre vezető soros és párhuzamos kapcsolások csillapítási és tehetetlenségi indexe általánosan	119
IRODALOM	120

ANYAGOK MECHANIKAI TULAJDONSÁGAI AZ ANYAGTÖRVÉNY ALAPJÁN
(Szarka Zoltán – Asszonyi Csaba – Fülöp Tamás)

BEVEZETÉS	121
Torzulási állandók	121
Térfogati állandók	122
(a) Nincs rugalmas zóna	123
(b) Nincs tökéletesen kifejlődött képlékeny zóna	123
(c) Nincs képlékeny állapot a tönkremenetel előtt	124
(d) A képlékeny zóna és a tökéletesen képlékeny zóna azonos	124
(e) Képlékeny deformációk már kezdettől fogva jelentkeznek	124
A) AZ ANYAGTULAJDONSÁGOK RUGALMAS ÁLLAPOTBAN, AZ ANYAGEGYENLET MEGOLDÁSA	
$\Psi = 0$ ESETÉRE	125
A kiindulás	125
1. DEFORMÁCIÓVEZÉRELT ESET	126
A feladat matematikai megfogalmazása	126
1.1. Állandó deformációgyorsulás	126
1.2. Állandó deformációsebesség	129
1.3. Állandó deformáció (relaxáció)	132
1.4. A deformáció periodikusan változik	133
2. TERHELÉSVEZÉRELT ESET	140
A feladat matematikai megfogalmazása	140
2.1. Állandó feszültséggyorsulás	141

2.2. A feszültség sebessége állandó	142
2.3. A feszültség állandó	143
2.4. Tehermentesítés másodfokú feszültségcsökkentéssel	144
2.5. Periodikus terhelés	146
Az $\eta^2 > 2G\theta$ eset	148
Az $\eta^2 = 2G\theta$ eset	159
Az $\eta^2 < 2G\theta$ eset	150
B) AZ ANYAGTULAJDONSÁGOK KÉPLÉKENY ÁLLAPOTBAN, AZ ANYAGEGYENLET MEGOLDÁSA	
$\Psi = 1$ ESETÉRE	152
A kiindulás	152
Változás a képlékenységi határon	153
Állandó deformációgyorsulás	155
Állandó deformációsebesség	158
Állandó feszültséggyorsulás	158
Állandó feszültségváltozási sebesség	160
Állandó feszültség (kúszás)	163
3. AZ ANYAGTÖRVÉNY EGYSÉGES KEZELÉSE	163
Az időtényezők	164
3.1. A hossz- és keresztirányú nyúlások aránya egytengelyű feszültségállapotnál	164
Egytengelyű feszültségállapot	165
3.2. Vizsgálat a rugalmas alakváltozások tartományában	166
A POYNTING-THOMSON-féle standard test	166
Az egyenletes terhelési sebesség esete	166
A lehetséges esetek	167
A tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-test	169
IRODALOM	173
FÜGGELÉK 1: ÁTTEKINTÉS AZ ELSŐRENDŰ ÉS MÁSODRENDŰ, LINEÁRIS, ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS DIFFERENCIÁLEGYENLETEKRŐL	174
1. AZ ELSŐRENDŰ, LINEÁRIS, ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS DIFFERENCIÁLEGYENLET	174
2. A MÁSODRENDŰ, LINEÁRIS, ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS DIFFERENCIÁLEGYENLET	175
Homogén egyenletek	175
1. Eset. A gyökök különböző valós számok	176
2. Eset. A két gyök megegyezik	176
3. Eset. A gyökök komplex számok	176
Inhomogén egyenletek	176
1. Eset: α nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek	177
2. Eset: α gyöke a karakterisztikus egyenletnek	177
A harmonikus rezgések differenciálegyenlete	178
FÜGGELÉK 2: AZ ANYAGTÖRVÉNY - KÜLÖNBÖZŐ FELTÉTELEK MELLETTI - MEGOLDÁSÁNAK ÖSSZEFOGLALÁSA	181
1. Deformációvezérlés	181
1.1. Állandó gyorsulású deformációvezérlés	181
1.2. Állandó deformációsebességű felterhelés	181
1.3. Állandó deformáció (relaxáció)	181
1.4. Periodikus deformáció	182
2. Feszültségvezérlés	182
1.1. Állandó feszültség-gyorsulás	182
1.2. Állandó feszültségsebességű felterhelés	183
1.3. Állandó feszültség (kúszás)	183
1.4. Periodikus feszültségvezérlés	183
JELÖLÉSEK JEGYZÉKE	185
SZERZŐK	189

ELŐSZÓ

A kötetben található előadások a MONTAVID RESEARCH GROUP keretében folytatott „Izotrop kontinuumok mechanikája” elnevezésű kutatási program elmúlt évi eredményeinek egy részét foglalja össze.¹ A tanulmányok, a Nemzetközi Kőzetmechanikai Társaság (ISRM – INTERNATIONAL SOCIETY FOR ROCK MECHANICS) Magyar Nemzeti Bizottsága által szervezett hazai konferenciájára készült előadások, amelyek logikai rendbe szerkesztve kerültek jelen kötetbe. Ez már a harmadik könyv az éves kutatások beszámolójából.

A kutatási program egyik fejezete az *izotrop kontinuumok általános anyagtörvényének meghatározása izotermikus és adiabatikus folyamatokban*. Ez háromévi kutatás után a lezáráshoz közeledik, miután sikerült a rugalmas és képlékeny, valamint a kis és nagy deformációkra érvényes formát megtalálni. Azonban számos nyitott kérdés van még, amelyekre ezekben a kötetekben mindig rámutatunk, mert amivel mi nem tudtunk megbirkózni, esetleg az olvasók boldogulnak, megtalálják a bizonyított megoldást.

A kutatási program másik fejezete az *alakváltozási folyamatok során jelentkező diszkontinuitások* tanulmányozását célozta meg, a képlékenységi kialakulásának és a tönkremenetelnek termodinamikai alapokon történő – fenomenologikus – leírását. Ennél a programnál bár vannak biztató jelek, azonban a teljes megoldáshoz nem sikerült eljutni. A kapott eredményekből evidensen következik, hogy az a határ, ahol elválnak egymástól a rugalmas és képlékeny alakváltozás, maga sem lehet kísérleti eredményekből levonható matematikai összefüggés. Az általános fizikai alaptörvényekből következnie kell a képlékenységi és a tönkremeneteli határfeltételnek. Vannak sejtéseink, de nincs döntő bizonyítékunk. Azt már tudjuk, mi minden nem lehet. Ezekből valamit felvillantunk ebben a kötetben, főleg azért, hogy a témával foglalkozók figyelmét ráirányítsuk a problémára, hátha ők megtalálják a megoldást.

Az itt ismertetett kutatások természetszerűen nem lezártak, hanem számos új lehetőséget mutatnak fel, amelyeket a kutatóknak érdemes szisztematikusan végigvizsgálni, ugyanis gyakorlati hatásuk szinte felmérhetetlen. Ezen az úton még csak az első lépéseknél tartunk, ezek mégis megrengették az anyagtulajdonságokról,

¹ A továbbiak a Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 7 kötetében találhatók.

anyagállandókról vallott több évszázados felfogásunkat. (Csak példaként: a megszokott – egytengelyű feszültségállapotból vett – E rugalmassági modulus (YOUNG-modulus) eddigi hitünkkel szemben – nem létező anyagállandó, a ν POISSON-tényező pedig nemcsak, hogy nem anyagjellemző, hanem nem is állandó, stb.)

Az *első előadás* összefoglalja az izotrop kontinuumok anyagtörvényének a termodinamika második főtételeiből történő levezetését. Az alapul vett kiinduló feltevések a következők:

1. A termodinamika második főtételeiből (és ennek folyományából: az entrópiánövekedés elvéből) lehet meghatározni az anyagtörvényt.
2. Az anyagtörvény csak azon változók függvénye lehet, amelyek az entrópiát meghatározzák. Az entrópia háttérében ott vannak a dinamikai egyenletek (a mérleg-egyenletek), s az entrópia változóit azok változtatják.
3. Az entrópia azon termodinamikai változóknak a függvénye, amelyek értékét a dinamikai mérlegek determinálják.
4. Az entrópia csak azon változók függvénye lehet, amelyek a mérlegekben szerepelnek.
5. Az anyagtörvény is csak azon változók függvénye lehet, amelyek a mérlegekben szerepelnek.

A végeredmény: a rugalmas alakváltozásoktól a képlékeny alakváltozásokon át a tönkremenetelig érvényes *tehetetlenségi standard test*, mint anyagtörvény. Ebből az a következtetés vonható le, hogy mechanikai szempontból három alapvető anyagi tulajdonság van: a rugalmas alakváltozás képessége (a rugalmasság), az alakváltozást gátolni igyekvő belső súrlódás (a viszkozitás), továbbá az anyag belső tehetetlensége.

A *második előadás* kézikönyvszerűen összefoglalja a reológia elemi modelljeit és a belőlük felépíthető mechanikai testeket. Ennek eredményeként számos új eredmény adódik:

- az anyagtulajdonságoknál a csillapítások mértéke,
- az anyagállandók rugalmas és képlékeny tartománybeli összefüggése, stb.

A *harmadik előadás* matematikai eljárást és számítógépes módszert ad a reológiai elemek kapcsolásának előállítására, a kapcsolások eredő egyenletének meghatározására, amellyel tetszőleges bonyolultságú feladat gyorsan megoldható.

A *negyedik előadás* megadja a tehetetlenségi standard test anyagegyenletének (differenciálegyenletének) különböző szituációk melletti megoldását. Ennek célja, hogy

- az anyagállandók meghatározására szolgáló mérések kiértékeléséhez a szükséges matematikai összefüggések rendelkezésre álljanak,
- az anyagtulajdonságokat, az anyagviselkedést jobban megértsük, s ezáltal a gyakorlati feladatok megoldásához ötletek, ökölszabályok legyenek kialakíthatók.

Új eredmény a rugalmas-képlékeny határon történő anyagviselkedés feltárása az ún. ugrásfüggvényekkel, amelyek által az anyagvizsgálattal foglalkozók anélkül tudják

meghatározni a képlékenységi határt, hogy a próbatestet tehermentesíteniük kellene, tehát adott esetben roncsolásos vizsgálattal is. Továbbá foglalkozik az előadás a különböző szituációkban esetleg fellépő rezgésekkel, az anyag saját reológiai rezgésszámával, valamint a rezonanciával.

Újdonságnak számít, hogy általában csak az adott szerkezet sajátrezgéséről szoktak beszélni, nem pedig a szerkezeti anyagéről, ui. az eddigi anyagmodelleknél nem vettük figyelembe belső tehetetlenségüket, s így reológiai sajátrezgésük sem volt kimutatható.

A kötet szerzői ezúton fejezik ki őszinte tisztelettel köszönetüket és hálájukat MATOLCSI TAMÁS és BÉDA GYULA professzoroknak részletes és aprólékos észrevételeikért, a kötet anyagának lektorálása során tett értékes figyelemre méltó megjegyzéseikért és átdolgozásra tett javaslataikért.

Budapest, 2008. október 31.

A SZERZŐK

IZOTROP KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE ÉS SPECIÁLIS ESETEI

Ván Péter

KFKI RÉSZECSCSE- ÉS MAGFIZIKAI KUTATÓINTÉZET, ELMÉLETI FIZIKA FŐOSZTÁLY, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Asszonyi Csaba

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Az előadás összefoglalja az izotrop kontinuumok anyagtörvényének a termodinamika második főtételeből történő levezetését. Ezt egységes anyagtörvénynek nevezzük, mert a deformációk teljes tartományán – a kicsitől a nagyig, a rugalmastól a képlékenyen át a tönkremenetelig – egyaránt érvényes. Mivel az anyagtörvény levezetése során csak általános makroszkópikus természettörvényeket használunk fel – a termodinamika második főtétele és az alaplmenyiségek mérlegeit –, ezért a kapott összefüggés egyúttal univerzális is lesz, azaz független az anyag mezo- és mikroszerkezetétől.

1. BEVEZETÉS

[ASSZONYI–VÁN–SZARKA (2007)] könyvében levezetésre került az izotróp kontinuumok mechanikai anyagtörvénye, amely egységesen érvényes kis és nagy deformációkra, reológiai és képlékenységi jelenségekre. Mivel ez öt különálló fejezetben – 2, 3, 4, 6 és 7 – került kifejtésre, ezért a következőkben egységbe foglaljuk, és egyúttal figyelembe vesszük további kutatásaink ide vonatkozó eredményeit.

A hivatkozott anyagtörvény természetesen nem az egyetlen lehetséges, az irodalomban számtalan másik – teljesen különböző elvek alapján kapott – anyagtörvény található. Viszont amennyiben a fizika alapvető törvényei által megengedett lehető legáltalánosabb és legegyszerűbb formát keressük, akkor az anyagtörvényünk és általában a megközelítésmódunk kitüntetett, mert csak általános elvekre építkezik, így az elérhető legnagyobb mértékben független az anyag részletes szerkezetétől.

Minden eddigi anyagtörvény jó közelítést jelentett bizonyos anyagok, bizonyos tulajdonságaira. Azonban az eddigi anyagegyenletek az esetek túlnyomó többségében (vagy talán majdnem mindig) gyakorlati tapasztalatok általánosításából származó szubjektív konstrukciók voltak. Innen származnak az elnevezéseik is, pl. hipoeelasztikus anyagtörvény, rugalmas-viszkózus anyagtörvény, stb. Rugalmas potenciálból és képlékeny potenciálból levezetett összefüggések is akadnak köztük, miközben e fogalmak fizikai tartalma sem tisztázódott eddig.¹

Ebben az írásban rámutatunk arra, hogy a különféle egyedi jelenségeket hogyan lehet a fizika alaptörvényeinek segítségével (II. főtétele és folyományai), deduktív következtetések eredményeként egységes szemlélettel megközelíteni. Így fog előállni az az *anyagtörvény*, amely a szilárd testek összes fenomenologikus mechanikai tulajdonságát leírja²

- *az alakváltozások tetszőleges tartományán* (kicsi és nagy alakváltozásokra egyaránt). Az anyagnak nincs ilyen elhatárolódása, ui. nem tud különbséget tenni kicsi és nagy között, mivel ilyen fizikai különbség nincs is. Csupán az azt visszatükröződő modellnek van meg ez a tulajdonsága, a felhasznált matematikai apparátusból következően;
- *a rugalmas és képlékeny tartományban együttesen*. Holott ez a két tartomány nem matematikai, hanem fizikai különbségből fakad, amikor az alakváltozások folytonos tartományán egyszer csak megjelenik új minőségként a maradó alakváltozás;
- *a mechanikai állapottér egészén* (beleértve az irreverzibilitás határát – a reverzibilitást – is).

A hivatkozott könyv több helyen rámutatott, hogy ezt az anyagtörvényt lehetne tovább is általánosítani. Ugyanis az anyagi objektivitás követelménye által felvetett szempontokat (objektív időderiváltak, forgásfüggetlenség), illetve ennek az alakváltozással való kapcsolatát sem elemeztük kellően. Ezzel kapcsolatos eddigi vizsgálatainkat [VÁN (2007)] tartalmazza. A gyakorlati alkalmazhatóság azonban már így is bizonyos korlátokat szab elénk, pl. a legáltalánosabb esetben fellépő 22 anyagállandó számának – fizikailag alátámasztott – csökkentése irányában.

Természetesen tisztában vagyunk azzal, hogy a képlékenységi általunk választott tárgyalása – a képlékenységi munkafeltétel beépítése a termodinamikai potenciálba – nem az egyetlen lehetséges út. De a választott matematikai struktúrában mindenképpen a fizikai követelményeket kell érvényesítenünk:

- 1) Világos meghatározását kell adnunk a *disszipatív* és a *nemdisszipatív* közötti különbségnek. Ez csak a termodinamika II. főtételeinek középpontba állításával lehetséges. A képlékenységtan elméletek nagy része tisztán mechanikai alapú fo-

¹ Mit hívunk rugalmas potenciálnak? Miért lehetséges, hogy a feszültség- vagy deformációállapot egy potenciálból származtatható?

² Elvileg nem csak ezeket, de további hatások (hővezetés, diffúzió, ...) figyelembe vétele túlmutat ennek az írásnak a keretein.

galmakból építkeznek, ezáltal nem teljesíti ezt a követelményt. Ennek egyik folyamánya, hogy az ilyen elmélet nem lesz alkalmas összetett jelenségek kezelésére, nem tudja figyelembe venni többféle kölcsönhatás együttes hatását. Viszont még ennél is problematikusabb lehet, hogy fizikailag lehetetlen, a termodinamika második főtételét sértő effektusokat is adhat, amiket csak mesterséges feltételek beiktatásával írhatunk ki. Nem szabad, hogy félrevezessen az, hogy a képlékenységtan egyes posztulátumai (tételei) – például a DRUCKER-féle és az ILJUSIN-féle stabilitási posztulátumok – megtévesztően „termodinamika”-szerűek [HOULSBY-PUZRIN (2006), 2-4 fejezet megjegyzései].

- 2) Az elmélet *a lehető legkevesebb* számú *előfeltevést* szabad, hogy tartalmazza. Extra függvények és paraméterek ugyan lehetővé tehetik a kísérleti eredmények részletes illesztését, de ugyanakkor az ilyen elméletből semmit nem tanulhatunk, és kicsi az érvényességi köre. Ebből a szempontból a képlékenységi és disszipációs potenciálokat és – a nemasszociatív esetben ezektől független – folyásfeltételeket bevezető termodinamikai képlékenységtanok – köztük az előbb említett könyvben tárgyalt hiperképlékenység [HOULSBY-PUZRIN (2006)] – nem megfelelő, tovább egyszerűsítendő. Másik példa lehet erre a plasztikus deformáció fogalmának a priori bevezetése. Ezzel egyszerre több elvárt tulajdonságát posztuláljuk a belső változónak, amik valószínűleg más és más feltételekkel, külön-külön lehetnek csak érvényesek. Nem csoda, hogy a véges alakváltozásos képlékenység még mindig nem létezik (vagyis súlyos belső ellentmondásokkal küzd) [BERTRAM (2005)], és éppen ezért a számításokban különleges formalizmust, ún. növekményes, vagy “rate type” egyenleteket használunk normális differenciál-egyenletek és függvények helyett.

Ezt a két követelményt tartottuk szem előtt az előző könyvünkben. A képlékenységi feltételnek az entrópiafüggvény változójaként történő szerepeltetése a fenti hiányosságok nagy részét sikeresen feloldotta. Valóban lehetővé teszi kis és nagy alakváltozások egységes tárgyalását, a reológiai egyenletek és folyási feltételek egységes, egyszerű termodinamikai levezetését, a disszipatív és nemdisszipatív esetek világos elhatárolását, stb..., ráadásul az általunk eddig vizsgált egyszerű esetekben jól magyarázta a kísérleti adatokat. Mindazonáltal vannak fontos hiányosságai is.

Az eddigiek során a levezetésekben a képlékenységi feltételt általában a deformációs munka függvényének tekintettük. A legtöbb olyan anyagban viszont, ahol a klasszikus képlékenység érvényes, ez nem jó feltevés, ott a képlékenységi feltétel csupán a torzulási deformációs munka (alaktorzulási munka) függvénye. Ezt már csak a végeredménynél használtuk fel, így a térfogati deformációs munka hatása nem került kiszűrésre, tehát az anyagegyenlet térfogatváltozási része bonyolultabb lett a szokásosnál. Ezzel az általánosítással a talajok és kőzetek esetére reméltük általánosítani az elméletet, ahol a nemasszociatív képlékenység (dilatancia modellezése) alkalmazása ezt sugallja. Nem

vettük azonban figyelembe, hogy termodinamikai megközelítésünk képlékenységet és szokásosan reológiai hatásokat egyszerre ír le, és ez utóbbi hatások szintén vezethetnek térfogati képlékenységhez hasonló jelenségekhez. Ezen okok miatt a levezetést is megismételjük, ugyanis a korábbtól eltérő módon nem a végén vezetjük be a deviátorikus felbontást, hanem már a kezdetnél.

Ennek felírása előtt tisztázni kell az anyagtörvény értelmezési határait, nevezetesen:

- meddig tart a rugalmas állapot, s hol kezdődik a képlékenység,
- hol válik összenyomhatatlanná az – addig összenyomható – anyag,
- mikor szűnik meg az anyagfolytonosság, mikor következik be a törés (tönkremenetel)?

Ezért még egyszer összefoglaljuk izotrop kontinuumok anyagegyenletének meghatározásához vezető feltételeket.

1. AZ ANYAGTÖRVÉNY TERMODINAMIKAI ALAPJAI

A TERMODINAMIKA MÁSODIK FŐTÉTELE minden fizikai elmélet alapja – tehát általános érvényű természettörvény. Fizikai tartalmát tekintve a második főtétele *az anyag stabilitásának elve*. Ez azt jelenti, hogy a benne foglalt előírások miatt egyenleteink termodinamikailag is egyensúlyi megoldásai aszimptotikusan stabilak lesznek. A megoldás időfüggetlensége fizikailag nem mindig fejez ki egyensúlyt, azaz nem stacionárius megoldásokról, hanem például az elszigetelt rendszerek egyensúlyáról van szó. Tehát a második főtétele miatt az anyag magától nem kezd átalakulni, és a zavarok elfelejtődnek. “Ez a fajta stabilitás ad értelmet a megismételhetőség fogalmának: hasonló körülmények között hasonló változás fog bekövetkezni: a vonzó állapotok stabilitása lehetővé teszi, hogy a szóbanforgó “hasonló” körülmények ne a rendszereknek a legkisebb részletben is érvényesülő azonosságát jelentsék, hanem csupán ugyanahhoz a vonzási medencéhez való tartozásukat.” [PRIGOGINE-STENGERS (1986)].

Az anyag a maga belső viszonyai, kölcsönhatásai miatt stabil. Ha nem ilyen, akkor megváltozik és átalakul stabil formába. Ez annyira természetes elvárás, hogy hajlamosak vagyunk megfeledkezni róla. A fizika elméleteiben a termodinamika második főtétele adja ennek matematikai és fogalmi kereteit [GLANSDORFF–PRIGOGINE (1971), MATOLCSI (2005)].

Mechanikai kölcsönhatásoknál a tömeg-, az impulzus- és az energiamérlegek (kontinuitási egyenletek) az alapvető (ún. dinamikai) összefüggéseink. Ezeken felül azonban létezik még egy további – az előzőektől nem független – fizikai mennyiség, *az entrópia*. A termodinamika második főtétele szerint az összes entrópia elszigetelt rendszerben nem csökkenhet. Ez az entrópia mérlegében úgy jelenik meg, hogy az entrópiának van forrása, a σ_s spontán produkció, amely nemnegatív (és csak egyensúly esetén nulla).

Általános stabilitási megfontolásokból megköveteljük, hogy az entrópiának *maxima* legyen az elszigetelt rendszer egyensúlyában. Ennek szükséges feltétele, hogy konkáv függvénye legyen változóinak. Ne felejtjük el, hogy a háttérben ott vannak a dinamikai egyenletek (az említett mérlegek), ezért növekedését, az entrópia változóinak változását a mérlegek determinálják. A második főtétel az anyag tulajdonságain, azaz az anyagfüggvényeken keresztül kell biztosítsa az egyensúly létét, illetve az entrópia változásának irányát. A második főtételt tehát a kényelmes matematikai megfogalmazhatóság érdekében célszerűen három részre bontjuk:

- 1) Létezik entrópia, ami az alapváltozók elég sokszor (de legalább egyszer szakaszosan folytonosan) differenciálható függvénye.
- 2) Az entrópia konkáv függvénye változóinak.
- 3) A fejlődési egyenletek által meghatározott folyamatok esetén, elszigetelt rendszerben az összentrópia nem csökkenhet.

A 2) feltétel, a konkávitás nem feltétel nélküli követelmény, nem természettörvény, sérülése anyagi természetű instabilitásra utal (pl. fázishatár). A másik két feltétel viszont biztosítja, hogy ez a sérülés valóban ne legyen kiaknázható kivétel. Mindegyik feltétel jelentősen megszorítja az anyagegyenletek lehetséges formáját.

MELYEK A FAJLAGOS (TÖMEGEGYSÉGRE JUTÓ) ENTRÓPIA VÁLTOZÓI? Ez szubjektív döntésünktől függ? Érezzük, hogy ez nem lehet, ugyanis a természet – egy fenomenológikus leírás korlátain belül – nem engedhet ekkora bizonytalanságot, helyet hagyva ezáltal az emberi spekulációknak, esetleg természettől idegen feltevéseknek.

Ha megadjuk, hogy az s entrópiafüggvény mely változóknak a függvénye, ezáltal már rögzítjük a fejlődési egyenlet változóit, és így az anyagtörvény változóit is. Ezáltal végső soron – deduktív következtetéseken keresztül – az anyagtörvény formáját is meghatározzuk. Ebből következően nagyon körültekintően kell eljárunk, s lehetőleg nem saját elképzeléseinket, elvárásainkat kell megfogalmaznunk, hanem hagyni, hogy a fizikai törvények és az adott rendszerrel kapcsolatos kísérleti tapasztalat – matematikai megfogalmazásunkon keresztül – kifejthessék hatásukat.

Az *entrópia* a nemegyensúlyi termodinamika alapvető *anyagfüggvénye*, és minden más anyagfüggvényt vagy közvetlenül belőle származtathatunk (intenzívek és deriváltjaik), vagy az entrópiatermeléshez köthetünk (hővezetés, belső súrlódás, stb.). Az anyag szimmetriáit az entrópiafüggvénynek is tükröznie kell. Így például izotrop kontinuumok esetén az entrópia *izotrop* függvénye változóinak.

FELTEVÉS, hogy a termodinamika második főtétele (és ennek folyományából: az entrópiánövekedés elve) nagyon jelentősen megszorítja, bizonyos egyszerű további feltevések mellett (pl. linearitás) teljesen meghatározza az anyagtörvényt.

Ennek következménye, hogy

1. Az anyagtörvények csak azon változók függvényei lehetnek, amelyek az entrópiát meghatározzák.
2. Ugyanez fordítva is igaz: az entrópia csak azon változók függvénye lehet, amelyek az anyagtörvényekben fellépnek.
3. Az entrópia azon termodinamikai változóknak függvénye, amelyek értékét az alapvető mérlegek változtatják.
4. Az entrópia lehet más változóknak is függvénye, de ekkor ezen más változókra érvényes fejlődési egyenleteket is megszorítja.

Megjegyezzük, hogy ez utóbbi esetben – ha a második főtételen kívül nincs más korlátozás az anyagot jellemző más változóra, – pusztán a második főtételből szintén mérleg jellegű fejlődési egyenleteket vezethetünk le [VÁN (2005)].

Írjuk fel összefoglalóan a mechanikai kölcsönhatáshoz tartozó – ma ismert – mérlegegyenleteket³ lokálisan szubsztanciális formában:

$$\begin{aligned}
 \text{Tömegmérleg:} & \quad \dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\
 \text{Impulzusrmérleg:} & \quad \rho \dot{\mathbf{v}} - \nabla \cdot \mathbf{F} = \rho \mathbf{f}, \\
 \text{Impulzusmomentum-mérleg:}^4 & \quad \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\nabla + \mathbf{F} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f}, \\
 \text{Kinetikusenergia-mérleg:} & \quad \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right)^\bullet = \mathbf{v}(\mathbf{F}\nabla) + \rho \mathbf{f} \mathbf{v}, \\
 \text{Belsőenergia-mérleg:} & \quad \rho \dot{e} + \nabla \cdot \mathbf{j}_q = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla, \\
 \text{Összenergiamérleg:} & \quad \rho \dot{e}_T + \nabla \cdot (\mathbf{j}_q - \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) = 0.
 \end{aligned}$$

Ezek közül az impulzus és az összenergia (vagy a belső energia) mérlege az alapmérleg, a többi ezekből származtatott. A dinamikai egyenletekben szereplő változók és anyagfüggvények:

$$\begin{aligned}
 \rho & \quad - \text{tömegsűrűség,} \\
 \mathbf{v} & \quad - \text{konvektív sebesség,} \\
 \mathbf{f} & \quad - \text{térfogati erőssűrűség,} \\
 \mathbf{F} & \quad - \text{feszültségtenzor (az impulzus konduktív áramsűrűsége),} \\
 \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla & \quad - \text{(térfogategységre jutó) alakváltozási teljesítmény} \\
 e & \quad - \text{fajlagos belső energia,} \\
 e_k & \quad - \text{fajlagos kinetikus energia,} \\
 e_T & \quad - \text{fajlagos összenergia,} \\
 \mathbf{j}_q & \quad - \text{a hőáram-sűrűség,}
 \end{aligned}$$

³ Esetünkben ezek mindegyike kontinuitási egyenlet.

⁴ Ez az alak olyankor érvényes, amikor nincs belső impulzusmomentum. Ilyenkor az impulzusmomentum megmaradásának következménye: $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T$.

A származtatott mérlegek nem adnak független változót. Szokás szerint nem az összenergiát, hanem az $e = e_T - e_k = e_T - v^2/2$ fajlagos belső energiát tekintjük alapváltozónak. Tehát első közelítésben, tiszta mechanikai rendszerekre (hővezetéssel) az alapmérlegekben szereplő mezők, a sűrűség, a sebesség, illetve a belső energia adhatják az entrópia változóit. Az anyagfüggvények ezektől a változóktól és deriváltjaiktól függhetnek (sőt, az anyagi objektivitás miatt alapvetően csak a térbeli deriváltaktól), pl. a $\mathbf{v} \circ \nabla$ sebességgradienstől.

Az entrópia, és így az anyagtörvény is *csak az anyagtól függhet*, tehát az s függvény változóinál a fenti felsorolásból kiesik mindaz, amelyik a külső hatásokat jellemzi ($\mathbf{f}$).

Az áramok lehetnek változók és függvények, attól függően, hogy milyen jelenségek fontosak az adott fizikai rendszerben. Az áramok változóként történő szerepeltetésének következményeivel az ún. kiterjesztett termodinamika foglalkozik⁵. Ebben az elméletben az $\mathbf{F}$ impulzusáram-sűrűség és a $\mathbf{j}_q$ a hőáram-sűrűség az entrópia (és így minden más anyagfüggvény) változói. Az impulzusáram-sűrűség szerepeltetése az entrópia változójaként alkalmas bizonyos reológiai jelenségek modellezésére, általában az anyag belső tehetetlenségének kielégítő reprezentációját jelenti.

A fenti táblázat kifejezései közül tehát csak a $P = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla = \dot{W}$ teljesítmény szerepe maradt kérdéses. A P teljesítmény (az alakváltozási munka időszerinti deriváltja) azonban – mint az az entrópiamérlegből látható, – az $\dot{s}$ -tal van kapcsolatban [$\dot{s} \Leftrightarrow \dot{W}$], tehát az s -ben legfeljebb az alakváltozási munka [$s \Leftrightarrow W$] szerepelhet. A továbbiakban látni fogjuk, hogy az alakváltozási munkának anyagi változóként történő szerepeltetése a képlékenységek megértéséhez vihet bennünket közelebb.

Áttérve az anyaghoz kötött rendszerre, a $P = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla = \mathbf{F} : (\mathbf{v} \circ \nabla)^S$ alakváltozási teljesítmény a $\mathbf{H} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \circ \nabla$ mozgásgradienssel a

$$\dot{W} = \mathbf{F} : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}$$

formában írható fel, s a $\mathbf{H} = \mathbf{Q} \mathbf{A}$ poláris dekompozíciónak megfelelő

$$[\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T, \det \mathbf{Q} = 1, \mathbf{A} = \mathbf{A}^T]$$

felbontással pedig a

$$\dot{W} = \mathbf{F} : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{F} : (\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^T) = \mathbf{F} : \mathbf{Q} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{Q}^T : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{F}_t : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}$$

formába írható.

⁵ Az elméletnek van magyar elnevezése is: a termodinamika hullámmélete [GYARMATI (1977)]. Ezt az elnevezést később teljesen kiszorította a kiterjesztett termodinamika [LEBON-JOU-CASAS-VÁZQUEZ (2008)].

Mivel az entrópia $\rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \sigma_s \geq 0$ mérlegét minden térfogatrészre érvényesnek tekintjük, ezért a σ_s entrópiaprodukció, a mérlegegyenlet jobb oldala, semmilyen hő- és impulzusáram (feszültség) mellett sem negatív.

Az entrópiafüggvényben tehát az e belső energia mellett az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzor és a W alakváltozási munka szerepeltetése látszik célszerűnek.

Az eddigiek alapján az entrópiafüggvény

$$(1) \quad s = s(e, \mathbf{A}, W)$$

alakú lehet.

A BELSŐ DINAMIKAI VÁLTOZÓK. Az anyagi kontinuum köztudottan – bizonyos értelemben – emlékszik előző terheléseire, alakváltozásaira, tehát egyfajta memóriája van. Az előbbieken utaltunk rá, hogy ilyen viselkedés leírásához, modellezéséhez a kiterjesztett termodinamika a mérlegek áramsűrűségeit vezeti be további anyagi változóként. Ezzel egyértelmű és konkrét fizikai jelentést is ad a bevezetett új változóknak. A reológiai viselkedés leírására azonban ennyi nem elegendő: csak a MAXWELL-modellt kaphatjuk meg így [LEBON-JOU-CASAS-VÁZQUEZ (2008)].⁶

Éppen ezért [VERHÁS (1985); MUSCHIK ÉS MAUGIN (1994)] szerint célszerű teljesen általánosan új változókat bevezetni, amelyeket belső dinamikai változóknak vagy dinamikai szabadságfokoknak neveznek. Azonban felmerül a kérdés, hogy ez így egyszerűen megengedhető-e?

Egy ξ belső változó dinamikája nincs meghatározva, azaz tulajdonképpen keresik a rá vonatkozó evolúciós egyenletet, tehát $\dot{\xi}$ maga is egy anyagfüggvényként fogható fel. Attól függően, hogy hány belső változót vezetnek be, beszélnek egy vagy több szabadságfokú rendszerről, egy vagy több dinamikai változóval leírható anyagról. Itt azonban felmerül a probléma: ezek a belső változók nem szerepelnek a mérlegegyenletek változói között, és mégis megengedhetők? Egyáltalán, konkrét fizikai interpretáció nélkül bevezethetünk-e új fizikai változókat? A hirtelen válasz egyértelmű nem. Mégis vannak esetek, amikor a válasz – igen. A következő érveket kell ugyanis megfontolnunk:

- (1) A termodinamikai egyensúlytól való eltérést érdemes lehet új változó bevezetésével jellemezni. Ilyen változó értéke nulla a termodinamikai egyensúlyban. Ezzel a megszorítással bevezetett belső változókat nevezte VERHÁS dinamikai szabadsági fokoknak. A dinamikai szabadsági fokok segítenek a második főtétel megszorításait egyszerűen alkalmazni az egyensúlytól távoli rendszerekben és utána sokszor kiküszöbölhetők a végső egyenletekből.

⁶ Ezt a szerzők igyekeznek félrevezető megjegyzésekkel leplezni (232.o.), a hivatkozott cikkben viszont nincs nyoma annak, hogy akárcsak a standard modellt és képes lenne visszaadni a kiterjesztett termodinamikai formalizmus.

- (2) Általánosan bevezetett változók konkrét fizikai jelentése az anyag mikroszerkezetétől függően más és más lehet. Az a tény, hogy csak általános elveket használva vezetjük be a fejlődési egyenleteiket, biztosítja a kapott egyenletek és a bennük szereplő paramétereknek – de *nem* a paraméterek értékének – konkrét mikroszerkezettől való függetlenségét.
- (3) A tapasztalat utólagosan igazolhatja (és igazolja) a modellezési stratégiát. Ezért aztán elkezdhetünk bízni az alapelvekben, és azokat általánosabb esetekben is alkalmazni (pl. a károsodás leírására bevezetett belső változók általában nem küszöbölhetőek ki).

A $\psi(W)$ KÉPLÉKENYSÉGI HATÁRFELTÉTELT leíró függvény, mint változó csak akkor kerülhet be az entrópiafüggvénybe, ha fizikailag indokolni tudjuk, s ha a mérleg-egyenletek változói között szerepel, még ha csak implicite is. Bevezetése matematikailag nem jelent problémát, mert az $s = s(e, \mathbf{A}, W)$ és az $s = s(e, \mathbf{A}, \psi(W))$, az entrópiamérleg kontextusában

$$(2a) \quad \dot{s}(e, \mathbf{A}, W) = \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} + \rho \frac{\partial s}{\partial W} \dot{W}$$

és

$$(2b) \quad \dot{s}(e, \mathbf{A}, \psi(W)) = \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} + \rho \frac{\partial s}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial W} \dot{W}$$

látszólag azonos végeredményt mutat.

Ha ψ azzal az indokkal kerülhet be az entrópiafüggvénybe, mert a diszkontinuitás nem kizárható, akkor már csak az a kérdés, hogy a többi diszkontinuitás (az összenyomhatósági határ, más néven a tökéletesen kifejlődött képlékenységi határa $[tk]$, továbbá a tönkremeneteli határ $[t]$) miért nem szerepel? Vagy ha betesszük, akkor mindegyikhez rendeljünk egy ψ_{tk} , ill. ψ_t függvényt? A (2) összefüggésből látszik, hogy ez felesleges, mert összefoglalóan $f(W)$ -vel jelölhetjük a diszkontinuitásokhoz tartozó anyagfüggvényt.

Mindezek alapján az entrópiafüggvény

$$(3) \quad s = s(e, \mathbf{A}, f(W))$$

alakú lehet, amelynek szükségszerűen eleget kell tennie a matematikai formákat korlátozó, TRUESDELL által megfogalmazott általános elveknek. Ezek VERHÁS felsorolásában [VERHÁS (1985), 73-76. o.] a következők:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| – az idő homogenitásának elve, | – az összeférhetőség (kompatibilitás) elve, |
| – az anyagi objektivitás elve, | – a matematikai teljesség elve, |
| – az anyagi invariancia elve, | – a mindenütt jelenlévő változók elve, |
| – a koordinátainvariancia elve, | – az egységesítés elve. |
| – a dimenzionális invariancia elve, | |

Vizsgálataink során ezek mindegyikét figyelembe vettük, vagy úgy, hogy belőle indultunk ki (mindenütt jelenlévő változók elve), vagy úgy, hogy következtetéseinket determinálták. Ezek az elvek természetesen nem egyenrangúak. A legtöbbnek való megfelelés manapság egyrészt triviális (koordinátafüggetlenség a tenzori reprezentációval), illetve ellenőrzése egyszerű. Talán az egyetlen kivétel az anyagi objektivitás elve, amelynek megfogalmazásában máig sincs konszenzus [MATOLCSI-VÁN (2007)].

Az eddig elmondottakban azonban nem vettünk figyelembe egy nagyon fontos körülményt, az alakváltozások szerkezeti sajátosságát.

A RUGALMAS ÉS KÉPLÉKENY ALAKVÁLTOZÁS. A szilárd testek mechanikai állapotváltozásainak van egy olyan sajátossága, amely egyéb fizikai kölcsönhatásnál nem jelentkezik. Nevezetesen, az **A** alakváltozások lehetnek mechanikailag (de csakis mechanikailag, nem pedig termodinamikailag) reverzibilisek, vagyis visszafordíthatóak, s ezt nevezzük *rugalmas alakváltozásnak*.⁷ Egy bizonyos határ után viszont megjelenhetnek az irreverzibilis vagy *maradó alakváltozások*, amelyek már nem fordíthatók vissza (legfeljebb nagy munkabefektetés árán). Ezeket jelöljük $\mathbf{A}^{rev}$, illetve $\mathbf{A}^{irrev}$ formában.

Ha létezik az ún. képlékenységi határ, akkor annak egyik oldalán csak rugalmas alakváltozások vannak, míg másik oldalán a rugalmas mellett megjelennek a maradó alakváltozások is. Ezt a határt leíró függvényt *ezért* nevezzük képlékenységi határfeltételnek.

Azt várjuk el, hogy

- az anyagnak csak egyetlen anyagtörvénye legyen, amely rugalmas és képlékeny alakváltozások tartományán egyaránt érvényes,
- s a határ átlépésével nem az anyagtörvény formája ne változzon meg, csupán az anyagtörvényben szereplő együtthatók.

Az anyagtörvény meghatározásánál ezt a sajátosságot, azaz a reverzibilis és irreverzibilis alakváltozások létét figyelembe kell venni. De hogyan? Erre két lehetőségünk kínálkozik. Egyrészt, lehet ezt a folyamatokra vonatkozó anyagfüggvények tulajdonságaként értelmezni, és az entrópiaprodukció kifejtésekor adódó vezetési egyenletekben érvényesíteni. Ezt az utat követi például [HOULSBY–PUZRIN (2006)]. A másik lehetőség, hogy elsődleges anyagfüggvényünkben, az entrópiafüggvényben érvényesíthetjük ezt a feltételt. Itt, most ez utóbbi esetet vizsgáljuk. Ekkor a képlékenységi feltételt egy $\psi(W, \dot{W})$ függvénnyel valósítjuk meg.

Legyen $\psi = 0$ a képlékenységi határfeltétel, amelyről még nem tudjuk, minek a függvénye. Azt azonban már tudjuk, hogy minek nem. Nem lehet csak a feszültség-

⁷ Ezek termodinamikailag irreverzibilisek, mert a befektetett energia (munka) maradéktalanul általában nem nyerhető vissza, viszont a test visszanyerheti eredeti alakját.

állapotnak $[\psi(\mathbf{F})=0]$, illetve invariánsainak $[\psi(F_1, F_2, F_3)=0]$, és nem lehet csak az alakváltozási állapotnak $[\psi(\mathbf{A})=0]$, illetve invariánsainak $[\psi(A_1, A_2, A_3)=0]$ ⁸, mint azt már igazoltuk [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2006, 2007)].

Azt is tudjuk, hogy a ψ önmagában is egy *anyagfüggvény*, amely csak a már végig elemzett változók függvénye lehet: $e, \mathbf{A}, W, \dot{W}$. Mivel az $\mathbf{A}$ -nak nem lehet explicite függvénye, viszont a W és a $\dot{W}$ implicite tartalmazza az $\mathbf{A}$ -t, ebből arra a következtetésre jutottunk, hogy általánosan az egyetlen lehetséges forma a

$$\psi = \psi(e, W, \dot{W})$$

lenne.

Ha a termikus kölcsönhatástól eltekintünk, akkor *izotermikus*, vagy *adiabatikus állapotváltozások* (alakváltozások) esetén az e kimarad, s

$$\psi = \psi(W, \dot{W})$$

összefüggésre jutunk.

Ez az eredmény minden eddigi gyakorlati tapasztalatunkkal a legteljesebb összhangban van. Ugyanis a W munka egybefogja a feszültségállapotot és az alakváltozási állapotot (azzal, hogy W a feszültségeknek a deformációs úton vett integrálja). Persze kérdés, hogy nem tekinthetnénk egyszerűbben a

$$\psi = \psi(W), \text{ vagy } \psi = \psi(\dot{W})$$

formát?

A válasz egyértelmű nem!

Ha önmagában a $\psi = \psi(\dot{W})$ alakot vennénk, akkor azt mondanánk ki, hogy egyensúlyi, vagy kvázisztatikus állapotban nincs képlékenységi feltétel, ami már önmagában is abszurd, hiszen a képlékenységtan irodalmának túlnyomó része erre a területre korlátozódik.

Ha önmagában a $\psi = \psi(W)$ alakot vennénk, akkor a képlékenységi feltétel független lenne a teljesítménytől, így speciálisan attól is, hogy növekvő vagy csökkenő munkavégzéssel lépjük-e át a képlékenységi határt. A tapasztalat ennek ellentmond. A képlékenységi határfeltétel tehát csak

$$(4) \quad \psi(W, \dot{W}) = 0$$

⁸ Természetesen ez fizikai megállapítás. Ha a választott anyagtörvény nem reológiai, tehát ami fizikailag abszurd, vagy ha csak az egyensúlyi helyzetet írja le, ami fizikailag már megengedett, továbbá az $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{A})$ kapcsolat egyértelmű, akkor már elfogadható.

lehet. A (4) összefüggés szinte sugallja azt a feltevést, hogy a (3)-ban szereplő $f(W)$ jelen esetben a $\psi(W, \dot{W})$ -nek feleljen meg, ugyanis ekkor konkrét jelentése van a munkától függő függvénynek.

Fontos további kérdés, hogy miért csak a képlékenységi határt fejezze ki az $f(W)$? Amellett, hogy ez benne kell, hogy legyen, további diszkontinuitásokra is utalhat. Ilyen lehet az anyag összenyomhatóságának határa⁹, a kontinuitás megszűnésének a határa, stb.

Az s entrópiában, mint anyagfüggvényben mindennek szerepelnie kell, ami a sztatikus anyagviselkedést meghatározza, így többek közt a rugalmas-képlékeny váltást ki-fejező változónak is.

Ha *átmenetileg* a váltást csupán a képlékenységre korlátozzuk:

$$[f(W) \approx \psi(W)],$$

akkor mindezek alapján az anyagtörvény meghatározására a termodinamika második fő-tétele alapján az

$$(3) \quad s = s(e, \mathbf{A}, \psi(W))$$

entrópiafüggvény szolgálhat, a rá vonatkozó mérleggel együtt.

Az eddig lerögzítettek azonban a képlékenységi határfeltételhez önmagukban kevésnek bizonyulnak. Műszaki feladatok megoldásához a függvény konkrét alakját is ismerünk kellene. Meg kellene tudnunk határozni általános formáját, s gyakorlati mérések alapján pedig az egyes anyagfajtákra vonatkozóan a benne szereplő paraméterek (konstansok) értékét. Ettől azonban úgy néz ki, hogy jelenleg még távol vagyunk.

Döntési szabadságunk van azonban abban a kérdésben, hogy hogyan válassza szét a ψ függvény (diszkontinuitási felület) a rugalmas alakváltozások tartományát a képlékenyétől. Csak kettőt megemlítve:

EGYIK LEHETŐSÉG, hogy ψ egy (legalábbis szakaszosan) folytonos és differenciálható függvény, amelyet például oly módon értelmezünk, hogy

$$\psi(W, \dot{W}) < 0, \text{ rugalmas alakváltozások esetén } [\mathbf{D} = \mathbf{D}^{rev}, \mathbf{D}^{irrev} = \mathbf{0}],$$

$$\psi(W, \dot{W}) = 0, \text{ rugalmas-képlékeny határon,}$$

$$\psi(W, \dot{W}) > 0, \text{ képlékeny alakváltozások esetén } [\mathbf{D} = \mathbf{D}^{rev} + \mathbf{D}^{irrev}, \mathbf{D}^{irrev} \neq \mathbf{0}].$$

⁹ Az ún. tökéletesen kifejlődött képlékeny állapot határa a képlékeny tartományon belül, ha az anyagi jellemzőktől függően egyáltalán létezik. Nagy számban vannak olyan összenyomható anyagok, amelyek már az adott igénybevétel hatására hamarabb tönkremennek, mielőtt összenyomhatatlanná váltak volna.

MÁSİK LEHETŐSÉG, hogy ψ egy szakaszosan folytonos függvény, amelyet például oly módon értelmezünk, hogy

$$\psi(W, \dot{W}) = 0, \text{ rugalmas alakváltozások esetén } [\mathbf{D} = \mathbf{D}^{rev}, \mathbf{D}^{irrev} = \mathbf{0}],$$

$$\psi(W, \dot{W}) = 0, \text{ rugalmas-képlékeny határon,}$$

$$\psi(W, \dot{W}) = 1, \text{ képlékeny alakváltozások esetén } [\mathbf{D} = \mathbf{D}^{rev} + \mathbf{D}^{irrev}, \mathbf{D}^{irrev} \neq \mathbf{0}].$$

A szükséges 0-1 váltást a ψ -ben egy kétszeres Ψ HEAVISIDE-féle egységugrás-függvény alkalmazása adhatja:

$$(5) \quad \Psi = \Psi(W, \dot{W}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } W < W_f, \text{ vagy } \dot{W} < 0, \\ 1, & \text{ha } W \geq W_f, \text{ és } \dot{W} \geq 0, \end{cases}$$

s ebben az esetben

$$(6) \quad \psi(W, \dot{W}) = \Psi(W, \dot{W}) \cdot \tilde{\psi}(W)$$

írható.

Ez azt jelenti, hogy $\Psi = 0$ esetén csak rugalmas tartományban vagyunk, míg $\Psi = 1$ esetén már képlékenyen. Figyelembe veszi tehát, hogy a rugalmas alakváltozások esetén soha nincsenek maradó alakváltozások. Ezzel szemben a képlékeny tartományban, ha egy B állapotból elmozdulunk egy C állapotba, akkor két különböző lehetőség van:

- ha a deformációs munka növekszik (pl. terhelésnövekedésnél), tehát általában ha $\dot{W} > 0$, akkor a rugalmas és a képlékeny alakváltozások egyaránt növekszenek, tehát képlékeny pályán haladunk,
- ha a deformációs munka csökken (pl. terheléscsökkentésnél), tehát általában ha $\dot{W} \leq 0$, akkor a rugalmas alakváltozások csökkennek, de a maradó alakváltozások értéke nem változik, tehát rugalmas pályán haladunk.

Van azonban egy szépséghibája a (6) összefüggésnek. Azt sugallja, hogy a képlékeny állapot kialakulása a térfogategységre jutó alakváltozási munka függvénye, holott a gyakorlatban számos anyag esetén jóval egyszerűbb a helyzet. Éppen ezért a továbbiakban részletesebben megvizsgáljuk a határfeltételeket.

2. MUNKA ALAPÚ HATÁRFELTÉTELEK

Az anyagban bekövetkező ugrásszerű minőségi változásokat az irodalomban változatos feltételekhez kötik.

Ezek egy része *külső feltétel* (kritikus feszültség, deformáció, károsodás, stb.) abban az értelemben, hogy egy adott paraméter értékét a minőségi változás bekövetkezésekor megmérve empirikusan véljük felderíteni a változás bekövetkezésének feltételeit.

Más részük *belső feltétel*, amely esetén nem feltétlenül a változás kapcsán, hanem más módon megmért paraméterekkel, de általában bonyolultabb elmélettel dolgozunk. Ilyenek például a különféle stabilitási vagy bifurkációs feltételek. A képlékenységi magyarázatára ilyen belső feltételt javasolt VERHÁS, aki az objektív mozgásegyenletekkel kapcsolatos stabilitásvesztésként magyarázta a képlékenységet [VERHÁS, (1985)], illetve VÁN, aki termodinamikai stabilitásvesztésként értelmezte (hasonlóan a fázisátalakulásokhoz) a tönkremenetelt [VÁN (2001)].

Az eddig ismert belső feltételek speciális feltételekhez kötöttek, a külsők viszont *önkéntesek*, emiatt nem igazán jelenítenek meg anyagtulajdonságot. Tipikus példái ennek a feszültség-alapú képlékenységi feltételek, ahol a tapasztalatok leírásához szükség volt rá, hogy pl. TRESKA által kezdetben javasolt egyetlen skalár értéket a feszültségtér kritikus felületeivel, majd ezeknek vándorlását leíró konstrukciókkal váltsák fel. Ráadásul a képlékenységnek nemcsak a mennyiségileg jellemzett tulajdonságainak, hanem még a teljesen minőségi jellegzetességeinek megértésével is súlyos problémák vannak. A képlékenység esetén tapasztalt hiszterézis (illetve a ferromágneses hiszterézis is!) több olyan sajátossággal rendelkezik, ami miatt sem mezoszkopikus szinten – diszlokációk mozgásával, illetve domain mágneses momentumok átfordulásával –, sem makroszkopikus szinten – differenciálegyenletekkel – nem modellezhető kielégítően [BROKATE – SPREKELS (1996), MATOLCSI (2005)]. A hiszterézis általános termodinamikai magyarázata általában hiányzik, és leírása valószínűleg valami új mechanizmust – folyamatokra vonatkozó fejlődési egyenletek dinamikájához kötődő matematikai ötletet – igényel. Sokan teljesen sajátos, a viszkozitástól, hővezetéstől lényegében különböző disszipációs mechanizmusként tartják számon [KESTIN (1965)]. A fő problémát a képlékenységetelméletben általában a növekményes anyagtörvények bevezetésével kerülik meg. Mi is ezt az utat fogjuk követni.

Ezidáig teljesen egységesen kezeltük a W térfogategységre jutó deformációs munkát,

$$W = \int \mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} dt = \int \mathbf{F} : \dot{\mathbf{D}} dt = \int \mathbf{F} : d\tilde{\mathbf{D}},$$

holott izotrop kontinuumokban különböző részekből áll, aszerint, hogy az összefüggésében szereplő tenzorok deviatorikus és gömbi tenzori felbontását vesszük-e $[W = W' + W_o]$, amelyeket torzulási és térfogati jelzővel illettünk:

$$\begin{aligned} W' &= \int \mathbf{T} : d\tilde{\mathbf{E}} && - \text{torzulási deformációs munka,} \\ W_o &= \int \mathbf{T}_o : d\tilde{\mathbf{E}}_o && - \text{térfogati deformációs munka,} \end{aligned}$$

vagy a munkát rugalmas (reverzibilis) és disszipatív részre bontjuk $[W = \Phi + \mathcal{L}]$:

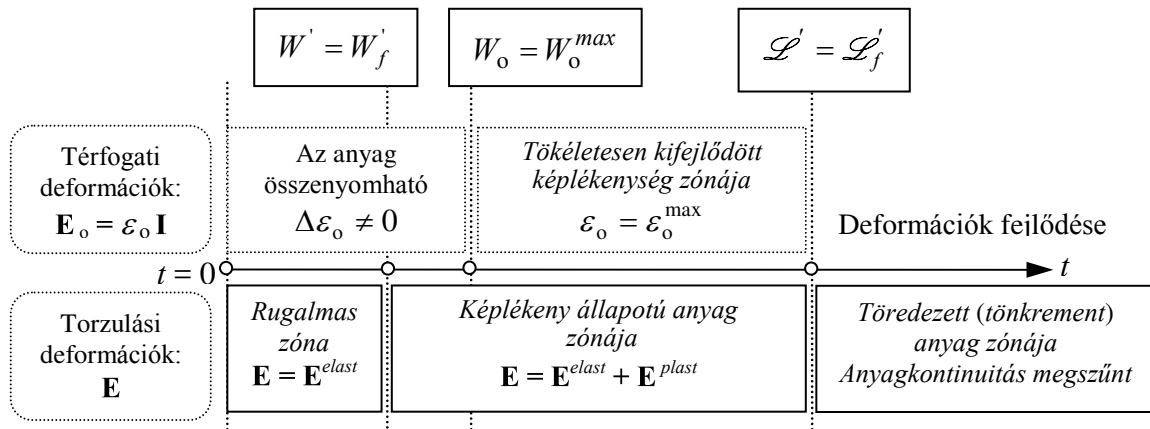
$$\begin{aligned} \Phi &= \int \mathbf{F}^{rev} : d\tilde{\mathbf{D}} && - \text{rugalmas deformációs munka,} \\ \mathcal{L} &= \int \mathbf{F}^{irrev} : d\tilde{\mathbf{D}} && - \text{disszipációs deformációs munka,} \end{aligned}$$

vagy mind a kettőt alkalmazzuk [$\Phi = \Phi' + \Phi_o$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \mathcal{L}_o$]:

$$\begin{aligned}\Phi' &= \int \mathbf{T}^{rev} : d\tilde{\mathbf{E}} && - \text{ rugalmas torzulási munka,} \\ \Phi_o &= \int \mathbf{T}_o^{rev} : d\tilde{\mathbf{E}}_o && - \text{ rugalmas térfogati munka,} \\ \mathcal{L}' &= \int \mathbf{T}^{irrev} : d\tilde{\mathbf{E}} && - \text{ torzulási disszipációs munka,} \\ \mathcal{L}_o &= \int \mathbf{T}_o^{irrev} : d\tilde{\mathbf{E}}_o && - \text{ térfogati disszipációs munka.}\end{aligned}$$

Nem megismételve a [ASSZONYI–VÁN–SZARKA (2007), 136-145. old.] leírtakat, rajzoltuk fel az 1. ábrát, amely az anyagban bekövetkező minőségi változásokat egységesen munka alapú külső feltételekhez köti.

Ez a javaslat a fent elmondottak fényében talán nem a végső megoldását jelenti a problémakörnek, de mindenképpen egy egységes, fizikailag kézenfekvő és a tapasztalatokkal megegyező feltételrendszert eredményez. A deformálódás során minőségi változások következnek be az anyagi pontban a képlékenységi határ, az összenyomhatósági határ átlépésekor. Végül a tönkremeneteli határ elérésekor az anyagi kontinuitás megszűnik, vagyis ez a folytonos függvények értelmezési tartományának határa.



1. ábra

Az 1. ábrán a hivatkozott cikknek megfelelően vannak feltüntetve a diszkontinuitási határok, s ez az 1. fejezetben alkalmazott jelölésekkel azt jelenti, hogy

$$(7) \quad f(W) = \begin{cases} \psi(W'), \\ \psi_{tk}(W_o), \\ \psi_t(L'), \end{cases}$$

s a képlékenységi határfeltétel a W' , a teljesen kifejlődött képlékenység határát leíró feltétel a W_o , míg a tönkremeneteli határfeltétel az $\mathcal{L}'$ függvénye. Ezt az alapvető

hipotézisünket elvi indokokkal valójában nem tudjuk alátámasztani, de eddigi vizsgálataink nem mondanak ellent neki [ASSZONYI, CS. – RICHTER, R. (1975), VÁSÁRHELYI, B. - DELI, Á. - GÁLOS, M. AND VÁN, P. (2000)]. Ez mindössze egy valószínűsített sejtés, amelyet mindaddig használunk, amíg nem találunk kizáró okot, vagy ellentétes fizikai bizonyítékot.

Az 1. ábra jelölései azt mutatják, hogy az

$$f(W) = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} \psi(W') = 0, \\ \psi_{tk}(W_o) = 0, \\ \psi_t(\mathcal{L}') = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W' - W'_f = 0, \\ W_o - W_o^{\max} = 0, \\ \mathcal{L}' - \mathcal{L}'_t = 0, \end{cases}$$

függvényt a legegyszerűbb formában vettük fel.¹⁰

Az f függvény $W', W_o, \Phi', \Phi_o, \mathcal{L}', \mathcal{L}_o$ változói nem függetlenek egymástól, közöttük 3 egyenlet:

$$W' + W_o = \Phi + \mathcal{L}, \quad \Phi = \Phi' + \Phi_o, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}' + \mathcal{L}_o$$

van, tehát a független változók száma maximálisan három lehet. Pontosan annyi, ahány határfeltétel van. Ez esetleg jelentheti azt is, hogy a határfeltételek függetlenek egymástól. A gyakorlatból tudjuk, hogy az időbeli lefutásnál lehetséges az, hogy

- az anyag előbb tönkremehet, minthogy elérné a képlékenységi határt (képlékeny határ alatti ismételt igénybevétel),
- az anyag tönkremehet akkor is, ha már átlépte a képlékenységi határt, de mindvégig összenyomható,
- olyan tapasztalatunk azonban nincs, hogy az egyébként komprimálható anyag előbb válik összenyomhatatlanná, semhogy elérné a képlékenységi határt, vagy pont a képlékenységi határnál válna összenyomhatatlanná.

A kutatások mai állása mellett a következő, lehető legegyszerűbb határfeltételekkel dolgozunk:

A KÉPLÉKENYSÉGI HATÁR átlépése feltehetően a W' torzulási deformációs munka egy W'_f küszöbértékénél történik [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007)], s így ennek feltétele:

A MAXIMÁLIS TORZULÁSI DEFORMÁCIÓS¹¹ MUNKA ELVE: *az anyag mindaddig rugalmas állapotban marad, amíg a W' torzulási munka egy W'_f küszöbértéket el nem ér.*

Mint a bevezetésben említettük, ez a fajta feltétel jól egyezik megfigyelésekkel fémek, közetek és műanyagok, kerámiák, stb. esetén, de talajok esetén már nem mindig.

¹⁰ Tekinthejtjük ezt egy MACLAUREN-sorfejtés első tagjának.

¹¹ Alaktorzulási munka

A talajok viselkedését viszont tisztán képlékenységi elméleteken alapuló fogalmakkal dolgozzák fel az utóbbi anyagok esetén is; például a MOHR-COULOMB-feltétel elméleti megalapozásakor. Feltevésünk szerint más (reológiai) hatások kelthetik azt a látszatot, hogy a térfogati résznek is van képlékenységi szerepe. A kérdés eldöntéséhez viszont az elméletet ennek megfelelően kell kifejtenuünk. Homályosan, vagy nem rendesen kidolgozott elméletekben a problémákat sokáig el lehet fedni az elmélet következtelen toldozgatásaival. Élesen talán soha nem bukkannak elő a problémák, még esetleg akkor sem, amikor maga a fogalomkészlet már totálisan alkalmatlanná vált a tapasztalatról történő eszmecseréhez. A zavaró tapasztalatot – különösen a fizikának mérnöki gyakorlatától távolabb eső ágaiban – hajlamosak vagyunk lényegtelenne vagy irrelevánssá minősíteni.

TÖKÉLETESEN KIFEJLŐDÖTT KÉPLÉKENY ZÓNÁRÓL – ha az adott anyagnál egyáltalán létezik, – akkor szokás beszélni, ha az anyag a képlékeny alakváltozás során egyszer csak összenyomhatatlanná válik. Vagyis a képlékenységi tartomány két zónára oszlik: előzőben az $\varepsilon_0 \neq const$, míg a másiban $\varepsilon_0 = const = \varepsilon_0^{\max}$. Ez a *határ* feltehetően a Φ_0 rugalmas térfogatváltozási deformációs munka egy $\Phi_0^{\max}$ küszöbértékénél van, s így ennek feltétele:

A MAXIMÁLIS RUGALMAS TÉRFOGATI MUNKA ELVE: *az anyag mindaddig összenyomható marad, amíg a Φ_0 rugalmas térfogatváltozási munka a $\Phi_0^{\max}$ küszöbértéket el nem éri.*

Mivel ekkor az $\varepsilon_0 = const = \varepsilon_0^{\max}$ érték már nem változik, így innentől kezdve a térfogati munka értéke tovább nem növekszik [$W_0 = \Phi_0 + \mathcal{L}_0$], tehát bármelyik térfogati munka lehet határfeltétel, vagyis az összenyomhatósági határt a másik két munkakifejezéshez is köthetjük [$W_0^{\max} = \text{Max} W_0$, $\Phi_0^{\max} = \text{Max} \Phi_0$, $\mathcal{L}_0^{\max} = \text{Max} \mathcal{L}_0$]:

A MAXIMÁLIS TÉRFOGATI DEFORMÁCIÓS MUNKA ELVE: *az anyag mindaddig összenyomható marad, amíg a W_0 térfogatváltozási munka a $W_0^{\max}$ küszöbértéket el nem éri.*

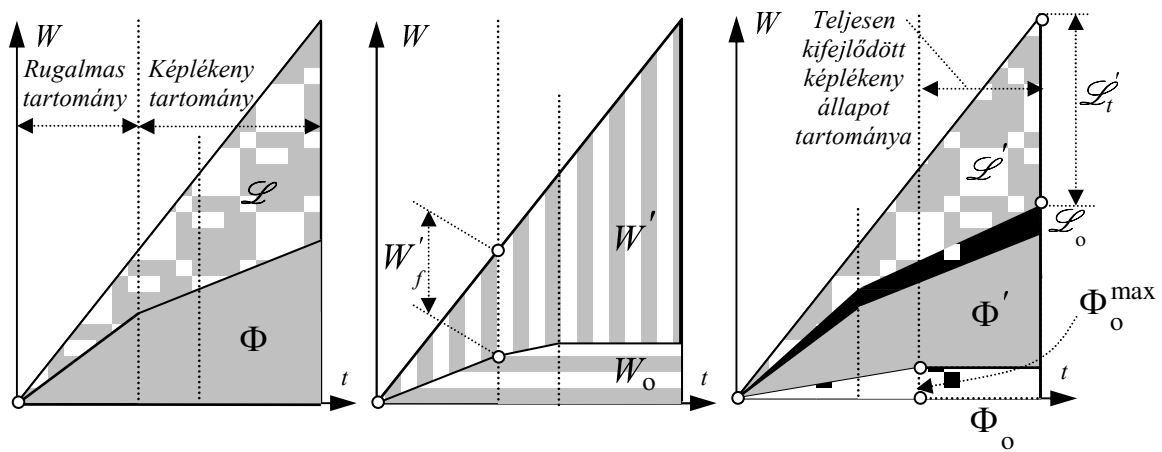
A MAXIMÁLIS TÉRFOGATI DISSZIPÁCIÓS MUNKA ELVE: *az anyag mindaddig összenyomható marad, amíg az $\mathcal{L}_0$ térfogatváltozási disszipációs munka az $\mathcal{L}_0^{\max}$ küszöbértéket el nem éri.*

A TÖNKREMENTELI HATÁR elérésekor az anyagi kontinuitás megszűnik, s e határ az $\mathcal{L}'$ torzulási disszipációs munka – a torzulási deformációs munka és a torzulási

rugalmas (reverzibilis) munka különbsége – egy $\mathcal{L}'_t$ küszöbértékénél van, amelynek feltétele:

A MAXIMÁLIS TORZULÁSI DISSZIPÁCIÓS MUNKA ELVE: az anyag mindaddig megőrzi kontinuitását, amíg az $\mathcal{L}'$ torzulási disszipációs munka egy $\mathcal{L}'_t$ küszöbértéket el nem ér.

A 2. ábra egy egyenletesen növekvő deformációs munka [$\dot{W} = \text{const} s$] esetén mutatja be az összefüggéseket és a közelítő arányokat.



2. ábra

A továbbiakban csak a képlékenységi szerepének vizsgálatára szorítkozunk.

Hivatkozott 2007-es tanulmányunkban az entrópiafüggvényt

$$(8) \quad s(e, \mathbf{A}, \psi(W), \xi) = \tilde{s}(e, \mathbf{A}, \psi(W)) - \frac{1}{2} \xi : \xi$$

alakban vettük fel, mondván, hogy izotrop esetben az entrópia az e belső energia, az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzor, továbbá a ψ képlékenységi határfeltétel függvényen keresztül a W deformációs munka, valamint a ξ dinamikai változó függvénye, az $\tilde{s}$ pedig az entrópia egyensúlyban, amelytől való eltérést a ξ reprezentálja.

Az előbbieket alapján a képlékenységi feltételt nem a $W = W' + W_0$ összmunka, hanem csak a W' alaktorzulási munka függvényének tekintjük. Ekkor az entrópiafüggvényben a $\psi = \psi(W)$ helyett a $\psi = \psi(W')$ -t kell szerepeltetnünk

Mindezek alapján a továbbiakban az entrópiafüggvényt

$$(9) \quad s(e, \mathbf{A}, \psi(W'), \xi) = \tilde{s}(e, \mathbf{A}, \psi(W')) - \frac{1}{2} \xi : \xi$$

alakúnak tekintjük, és érvényesnek mind a rugalmas, mind a képlékeny tartományban egészen a kontinuitás megszűnéséig. Mint már mondtuk, az $\tilde{s}$ az egyensúlyi állapotban lévő közeg entrópiája, a ξ pedig az egyensúlytól való eltérést reprezentálja, mint dinamikai változó. Ez a feltevés biztosítani fogja ξ kiküszöbölhetőségét és egyensúlyban történő eltűnését. Figyelemre méltó, hogy alakja a tömegegységre jutó $\frac{1}{2} \mathbf{v}^2$ kinetikus energia analógja.

3. AZ ANYAGTÖRVÉNY LEVEZETÉSÉNEK ALAPJAI

Ezek után a már megszokott utat járhatjuk. Az entrópiamérleg:

$$(10) \quad \rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \sigma_s \geq 0.$$

Feltételezzük, hogy az entrópia fluxusa a szokásos módon a hőáramsűrűség és a hőmérséklet hányadosa:

$$\mathbf{j}_s = \frac{\mathbf{j}_q}{T}.$$

A fajlagos entrópia

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}(e, \mathbf{A}, \psi(W'), \xi)$$

szubsztanciális időderiváltját kiszámolva és ρ -val szorozva kapjuk, hogy

$$(11) \quad \begin{aligned} \rho \dot{s}(e, \mathbf{A}, \xi) &= \rho \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e} + \rho \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} + \rho \frac{\partial s}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial W'} \dot{W}' + \rho \frac{\partial s}{\partial \xi} : \dot{\xi} = \\ &= \rho \frac{d}{dt} [\tilde{s} - \frac{1}{2} \xi : \xi] = \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial e} \dot{e} + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial W'} \dot{W}' - \rho \xi : \dot{\xi} \\ &= -\frac{1}{T} (\nabla \cdot \mathbf{j}_q - \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla) + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} + \rho \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'} \dot{W}' - \rho \xi : \dot{\xi} = \\ &= -\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}_q}{T} + \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} + \rho \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'} \dot{W}' - \rho \xi : \dot{\xi}. \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk a $\dot{W}' = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla = \mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}$ deformációs teljesítmény lokális formából szubsztanciális formába történő átírását; valamint a

$$\psi(W') \equiv W' - W_f = 0$$

képlékenységi határfeltétel alapján felírt

$$\psi(W') \equiv \Psi \tilde{\psi}(W') = \Psi(W' - W_f') = 0$$

feltételből¹² a

$$\frac{\partial s}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial W'} \dot{W}' = \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'}$$

összefüggést,¹³ mivel

$$\frac{\partial \psi}{\partial W'} = \frac{\partial \Psi}{\partial W'} \psi + \Psi \frac{\partial \psi}{\partial W'} = \Psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial W'},$$

ahol Ψ az előbbieken bevezetett ún. kétszeres HEAVISIDE-féle egységugrás-függvény:

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \text{ha } W' < W_f', \text{ vagy } \dot{W}' < 0, \\ 1, & \text{ha } W' \geq W_f', \text{ és } \dot{W}' \geq 0. \end{cases}$$

Ekkor a fenti (11) kifejezésből megkapjuk az entrópiaprodukciót:

$$(12) \quad \sigma_s = \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \right) + \rho \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'} \dot{W}' - \rho \xi : \dot{\xi} \geq 0,$$

amelyből

$$\left(\mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \right) + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'} \dot{W}' - \rho T \xi : \dot{\xi} \geq 0.$$

Ha a teljesítmény kifejezéseket felírjuk a tenzorok szokásos gömbi és deviatorikus felbontásával $[\mathbf{F} = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_o = \mathbf{T} + \mathbf{T}_o, \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d + (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_o]$ torzulási és térfogati teljesítményekre $[W = W' + W_o]$, akkor írható, hogy

$$\begin{aligned} & \mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'} \dot{W}' - \rho T \xi : \dot{\xi} = \\ & = \mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'} \mathbf{T} : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d - \rho T \xi : \dot{\xi} = \\ & = \mathbf{T} : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d + \mathbf{T}_o : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_o + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_o \\ & \quad + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'} \mathbf{T} : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d - \rho T \xi_d : \dot{\xi}_d - \rho T \xi_o : \dot{\xi}_o = \\ & = \left(\mathbf{T} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'} \mathbf{T} \right) : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d + \left(\mathbf{T}_o + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_o - \\ & \quad - \rho T \xi_d : \dot{\xi}_d - \rho T \xi_o : \dot{\xi}_o \geq 0. \end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség minden további vizsgálódásunk kiindulópontja.

¹² [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007), 47. old.]

¹³ [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007), 58. old.]

Mivel a $_d$ indexszel jelzett tenzori, és a $_o$ indexszel jelzett skalár áramok nem csatolódnak, ezáltal ésszerű feltételeznünk, hogy a nemnegativitási feltételnek külön-külön is teljesülnek:

$$(13) \quad \begin{aligned} & \left(\mathbf{T} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}, \mathbf{T} \right) : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d - \rho T \xi_d : \dot{\xi}_d \geq 0, \\ & \left(\mathbf{T}_o + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_o - \rho T \xi_o : \dot{\xi}_o \geq 0. \end{aligned}$$

A (13) összefüggés a *kontinuumok mechanikai anyagtörvénye meghatározásának alapja*. Eddigi feltevéseink termodinamikailag konzisztens módon kötik a rugalmassági állandó megváltozását – keményedő képlékenységi törvényt – a termodinamikai keretelmélethez. Viszont a referenciakonfiguráció áthelyeződését a képlékenységi határon mindez nem magyarázza meg. Éppen ezért a képlékenységi feltétel növekményes jellegét külön feltételekkel kell biztosítanunk.

Az (13) egyenletet az entrópiafüggvény

$$(14) \quad s = s^{\text{egyensúlyi}} + s^{\text{nemegyensúlyi}} := \tilde{s} + \Delta s$$

felírásából vezettük le, amelynél az egyensúlyi entrópiát $[\tilde{s}]$ és az egyensúlytól való eltérést $[\xi]$ vettük alapul, a már említett

$$s = \tilde{s}(e, \mathbf{A}, \psi(W')) - \frac{1}{2} \xi : \xi.$$

formában.

A (13) egyenlet a termodinamikai erők $[\mathbf{J} = \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_o]$ és termodinamikai áramok $[\mathbf{X} = \mathbf{X}_d + \mathbf{X}_o]$ jelölésének, ill. fogalmának bevezetésével

$$(13a) \quad \mathbf{X}^A : \mathbf{J}^A + \mathbf{X}^\xi : \mathbf{J}^\xi \geq 0, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{X}_d^A : \mathbf{J}_d^A + \mathbf{X}_d^\xi : \mathbf{J}_d^\xi \geq 0, \\ \mathbf{X}_o^A : \mathbf{J}_o^A + \mathbf{X}_o^\xi : \mathbf{J}_o^\xi \geq 0. \end{cases}$$

formában is felírhatók, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_d^A &\equiv \mathbf{F} + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}, \mathbf{T}, & \mathbf{X}_d^A &\equiv (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d, & \mathbf{J}_d^\xi &\equiv \dot{\xi}_d, & \mathbf{X}_d^\xi &\equiv -\rho T \xi_d, \\ \mathbf{J}_o^A &\equiv \mathbf{F} + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right), & \mathbf{X}_o^A &\equiv (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_o, & \mathbf{J}_o^\xi &\equiv \dot{\xi}_o, & \mathbf{X}_o^\xi &\equiv -\rho T \xi_o. \end{aligned}$$

A következőkben az anyagtörvényt – mint a (14) entrópiát – két különböző esetre szétbontva vizsgáljuk:

- egyensúly esetére, és az
- egyensúlyon túl.

4. AZ ANYAGTÖRVÉNY EGYENSÚLYI ÁLLAPOTBAN

ÁLTALÁNOSAN. A nemdisszipatív esetet a (13) egyenlőtlenségeknél az egyenlőség fennállása jellemzi. Egyensúlyi anyagcsaládot akkor kapunk, ha az entrópia nem függ a dinamikai változótól [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007), 36-41. o.].

Ennek megfelelően az *izotrop kontinuumok anyagtörvénye nemdisszipatív, egyensúlyi esetben*:

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= -\frac{\rho T}{1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_d, \\ \mathbf{T}_o^{eq} &= -\rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_o. \end{aligned}$$

Ez az összefüggés, mivel eddig semmiféle megkötést nem tettünk, rugalmas és képlékeny állapotban egyaránt érvényes, tetszőleges alakváltozások esetén.

Az anyagtörvényt általában nem az $\mathbf{A}$ alakváltozással, hanem a $\mathbf{D}$ deformációval szokás felírni [$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{I}$], hogy a deformálatlan állapotot ne az $\mathbf{I}$ identitással, hanem a $\mathbf{0}$ nulla állapottal jellemezzük.

Az ún. torzulási és ún. térfogatváltozási rész külön tárgyalása érdekében térjünk át a feszültségeknél és deformációknál a már megszokott deviátoros és gömbi felbontásra:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}_d + \mathbf{D}_o := \mathbf{E} + \mathbf{E}_o, \quad \mathbf{E}_o = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} = \frac{1}{3} \varepsilon_o \mathbf{I}, \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_o := \mathbf{T} + \mathbf{T}_o, \quad \mathbf{T}_o = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{F}) \mathbf{I} = \frac{1}{3} \sigma_o \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{F}$, $\mathbf{A}$ tenzorok szimmetrikus voltából következően, valamint a $\mathbf{F}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}$ tenzorok

főirányainak egyezőségéből következően: $\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{A}$, - s ezért írható

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{E} + \varepsilon_o \mathbf{I} + \mathbf{I}) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \mathbf{I} = \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_d + \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_o, \\ \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_d &= \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I}, \\ \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_o &= \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Izotrop kontinuumok anyagtörvénye egyensúlyi állapotban deviátoros formában:

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= -\frac{\rho T}{1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'}} \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right\}, \\ \sigma_o^{eq} &= -\rho T \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right\}. \end{aligned}$$

A (16) összefüggés megérne egy mélyebb elemzést, ugyanis látszik, hogy az

- $\mathbf{F}$ feszültségtenzor $\mathbf{T}^{eq}$ deviátoros része csak a $\mathbf{D}$ deformációtenzor $\mathbf{E}$ deviátoros (nyomnélküli) részétől függ, míg a
- σ_o^{eq} gömbi (térfogatváltozási) rész úgy látszik, mintha nemcsak a deformáció gömbi részétől, hanem a deviátorostól is függne.

Eddig nem tettünk különbséget a rugalmas és a képlékeny alakváltozás között. Az elválás a $\mathbf{D}$ deformációtenzor – illetve $\mathbf{E}$ és ε_o alkotóiban – van.

RUGALMAS ÁLLAPOT. Rugalmas állapotban nincs plasztikus, illetve maradó deformáció, tehát

$$(17) \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^{elast} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^{elast} \quad \text{és} \quad \varepsilon_o = \varepsilon_o^{elast}.$$

Vagyis formálisan a (16) anyagtörvény úgy áll fenn, hogy a $\Psi = 0$ értéket vesszük. Mivel a rugalmas egyensúlyi állapot az egyetlen reverzibilis állapot, ezért a rev indexet is szokás használni:

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq,elast} &:= \mathbf{T}^{rev} = -\rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right\}, \\ \sigma_o^{eq,elast} &:= \sigma_o^{rev} = -\rho T \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right\}. \end{aligned}$$

Ha figyelembe vesszük az [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007), 69-80. old.] közöltekét, miszerint (10) a HOOKE-törvénnyel is leírható, akkor

$$(18a) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{T}^{rev} &= -\rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right\}, \\ \sigma_o^{rev} &= -\rho T \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right\}. \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \mathbf{T}^{rev} &= 2G\mathbf{E}, \\ \sigma_o^{rev} &= 3K\varepsilon_o, \end{aligned} \right\} \quad \text{ha} \quad W' < W_f'.$$

Összevonva a deviátoros és gömbi részt, megkapjuk az anyagegyenlet feszültség- és deformációtenzorra vonatkozó összefüggését:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}^{rev} &= \mathbf{T}^{rev} + \sigma_o^{rev} \mathbf{I} = -\rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right\} = \\ &= -\rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial (\mathbf{D} - \varepsilon_o \mathbf{I})} (\mathbf{D} - \varepsilon_o \mathbf{I}) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right\} \\ &= 2G\mathbf{D} + (3K - 2G)\varepsilon_o \mathbf{I}, \end{aligned} \right\} \quad \text{ha } W' < W'_f.$$

KÉPLÉKENY ÁLLAPOT. Képlékeny állapot onnan kezdődik, hogy megjelennek a plasztikus, illetve a maradó deformációk. Tisztán képlékeny állapotban – amikor a szigorú $W' > W'_f$ egyenlőtlenség áll fenn, – a deformáció a

$$(19) \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^{elast} + \mathbf{D}^{plast} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^{elast} + \mathbf{E}^{plast} \quad \text{és } \varepsilon_o = \varepsilon_o^{elast},$$

összefüggésekkel írható le, amely kifejezi, hogy a csupán a torzulási állapotnak van hatása a képlékenységi kialakulására. Általában (11) a

$$(19a) \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^{elast} + \Psi \mathbf{D}^{plast} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^{elast} + \Psi \mathbf{E}^{plast} \quad \text{és } \varepsilon_o = \varepsilon_o^{plast}$$

formában írható.

Alapvető elméleti feltevésünk, hogy maradó alakváltozások akkor lépnek fel, amikor a rugalmas tartományból a képlékeny tartományba lépünk át. A termodinamikai állapot két tartományában *mindig az utoljára átlépett határhoz viszonyítjuk a megfelelő alakváltozásokat és feszültségeket*. Az anyagot a képlékeny tartományban is rugalmasnak – speciálisan folyékonynak – tekintjük, általában kisebb rugalmassági állandókkal. A képlékenységi elméletek legtöbbször pontosan ezzel a modellezési eljárással találkozunk, azaz a tartomány határához viszonyított deformációkkal és feszültségváltozásokkal [KESTIN (1965), KALISZKY (1975), BERTRAM (2005)]. Ez a képlékenységtant meglehetősen sajátos és nehéz ágává teszi a kontinuummechanikának. Ezt az eljárást jobb híján mesterségesen – annak minden hibájával együtt – kell a termodinamikai háttérrel összeépítenünk, az egységes formájú anyagtörvényben a viszonyítási pontot mindig a legutolsó határváltáshoz viszonyítva.

Ha $\Psi = 1$ értéket helyettesítünk a (16) egyenletbe, akkor a

$$(20) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq,plast} &= -\frac{\rho T}{1 + \rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'}} \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right\}, \\ \sigma_o^{eq} &= -\rho T \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad \text{ha } W' > W'_f$$

összefüggést kapjuk.

A $W' = W'_f$ képlékenységi határon a W'_f -hez tartozó $\mathbf{T}_f, \mathbf{E}_f$ értékekkel is felírhatjuk a (18) összefüggést

$$(19a) \quad \mathbf{E}^{elast} = \mathbf{E}_f, \quad \mathbf{E}^{plast} = (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f),$$

s így (10a) másik részét felhasználva:

$$(20a) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq,plast} &= 2G\mathbf{E}_f - \rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) \right) \mathbf{I} \right\}, \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o = -\rho T \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad \text{ha } W' > W'_f,$$

illetve, hogy a megszokott összefüggéssel összehasonlíthassuk, végrehajtottunk egy $\mathbf{T} - \mathbf{T}_f, \mathbf{E} - \mathbf{E}_f$ transzformációt:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T} - \mathbf{T}_f &= -\rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) \right) \mathbf{I} \right\}, \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o = -\rho T \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \right\}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \mathbf{T} - \mathbf{T}_f &= 2G_{pl} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o, \end{aligned} \right\} \quad \text{ha } W' > W'_f$$

AZ ANYAGI PARAMÉTEREK TERMODINAMIKAI ÖSSZEFÜGGÉSE. A (18a) és a (20a) kifejezések alapján a véges deformációkból eredő nemlinearitásokat az egyensúlyi anyagtörvény anyagállandóiba rejtjük el, alkalmas jelöléssel:

$$(21) \quad \begin{aligned} 2G\mathbf{I} &:= -\rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{E}^{-1} \right\}, \\ 2G_{pl}\mathbf{I} &:= -\rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) \right) (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f)^{-1} \right\}, \\ 3K\varepsilon_o &:= -\rho T \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \frac{1}{\varepsilon_o} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} \frac{1 + \varepsilon_o}{\varepsilon_o} \right\}. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet tekinthető a K anyagi paraméter definíciójának, de az első két kifejezés csak speciális esetekben, például ideálisan rugalmas anyagok és kis deformációk esetén. Nagy deformációk esetén nincs olyan termodinamikai potenciálból származtatható, hiperelasztikus anyagtörvény, amely *állandó* G és K együtthatókkal a fenti lineáris alakot adná [VÁN-ASSZONYI (2006)]. A továbbiakban azonban kényelmi szempontból a fenti jelöléseket fogjuk alkalmazni.

RUGALMAS-KÉPLÉKENY ÁLLAPOT. Láttuk, hogy a deformációk teljes és folytonos tartományán csak egyetlen anyagtörvény létezik, amelynek eddig csak a tisztán rugalmas [$W' < W'_f$], és a tisztán képlékeny [$W' > W'_f$] részét írtuk fel. A deformációk teljes tartományának leírásához ismét a Ψ kétszeres HEAVISIDE-féle egységugrásfüggvényt

fogjuk használni. Ezzel felírható a rugalmas és plasztikus tartományban egységesen és folytonosan a deformáció:

$$(22) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^{elast} + \Psi \mathbf{E}^{plast}.$$

Azért kell a kétszeres Ψ , mert az anyag nemcsak akkor viselkedik rugalmasan, ha még nem lépte át a képlékenységi határt, hanem akkor is, amikor már átlépte, de a képlékeny tartományban csökken az alaktorzulási munka.¹⁴ A (14) egyensúlyi állapotban, mikor az időbeli változás zérus,

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \text{ha } W' < W'_f, \text{ vagy } \Delta W' < 0, \\ 1, & \text{ha } W' \geq W'_f, \text{ és } \Delta W' \geq 0 \end{cases}$$

alakú.

A (21) definíció alapján az általános egyensúlyi anyagtörvény

$$(24) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o, \end{aligned}$$

amely már a W' értékétől független anyagegyenlet. Ebből a

$\Psi = 0$ érték adja a tisztán rugalmas viselkedést:

$$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E},$$

$\Psi = 1$ érték adja a tisztán képlékeny viselkedést:

$$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E}_f + 2G_{pl}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \text{ vagy } \mathbf{T} = 2G_{pl}\mathbf{E} + (2G - 2G_{pl})\mathbf{E}_f.$$

5. AZ ANYAGTÖRVÉNY TÚL AZ EGYENSÚLYI ÁLLAPOTON

Az egyensúlyi anyagtörvényt a

$$(13) \quad \begin{aligned} &\left(\mathbf{T} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W'} \mathbf{T} \right) : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d - \rho T \xi_d : \dot{\xi}_d \geq 0, \\ &\left(\mathbf{T}_o + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_o - \rho T \xi_o : \dot{\xi}_o \geq 0. \end{aligned}$$

összefüggésből vezettük le oly módon, hogy az egyenlőtlenség helyett szigorú egyenlőséget vettünk. Az egyensúlyon túli helyzetben azonban már lényeges, hogy az entrópia-termék pozitív. Az

¹⁴ Köztudott, hogy tehermentesítés esetén rugalmas pályán történik a mozgás.

$$\mathbf{F}^{irrev} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^{eq}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}^{irrev} = \mathbf{T} - \frac{\rho T}{1 + \rho T \Psi \frac{\partial \tilde{s}}{\partial W}} \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}, \\ \mathbf{T}_o^{irrev} = \mathbf{T}_o - \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \end{array} \right.$$

irreverzibilis feszültségtenzorral:

$$(25) \quad \mathbf{T}^{irrev} : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d - \rho T \dot{\xi}_d : \dot{\xi}_d + \mathbf{T}_o^{irrev} : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_o - \rho T \dot{\xi}_o : \dot{\xi}_o \geq 0.$$

Az anyagtörvényt legtöbbször az ún. térfogatváltozási és torzulási alakban alkalmazzuk, a tenzorokat deviátoros és gömbi részre bontva: egy másodrendű tenzorra és egy skalárértékű tenzorra. Vagyis a mechanikai kölcsönhatások termodinamikájában két különböző tenzori rangú termodinamikai erő és termodinamikai áram jelenik meg. A különböző tenzori rendű áramok izotrop anyagokban nem csatolódnak, ezért ha nem bontjuk külön, akkor kihagyunk egy lényeges egyszerűsítési lehetőséget. Az $\mathbf{F}^{irrev}$ és a ξ felbontása magától értetődő. Az $\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}$ -nél azonban bonyolultabb a helyzet. A feszültségtenzor szimmetrikus volta miatt a kétpontos szorzatban csupán az $\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}$ szimmetrikus része szolgáltat nullától eltérő eredményt. Ezért az $(\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})^S$ szimmetrikus tenzort véve, új jelölést célszerű bevezetni:

$$(\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})^S = (\dot{\mathbf{D}} \mathbf{A}^{-1})^S = (\dot{\mathbf{D}} \mathbf{A}^{-1})_d^S + (\dot{\mathbf{D}} \mathbf{A}^{-1})_o^S := \dot{\tilde{\mathbf{E}}} + \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_o = \dot{\tilde{\mathbf{E}}} + \dot{\tilde{\varepsilon}}_o \mathbf{I}, \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_o = \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\mathbf{D}} \mathbf{A}^{-1}).$$

Mindezek alapján a (25) egyenlőtlenség

$$(26) \quad \underbrace{\mathbf{T}^{irrev} : \dot{\tilde{\mathbf{E}}} - \rho T \dot{\xi}_d : \dot{\xi}_d}_{>0} + \underbrace{\sigma^{irrev} \dot{\tilde{\varepsilon}} - \rho T \dot{\xi}_o : \dot{\xi}_o}_{>0} > 0$$

két élesen elkülönülő részre bomlik, amelyeknek önmagukban is pozitívoknak kell lenniük, nemcsak az összegüknek.

A (26) egyenlőtlenség megoldása mint már láttuk [ASSZONYI (2006), ASSZONYI-SZARKA-VÁN (2007)], a LAGRANGE-féle középértéktétel felhasználásával történhet, a

$$(27) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{irrev} \\ \dot{\xi}_d \end{pmatrix} = \mathbf{L}_d \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \\ -\rho T \dot{\xi}_d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_o^{irrev} \\ \xi_o^{irrev} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_o \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\varepsilon}}_o \\ -\rho T \dot{\xi}_o \end{pmatrix},$$

illetve kiírva

$$(27a) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{irrev} \\ \dot{\xi}_d \end{pmatrix} = \mathbf{L}_d \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \\ -\rho T \dot{\xi}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \\ -\rho T \dot{\xi}_d \end{pmatrix},$$

$$(27b) \quad \begin{pmatrix} \sigma_o^{irrev} \\ \xi_o \end{pmatrix} = \mathbf{L}_o \begin{pmatrix} \ddot{\varepsilon}_o \\ -\rho T \zeta_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varepsilon}_o \\ \zeta_o \end{pmatrix}.$$

egyenletek megoldása révén, ahol $\mathbf{L}$ egy negyedrendű – pozitív definit szimmetrikus részű – impulzusvezetési tenzor mátrixa, valamint $\mathbf{L}_d$ és $\mathbf{L}_o$ annak felbontása. Fizikai jelentősége van annak, hogy nemcsak szimmetrikus vezetési tenzorokat engedünk meg. Erre a kérdésre a kötet következő írásában térünk ki részletesebben [FÜLÖP-VÁN-ASSZONYI-HORVÁTH (2008)].

A fenti $\mathbf{L}_d$ és $\mathbf{L}_o$ mátrixok feltüntetett komponensei izotrop anyagokban skalárok (a megfelelő reprezentációs tételek értelmében). Ekkor az egyenletrendszer megoldása a ξ_d, ξ_o változók kiküszöbölésével:

$$(28) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{irrev} - L_{22}^{-1} \dot{\mathbf{T}}^{irrev} &= L_{11} L_{22}^{-1} \ddot{\mathbf{E}} + (L_{12} L_{21} L_{22}^{-1} - L_{11}) \dot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_o^{irrev} - L_{22}^{-1} \dot{\sigma}_o^{irrev} &= l_{11} l_{22}^{-1} \ddot{\varepsilon}_o + (l_{12} l_{21} l_{22}^{-1} - l_{11}) \dot{\varepsilon}_o, \end{aligned}$$

illetve a

$$\begin{aligned} \tau &:= -L_{22}^{-1}, & \theta &:= L_{11} L_{22}^{-1}, & 2\mu &:= L_{12} L_{21} L_{22}^{-1} - L_{11}, \\ \tau_o &:= -l_{22}^{-1}, & \theta_o &:= l_{11} l_{22}^{-1}, & 2\mu_o &:= l_{12} l_{21} l_{22}^{-1} - l_{11}, \end{aligned}$$

jelölések bevezetésével

$$(29) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{irrev} + \tau \dot{\mathbf{T}}^{irrev} &= \theta \ddot{\mathbf{E}} + 2\mu \dot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_o^{irrev} + \tau_o \dot{\sigma}_o^{irrev} &= \theta_o \ddot{\varepsilon}_o + 2\mu_o \dot{\varepsilon}_o, \end{aligned}$$

alakban állítható elő.

A (24) egyensúlyi anyagtörvény

$$\mathbf{T}^{eq} = 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \quad \sigma_o^{rev} = 3K\varepsilon_o,$$

illetve időszerinti deriváltja

$$\dot{\mathbf{T}}^{eq} = 2G\dot{\mathbf{E}} - \Psi(2G - 2G_{pl})\dot{\mathbf{E}}, \quad \dot{\sigma}_o^{rev} = 3K\dot{\varepsilon}_o,$$

(29)-be történő behelyettesítésével a

$$\begin{aligned} \mathbf{T} - 2G\mathbf{E} + \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) + \tau (\dot{\mathbf{T}} - 2G\dot{\mathbf{E}} + \Psi(2G - 2G_{pl})\dot{\mathbf{E}}) &= \theta \ddot{\mathbf{E}} + 2\mu \dot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_o - 3K\varepsilon_o + \tau_o (\dot{\sigma}_o - 3K\dot{\varepsilon}_o) &= \theta_o \ddot{\varepsilon}_o + 2\mu_o \dot{\varepsilon}_o \end{aligned}$$

összefüggést kapjuk.

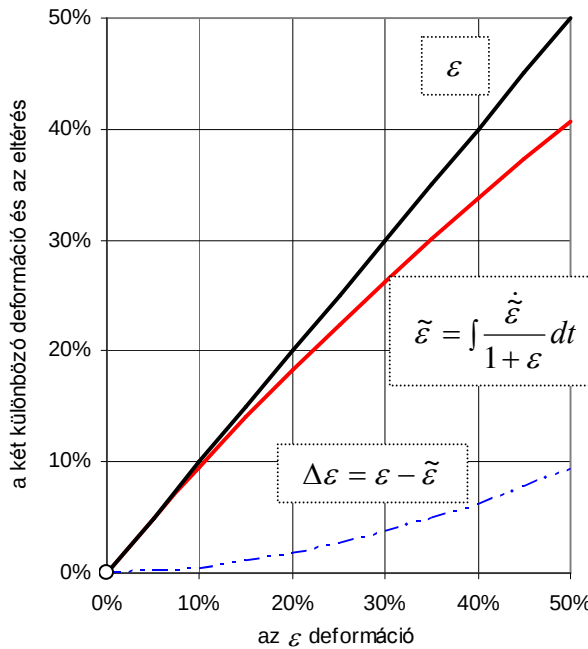
Ennek megfelelően az *izotróp kontinuumok anyagtörvénye* a következő:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2G\tau \dot{\mathbf{E}} - \Psi(2G - 2G_{pl}) (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) - \\
(30) \quad &- \Psi(2G - 2G_{pl}) \tau \dot{\mathbf{E}} + 2\mu \ddot{\mathbf{E}} + \theta \ddot{\mathbf{E}}, \\
\sigma_0 + \tau_0 \dot{\sigma}_0 &= 3K\varepsilon_0 + 3K\tau_0 \dot{\varepsilon}_0 + 2\mu_0 \ddot{\varepsilon}_0 + \theta_0 \ddot{\varepsilon}_0.
\end{aligned}$$

A KÜLÖNBÖZŐ DEFORMÁCIÓK. Nagyon érdekes eredmény, hogy az egyensúlyi állapotban jelentkező $\mathbf{D} = \{\mathbf{E}, \varepsilon_0\}$ deformációk mellett, a nemegyensúlyi helyzetben ettől eltérő $\ddot{\mathbf{D}} = \{\ddot{\mathbf{E}}, \ddot{\varepsilon}_0\}$ deformációk (helyesebben deformációsebességek és deformációgyorsulások) is jelentkeznek.

A gyakorlati feladatok megoldásához az anyagtörvényben szereplő anyagi paraméterek konkrét, adott anyagra vonatkozó értékének ismerete szükséges. Az anyagi paramétereket általában laboratóriumi és in situ mérésekkel határozzuk meg. Vegyük példának a legegyszerűbbet, az egytengelyű laboratóriumi nyomókísérletet, mert ennél az $\mathbf{u} \circ \nabla$ elmozdulásgradiens szimmetrikus, ezért a $\mathbf{H} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \circ \nabla$ mozgásgradiens is szimmetrikus, így az $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{H}^T \mathbf{H}} = \mathbf{H}$ alakváltozási tenzor megegyezik a mozgásgradienssel, s a deformáció tenzor $\mathbf{D} = \mathbf{u} \circ \nabla$ alakú.

Egytengelyű állapotban a $\mathbf{D} = \langle \varepsilon \quad \varepsilon_k \quad \varepsilon_k \rangle$ diagonális deformációtenzornak csak két zérustól független komponense van, az ε tengelyirányú, és ε_k keresztirányú fajlagos nyúlás. A mérés során Δl hosszváltozást, és Δk keresztmetszet-változást regisztrálunk, amelyet az eredeti mérethez viszonyítva állítjuk elő a deformáció (fajlagos nyúlás) mérőszámait:



3.ábra. A kétféle deformáció és különbsége

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_k = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} \cong \frac{\Delta k}{k};$$

s ennek megfelelően a deformációsebesség mérőszámait is:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon} &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \cong \frac{\Delta l / l}{\Delta t}, \\
\dot{\varepsilon}_k &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \cong \frac{\Delta k / k}{\Delta t}.
\end{aligned}$$

Kérdés viszont, hogy hogyan mérjük a $\ddot{\mathbf{D}}$ komponenseit?

A $\ddot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}$ összefüggésből egytengelyű esetben:

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varepsilon}}{1 + \varepsilon}, \quad \ddot{\varepsilon}_k = \frac{\dot{\varepsilon}_k}{1 + \varepsilon_k},$$

s az $\tilde{\varepsilon}$ deformációsebességéből maga az $\tilde{\varepsilon}$ deformáció:

$$\tilde{\varepsilon} = \int_{t_0}^t \dot{\tilde{\varepsilon}} dt = \int_{t_0}^t \frac{\dot{\varepsilon}}{1 + \varepsilon} dt = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{1}{1 + \varepsilon} d\varepsilon = [\ln(1 + \varepsilon)]_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}, \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\varepsilon} = \ln(1 + \varepsilon), \quad \tilde{\varepsilon} \cong \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right).$$

integrálással adódik (ld. 3. ábra).

Ezek szerint az egytengelyű mérések kiértékelésénél az ε -nal és az $\ln(1 + \varepsilon)$ -nal egyaránt kellene dolgoznunk. Jól látszik azonban, hogy csak nagyon nagy deformációknál tér el a kétféle deformáció egymástól, tehát legtöbbször elegendő a megszokott deformációval alkalmazni.¹⁵

Általánosan, vagyis nem egytengelyű esetben és nem szimmetrikus mozgásgradiens esetén ez a forma nem használható, ugyanis az analóg

$$\tilde{\mathbf{D}}^{Hencky} = \ln|\mathbf{I} + \mathbf{D}| = \ln\left|\sqrt{(\mathbf{I} + \mathbf{u} \circ \nabla)(\nabla \circ \mathbf{u} + \mathbf{I})}\right|,$$

amelyet HENCKY-féle deformációtenzornak nevezhetnénk (mert a felírás az egytengelyű esetre HENCKY-től származik), nem adja ki a $\tilde{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}$ összefüggést.

[FÜLÖP, T. (2008)] tanulmánya ezzel a kérdéssel részletesen foglalkozik.

Ha a deformációs állapot az egyensúlyi állapothoz tart – abban az értelemben, hogy nem változik tovább –, akkor a $\tilde{\mathbf{D}}$ általános deformációtenzor is az idő múlásával ($t \rightarrow \infty$) az egyensúlyi $\mathbf{D}$ deformációtenzorhoz konvergál:

$$(31) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}.$$

AZ ANYAGTÖRVÉNY EGYETLEN DEFORMÁCIÓVAL. Ha megengedjük a kétféle deformációra a $\tilde{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1} \cong \dot{\mathbf{D}}$ feltételt, akkor az *anyagtörvény* a

$$(32) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2G\tau \dot{\mathbf{E}} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) + (2\mu - \Psi(2G - 2G_{pl})\tau)\dot{\mathbf{E}} + \theta \ddot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_o + \tau_o \dot{\sigma}_o &= 3K\varepsilon_o + (2\mu_o + 3K\tau_o)\dot{\varepsilon}_o + \theta_o \ddot{\varepsilon}_o \end{aligned}$$

alakot ölti. Ezt, ha felbontjuk a két különböző állapotra, akkor

Rugalmas állapotban [$\Psi = 0$]:

$$(33) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + (2\mu + 2G\tau)\dot{\mathbf{E}} + \theta \ddot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_o + \tau_o \dot{\sigma}_o &= 3K\varepsilon_o + (2\mu_o + 3K\tau_o)\dot{\varepsilon}_o + \theta_o \ddot{\varepsilon}_o, \end{aligned}$$

ahol τ – a relaxációs idő, τ_o – a térfogati relaxációs idő,
 $2G$ – a csúsztató rugalmassági modulus, $3K$ – a kompresszibilitási modulus,
 $2\eta = 2\mu + 2G\tau$ – a viszkozitási tényező, $3K_v = 2\mu_o + 2G\tau_o$ – a viszkozitási tényező,
 θ – a tehetetlenségi tényező, θ_o – a térfogati tehetetlenségi tényező,

¹⁵ 1%-os eltérés a 15%-os nyúlásnál jelentkezik.

így:

$$(33a) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}} + \theta \ddot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_o + \tau_o \dot{\sigma}_o &= 3K\varepsilon_o + 2\eta_o \dot{\varepsilon}_o + \theta_o \ddot{\varepsilon}_o, \end{aligned}$$

Képlékeny állapotban [$\Psi = 1$]:

$$(34) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G_{pl}\mathbf{E} + (2G - 2G_{pl})\mathbf{E}_f + (2\mu + 2G_{pl}\tau)\dot{\mathbf{E}} + \theta \ddot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_o + \tau_o \dot{\sigma}_o &= 3K\varepsilon_o + (2\mu_o + 3K\tau_o)\dot{\varepsilon}_o + \theta_o \ddot{\varepsilon}_o, \end{aligned}$$

ahol $2G_{pl}$ – a képlékeny csúsztató modulus,
 $2\eta_{pl} = 2\mu + 2G_{pl}\tau$ a képlékeny viszkozitási tényező,

így:

$$(34a) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G_{pl}\mathbf{E} + (2G - 2G_{pl})\mathbf{E}_f + 2\eta_{pl}\dot{\mathbf{E}} + \theta \ddot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_o + \tau_o \dot{\sigma}_o &= 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o + \theta_o \ddot{\varepsilon}_o. \end{aligned}$$

A termodinamikai alapokból ennél több nem vezethető le. Az $\mathbf{L} = \langle \mathbf{L}_d, \mathbf{L}_o \rangle$ impulzusvezetési tenzor szimmetrikus részének pozitív definit voltából a

$$(35) \quad \begin{aligned} L_{11} > 0, \quad L_{22} > 0, \quad L_{11}L_{22} - (L_{12} + L_{21})^2 / 4 > 0, \\ l_{11} > 0, \quad l_{22} > 0, \quad l_{11}l_{22} - (l_{12} + l_{21})^2 / 4 > 0 \end{aligned}$$

feltételek adódnak. Ezeknek következményei:

$$(35a) \quad \begin{aligned} \tau > 0, \quad 2\mu > 0, \quad \theta > 0, \quad \tau_o > 0, \quad 2\mu_o > 0, \quad \theta_o > 0, \\ \frac{\eta}{G} - \tau > 0, \quad \frac{K_v}{K} - \tau_o > 0, \end{aligned}$$

amelyekhez társul még az egyensúlyi állapotból, az entrópiafüggvény negatív definitásából adódó

$$(36) \quad 2G > 0, \quad 3K > 0, \quad 2G > 0, \quad 2\eta_{pl} > 0$$

feltételrendszer.

Az anyagtörvényben 10 anyagállandó szerepel, amelyből 8 a rugalmas állapothoz, 2 a képlékeny állapothoz tartozik.

Ezt az eredményt azonban egyáltalán nem érezzük megnyugtatónak. Ennek több oka is van:

(a) Izotrop esetben az anyagegyenletben – ellentétben a tökéletesen anizotrop eset 21 vezetési függvényével szemben, – csak két vezetési függvény szerepelhet. Egyik a torzulási deformációkhoz, másik a térfogati deformációkhoz tartozik. Ennek eklatáns

példája egyensúlyi esetben a közismert két LAMÉ-állandó, amelyhez a lineáris eset tartozik:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mu \mathbf{E}, & \Rightarrow & \mathbf{T} = 2G \mathbf{E}, \\ \mathbf{T}_o &= \lambda \mathbf{E}_o, & & \mathbf{T}_o = 3K \mathbf{E}_o. \end{aligned}$$

A μ és λ állandókat két általános vezetési függvény sorfejtése első tagjának is tekinthetnénk.

(b) Általános esetben lineáris anyagtörvények esetén legalább annyi anyagi paramétert várunk, ahány változótól függ az anyagtörvény:

$$\mathbf{T} = \mathbf{f}_d(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}, \ddot{\mathbf{E}}, \ddot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{T}}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_o = \mathbf{f}_o(\mathbf{E}_o, \dot{\mathbf{E}}_o, \ddot{\mathbf{E}}_o, \ddot{\mathbf{E}}_o, \dot{\mathbf{T}}_o) = \mathbf{0},$$

tehát minimálisan 10-et.

(c) Bizonyítottuk [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007), 100. old. (10)], hogy a G és η modulusok képlékenységi határ átlépése utáni megváltozása csak látszólagos, tehát a G_{pl} és η_{pl} képlékenységi modulusok nem lehetnek függetlenek a G -től és a η -tól. Ezt a függést a képlékenységi határfeltétel determinálja. Nemcsak úgy, hogy megadja, mikortól jelennek meg a maradó deformációk, hanem úgy is, hogy megadja a rugalmas és plasztikus anyagállandók közötti összefüggést.

(d) Érdekessége a (23) *tehetetlenségi standard modellnek*, hogy a képlékeny állapotban csak a *rugalmas* és *viszkózus* (belső súrlódási) $[2G, 2\eta]$ anyagállandó változik, a *relaxációs* és *tehetetlenségi* $[\tau, \theta]$ anyagállandó változatlan. Ez termodinamikai modellünk következménye.

A τ relaxációs idő változatlanságára tudunk adni szemléletes magyarázatot. Ennek az paraméternek az igazi szerepe – mint neve is mutatja, – a relaxáció (rögzített deformáció esetén bekövetkező feszültségernyedés) során mutatkozik meg. A relaxáció ugyanis olyan mechanikai folyamat, amelynél a $\dot{W}'$ munka értéke nem növekszik, a deformáció állandó lévén. Ekkor a $\dot{W}' = 0$, tehát a folyamat mindig rugalmas változást szolgáltat, tehát a τ_{plast} minden körülmények között meg kell egyezzen a $\tau_{elast} := \tau$ értékével.

A θ tehetetlenségi paraméter változatlanságának magyarázatára nem tudunk ilyen szemléletes képet adni.

A $[2G, 2\eta] \Rightarrow [2G_{pl}, 2\eta_{pl}]$ változás okára, módjára a termodinamikai módszer ad magyarázatot.

Az az elméleti jóslat, hogy a rugalmassági modulus képlékenységi modulusá változtató tényező változtatja meg a viszkozitást is, modellünk egyik éles, kísérletekkel szembesíthető előrejelzése.

$$(37) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}} + \theta \ddot{\mathbf{E}} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f + \tau \dot{\mathbf{E}}), \\ \sigma_o + \tau_o \dot{\sigma}_o &= 3K\varepsilon_o + 3K_v \dot{\varepsilon}_o + \theta_o \ddot{\varepsilon}_o. \end{aligned}$$

Az anyagtörvényben tehát 9 anyagi paraméter szerepel, amelyből 8 a rugalmas állapothoz, 1 a képlékeny állapothoz tartozik. Ezen kívül a határfeltételt meghatározó képlékenységi munka értéke tartozik ide.

6. REOLÓGIAI ANYAGMODELLEK ALKALMAZÁSA MAGYARORSZÁGON

Hazánkban a reológiai modellek bányászati és mélyépítési alkalmazása és kutatása több, mint félévszázados múltra tekinthet vissza. A hazai kontinuummechanikai irodalomban ezek közül csak azoknak a munkáknak volt igazi jelentősége, amelyeknek elvi alapjai is voltak. Így csupán a kísérletek fázisába sorolhatjuk mindazokat a munkákat (pl. NEWTON-test, KELVIN-VOIGT-test, MAXWELL-test, stb. alkalmazása), amelyek nem tekinthetők reális szilárd testeknek. Igaz ugyan, hogy előrelépést jelentettek az időfüggő folyamatok elemzésénél, nem beszélve a gyakorlati alkalmazásokra gyakorolt termékenyítő hatásukról. Történeti jelentőségű volt pl. a REUSS-PRANTL-test, mert lépést jelentett a képlékeny reológiai modellek irányába, s tudatformáló szerepe sem lebecsülendő, azonban nem épült korrekt elméleti alapokra, inkább tapasztalati tényekhez próbált elméleti bázist kreálni. Ennek oka az is, hogy a korabeli reológia még nem találta meg a mechanikával közös termodinamikai gyökereket.

Izotrop kontinuumok reológiai modellje megalkotásának és alkalmazásának legfontosabb állomásai hazánkban a következők voltak:

ELSŐ – CSUPÁN RUGALMAS – MODELL [1967]: a klasszikus POYNTING-THOMSON-féle ún. rugalmas standard test:

$$(i) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}} - \tau \dot{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{T}_o &= 3K\mathbf{E}_o, \end{aligned} \quad \text{ha} \quad \begin{pmatrix} \sigma := \sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}, & \sigma_o = \sum \sigma_{ii}, \\ \varepsilon := \varepsilon_{ij} - \varepsilon_o \delta_{ij}, & \varepsilon_o = \sum \varepsilon_{ii}, \end{pmatrix} \quad \text{akkor} \quad \begin{aligned} \sigma &= 2G\varepsilon + 2\eta \dot{\varepsilon} - \tau \dot{\sigma}, \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o, \end{aligned}$$

ahol az anyagállandók száma 4:

- G – rugalmas csúsztató modulus [MPa],
- K – kompresszibilitási modulus [MPa],
- η – viszkozitási együttható [MPa h],
- τ – relaxációs idő [h].

Ez az anyagmodell, – amelyet külföldön már korábban is alkalmaztak, – spekulatív úton jött létre, s azt a feltételezést tartalmazta, hogy a térfogatváltozás időfüggetlen, ott nincs kúszás sem, meg relaxáció sem. Helyesen tükrözi viszont a rugalmas alakváltozás, a kúszás és a relaxáció jelenségét.

[*Négy rugalmas anyagállandó* (két torzulási és két térfogati állandó, illetve két rugalmas és két rugalmas-reológiai állandó)]

MÁSODIK – RUGALMAS-KÉPLÉKENY – MODELL [1973]: a klasszikus POYNTING-THOMSON-féle ún. rugalmas-képlékeny standard test:

$$\begin{aligned}\sigma &= 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}, & \sigma^{pl} &= 2G_{pl}\varepsilon^{pl} + 2\eta_{pl}\dot{\varepsilon}^{pl} - \tau_{pl}\dot{\sigma}^{pl}, & \sigma^{pl} &:= \sigma - \sigma_f, \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o, & \sigma_o^{pl} &= 3K_{pl}\varepsilon_o^{pl}, & \varepsilon^{pl} &:= \varepsilon - \varepsilon_f.\end{aligned}$$

A képlékenységi határt kijelölő σ_f, ε_f értékek függenek attól az úttól, ahogyan a kezdeti értékektől a W_f' folyási értékekig változtak (tehát minden egyes úthoz más és más σ_f, ε_f értékek tartoznak), azonban, mint konkrét értékeknek, az idő szerinti deriváltjuk zérus, tehát

$$\dot{\sigma}^{pl} = \dot{\sigma} - \dot{\sigma}_f = \dot{\sigma}, \quad \dot{\varepsilon}^{pl} := \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_f = \dot{\varepsilon}.$$

Mai jelölésrendszerünkkel:

$$\left. \begin{aligned}\sigma &= 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}, \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o, \\ \sigma - \sigma_f &= 2G_{pl}(\varepsilon - \varepsilon_f) + 2\eta_{pl}\dot{\varepsilon} - \tau_{pl}\dot{\sigma}, \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{ha } W \leq W_f', \text{ és} \\ & \text{ha } W > W_f', \end{aligned}$$

illetve a $\psi = 0$ képlékenységi határfeltétel, $\psi(W') \equiv \Psi \cdot (W' - W_f') = 0$ formulájával:

$$(ii) \quad \begin{aligned}\sigma &= 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma} - \Psi \left\{ (2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f) + (2\eta - 2\eta_{pl})\dot{\varepsilon} - (2\eta - 2\eta_{pl})\dot{\varepsilon} \right\}, \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o,\end{aligned}$$

s az anyagállandók száma további 3-mal [$G_{pl}, \eta_{pl}, \tau_{pl}$], összesen 7-re növekszik.

[*Négy rugalmas és három képlékeny anyagállandó* (négy torzulási és négy térfogati állandó)].

HARMADIK – CSUPÁN RUGALMAS – MODELL [1983]: Az (1) alatti standard modell térfogati időfüggetlenségének kiküszöbölésére DOBRÓKA bevezeti az ún. általános standard modellt:

$$(iii) \quad \begin{aligned}\sigma &= 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}, \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o + 3K_v\varepsilon_o - \tau_o\sigma_o,\end{aligned}$$

amelyben további két térfogati anyagállandó szerepel:

K_v – térfogati viszkozitási tényező [MPa h],

τ_o – térfogati relaxációs idő [h].

[*Hat rugalmas anyagállandó* (három torzulási és három térfogati állandó, vagy két rugalmas és négy rugalmas-reológiai állandó)]. Ezt a modellt csak később – ettől a munkától függetlenül – vezeti be a nemzetközi közetmechanikai irodalom.

TERMODINAMIKAI ALAPOK. [VERHÁS, 1985] megalapozza a termodinamikai reológiát. KLUITENBERG úttörő munkáinak jelentős kiterjesztésével a reológiai anyag-törvényeket belső változókhoz, illetve dinamikai szabadsági fokokhoz köti. JAUMANN-deriváltak használatával figyelembe veszi az objektivitás követelményét, és javaslatot tesz a képlékenység dinamikai instabilitásként történő értelmezésére. Felismeri a tehetetlenségi elem bevezetésének szükségességét, illetve termodinamikai magyarázatot ad a reológiai paraméterekre vonatkozó egyenlőtlenségekre (ezekről bővebben lásd a következő fejezetet [FÜLÖP-VÁN-ASSZONYI-HORVÁTH (2008)]). Mindezek az eredményei nemzetközi viszonylatban is egyedülállóak. Vizsgálatai azonban lényegében csak folyadékokra vonatkoznak, a szilárd testekre vonatkozó anyagtörvényt nem fejti ki.

2006-ban a termodinamika második főtételéből – és következményeként az entrópiaprodukciónövekedéséből – sikerült levezetni az első szilárd testekre vonatkozó anyagtörvényt. Ezzel az anyagtörvény kikerült a spekulációk birodalmából, és folytonosan képes leírni az anyag evolúcióját *az alakváltozások tetszőleges* (kis és nagy deformációs) *tartományán, a rugalmas és képlékeny zónában együttesen és egységesen*, valamint *a mechanikai állapotter egészén* (beleértve az irreverzibilitás határát – a reverzibilitást – is).

NEGVEDIK – CSUPÁN RUGALMAS – MODELL [2006]: – Az első termodinamikai alapokon levezetett rugalmas anyagmodell, (amely az ún. JEFFREYS-test egy rugalmas deformációval kiegészített változata), az ún. *tehetetlenségi standard test*:

$$(iv) \quad \begin{aligned} \sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}, \\ \sigma_o + \tau_o\sigma_o &= 3K\varepsilon_o + 3K_v\varepsilon_o + \theta_o\ddot{\varepsilon}_o, \end{aligned}$$

amelyben további két rugalmas anyagállandó szerepel:

θ – torzulási tehetetlenségi tényező [MPa h²],
 θ_o – térfogati tehetetlenségi tényező [MPa h²].

[*Nyolc rugalmas anyagállandó* (négy torzulási és négy térfogati állandó, vagy két rugalmas és hat rugalmas-reológiai állandó)].

ÖTÖDIK – RUGALMAS-KÉPLÉKENY – MODELL [2007]: Az első alkalom, hogy a rugalmas és képlékeny tartomány egységesen szerepel egy olyan anyagtörvényben, amely termodinamikai alapokra épült:

$$(v) \quad \begin{aligned} \sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \Psi\left\{\left(2G - 2G_{pl}\right)\left(\varepsilon - \varepsilon_f\right) + \left(2\eta - 2\eta_{pl}\right)\dot{\varepsilon}\right\}, \\ \sigma_o + \tau_o\dot{\sigma}_o &= 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o + \theta_o\ddot{\varepsilon}_o - \Psi\left\{\left(3K - 3K_{pl}\right)\left(\varepsilon_o - \varepsilon_{of}\right) + \left(3K_v - 3K_{v,pl}\right)\dot{\varepsilon}_o\right\}, \end{aligned}$$

[*Nyolc rugalmas és négy képlékeny anyagállandó* (hat torzulási és hat térfogati állandó)]

Öt olyan állomás, amely talán szükségszerű volt a célhoz vezető úton. Azonban ez még nem végeredmény, a legfrissebb eredmények tükrében az egész kép leegyszerűsödött. Okulásul soroljuk fel a hiányosságokat:¹⁶

(i) modell nem veszi figyelembe

- a térfogati reológiát,
- az anyag belső tehetetlenségét (a deformációk második időderiváltjától való függését),
- a képlékeny alakváltozást;

(ii) modell nem veszi figyelembe

- a térfogati reológiát,
- az anyag belső tehetetlenségét,
- a képlékeny alakváltozást így csak korlátozottan reprezentálja, továbbá feltételezi – hibásan –, hogy képlékeny állapotban megváltozik a relaxációs idő;

(iii) modell figyelembe veszi a térfogati reológiát, de figyelmen kívül hagyja

- az anyag belső tehetetlenségét,
- s a képlékeny alakváltozást;

(iv) modell a legteljesebb rugalmas test az eddigiek közül, azonban figyelmen kívül hagyja a képlékeny alakváltozást;

(v) modell figyelembe vesz minden eddigi szempontot, azonban a térfogatváltozást is képlékenységi feltételhez vette, és nem tárta fel az anyagállandók közötti összefüggéseket.

A legfrissebb kutatások rámutattak, hogy ha a térfogati képlékenységtől eltekintünk, akkor modellünk tovább egyszerűsíthető. Az alapvető

G – rugalmas csúsztató modulus [MPa],	K – kompresszibilitási modulus [MPa],
η – viszkozitási együttható [MPa h],	K_v – térfogati viszkozitási tényező [MPa h],
τ – relaxációs idő [h],	τ_o – térfogati relaxációs idő [h].
θ – torzulási tehetetlenségi tényező [MPa h ²],	θ_o – térfogati tehetetlenségi tényező [MPa h ²]

¹⁶ Ténylegesen ezek nem hiányosságok, ugyanis a szerzők szempontjai között nem szerepeltek ezek kielégítései.

rugalmas anyagállandókon kívül szereplő további négy képlékenységi állandó,

G_{pl} – képlékeny csúsztató modulus [MPa], K_{pl} – képlékeny kompr. modulus [MPa],
 η_{pl} – képlékeny viszkozitási együttható $K_{v,pl}$ – képlékeny térfogati viszk. tényező [MPa h]
közül csupán egy független van, a

$$G_{pl} - \text{képlékeny csúsztató modulus [MPa],}$$

s a többi három már kifejezhető ezekkel:

- a K_{pl} képlékeny térfogati modulus megegyezik a K rugalmas térfogati modulusal egészen az összenyomhatósági határig, vagyis a tökéletesen kifejlődött képlékenységi határig,
- az η_{pl} képlékeny viszkozitási tényező pedig kifejezhető a rugalmas csúsztató modulusal és a relaxációs idővel: $2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau$,
- a $K_{v,pl}$ képlékeny térfogati viszkozitás megegyezik a K_v rugalmas térfogati viszkozitási tényezővel.

HATODIK – RUGALMAS-KÉPLÉKENY – MODELL [2008] – Mindezek alapján az izotrop kontinuumok anyagtörvénye

$$(vi) \quad \begin{aligned} \sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f + \tau\dot{\varepsilon}), \\ \sigma_o + \tau_o\dot{\sigma}_o &= 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o + \theta_o\ddot{\varepsilon}_o. \end{aligned}$$

Mindezen modellek közös hiányossága, hogy maga a képlékenységi feltétel külső, azaz teljesen független az általános mérlegek és az entrópiaprodukció egyéb paramétereitől. Emiatt nem igazán ad *értelmezést* magára a képlékenységre vonatkozóan.

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. (1967): Vágatbiztosítások tervezése. *Műszaki Élet Tatabányán*, **3** (1967) p: 1-29.
- ASSZONYI, CS. (1972): On the Rheological Field around Mine-Openings of Circular Section. I. Drifts in a Primary Hidrostatic Field. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **7/3-4** (1972) p: 441-471.
- ASSZONYI, CS. (1973): On a New Theory of Rock Mechanics. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **8/3-4** (1973)
- ASSZONYI, CS. (1974): Mechanical Theory of Continua. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **8/3-4** (1974) p: 323-360.
- ASSZONYI, CS. (1975): Kőzetkontinuumok mechanikai elméletéről. *Akadémiai doktori értekezés*. Budapest (1975).
- ASSZONYI, CS. – RICHTER, R. (1975): Plastic State and Deterioration of Rock. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **10/4** (1975) p: 389-420.

- ASSZONYI, CS. – et al. (2006): *Izotrop kontinuumok anyagtörvénye* Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár **3**. Műegyetemi Kiadó, Budapest (2006) pp. 9-167.
- ASSZONYI, CS. – VÁN, P. – SZARKA, Z. (2007): *Izotrop kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota*. Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár **5**. Műegyetemi Kiadó, Budapest (2007) pp. 9-198.
- ASSZONYI, CS. - FÜLÖP, T. - VÁN, P. - SZARKA, Z. - HORVÁTH, R. (2008): *Reológiai alapmodellek és összekapcsolásuk*. Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár **6**. Műegyetemi Kiadó, Budapest (2008) pp. 53-91.
- BERTRAM, A.(2005): *Elasticity and plasticity of large deformations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2005).
- BROKATE, M. – SPREKELS, J. (1996): *Hysteresis and phase transitions*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg (1996).
- FÜLÖP T. (2008): *Kontinuumok kinematikájának új értelmezése*. Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár **8**. Műegyetemi Kiadó, Budapest (2008).
- GLANSDORFF, P. -PRIGOGINE, I. (1971): *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*, Wiley-Interscience, London etc. (1971).
- GYARMATI, I. (1977), The wave approach of thermodynamics and some problems of non-linear theories, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **2**, 233-260. o. (1977).
- HICHER, P.-Y. – SHAO, J.-F. (2008): *Constitutive modelling of soils and rocks*, Wiley (2008).
- HOULSBY, G. T. – PUZRIN, A.M. (2006): *Principles of hyperplasticity*, Springer-Verlag, London Limited (2006).
- KESTIN, J. (1965): *A course in thermodynamics*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts- Toronto-London (1965) p368.
- KALISZKY, S. (1975): *Képlékenységtan*, Akadémiai Kiadó, Budapest (1975).
- LEBON, G. – JOU, D. - CASAS-VÁZQUEZ, J. (2008): *Understanding Non-equilibrium Thermodynamics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2008).
- MATOLCSI, T. (2005). *Ordinary thermodynamics*, Akadémiai Kiadó, Budapest (2005).
- MATOLCSI, T. – VÁN, P. 2007: Absolute time derivatives, *Journal of Mathematical Physics*, **48**, pp. 053507-19, math-ph/0608065 (2007).
- MAUGIN, G. A. - MUSCHIK, W. (1994): Thermodynamics with Internal Variables. Part I. General Concepts, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **19** (1994) pp. 217-249.
- PRIGOGINE, I. – STENGERS, I. (1986): *Az új szövetség*, Akadémiai kiadó, Budapest (1995).
- VÁN, P. (2005): The Ginzburg-Landau equation as a consequence of the Second Law, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **17/2**, 165-169. o. (2005).
- VÁN, P. (2007): *Objektív anyagfüggvények felé a reológiában*. Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár **4**. Műegyetemi Kiadó, Budapest (2007) pp. 327-332.
- VÁSÁRHELYI, B. - DELI, Á. - GÁLOS, M. AND VÁN, P. (2000), Relationship between the critical dissipated energy per unit volume and the mechanical properties of different rocks, *Pacific Rocks 2000*, ed. Girard, Liebman and Breeds, pp. 1289-1293, Proceedings of the 8th North American Rock Mechanics Symposium, Seattle, USA (2000).
- VERHÁS J. (1985): *Termodinamika és reológia*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1985).

REOLÓGIAI ALAPMODELLEK ÉS ÖSSZEKAPCSOLÁSUK

Asszonyi Csaba – Fülöp Tamás

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Ván Péter

KFKI RÉSZECSCSE- ÉS MAGFIZIKAI KUTATÓINTÉZET, ELMÉLETI FIZIKA FŐOSZTÁLY, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Szarka Zoltán

MISKOLCI EGYETEM MATEMATIKAI INTÉZETE, MISKOLC
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Horváth Róbert

DEBRECENI EGYETEM AMTC KÖRNYEZET- ÉS VEGYÉSZMÉRNÖKI TANSZÉK, DEBRECEN,
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A cikk összefoglalja a reológia elemi modelljeit és a belőlük felépíthető mechanikai testeket. Ennek eredményeként kiadódik, hogy az izotrop kontinuumok általános anyagegyenletében

- a deformáció másodrendű időderiváltjához tartozó anyagállandó nem minden esetben kívánja meg az ún. tehetetlenségi modellelem alkalmazását, de a teljes termodinamikailag megengedett tartományt csak annak segítségével modellezhetjük.*
- a képlékeny állapothoz tartozó anyagállandók között felléphetnek összefüggések.*

A képlékenységi egyszerűbb modellezése esetén a képlékeny viszkozitási tényező kifejezhető a képlékenységi modulus függvényeként. Ebből következően a torzulási anyagegyenletben szereplő 6 anyagállandó mindössze 5 független állandót jelent. Tehát a torzulási rugalmas állapot 4 anyagállandóval, a képlékeny állapot pedig 1 további állandóval jellemezhető.

Az anyagegyenlet az anyag azon tulajdonságait fejezi ki, amelyek szerepet játszanak a mechanikai kölcsönhatások szempontjából. Mivel az egységes rugalmas-képlékeny anyag-törvény mindössze négy modellelemből felépíthető, valószínűsíthető, hogy mechanikai szempontból mindössze négy alapvető tulajdonság van: a rugalmas alakváltozás képessége (a rugalmasság), az azt gátolni igyekvő belső sűrűlódás (a viszkozitás), a belső átrendeződés tehetetlensége, illetve az anyag visszafordíthatatlan belső strukturális átrendeződése miatt fellépő képlékenységi. Minden más anyagtulajdonság e négy alaptulajdonság egymásra hatá-

saként, vagy hatására jelentkezik. Meglepő módon a rugalmasság és a viszkozitás nem képes minden tehetetlenségi hatás modellezésére.

Habár képlékenységgel kapcsolatos következtetéseinket az előző fejezetben kifejtett termodinamikai képlékenység keretei között fogjuk kifejteni, de azok ettől függetlenül is érvényesek, mivel elsősorban a lineáris reológia szerkezetre és annak kapcsolási elemekkel történő reprezentációjára vonatkoznak.

1. BEVEZETÉS

A kötet előző tanulmánya [VÁN–ASSZONYI (2008)] bemutatta, hogy az *izotrop kontinuumok anyagtörvénye* fizikai alapokon meghatározható, a termodinamika II. főtétele konstruktívan használható és lényegében megszabja az anyagtörvények formáját.

Ez a tanulmány az entrópiánövekedés formulájából vezette le az anyagtörvényt

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} + \theta\ddot{\mathbf{E}} - \Psi[(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) + (2\eta - 2\eta_{pl})\dot{\mathbf{E}}] \\ \mathbf{T}_0 + \tau_0 \dot{\mathbf{T}}_0 &= 3K\mathbf{E}_0 + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0 + \theta_0\ddot{\mathbf{E}}_0 \end{aligned}$$

formában, ahol

$$(2) \quad \Psi = \Psi(W', \dot{W}) = \Psi_H(W' - W_f') \Psi_H(\dot{W}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } W' < W_f', \text{ vagy } \dot{W} < 0, \\ 1, & \text{ha } W' \geq W_f', \text{ és } \dot{W} \geq 0, \end{cases}$$

a rugalmas és képlékeny tartomány határát kijelölő függvény, benne Ψ_H a Heaviside-féle egységugrás függvény. W_f' a W' torzulási deformációs munka azon küszöbértéke:

$$W' = \int_{t=t_0}^{t=t'} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} dt \approx \int_{t=t_0}^{t=t'} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} dt \leq W_f',$$

amelyen túl megjelennek a maradó deformációk, tehát az anyag képlékeny állapotba kerül. A W_f' -hez tartozó $\mathbf{T}$ feszültségi és $\mathbf{E}$ deformációs deviátortenzorok értékét jelöltük $\mathbf{T}_f, \mathbf{E}_f$ -fel.

Az (1) egyenletet a szerzők két feltevéssel egyszerűsítették egy jóval általánosabb alakból:

- az anyagtörvény egyensúlyi (reverzibilis) alakjánál – a CAYLEY-HAMILTON-tételből következő $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2G^*\mathbf{E}^2$ kvadratikus alak helyett, – a lineáris $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E}$ formát vették alapul,
- az általános $\tilde{\mathbf{E}}$ és $\mathbf{E}$ deformációkat közelítőleg azonosnak vették.¹

¹ A teljes megoldás [ASSZONYI–VÁN–SZARKA (2007), 84. o.] könyvében megtalálható: $\dot{\tilde{\mathbf{D}}} = [\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}]^S$.

Az (1) konstitúciós egyenletet eddig még csupán a másodrendű időderiváltat tartalmazó tehetetlenségi tag nélkül vizsgáltuk, mert feltételeztük, hogy a kezdeti gyors lecsengéstől (a gyorsulás szerepétől) a bányászati és mélyépítési szerkezetépítésnél eltekinthetünk. Ekkor azonban a modell a lökéshullámok, tranziens jelenségek vizsgálatát nem teszi lehetővé. Továbbá nem elemeztük, hogy az anyagegyenletben szereplő anyagállandók függetlenek-e egymástól.

Érdekessége a modellnek, hogy a képlékenységi határ túllépésével csak a *rugalmas* és a *viszkózus* anyagállandó $[2G, 2\eta]$ változik képlékenységi állandóvá $[2G_{pl}, 2\eta_{pl}]$, a *relaxációs* és a *tehetetlenségi* anyagállandó $[\tau, \theta]$ változatlanok. Ez azonban nem véletlen, hanem az anyagi tulajdonságok letisztult visszatükröződése.

1.1. RUGALMAS ÁLLAPOT

Az anyagtörvény a rugalmas állapotban $[\Psi = 0]$ esetén]

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} + \theta\ddot{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{T}_0 + \tau_0\dot{\mathbf{T}}_0 &= 3K\mathbf{E}_0 + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0 + \theta_0\ddot{\mathbf{E}}_0 \end{aligned}$$

formában, illetőleg skaláris komponensegyenleteivel

$$(3a) \quad \begin{aligned} s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij} &= 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} + \theta\ddot{e}_{ij}, \\ \sigma_0 + \tau_0\dot{\sigma}_0 &= 3K\varepsilon_0 + 3K_v\dot{\varepsilon}_0 + \theta_0\ddot{\varepsilon}_0 \end{aligned}$$

formában írható fel, ahol

$$s_{ij} := \sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}, \quad e_{ij} := \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0\delta_{ij}.$$

A (3), ill. (3a) lineáris elemekből tevődik össze, ezért ábrázolásukhoz lineáris modellelemeket használnak a reológiában.

Az anyagtörvény torzulási és térfogatváltozási egyenlete teljesen hasonló felépítésű. Éppen ezért a következőkben az egyszerű ábrázolás és az áttekinthetőség érdekében csak a torzulási egyenletet vizsgáljuk egydimenziós esetben, amikor $\sigma := s_{ij}$, $\varepsilon := \varepsilon_{ij}$ jelöléseket. Ezáltal a megfelelő összefüggés a

$$(4) \quad \sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\ddot{\sigma} + \theta\ddot{\varepsilon}$$

alakú egyetlen skaláregyenlet, ahol

$$\sigma := s_{ij}, \quad \varepsilon := \varepsilon_{ij}.$$

1.2. KÉPLÉKENY ÁLLAPOT

Az anyagtörvény a képlékeny állapotban [$\Psi = 1$ esetén], már csupán a torzulási egyenletre felírva:

$$(5) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - (2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f) - (2\eta - 2\eta_{pl})\dot{\varepsilon},$$

illetve

$$(5a) \quad \begin{aligned} \sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2G\varepsilon_f + 2G_{pl}(\varepsilon - \varepsilon_f) + 2\eta_{pl}\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} = \\ &= \sigma_f + 2G_{pl}(\varepsilon - \varepsilon_f) + 2\eta_{pl}\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} \end{aligned}$$

formát ölti.

1.3. AZ ANYAGTÖRVÉNY VÁLTOZÓI

Az (1), illetve (4) és (5) összefüggés alapján kimondható, hogy az anyagtörvény

$$F(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}) = 0$$

alakú, vagyis csak a feszültség, a feszültségváltozási sebesség, a deformáció, valamint deformációsebesség és a deformációgyorsulás függvénye. A gyakorlatban számos olyan modellt alkalmaznak, ahol ennél magasabbrendű időderiváltak is szerepelnek:

$$F(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i)}, \dots, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \dots, \varepsilon^{(i)}, \dots) = 0.$$

Ezek a modellek is előállíthatók sok esetben a lineáris reológiai elemek kapcsolásaival, azonban ekkor nem világos a termodinamika törvényeinek teljesülése. Megjegyezzük, hogy a több dinamikai változó bevezetésével kapott modellek hasonló anyagtörvényekre vezetnek (ha a dinamikai változók kiküszöbölhetőek), de nagyon kötött szerkezettel, ezért általában a fenti összefüggés nem tekinthető anyagtörvénynek. A következőkben mindazokat a modelleket kizárjuk a vizsgálati körből, amelynél a feszültség másodrendű, vagy annál magasabb időderiváltjai, illetve a deformáció harmadrendű, vagy annál magasabb időderiváltjai szerepelnek.

1.4. TERMODINAMIKAI EGYENLŐTLENSÉGEK – AZ ANYAGTÖRVÉNY SZÁRMAZTATÁSA

A POYNTING-THOMSON-modell származtatásakor egyetlen dinamikai változóval felépített mechanikai rendszer következő alakú vezetési egyenleteiből indultunk ki [VÁN-ASSZONYI (2006) 61.o.]:

$$\begin{aligned} \sigma - 2G\varepsilon &= l_1\dot{\varepsilon} - l_{12}\xi, \\ \dot{\xi} &= l_{21}\dot{\varepsilon} - l_2\xi. \end{aligned}$$

Itt az előzőekben bevezetett egydimenziós jelöléseket és paramétereket használtuk, a mechanikai változókra érvényes egyszerűsítésekkel élve a ξ dinamikai változóra vonatkozóan is. Ebből az egyenletrendszerből ξ kiküszöbölésével kapjuk, hogy

$$\sigma + \frac{1}{l_2} \dot{\sigma} = \frac{l_1}{l_2} \ddot{\varepsilon} + \frac{l_1 l_2 - l_{12} l_{21} + 2G}{l_2} \dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon.$$

Összehasonlítva a (4) egyenletrendszerrel, az együtthatókra azt kapjuk, hogy

$$\tau = \frac{1}{l_2}, \quad \theta = \frac{l_1}{l_2}, \quad 2\eta = \frac{l_1 l_2 - l_{12} l_{21} + 2G}{l_2}.$$

Megjegyezzük, hogy a fordított irány, a vezetési mátrix elemeinek kifejezése τ , θ , η és G függvényében nem lehetséges egyértelmű módon, a fellépő egyparaméternyi szabadság szükségszerű következménye annak, hogy ξ kiküszöbölhető az anyagtörvényből.

Most egy fontos észrevételt teszünk: a fent idézett levezetésben nem szükséges feltételezni a vezetési mátrix szimmetriáját. De antiszimmetriáját sem, ellentétben VERHÁS megközelítésével, aki csak ezt a két lehetséges esetet tárgyalja [VERHÁS (1985), 133-135.o.]. Összetett mikroszerkezetű anyagoknál (kövek, talajok tipikusan ilyenek) valóban nem tudunk határozott feltevessel élni a dinamikai változó időtükrözéssel szemben tanúsított viselkedéséről, ezért tulajdonképpen nyitva hagyjuk ezt a kérdést. Hasonló feltevessel élve [VÁN-BEREZOVSKI-ENGELBRECHT (2008)] megmutatták, hogy a dinamikai szabadsági fokok mechanikai eredetű, LAGRANGE-formalizmuson alapuló mozgásegyenlet-generáló módszere speciális esete a belső változók termodinamikai eredetű mozgásegyenlet-generáló eljárásának. Mivel mindkét módszernek számtalan alkalmazása van a gyakorlatban, ahol a belső változók fejlődési egyenletének megtalálása alapkérdés, ezért a vezetési egyenletek szimmetriája, vagy antiszimmetriája nem tűnik feltétlen követelménynek.

Ne rójunk tehát ki sem szimmetriát, sem antiszimmetriát a vezetési mátrixra. Ilyenkor célszerű a következő felbontással élnünk:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_1 & l_{12} \\ l_{21} & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \frac{l_{12} + l_{21}}{2} \\ \frac{l_{12} + l_{21}}{2} & l_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_1 & \frac{l_{12} - l_{21}}{2} \\ -\frac{l_{12} - l_{21}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l \\ l & l_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix},$$

ahol bevezettük az $l := \frac{1}{2}(l_{12} + l_{21})$ és $k := \frac{1}{2}(l_{12} - l_{21})$ jelöléseket. A termodinamika második főtétele, a nemnegatív entrópiaprodukciónak azt követeli meg, hogy a vezetési mátrix *szimmetrikus része* legyen pozitív definit. Esetünkben ez azt jelenti, hogy

$$(6) \quad l_1 > 0, \quad l_2 > 0, \quad l_1 l_2 - \frac{(l_{12} + l_{21})^2}{4} = l_1 l_2 - l_{12} l_{21} - \frac{(l_{12} - l_{21})^2}{4} > 0.$$

Azaz, a (4) egyenlet paramétereire vonatkozóan kapjuk, hogy

$$(7) \quad \tau > 0, \quad \theta > 0, \quad \eta - G\tau > 0.$$

Az általánosított viszkozitásból, a deformációsebesség együtthatójából kiindulva pedig könnyen látható, hogy

$$2\eta - 2G\tau = \frac{\theta}{\tau} - \frac{l_{12}l_{21}}{l_2} = \frac{\theta}{\tau} + \tau(l+k)(k-l) > 0.$$

A fenti kifejezésből leolvasható, hogy a

$$(8) \quad 2\eta - 2G\tau - \frac{\theta}{\tau} = \tau(l+k)(k-l)$$

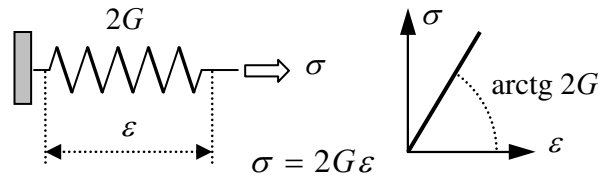
előjele jellemzi a rendszert. Ha negatív, akkor a szimmetrikus tag dominál, ezt *alulcsillapított* esetnek nevezzük a továbbiakban, ha pozitív, akkor az antiszimmetrikus rész dominál, ezt nevezzük *túlcsillapított* esetnek.

A továbbiakban látni fogjuk, hogy a termodinamikai követelmények hogyan jelennek meg a klasszikus reológia lineáris elemeinek kapcsolásaiban.

2. ALAP- (VAGY EGYELEMŰ) MODELLEK

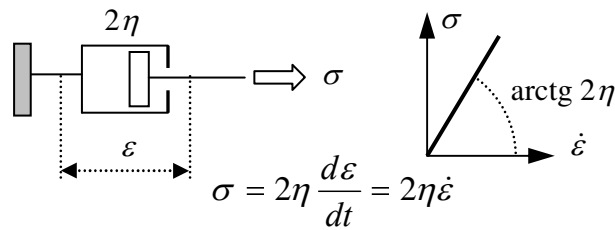
A reológiai irodalomban négyféle ún. alap-modellelemet alkalmaznak. Ezek a következők:

(A) IDEÁLIS RUGÓ. Ez az ún. HOOKE-elem, jele: [H], a feszültség és a deformáció közötti lineáris kapcsolatot modellezi a $C := 2G$ rugóállandó (a modellben: rugalmasági modulus) segítségével.



1. ábra. A Hooke-test kapcsolási vázlata

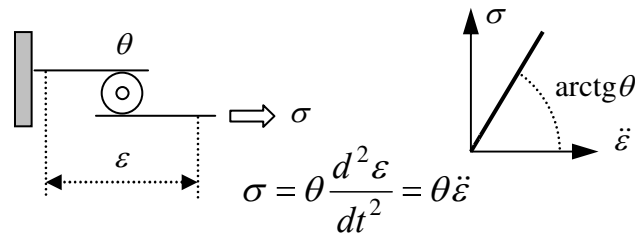
(B) IDEÁLISAN VISZKÓZUS ELEM. Ez az ún. NEWTON-elem, jele: [N], – amelyet egy viszkozus folyadékkal töltött hengerben mozgó perforált dugattyú (olajfék) reprezentál – a feszültség és a deformációsebesség közötti lineáris kapcsolatot modellezi η viszkozitási tényezővel.



2. ábra. A Newton-test elvi modellje

Ez a két elem önmagában is alkalmazható, amikor a rugalmas HOOKE-testet, vagy a NEWTON-féle viszkózus folyadékot vizsgáljuk.

(C) IDEÁLIS TEHETETLENSÉGI ELEM. Ez az ún. VERHÁS-elem [VERHÁS (1985), 136.o.], jele: [T]. Ezt két rúd között megcsúszás nélkül gördülő véges tehetetlenségű, de zérus tömegű tárcsa reprezentálja, $M = \theta$ fajlagos tehetetlenségi nyomatékkal.

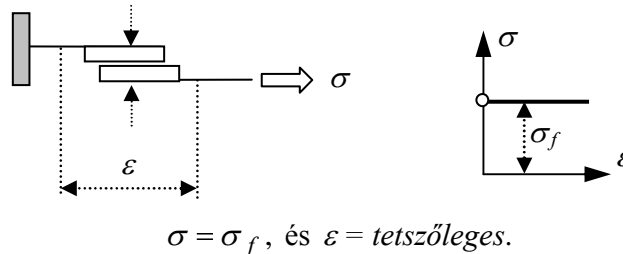


3. ábra. A Verhás-test elvi modellje

A (B) és (C) alapelemeket a szilárd testek mechanikájában: általában a rugalmas (nem képlékeny) állapothoz kapcsolják.

Van még egy további elem is a konvencionális mechanikában, amelyet azonban csak a képlékeny állapot kialakulásakor alkalmaznak.

(D) IDEÁLIS KÉPLÉKENYSÉGI ELEM. Ez az ún. ST.VENANT-elem: [SV], amelyet egy súrlódó lap reprezentál, vagyis ha az erő túllépi a két lap közötti súrlódási ellenállásból adódó súrlódó erőt, csak akkor jöhet létre alakváltozás:



4. ábra. A de Saint-Venant-test

Ez az elem önmagában az ún. *ideálisan képlékeny* test modellje. A konvencionális felfogásban ezt a modellt anyagtörvényként is használják (ami már önmagában is abszurd), ha megnézzük az egyenletét:

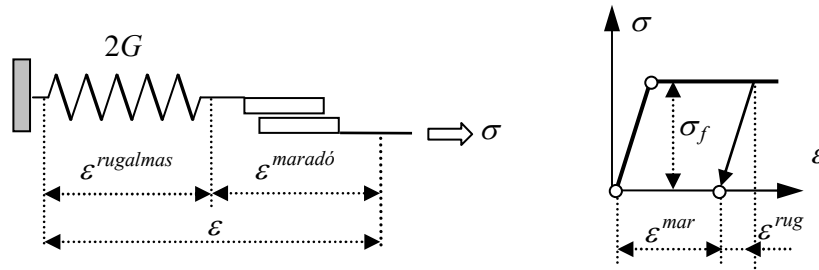
$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{ha } \sigma < \sigma_f, \\ 0 < \varepsilon < \infty, & \text{ha } \sigma \geq \sigma_f, \end{cases}$$

ugyanis irreális az ilyen mértékű indeterminizmus. Ha összekapcsoljuk más elemekkel, akkor a ST.VENANT-test már képlékenységi határfeltételként funkcionál.

Termodinamikai törvényt sért, ezért felfogásunkhoz egyáltalán nem illeszkedik – csupán a konvencionális felé tett gesztusként a ST.VENANT-elem legegyszerűbb kapcsolásait itt felsoroljuk.

A továbbiakban a párhuzamos kapcsolást a $\parallel$ jellel, a soros kapcsolást a $\sim$ jellel jelöljük. A rugó és a súrlódó elem kapcsolását mutatjuk csupán be.

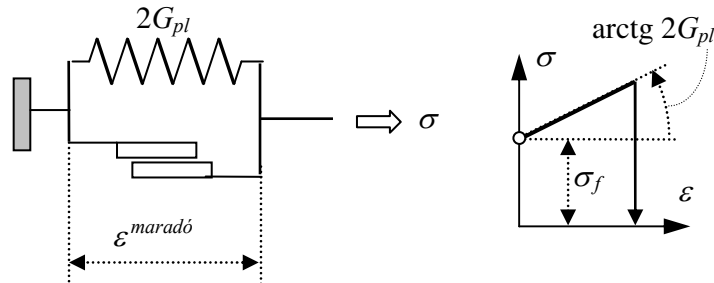
SOROS KAPCSOLÁSNÁL [H~SV] az *ideálisan rugalmas-képlékeny* viselkedést kapjuk:



$$\sigma = \begin{cases} 2G\varepsilon, & \text{ha } \varepsilon \leq \varepsilon_f, \\ \sigma_f, & \text{ha } \varepsilon > \varepsilon_f, \end{cases} \text{ és } \varepsilon = \begin{cases} \sigma / 2G, & \text{ha } \sigma \leq \sigma_f, \\ \varepsilon_f + (\sigma - \sigma_f) / 2G, & \text{ha } \sigma > \sigma_f. \end{cases}$$

5. ábra. Az ideálisan rugalmas-képlékeny test

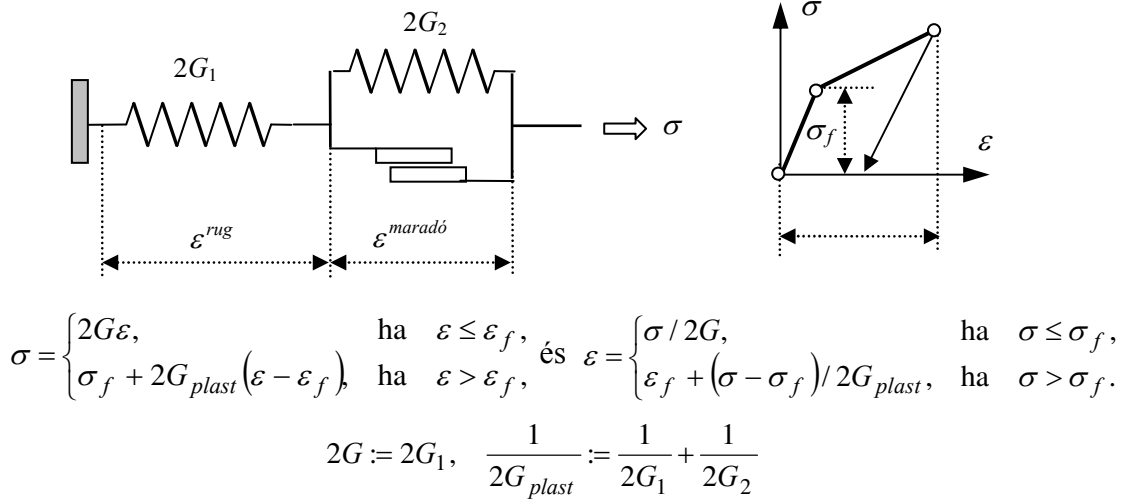
PÁRHUZAMOS KAPCSOLÁSNÁL [H $\parallel$ SV] a *képlékeny felkeményedő* testet kapjuk:



6. ábra. Az ideálisan képlékeny felkeményedő test

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{ha } \varepsilon = 0, \\ \sigma_f + 2G_{pl}\varepsilon, & \text{ha } \varepsilon > \varepsilon_f, \end{cases} \text{ és } \varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{ha } \sigma \leq \sigma_f, \\ (\sigma - \sigma_f) / 2G_{pl}, & \text{ha } \sigma > \sigma_f. \end{cases}$$

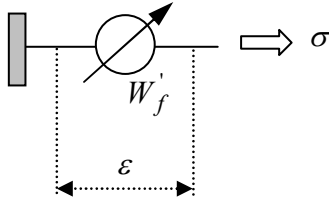
HÁROMELEMES KAPCSOLÁSNÁL [H~(H || SV)] kapjuk az *ideálisan rugalmas-képlékeny felkeményedő* testet.



7. ábra. Az ideálisan rugalmas-képlékeny felkeményedő test

Képlékenységi határfeltételként a ST.VENANT-test – ellentétben a képlékenységtan irodalmában szereplő megállapításokkal – azért nem alkalmazható, mert nem veszi figyelembe a képlékenységi határ függését a múltbeli eseményektől, azok sebességétől, stb. Nem tudja figyelembe venni a képlékeny határ vándorlását sem.

A korszerű felfogásban látszólag csak annyi a különbség, hogy a képlékenységi határfeltétel nem a feszültségállapot egy skalárértékű függvényéhez kötődik², hanem a torzulási deformációs munka egy küszöbértékéhez:



$$\psi(W') \equiv \psi_H(W' - W_f')$$

8. ábra. A Ψ ugrásfüggvénynek megfelelő modellelem

Kapcsolási rajzban ezt a 8. ábrán látható módon ábrázolhatjuk. Ez nem az erőre, hanem az erő út szerinti integráljára nyit és zár. A súrlódási erőnek itt a deformáció szerinti torzulási munka felel meg. Mivel az alaktorzulási munka elve HUBER, MISES és HENCKY nevéhez fűződik (mint feszültségfeltétel a rugalmas tartományban), ezért a 8. ábrán látható elemet HMH-elemnek is nevezhetnénk. Jele: $[\Psi]$.

A torzulási deformációs munka

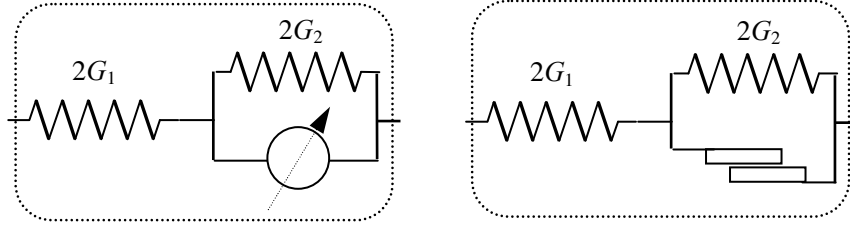
$$W_f' = \int_0^t \mathbf{T} : (\mathbf{v} \circ \nabla)_d dt = \int_0^t \mathbf{T} : (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d dt = \int_0^t \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} dt = \int_0^t \mathbf{T} : d\tilde{\mathbf{E}},$$

² Például $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, $f(F_1, F_2, F_3) = 0$, stb.

ahol $(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1})_d = \dot{\mathbf{E}}$. Egyensúlyi, nem disszipatív esetben [ASSZONYI–VÁN–SZARKA (2007), 38-39. o.]

$$W_f' = \int_0^{\mathbf{E}_f} \mathbf{T} : d\mathbf{E} = \int_0^{\mathbf{E}_f} 2G\mathbf{E} : d\mathbf{E} = G\mathbf{E}_f : \mathbf{E}_f = \int_0^{\mathbf{T}_f} \mathbf{T} : d\left(\frac{\mathbf{T}}{2G}\right) = \frac{1}{4G} \mathbf{T}_f : \mathbf{T}_f$$

formában írható fel, s akkor a ST.VENANT- és a HMM-elem azonos, s ekkor, és csakis ekkor a két ábrázolás egyenértékű.



9. ábra. Az egyensúlyi (rugalmas-képlékeny) anyagtörvény kapcsolási vázlata

Ha a disszipatív effektusok és a dinamikai változók hatása egyensúlyra vezet, ami általában vizsgálatra szoruló, nem nyilvánvaló, de fizikailag elvárt tulajdonsága egy termodinamikai elméletnek, akkor bizonyos értelemben az általános reológiai modell is ehhez a kapcsoláshoz konvergál.

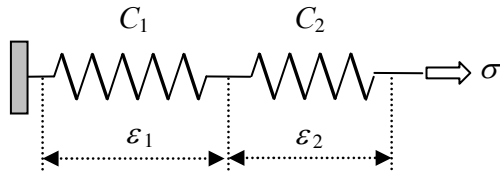
3. KÉT ELEM ÖSSZEKAPCSOLÁSÁVAL ALKOTOTT MODELLEK

Két alapelem párhuzamos és soros összekapcsolásával újabb modelleket kapunk:

$$[\mathbf{H} \parallel \mathbf{H}], [\mathbf{H} \sim \mathbf{H}], [\mathbf{N} \parallel \mathbf{N}], [\mathbf{N} \sim \mathbf{N}], [\mathbf{H} \parallel \mathbf{N}], [\mathbf{H} \sim \mathbf{N}],$$

de csak akkor, ha különböző modelleket kapcsolunk össze. Ugyanis azonos elemek kapcsolásával olyan modelleket hozunk létre, amely eredőjében azonos az őt alkotó modellel.

Két rugó soros kapcsolása esetében $[\mathbf{H} \sim \mathbf{H}] = [\mathbf{H}]$:



10. ábra: $\sigma = 2G\epsilon$

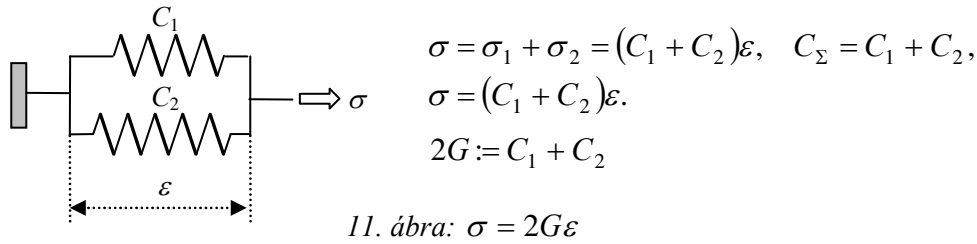
$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \sigma = C_1 \epsilon_1 = C_2 (\epsilon - \epsilon_1), \\ \frac{1}{C_\Sigma} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{1}{C_\Sigma}, \\ \sigma &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \epsilon, \quad \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} := 2G \end{aligned}$$

Ugyanez a helyzet számtalan rugó sorbakapcsolásánál $[H \sim H \sim \dots \sim H] = [H]$:

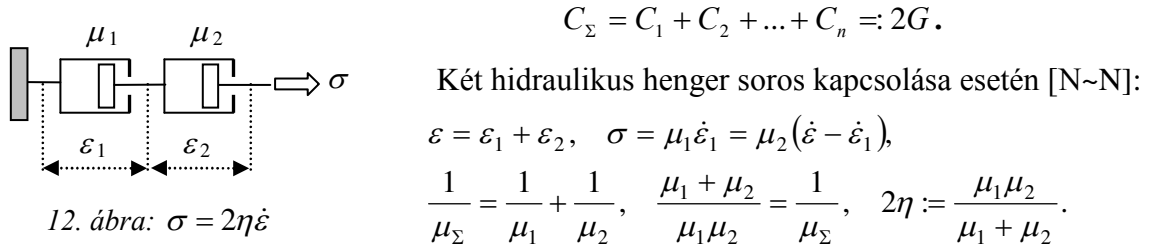
$$\frac{1}{C_\Sigma} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}, \quad C_\Sigma = \frac{C_1 C_2 \dots C_n}{C_1 + C_2 + \dots + C_n} =: 2G,$$

ahol az eredő a reciprokok összegéből adódik.

Két rugó párhuzamos kapcsolása esetében $[H \parallel H] = [H]$:



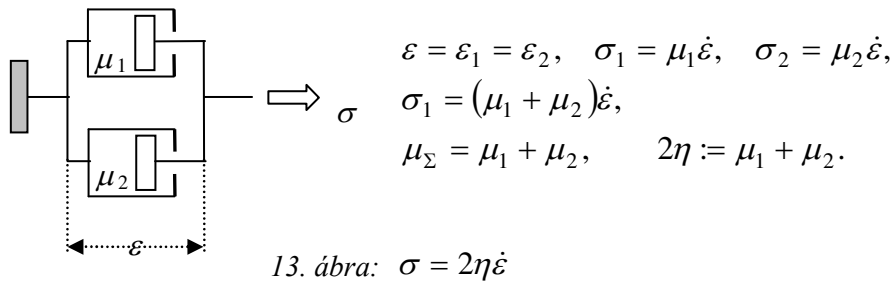
Hasonló a helyzet a több rugó párhuzamos kapcsolásnál $[H \parallel H \parallel \dots \parallel H] = [H]$, csupán itt az eredő egyszerű összeg:



Több henger soros kapcsolása esetén $[N \sim N \sim \dots \sim N] = [N]$:

$$\frac{1}{\mu_\Sigma} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \dots + \frac{1}{\mu_n}, \quad \mu_\Sigma = \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n} =: 2\eta.$$

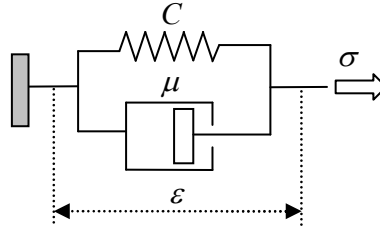
Két hidraulikus henger párhuzamos kapcsolása esetén $[N \parallel N] = [N]$:



Több henger soros kapcsolása esetén $[N \parallel N \parallel \dots \parallel N] = [N]$:

$$\mu_\Sigma = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \quad \sum_{i=1}^n \mu_i =: 2\eta.$$

(E) KELVIN-TEST, amely a HOOKE-test [H] és a NEWTON-test [N] párhuzamos kapcsolásával állítható elő $[K] = [H \parallel N]$:



13. ábra. A Kelvin-test kapcsolási vázlata

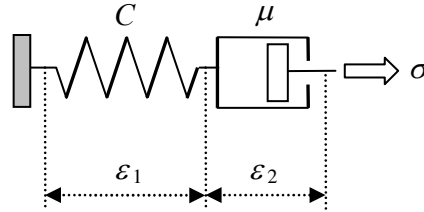
Az erő és elmozdulások összefüggését

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \sigma_1 = C\varepsilon, \quad \sigma_2 = \mu\dot{\varepsilon}, \quad \sigma = C\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}, \quad C := 2G, \quad \mu := 2\eta$$

felírva, a KELVIN-modell anyagegyenlete :

$$\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon}.$$

(F) MAXWELL-TEST, amely a HOOKE-test [H] és a NEWTON-test [N] soros kapcsolásával állítható elő $[M] = [H \sim N]$:



14. ábra. A Maxwell-test kapcsolási vázlata

$$A \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{C}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma}{\mu}, \quad \sigma = \mu\dot{\varepsilon} - \frac{\mu}{C}\dot{\sigma}, \quad \mu := 2\eta, \quad \tau := \frac{\mu}{C}$$

összefüggésekből a MAXWELL-modell anyagegyenlete:

$$\sigma = 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}.$$

4. HÁROM ELEM ÖSSZEKAPCSOLÁSÁVAL ALKOTOTT MODELLEK

Három elem felhasználásával összesen 8 kapcsolási lehetőség állítható elő:

$$[H \sim M], [H \parallel M], [H \sim K], [H \parallel K], [N \sim M], [N \parallel M], [N \sim K], [N \parallel K],$$

azonban ezek között vannak megegyező modellek.

A vizsgálat egyszerűsödik, ha figyelembe vesszük a soros és párhuzamos kapcsolások néhány tulajdonságát. Nevezetesen, bármelyik modell esetén igazak a következő szabályok:

$$\begin{array}{lll}
[A] \parallel [A] = [A] & [A] \parallel [B] = [B] \parallel [A] & ([A] \parallel [B]) \parallel [C] = [A] \parallel ([B] \parallel [C]) \\
[A] \sim [A] = [A] & [A] \sim [B] = [B] \sim [A] & ([A] \sim [B]) \sim [C] = [A] \sim ([B] \sim [C])
\end{array}$$

Ennek megfelelően a háromelemes kapcsolások egyszerűbben is felírhatók, ill. kibonthatók:

- | | | | | | | | | |
|-----|-------------------|-----|---------------------------------|-----|-------------------|-----|-------------|-----------------------------|
| (a) | $[H \sim M]$ | $=$ | $[H \sim (H \sim N)]$ | $=$ | $[H \sim N]$ | $=$ | $[M]$ | Maxwell-test |
| (b) | $[H \parallel M]$ | $=$ | $[H \parallel (H \sim N)]$ | $=$ | | $=$ | $[S]$ | Standard test |
| (c) | $[H \sim K]$ | $=$ | $[H \sim (H \parallel N)]$ | $=$ | | $=$ | $[S]$ | Standard test |
| (d) | $[H \parallel K]$ | $=$ | $[H \parallel (H \parallel N)]$ | $=$ | $[H \parallel N]$ | $=$ | $[K]$ | Kelvin-test |
| (e) | $[N \sim M]$ | $=$ | $[N \sim (H \sim N)]$ | $=$ | $[H \sim N]$ | $=$ | $[M]$ | Maxwell-test |
| (f) | $[N \parallel M]$ | $=$ | $[N \parallel (H \sim N)]$ | $=$ | | $=$ | $[M^\circ]$ | tehetetlenségi Maxwell-test |
| (g) | $[N \sim K]$ | $=$ | $[N \sim (H \parallel N)]$ | $=$ | | $=$ | $[S]$ | Standard test |
| (h) | $[N \parallel K]$ | $=$ | $[N \parallel (H \parallel N)]$ | $=$ | $[H \parallel N]$ | $=$ | $[K]$ | Kelvin-test |

Ebből a 8 lehetőségéből már csak két új anyagmodellt sikerült előállítani, a POYN-
TING-THOMSON-féle standard testet (S) és a tehetetlenségi MAXWELL-testet (M°), miköz-
ben rájöttünk, hogy többféle kapcsolással is előállítható ugyanaz a végeredmény. Az (f)
változat már kivezet az eddigi körből, mert az ε másodrendű időderiváltja (a tehetetlen-
ségi tag) is megjelenik benne, holott a VERHÁS-elemet nem vontuk be.

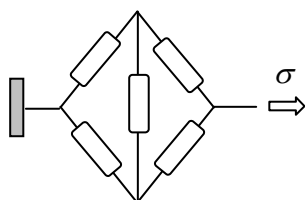
Nem szolgáltatnak új modelleket az alábbi háromelemes kapcsolások:

$$\begin{array}{lll}
[H \sim M] & = & [H \sim (H \sim N)] & = & [H \sim N] & = & [M], \\
[H \parallel K] & = & [H \parallel (H \parallel N)] & = & [H \parallel N] & = & [K], \\
[N \parallel K] & = & [N \parallel (H \parallel N)] & = & [H \parallel N] & = & [K], \\
[N \sim M] & = & [N \sim (H \sim N)] & = & [H \sim N] & = & [M],
\end{array}$$

csupán a MAXWELL- és KELVIN-testet írják le nem két elemmel, hanem hárommal.

A vázolt felírás csak azt teszi lehetővé, hogy a különböző kapcsolások eredőjéről el-
dönthessük, hogy az eddigi modelleket adja-e, vagy pedig olyan újat, amely az eddi-
giektől különbözik. Az eredő modell paramétereit azonban már meglehetősen bonyolult
kiszámítani az általunk is felírt erő- és elmozdulás-összefüggésekből. Sok elem esetén
leleményre és ötletekre, valamint gyakorlatra van szükség.

[FÜLÖP (2008)] bemutatja azt az általános módszert, mely leegyszerűsíti a munkát, s
egyben rögtön látjuk, hogy a feszültség és deformáció hányadrendű deriváltjai jelennek

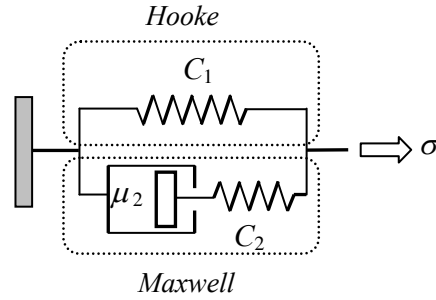


15. ábra

az anyagegyenletben. Ismerteti az összes lehetséges kapcsolat
megtalálásának módját is, az olyanokét is, amelyek nem
írhatók fel soros és párhuzamos kapcsolással, példa erre az
ábrán látható legegyszerűbb eset (ahol a téglalap tetszőleges
modellt jelenthet). Erre úgy tűnik, hogy a reológiai mo-
delleknel nincs szükségünk, mert a termodinamikailag meg-
engedett, több dinamikai változó kiküszöbölésével kapott

kapcsolások úgy tűnik, nem eredményeznek olyan modellt, amelyet a klasszikus soros-párhuzamos kapcsolásokkal ne tudnánk megvalósítani. A termodinamikailag megengedett reológiai modellek pontos osztályozása mindenesetre még további vizsgálatokat igényel.

(G)POYNTING-THOMSON- (VAGY STANDARD) TEST. A HOOKE-test [H] és a MAXWELL-test [M] párhuzamos kapcsolásával állítható elő: $[S] = [H \parallel M] = [H \parallel (H \sim N)]$:



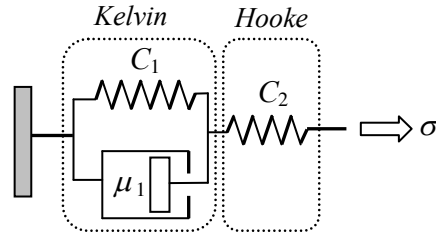
16. ábra. A standard test egyik lehetséges kapcsolási vázlata

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \sigma_1 = C_1 \varepsilon, \quad \sigma_2 = \mu_2 \dot{\varepsilon} - \frac{\mu_2}{C_2} \dot{\sigma}_2 = \mu_2 \dot{\varepsilon} - \frac{\mu_2}{C_2} (\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_1),$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = C_1 \varepsilon + \mu_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \dot{\varepsilon} - \frac{\mu_2}{C_2} \dot{\sigma}, \quad 2G := C_1, \quad 2\eta := \mu_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right), \quad \tau := \frac{\mu_2}{C_2},$$

$$\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk a KELVIN-test [K] és a HOOKE-test [H] soros kapcsolásával: $[S_2] = [K \sim H] = [(H \parallel N) \sim H]$. Ezt egyesek duális standard testnek, vagy STUART-modellnek is nevezik.



17. ábra. A standard test egy másik lehetséges kapcsolási vázlata

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \sigma_1 = C_1 \varepsilon_1 + \mu_1 \dot{\varepsilon}_1, \quad \sigma_2 = C_2 \varepsilon_2,$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\sigma}{2\mu_1} - \frac{C_1}{\mu_1} \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{C_2}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\mu_1} - \frac{C_1}{\mu_1} \varepsilon_1 + \frac{\dot{\sigma}}{C_2} = \frac{\sigma}{\mu_1} + \frac{\dot{\sigma}}{C_2} - \frac{C_1}{\mu_1} \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{C_2} \right),$$

$$\dot{\varepsilon} + \frac{C_1}{\mu_1} \varepsilon = \frac{C_1 + C_2}{\mu_1 C_2} \sigma + \frac{1}{C_2} \dot{\sigma}, \quad \sigma = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon + \frac{\mu_1 C_2}{C_1 + C_2} \dot{\varepsilon} - \frac{\mu_1}{C_1 + C_2} \dot{\sigma},$$

$$2G := C_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \quad 2\eta := \mu_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \quad \tau := \frac{\mu_1}{C_1 + C_2},$$

így a STANDARD modell anyagegyenlete – mindkét kapcsolási vázlat esetén – azonosan

$$\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}$$

alakú.

Erre a két kapcsolási vázlatra érdemes még figyelmet szentelni. Vizsgáljuk meg a (7) termodinamikai követelmények teljesülését. Itt is hangsúlyozzuk, hogy modellünk egydimenziós, a gyakorlati geometriák (henger, szalag, stb.) esetén a hasonló egyenlet megfelelő együtthatóira általában nem állnak fenn ezek az egyenlőtlenségek. Ott természetesen a tenzoregyenleteket kell alapul vennünk. Tudjuk ezen felül, hogy az entrópia konkávitása (illetve egyenértékűen a szabadenergia mechanikai részének konvexitása) megköveteli még ezen kívül a

$$2G > 0$$

egyenlőtlenség teljesülését is. A legegyszerűbb esetet feltételezve a fenti egyenlőtlenségek a rugóállandó valamint a súrlódási tényező pozitivitásával egyenértékűek.

POYNTING-THOMSON-testnél	STUART-modellnél
$2G := C_1 > 0$,	$2G := C_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2} > 0$,
$2\eta := \mu_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) > 0$,	$2\eta := \mu_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2} > 0$
$\tau := \frac{\mu_2}{C_2} > 0$,	$\tau := \frac{\mu_1}{C_1 + C_2} > 0$,
$\frac{\eta}{G} - \tau = \mu_2 \frac{C_2}{C_1 C_2} \geq 0$,	$\frac{\eta}{G} - \tau = \frac{\mu_1}{C_1} - \frac{\mu_1}{C_1 + C_2} \geq 0$.

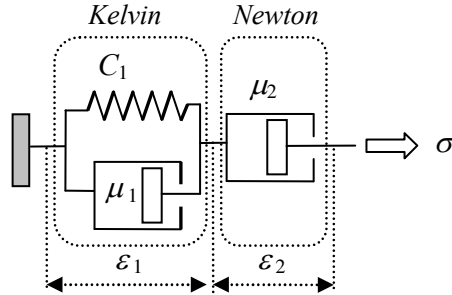
Nézzük meg fordítva is, amikor a modellelemek karakterisztikáit írjuk fel az anyagállandók függvényében, s akkor a

$$(iii) \quad C_i > 0, \quad \mu_i > 0$$

feltételeknek kell teljesülniük:

POYNTING-THOMSON-testnél	STUART-modellnél
(a) $C_1 := 2G > 0$,	(a) $C_1 = \frac{2G2\eta}{2\eta - 2G\tau} > 0$,
(b) $C_2 := \frac{2\eta}{\tau} - 2G > 0$,	(b) $C_2 = \frac{2\eta}{\tau} > 0$,
(c) $\mu_2 := 2\eta - 2G\tau > 0$,	(c) $\mu_1 = \frac{(2\eta)^2}{2\eta - 2G\tau} > 0$
(b) és (c)-ből $\Rightarrow \frac{\eta}{G} - \tau > 0$,	(a) és (c)-ből $\Rightarrow \frac{\eta}{G} - \tau > 0$,

(H) TEHETETLENSÉGI VISZKÓZUS (MAXWELL-) TEST. Jele: $[M^\circ]$. A KELVIN-test $[K]$ és a NEWTON-test $[N]$ soros kapcsolásával állítható elő: $[M^\circ] = [K \sim N] = [(H \parallel N) \sim N]$:



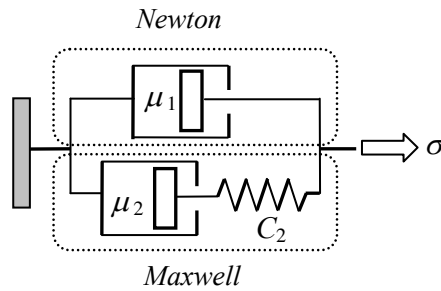
18. ábra. A tehetetlenségi Maxwell-test egy lehetséges kapcsolási vázlata

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 = \sigma_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \sigma_1 = \sigma = C_1 \varepsilon_1 + \mu_1 \dot{\varepsilon}_1, \quad \sigma_2 = \sigma = \mu_2 \dot{\varepsilon}_2, \quad \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_2, \\ \dot{\sigma} &= C_1 \dot{\varepsilon}_1 + \mu_1 \ddot{\varepsilon}_1 = C_1 \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\mu_2} \right) + \mu_1 \left(\ddot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{\mu_2} \right), \quad \frac{C_1}{\mu_2} \sigma + \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \dot{\sigma} = C_1 \dot{\varepsilon} + \mu_1 \ddot{\varepsilon}, \\ \sigma + \frac{\mu_1 + \mu_2}{C_1} \dot{\sigma} &= \mu_2 \dot{\varepsilon} + 2 \frac{\mu_1 \mu_2}{C_1} \ddot{\varepsilon}. \quad 2\eta := \mu_2, \quad \tau := \frac{\mu_1 + \mu_2}{C_1}, \quad \theta := \frac{\mu_1 \mu_2}{C_1}, \\ \sigma &= 2\eta \dot{\varepsilon} - \tau \dot{\sigma} + \theta \ddot{\varepsilon}. \end{aligned}$$

A (7) egyenlőtlenségek itt is láthatóan egyenértékűek az együttthatók pozitivitásával. Vizsgáljuk meg az anyagi tehetetlenség (8) feltételét:

$$2\eta - 2G\tau - \frac{\theta}{\tau} = \frac{\mu_2^2}{\mu_1 + \mu_2} > 0.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk a NEWTON-test $[N]$ és a MAXWELL-test $[M]$ párhuzamos kapcsolásával $[M^\circ] = [N \parallel M] = [N \parallel (H \sim N)]$:



19. ábra. A tehetetlenségi Maxwell-test egy másik kapcsolási vázlata

$$\begin{aligned} \sigma + \frac{\mu_2}{C_2} \dot{\sigma} &= 2(\mu_1 + \mu_2) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_1 \mu_2}{C_2} \ddot{\varepsilon}, \quad 2\eta := 2(\mu_1 + \mu_2), \quad \tau := \frac{\mu_2}{C_2}, \quad \theta := \frac{\mu_1 \mu_2}{C_2}, \\ \sigma &= 2\eta \dot{\varepsilon} - \tau \dot{\sigma} + \theta \ddot{\varepsilon}. \end{aligned}$$

A (7) egyenlőtlenségek itt is láthatóan egyenértékűek az együttthatók pozitivitásával. Az anyagi tehetetlenség (8) feltétele ismét túlcillapított esetet mutat:

$$2\eta - 2G\tau - \frac{\theta}{\tau} = \mu_1 + 2\mu_2 > 0.$$

A három reológiai elem összekapcsolásával az összes lehetséges esetből mindössze a következő hat

1 elemes -	[H]	$\sigma = 2G\varepsilon$,		
	[N]	$\sigma = 2\eta\dot{\varepsilon}$,		
2 elemes -	[K]	$\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon}$,	[H M]	
	[M]	$\sigma = 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}$,	[H~N]	
3 elemes -	[S]	$\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}$,	[H M]	[H~K]
	[M°]	$\sigma = 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma} + \theta\ddot{\varepsilon}$.	[N~K]	[N M]

egymástól független közegmodellt lehetett felépíteni.

5. NÉGY ELEM ÖSSZEKAPCSOLÁSÁVAL ALKOTOTT MODELLEK

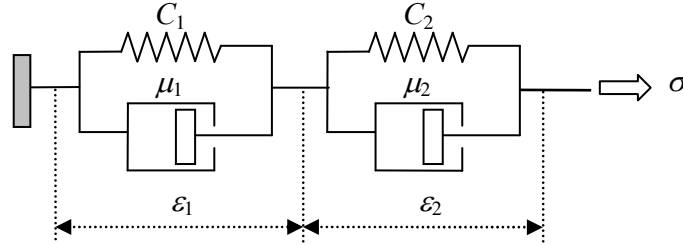
Az összekapcsolt elemek számának növekedésével a lehetséges esetek száma sokszorosára növekedik.

Mi viszont azokat a modelleket, amelyek nem következnek a termodinamika második főtételeiből – a feltételezéseink mellett – nem tekintjük anyagtörvénynek, csak egy önkényes emberi konstrukciónak. Egy dinamikai változóra szorítkozva tehát mindazokat a kapcsolásokat elhagyjuk, ahol a feszültségnél az elsőnél, valamint a deformációnál a másodiknál magasabbrendű időderiváltak szerepelnek.

Ettől két esetben mégis eltérünk. A talajmechanikai irodalomban és polimerek viselkedésének leírásánál sokszor alkalmazott két modellt mégis felírunk (nevezetesen az ún. négyelemes BURGERS-testet, és az ötelemes nevesincs testet), hogy az abszurdításukra rámutathassunk. És ezáltal megóvjuk a kutatókat és alkalmazókat attól, hogy – alaposabb vizsgálat nélkül – a bonyolultabb reológiai modellekről azt higgyék, jobb közelítései a valóságnak.

Az eddig felírt hatféle kapcsolat alapján, az ezekből felépíthető 4 elemes kapcsolások 2+2 elemes és az 1+3 elemes kapcsolat, amelyek között mindössze két újabb reológiai modell van.

(I) TEHETETLENSÉGI STANDARD TEST. Jele: $[S^\circ]$. A 2+2 elemes kapcsolások közül a két sorba kapcsolt KELVIN-test szolgáltat újabb modellt:



20. ábra. A tehetetlenségi standard test egy lehetséges kapcsolási vázlata

$$\sigma + \frac{\mu_1 + \mu_2}{C_1 + C_2} \dot{\sigma} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon + \frac{C_1 \mu_2 + C_2 \mu_1}{C_1 + C_2} \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_1 \mu_2}{C_1 + C_2} \ddot{\varepsilon},$$

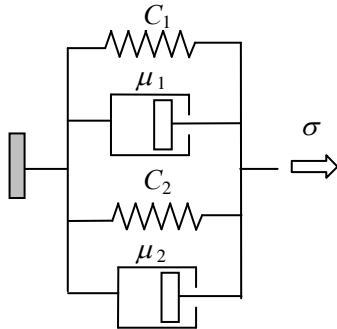
$$\tau := \frac{\mu_1 + \mu_2}{C_1 + C_2}, \quad 2G := \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad 2\eta := \frac{C_1 \mu_2 + C_2 \mu_1}{C_1 + C_2}, \quad \theta := \frac{\mu_1 \mu_2}{C_1 + C_2},$$

$$\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}.$$

A (7) egyenlőtlenségek itt is láthatóan következnek az együtthatók pozitivitásából. Vizsgáljuk meg az anyagi tehetetlenség (8) feltételét:

$$2\eta - 2G\tau - \frac{\theta}{\tau} = \frac{(c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1)^2}{(c_1 + c_2)^2 (\mu_1 + \mu_2)} > 0$$

Két párhuzamosan kapcsolt KELVIN-test



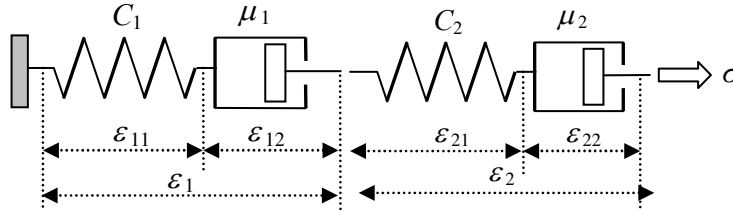
$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = C_1 \varepsilon + \mu_1 \dot{\varepsilon} + C_2 \varepsilon + \mu_2 \dot{\varepsilon},$$

$$\sigma = (C_1 + C_2) \varepsilon + (\mu_1 + \mu_2) \dot{\varepsilon}$$

ugyanacsak KELVIN-testet eredményez.

21. ábra

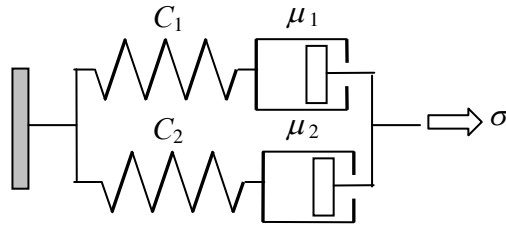
Két sorba kapcsolt MAXWELL-test



22. ábra

ugyancsak MAXWELL-testet eredményez.

Két párhuzamosan kapcsolt MAXWELL-test eredője:

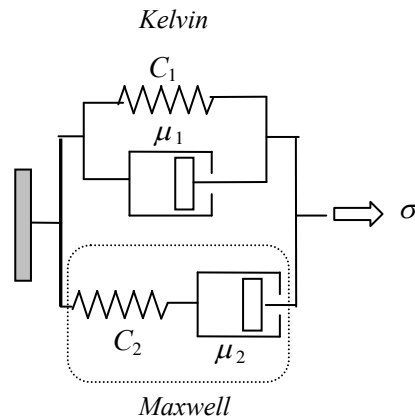


23. ábra

$$\sigma = (2\eta_1 + 2\eta_2)\dot{\epsilon} - \left(\frac{\eta_1}{G_1} + \frac{\eta_2}{G_2} \right) \ddot{\sigma}$$

szintén MAXWELL-test.

A tehetetlenségi standard testet további kapcsolásokkal is előállíthatjuk (ld. például a 24. ábrát).



24. ábra. A tehetetlenségi standard test egyéb lehetséges kapcsolási vázlata

$$2G := C_1, \quad 2\eta := \frac{C_1\mu_2 + C_2(\mu_1 + \mu_2)}{C_2}, \quad \theta := \frac{\mu_1\mu_2}{C_2}, \quad \tau := \frac{\mu_2}{C_2},$$

$$\sigma = 2G\epsilon + 2\eta\dot{\epsilon} + \theta\ddot{\epsilon} - \tau\dot{\sigma}.$$

Itt az anyagi tehetetlenség (8) feltétele:

$$2\eta - 2G\tau - \frac{\theta}{\tau} = \mu_2 > 0$$

Nézzük meg fordítva is, amikor a modellelemek karakterisztikáit írjuk fel az anyag-állandók függvényében, most már csak az első modellre:

$$C_1 = 2G, \quad C_2 = \frac{2\eta}{\tau} - 2G - \frac{\theta}{\tau^2}, \quad \mu_1 = \frac{\theta}{\tau}, \quad \mu_2 = 2\eta - 2G\tau - \frac{\theta}{\tau}.$$

A (7) egyenlőtlenségek a következők [SZERK. ASSZONYI (2006), 63-65. o.]:

$$(1) \quad 2\eta > 0, \quad \tau > 0, \quad \frac{\eta}{G} - \tau > 0, \quad \theta > 0.$$

Természetesen a $2G > 0$ feltétel továbbra is fennáll. Annak érdekében, hogy minden feltétel feltáruljon előttünk, egymás mellé írjuk fel az anyagállandókra érvényes ONSAGER-féle feltételeket és az elemek karakterisztikájának pozitív voltából adódó feltételeket:

FELTÉTELEK

AZ ANYAGÁLLANDÓKKAL	AZ ELEMKARAKTERISZTIKÁKKAL
$2G := C_1 > 0$,	(a) $C_1 := 2G > 0$,
$2\eta := \mu_1 + \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\mu_2 > 0$,	(b) $C_2 := \frac{2\eta}{\tau} - 2G - \frac{\theta}{\tau^2} > 0$,
$\tau := \frac{\mu_2}{C_2} > 0, \quad \theta := \frac{\mu_1\mu_2}{C_2} > 0$,	(c) $\mu_1 := \frac{\theta}{\tau} > 0$,
$\frac{\eta}{G} - \tau := C_2(\mu_1 + \mu_2) > 0$,	(d) $\mu_2 := 2\eta - 2G\tau - \frac{\theta}{\tau} > 0$.

Az anyagi tehetetlenség (8) feltétele,

$$2\eta - 2G\tau - \frac{\theta}{\tau} = \mu_2 > 0$$

leolvasható az együtthatók pozitivitására vonatkozó (b) és (d) feltételekből. Hasonlóan az előzőekhez, ez erősebb az ONSAGER-i $\frac{\eta}{G} - \tau > 0$ feltételnél, vagyis e szerint a deformációk késési idejének és a relaxációs időnek a különbsége nem csak éppen pozitív, tehát $t_{def} > t_{rel}$, hanem határozottan pozitív:

$$t_{def} := \frac{\eta}{G} > 0, \quad t_{rel} := \tau > 0, \quad \Delta t := \frac{\eta}{G} - \tau = t_{def} - t_{rel} > t_{teh} > 0, \quad t_{teh} := \frac{\theta}{2G\tau} > 0,$$

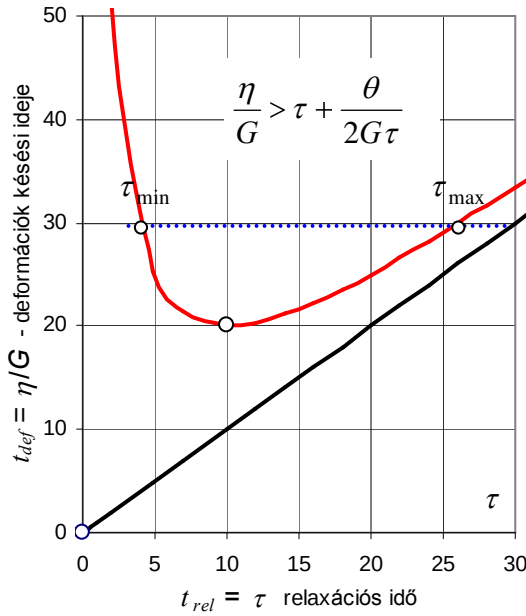
ahol

- t_{def} – a deformációk késési ideje,
- t_{rel} – a relaxációs idő, és
- Δt – a kettő differenciája,
- t_{teh} – a tehetetlenségi idő.

Ha a Δt zérus, akkor az anyag hasonlóan viselkedik, mint a rugalmas HOOKE-test, mert a deformációk pont annyit késnek, mint amennyit a feszültség relaxálódik, tehát a közeg időfüggetlen viselkedést mutat [ha a kezdeti feltételekre teljesül $\sigma(0) = 2G\varepsilon(0)$, akkor bármikor később is $\sigma(t) = 2G\varepsilon(t)$]. Holott az anyag t_{teh} tehetetlenségi ideje nem zérus. Tehát a lineáris reológiai elemek értékének pozitivitása sem egyenértékű a termo-

dinamikai feltételekkel, azoknál gyengébb követelményrendszert jelent, mert nem engedi meg a (8) feltételnél a jobboldal negatív voltát.

Vizsgáljuk meg az $\frac{\eta}{G} - \tau > \frac{\theta}{2G\tau}$ feltételt részletesebben.

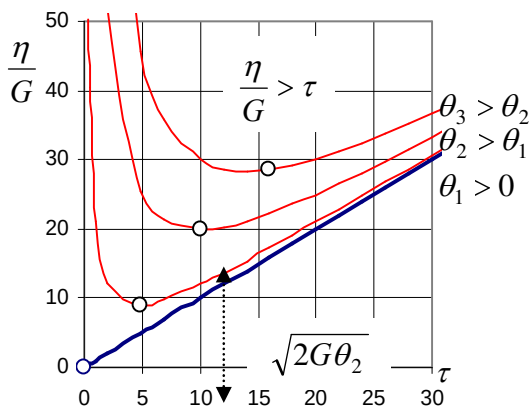


25. ábra

rögzített G , η és θ mellett: $\tau^2 - \frac{\eta}{G}\tau + \frac{\theta}{2G} < 0$, és τ -ra a

$$\tau_{\min} := \left(\frac{\eta}{G}\right) - \sqrt{\left(\frac{\eta}{G}\right)^2 - 2\left(\frac{\theta}{G}\right)} < \tau < \left(\frac{\eta}{G}\right) + \sqrt{\left(\frac{\eta}{G}\right)^2 - 2\left(\frac{\theta}{G}\right)} =: \tau_{\max}$$

feltétel adódik (ezt az ábrán a vízszintes egyenes metszéspontja jelöli ki.) Ekkor a diszkrimináns értékétől függően három eset lehetséges:



26. ábra. Az anyagállandók értelmezési tartománya különböző rögzített θ esetén

Ha belegondolunk, ez a feltétel a G , η , τ , θ anyagállandók által kifeszített négydimenziós térben – annak is a pozitív kvadránsában ($G > 0$, $\eta > 0$, $\tau > 0$, $\theta > 0$) – egy háromdimenziós felülettel elhatárolt térrészt ad meg. A 25. ábrán rögzített $\theta/2G = \text{const}$ értéknél ábrázoltuk a hiperbolát, amely a $\frac{\eta}{G} = \tau$ egyeneshez tart aszimptotikusan. En-

nek a görbének minimuma van a $\tau = \sqrt{\frac{\theta}{2G}}$

helyen $\frac{\eta}{G} = \sqrt{\frac{2\theta}{G}}$ értékkel. Ha a feltételt másodfokú egyenletnek tekintjük, akkor

$$(a) \left(\frac{\eta}{G}\right)^2 - 2\left(\frac{\theta}{G}\right) > 0, \quad \Leftrightarrow \quad \eta^2 > 2G\theta,$$

$$(b) \left(\frac{\eta}{G}\right)^2 - 2\left(\frac{\theta}{G}\right) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \eta^2 = 2G\theta,$$

ez a hiperbola minimuma, s ez azt az abszurd esetet adná, amikor az anyagállandók száma eggyel csökkenne, pl.

G, η, τ, θ helyett $G, \eta, \tau, \theta = \eta^2 / 2G$,
s így

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta \dot{\varepsilon} + \frac{\eta^2}{2G} \ddot{\varepsilon},$$

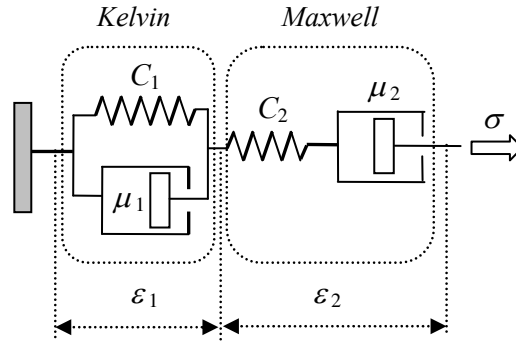
$$(c) \left(\frac{\eta}{G} \right)^2 - 2 \left(\frac{\theta}{G} \right) < 0, \quad \Leftrightarrow \quad \eta^2 < 2G\theta, \text{ s ekkor nincs valós megoldás.}$$

Elemzésünk, eddigi példáinkkal szemléltetve, tehát megmutatja, hogy a termodinamikai feltételek, azaz a második főtétel követelményrendszerének figyelmen kívül hagyása redukálja a lehetséges anyagmodellek körét. További példákat találhatunk [VERHÁS, 1985] könyvében.

(J) BURGERS-modell. Jele: [B]. Ennek a modellnek 4 alapelemből történő előállítását egy KELVIN- és egy MAXWELL-modell soros kapcsolásával történik ([B] = [K~M]). Ez a modell azonban a feszültség másodrendű időderiváltjának a megjelenésével kivezet abból a körből, amely a reális anyagtörvényt tartalmazza. Ugyanis az entrópia növekedése alapján levezetett anyagtörvény

$$F(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}) = 0$$

alakú.



27. ábra. A Burgers-test kapcsolási vázlata

$$\sigma = \frac{\mu_1 \mu_2}{C_1} \dot{\varepsilon} + \mu_2 \ddot{\varepsilon} - \left(1 + \frac{\mu_1}{C_1} + \frac{\mu_2}{C_2} \right) \dot{\sigma} - \frac{\mu_1}{C_1} \frac{\mu_2}{C_2} \ddot{\sigma},$$

$$2\eta := \frac{\mu_1 \mu_2}{C_1}, \quad \theta := \mu_2, \quad \tau := 1 + \frac{\mu_1}{C_1} + \frac{\mu_2}{C_2}, \quad \zeta := \frac{\mu_1}{C_1} \frac{\mu_2}{C_2},$$

$$\sigma = 2\eta \dot{\varepsilon} + \theta \ddot{\varepsilon} - \tau \dot{\sigma} - \zeta \ddot{\sigma}.$$

Bár a BURGERS-modellt széles körben alkalmazzák, mégsem tekintjük a reális szilárd testek lehetséges anyagtörvényének. Nem függ az ε -tól, csupán annak időszerinti deriváltjaitól. Ennek számos következménye van, pl. terhelés hatására nem jelenik meg azonnali rugalmas deformáció. Számos esetben alkalmazzák talajmechanikai problémáknál, s minden esetben helyesebb megoldást kapunk a standard test alkalmazásával. Két

dinamikai változóval, termodinamikai modellként történő előállítása további vizsgálatokat igényel.

6. A RUGALMASSÁGTANI MODELLEK ÖSSZEFOGLALÁSA

Az előzőekben láttuk, hogy a két alapelem – [H] rugó és [N] henger – kombinációjaként (soros és párhuzamos kapcsolással) az összes lineáris reológiai modell felrajzolható. Ez önmagában azonban csak öncélú játék, mert csak azok a modellek vehetők figyelembe, amelyeket a

$$(4) \quad \sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma} + \theta\ddot{\varepsilon}$$

anyagtvörvény magába foglal az együtthatókra vonatkozó előjel-megszorításokkal együtt.

Ez többek között azt jelenti, hogy a (4)-ben lévő anyagállandók közül egyeseket zérusnak tekinthetünk. Ezek a *rugalmas* modellek a megszokott elnevezéseik feltüntetésével a következők:

A tehetetlenségi (gyorsulási) tag nélküli modellek:

- | | |
|---|---|
| 1. $\sigma = 0$ | [PASCAL-(folyadék) test] ³ |
| 2. $\sigma = 2G\varepsilon$ | [HOOKE- (rugalmas) test] |
| 3. $\sigma = 2\eta\dot{\varepsilon}$ | [NEWTON-(folyadék) test] |
| 4. $\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon}$ | [KELVIN-VOIGT- (rugalmas-viszkózus) test] |
| 5. $\sigma = 2G\varepsilon - \tau\dot{\sigma}$ | [<i>Rugalmas-relaxációs test</i>] |
| 6. $\sigma = 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}$ | [MAXWELL-(folyadék) test] |
| 7. $\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}$ | [POYNTING-THOMSON-(standard) test] |

Mint láttuk, a dőlt betűvel szedett rugalmas-relaxációs modell nem reális anyagmodell, mivel a (7) harmadik egyenlőtlensége nem teljesülhet. Ezzel azt is mondjuk, hogy a termodinamika második főtétele nem engedi meg, vagyis fizikai realitása nincs, noha matematikai realitása van. Ez az állítás könnyen belátható, ha a standard modellből indulunk ki, 2 rugó [C_1 és C_2], valamint egy henger [μ_2] kapcsolás formájában előállítva. Ekkor az anyagállandói a következők:

$$2G := C_1, \quad 2\eta := \mu_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right), \quad \tau := \frac{\mu_2}{C_2}.$$

³ Ezt csak a felsorolás teljessége kedvéért szerepeltettük, azonban reális anyagmodellnek nem tekinthető.

A RUGALMAS-RELAXÁCIÓS MODELL esetén a 2η -nak zérusnak kellene lennie, ez azonban nem lehetséges, mert $\mu_2 = 0$ esetén, a $\tau = 0$, tehát a HOOKE-testet kapjuk, $1 + C_1 / C_2 = 0$ esetén pedig valamelyik rugóállandónak kellene negatívnak lenni, ami nem lehetséges.

A tehetetlenségi (gyorsulási) tagot figyelembe vevő modellek:

1. $\sigma = \theta \ddot{\varepsilon}$ [tehetetlenségi PASCAL-test]
2. $\sigma = 2G\varepsilon + \theta \ddot{\varepsilon}$ [tehetetlenségi HOOKE-test]
3. $\sigma = 2\eta \dot{\varepsilon} + \theta \ddot{\varepsilon}$ [tehetetlenségi NEWTON-test]
4. $\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta \dot{\varepsilon} + \theta \ddot{\varepsilon}$ [tehetetlenségi KELVIN-test]
5. $\sigma = 2G\varepsilon - \tau \dot{\sigma} + \theta \ddot{\varepsilon}$ [tehetetlenségi rugalmas-relaxációs test]
6. $\sigma = 2\eta \dot{\varepsilon} - \tau \dot{\sigma} + \theta \ddot{\varepsilon}$ [tehetetlenségi MAXWELL-test]
7. $\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta \dot{\varepsilon} - \tau \dot{\sigma} + \theta \ddot{\varepsilon}$ [tehetetlenségi standard test]

Ebben az esetben még rosszabb a helyzet, mert az első 5 egyenlet ír le fizikailag irreális modellt.

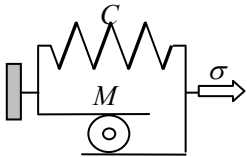
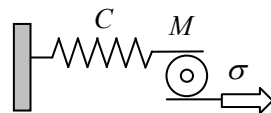
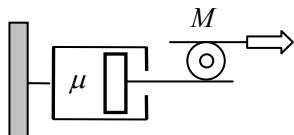
Itt és most felvethető lenne, hogy ez azért van, mert mindössze két modellelemmel dolgoztunk, de ha megvizsgáljuk a VERHÁS-test (3. ábra) bevonásával adódó lehetőségeket, akkor már más a helyzet.

7. RUGALMASSÁGTANI MODELLEK VERHÁS-ELEMMELEL

Az anyagtörvény csak az

$$F(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}) = 0$$

összefüggésnek megfelelő változókat tartalmazhatja. A VERHÁS-test bekapcsolásával megjelenhetnek a feszültségek elsőnél magasabbrendű, és a deformációk másodiknál magasabbrendű időderiváltjai is. A háromelemes kapcsolásig lehetséges eseteket a következő táblázat tartalmazza:

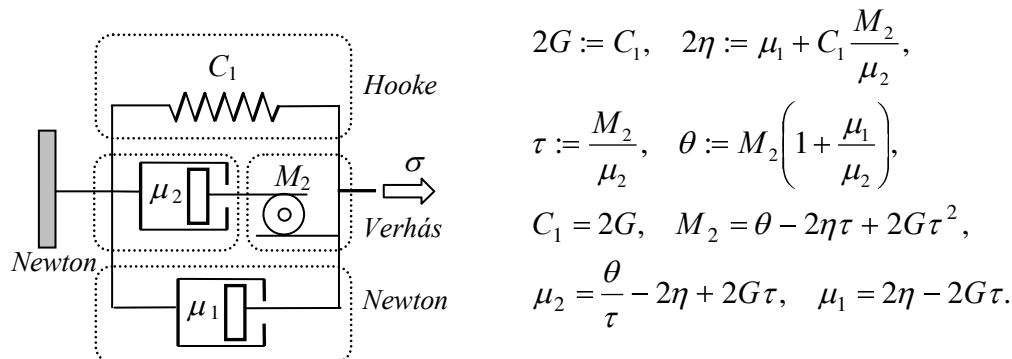
(A) tehetetlenségi HOOKE-test $\sigma = 2G\varepsilon + \theta \ddot{\varepsilon}$	(B) tehetetlenségi nevesincs-test $\sigma + \zeta \ddot{\sigma} = \theta \ddot{\varepsilon}$	(C) tehetetlenségi Relaxációs test $\sigma = -\tau \dot{\sigma} + \theta \ddot{\varepsilon}$
		

(D) <i>Tehetlenségi</i> NEWTON-test $\sigma = 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}$	(E) <i>tehetlenségi</i> <i>nevesincs-test</i> $\sigma + \tau\dot{\sigma} = 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} + \mathcal{G}\ddot{\varepsilon}$	(F) <i>tehetlenségi</i> KELVIN-test $\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}$

28. ábra

Az ábrán látható modellek – az (e) kivételével – csupán rugóval és hengerrel nem állíthatók elő. Kérdés, hogy van-e egyáltalán szükség ezekre?

A tehetlenségi standard test VERHÁS-elemmel történő egyik előállítás a következő:



29. ábra. A tehetlenségi standard modell kapcsolási vázlata

Az anyagi tehetlenség (8) feltétele most alulcsillapított esetet jelez:

$$2\eta - 2G\tau - \frac{\theta}{\tau} = -\mu_2 < 0.$$

Eddig két lehetőség merült fel a standard test anyagtörvényének kapcsolási vázlattal való szemléltetéséhez:

- vagy csak kétféle elemből, a standard testhez egy μ_1 karakterisztikájú henger párhuzamos kapcsolásával építjük fel a *tehetlenségi standard* modellt,
- vagy háromféle elemből építjük fel, s az előbbi tehetlenségi standard testnél egy rugót kicserélünk egy M_2 karakterisztikájú tárcsával.

A két lehetőség között azonban óriási a különbség, annak ellenére, hogy matematikailag azonos alakú eredő egyenletet szolgáltatnak. Az anyagtörvény kapcsolási vázla-

tának előállítása valójában indifferens számunkra, azonban lényeges, hogy milyen információkat közvetít számunkra.

Az első esetben az anyagtörvény mindössze kétféle modellelemből épül fel. Vagyis valószínűsíthető, hogy az anyagnak mechanikai szempontból mindössze *két* alapvető tulajdonsága van: a rugalmas alakváltozás képessége (a rugalmasság) és az azt gátolni igyekvő belső súrlódás (a viszkozitás).

A második esetben az anyagtörvény háromféle modellelemből épül fel. Vagyis valószínűsíthető, hogy az anyagnak mechanikai szempontból *három* alapvető tulajdonsága van: a rugalmas alakváltozás képességén és az azt gátolni igyekvő (sebességgel arányos) belső súrlódáson kívül az azt gátolni igyekvő (gyorsulással arányos) belső súrlódás.

Fel van adva a lecke. Melyik feltevés fejezi ki helyesen az anyag tulajdonságait fenomenológiai szinten, a rugalmas állapotban?

Ha azt nézzük, hogy a természet egyszerűsége törekszik, akkor az első esetet kéne elfogadnunk. Ha azt tekintjük, hogy a természet végtelenül sokszínű, akkor a második esetet kellene valószínűsíteni. Látható, hogy a termodinamikailag megengedett alulcsillapított reológiai modellek előállításához, azaz a tehetetlenségi feltétel negatív előjellel történő teljesüléséhez, szükség van a VERHÁS-elemre. Vagyis a termodinamikai feltételek olyan további belső mechanizmust jeleztek előre, amit csupán a hagyományos elemek kapcsolgatásával nem lehetett előre látni. Ennek bevonása jelentősen kiterjeszti a lehetséges alkalmazások körét. Egyelőre nem tudjuk, milyen anyagokra jellemző ennek a fajta új belső tulajdonságnak a megjelenése.

Ismét vizsgáljuk meg részletesebben is a fenti kérdést. Kövessük a megszokott utat, s írjuk fel az ONSAGER-féle vezetési törvényhez tartozó termodinamikai egyenlőtlenségeket, amelyeket a vezetési tenzor mátrixának pozitív definit voltából következik, valamint a modellkarakterisztikák pozitivitását. Ezt a következő táblázat tartalmazza:

FELTÉTELEK

AZ ANYAGÁLLANDÓKKAL	AZ ELEMKARAKTERISZTIKÁKKAL
$2G := C_1 > 0$,	(a) $C_1 := 2G > 0$,
$2\eta := \mu_1 + C_1 \frac{M_2}{\mu_2} > 0$,	(b) $\mu_1 = 2\eta - 2G\tau > 0$,
$\tau := \frac{M_2}{\mu_2} > 0$, $\theta := M_2 \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)$,	(c) $\mu_2 = \frac{\theta}{\tau} - (2\eta - 2G\tau) > 0$,
$\frac{\eta}{G} - \tau := \frac{\mu_1}{C_1} \geq 0$,	(d) $M_2 = \theta - (2\eta - 2G\tau)\tau > 0$,

A (b)-ből a már megszokott $\frac{\eta}{G} - \tau > 0$ feltétel adódik, viszont a (c)-ből és (d)-ből egy meglepő

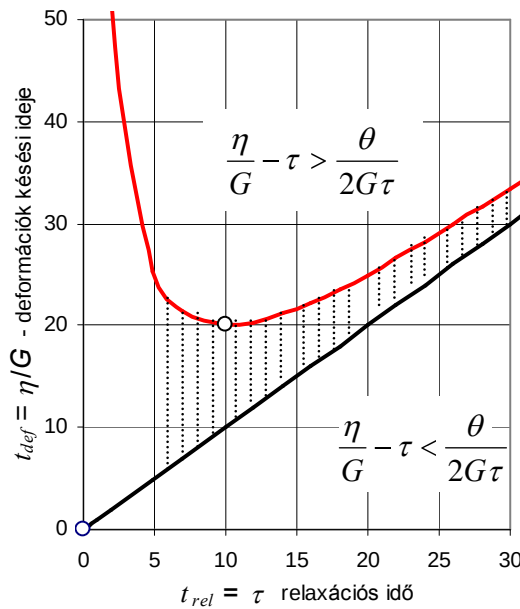
$$\frac{\theta}{2G\tau} > \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right)$$

feltételt kapunk. Ez pontosan az ellentettje a VERHÁS-elem nélküli kapcsolásnál kapott-nak. Az $\frac{\eta}{G} - \tau$ értéke nemcsak pozitív, hanem nagyobb, mint $\theta/2G\tau$ az első esetben, és kisebb, mint $\theta/2G\tau$ a másodikban:

$$\underbrace{\frac{\theta}{2G\tau} > \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right)}_{\substack{\text{Verhás elemmel} \\ \text{alulcsillapított}}} , \quad \underbrace{\left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) > \frac{\theta}{2G\tau}}_{\substack{\text{Verhás elem nélkül} \\ \text{túlcsillapított}}} .$$

Ebből következik, hogy a két kapcsolási vázlat – annak ellenére, hogy ugyanazt a $\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma}$ anyagtörvényt modellezi – mégsem ekvivalens egymással.

A $\frac{\eta}{G} - \tau > \frac{\theta}{2G\tau}$ feltételt szolgáltató kapcsolást neveztük „túlcsillapított” esetnek, míg a



30. ábra

$\frac{\eta}{G} - \tau < \frac{\theta}{2G\tau}$ feltételt adó megoldást „alulcsillapított” esetnek.

Láthatjuk, hogy a két különféle kapcsolás sohasem fedheti át egymást, hanem két komplementer/diszjunkt paraméter tartomány fedhető le velük. Ezt tükrözi a 30. ábrán látható kép, amely a 25. ábra most már kiegészítve a VERHÁS-elemes modell feltételével.

Előzetesen általában nem tudjuk, hogy anyagunk „alulcsillapított”, vagy „túlcsillapított” közegként viselkedik-e.

Amikor laboratóriumi vagy in-situ mérésekből meghatározzuk az anyagállandók értékét, akkor tudjuk eldönteni, hogy melyik esettel állunk szemben. Azonban ez az estlegesség nehezen elfogadható. Utólag megállapítani, melyik kapcsolás tartozik az anyaghoz? Talán kéne lennie egy olyan kapcsolásnak, amely egybefoglalja az „alul-” és a „túl-” csillapított esetet is.

Spekulatív úton feltételezhetjük például, hogy van olyan anyag, amelynél $\theta \approx 0$. Ekkor a hiperbola az egyeneshez simul.

A VERHÁS-elem nélküli modellnél ez nem jelent problémát, mert

$$\left. \frac{\theta}{2G\tau} \right|_{\theta=0} = 0 < \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right),$$

vagyis a termodinamikai feltételt kapjuk.

A VERHÁS-elemmel felépített modellnél ez a feltevés viszont ellentmondásra vezet:

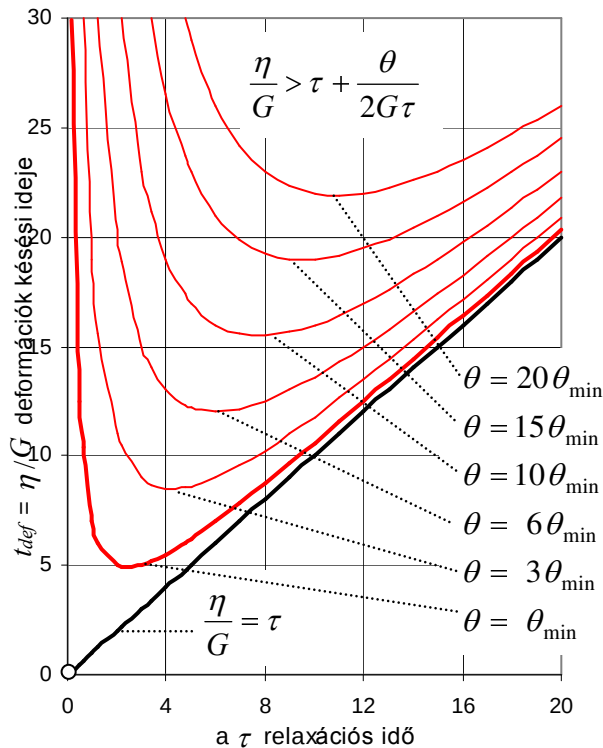
$$\left. \frac{\theta}{2G\tau} \right|_{\theta=0} = 0 > \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right),$$

mert $\eta/G - \tau$ mindig pozitív, s ezáltal sérül a termodinamikai feltétel. Ez viszont csak azt jelenti, hogy a 28. ábrán látható kapcsolásból kikapcsoljuk a VERHÁS-elemet, akkor nem kapunk standard modellt, hanem csak egy KELVIN-testet.

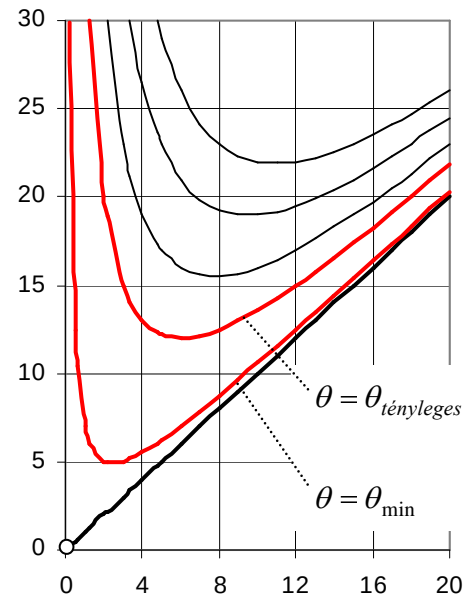
Rögzített θ érték esetén kiderül, hogy a θ alulról korlátos, és a θ minimuma:

$$\left. \frac{\theta}{2G\tau} \right|_{\min} = \frac{\theta_{\min}}{2G\tau} = \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) > 0 \text{ feltételből } \theta_{\min} = 2G\tau \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) = 2\eta\tau - 2G\tau^2 > 0.$$

A következő ábrán látszik, hogy rögzített θ értékek mellett csak a hiperbola fölötti tartomány jöhet számításba:



Tehát a θ értéke nem lehet kisebb, mint a $\theta_{\min}$, akkor pedig a VERHÁS-elem nélküli



31. ábra

$$\frac{\eta}{G} > \tau + \frac{\theta_{\min}}{2G\tau}$$

feltételnek kell teljesülnie. Esetleg azt mondjuk, hogy egy $\theta > \theta_{\min}$ értéknél a minimális és a tényleges hiperbolák közötti területről van szó (ld. 32. ábra). Ekkor a következő feltételek igazak:

$$\frac{\eta}{G} > \tau + \frac{\theta_{\min}}{2G\tau} \text{ és } \frac{\eta}{G} < \tau + \frac{\theta_{\text{tényleges}}}{2G\tau},$$

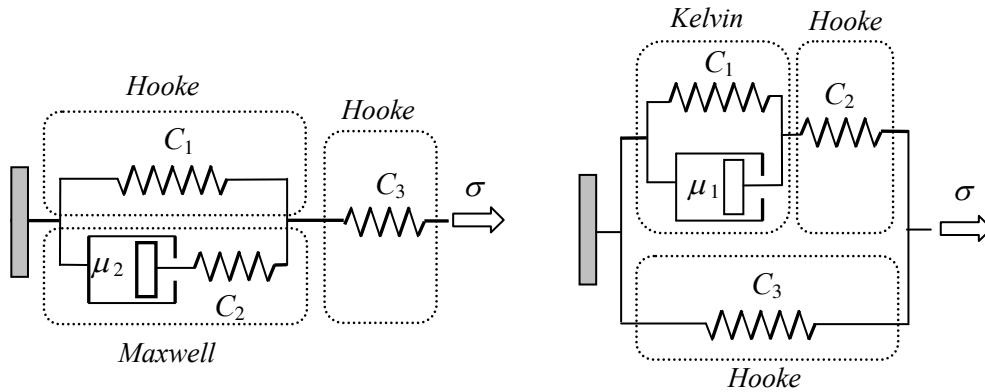
vagyis

$$\frac{\theta_{\min}}{2G\tau} < \frac{\eta}{G} - \tau < \frac{\theta_{\text{tényleges}}}{2G\tau}.$$

Annak eldöntéséhez, hogy két elemmel, vagy hárommal kell-e reprezentálni az anyagtörvényt, közelebb jutottunk. A végleges választ, a VERHÁS-elem bevonása nélkül nem leírható anyagok felismerését és osztályozását kísérleti vizsgálatoknak kell megadniuk.

8. NÉGYNÉL TÖBB ELEM ÖSSZEKAPCSOLÁSÁVAL ALKOTOTT MODELLEK

Négynél több elemmel is felépíthetjük az eddig tárgyalt rugalmas reológiai testeket, ennek általában azonban sok értelme nincs, mert négy anyagállandó előállításához miért használjunk fel négynél több elemet. Példaképpen felsorolunk két négy elemből felépített standard modellt [HORVÁTH, R. (1985)]:

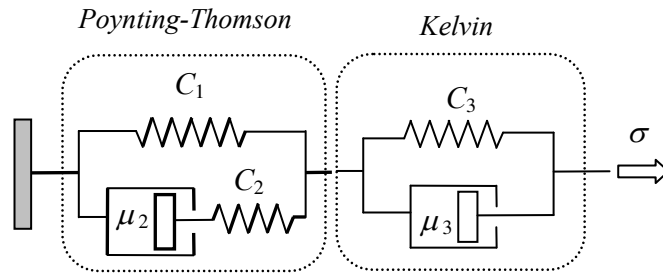


33. ábra

Újdonságot azok a kapcsolások jelentenek, amelyek eltérnek az eddig tárgyaltaktól. Ezek azonban már kivezetnek a $F(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}) = 0$ feltételt kielégítő testek köréből, vagyis mindegyik négynél több anyagállandót tartalmaz. Vagyis $\dot{\sigma}$ -nál, vagy $\ddot{\varepsilon}$ -nál magasabbrendű időderiváltak is megjelennek a konstitutív egyenletben. Mivel azok nem

eredményeznek egy dinamikai változóval leírható termodinamikai rendszert, ezért csak két esetet vizsgálunk.

(K) ÖTPARAMÉTERES MODELL. Csak tájékoztatási cézzal mutatjuk még be a gyakorlati alkalmazásoknál ugyancsak felbukkanó – a standard és a KELVIN-test párhuzamos kapcsolásával felépíthető – ötparaméteres modellt ([5A] = [PT]~[K]), amelynek önálló neve sincs.



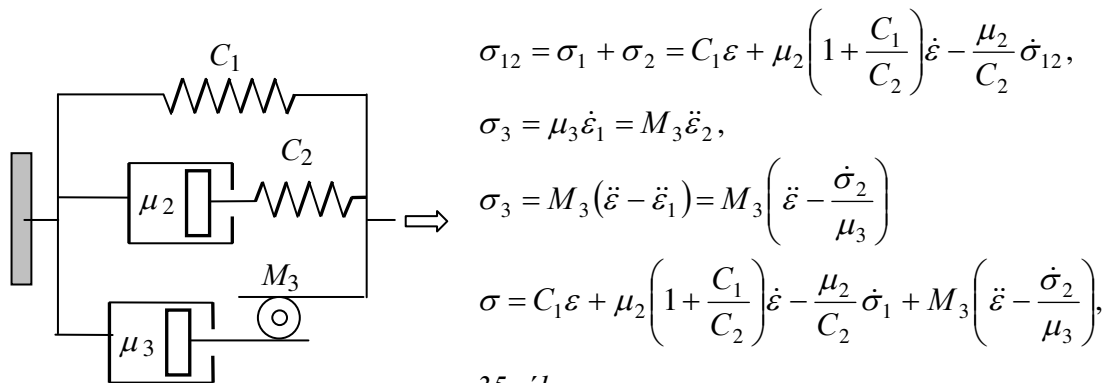
34. ábra. Az ötparaméteres modell kapcsolási vázlata

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} + \zeta \ddot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta \dot{\varepsilon} + \theta \ddot{\varepsilon},$$

$$\tau := \frac{(2C_1 + C_2 + C_3)\mu_2 + C_2\mu_3}{(C_1 + C_3)C_2}, \quad \zeta := \frac{(C_1 + C_2)\mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_3C_2}{(C_1 + C_3)C_2},$$

$$2G := \frac{C_1C_3}{C_1 + C_3}, \quad 2\eta := \frac{(C_1 + C_2)C_3\mu_2 + C_1C_2\mu_3}{(C_1 + C_3)C_2}, \quad \theta := \frac{(C_1 + C_2)C_3\mu_2}{(C_1 + C_3)C_2} \ddot{\varepsilon}.$$

(L) ÖTPARAMÉTERES TEHETETLENSÉGI STANDARD MODELL. Öt elem felhasználásával felépített tehetetlenségi standard modell azért tarthat érdeklődésre számot, mert feloldja az „alucsillapított” és „túlcsillapított” kapcsolás közötti dilemmát, a két komplementer tartományt egybeolvasztja.



35. ábra

legyen $\frac{\mu_2}{C_2} = \frac{M_3}{\mu_3}$, s ekkor

$$\sigma + \frac{\mu_2}{C_2}\dot{\sigma} = C_1\varepsilon + \mu_2\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)\dot{\varepsilon} + M_3\ddot{\varepsilon},$$

ahol

$$\tau := \frac{\mu_2}{C_2}, \quad 2G := C_1, \quad 2\eta := \mu_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right), \quad \theta := M_3 \varepsilon,$$

$$C_1 = 2G, \quad M_3 = \theta, \quad C_2 = \frac{2\eta}{\tau} - 2G, \quad \mu_3 = \theta\tau, \quad \mu_2 = 2\eta - 2G\tau$$

Vegyük észre, hogy a termodinamikai egyenlőtlenségrendszer [(7) és a $2G > 0$ feltétel] itt is egyenértékű az együtthatók pozitivitásával. Az anyagi tehetetlenség (8) feltétele viszont most a

$$2\eta - 2G\tau - \frac{\theta}{\tau} = \mu_2 - \frac{M_3 c_2}{\mu_2}$$

formában áll fenn, reprezentálva ezáltal mindkét termodinamikailag megengedett tartományt. Az anyagi tehetetlenséget és a csillapítást jól jellemezhetjük a FÜLÖP T. által bevezetett jellemzőkkel [FÜLÖP (2008)]:

Csillapítási index: $I_\eta = 2\eta - 2G\tau > 0$ [MPa h],

Tehetetlenségi index: $I_\theta = \theta - 2\eta\tau + 2G\tau^2 = \theta - I_\eta\tau \stackrel{>}{<} 0$ [MPa h²].

Alulcsillapítottnak nevezzük a reológiai rendszert, ha tehetetlenségi indexe nagyobb, mint nulla, és alulcsillapítottnak, amikor kisebb. A felosztás megfelel a termodinamikailag α és β típusú dinamikai változók jelenlétének, helyesebben az 1.4 fejezet érvelése alapján az α - illetve β -dominált esetnek, hiszen általánosan irreálisnak tűnik tiszta időtükrözési tulajdonságokat várnunk el a belső változóktól.

9. KÉPLÉKENY ÁLLAPOT

A képlékenységi határ túllépése után a rugalmas deformációk mellett kialakulnak a visszafordíthatatlan *maradó* deformációk is. Míg a terhelés megszűnte után a rugalmas deformációk eltűnnek (zérussá válnak), addig a maradó deformációk – ahogy elnevezésük is erre utal – megmaradnak, értékük nem csökken.

Az anyagtörvény, amely rugalmas és képlékeny állapotban egyaránt érvényes, általánosan

$$(9) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = \underbrace{2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}}_{\text{elasztikus}} - \Psi \left\{ \underbrace{(2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f)}_{\text{plasztikus}} + (2\eta - 2\eta_{pl})\dot{\varepsilon} \right\}$$

formában írható fel, illetve a Ψ összefüggésének beírásával:

$$(9a) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = \begin{cases} 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}, & \text{ha } W' < W_f', \text{ vagy } \dot{W}' < 0, \\ 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \\ - (2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f) - (2\eta - 2\eta_{pl})\dot{\varepsilon}, & \text{ha } W' \geq W_f', \text{ és } \dot{W}' \geq 0, \end{cases}$$

vagy az összevonások elvégzésével:

$$(9b) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = \begin{cases} 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}, & \text{ha } W' < W_f', \text{ vagy } \dot{W}' < 0, \\ 2G\varepsilon_f + 2G_{pl}(\varepsilon - \varepsilon_f) + 2\eta_{pl}\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}, & \text{ha } W' \geq W_f', \text{ és } \dot{W}' \geq 0, \end{cases}$$

ahol σ_f, ε_f a $\Psi(W' - W_f') = 0$ képlékenységi határhoz tartozó értékek.

Az így kapott reológiai modell tehát szintén lineáris elemekből tevődik össze. Az eddigi modellelemek lépnek fel itt is, szükséges azonban egy újabb elem is, amely megfelel a Ψ -nek, és a képlékenységi határt húzza meg, amelyet a cikk elején már tárgyaltunk.

Ez elvben $[\tau, 2G, 2\eta, \theta, 2G_{pl}, 2\eta_{pl}]$ hat torzulási anyagállandót jelent. A 6 anyagállandóból 4 rugalmas állapotbeli állandó, 2 pedig képlékeny állapotbeli.

Ez azonban csak a látszat. Az elemi modellek kapcsolásai jól szemléltették, hogy a 4 rugalmas állapotbeli anyagállandó független egymástól. A következőkből kiderül, hogy a 2 képlékenységi állandó nem feltétlenül független. Pl. ha ismerjük a $2G_{pl}$ képlékenységi modulust, akkor bizonyos esetekben már meghatározott a $2\eta_{pl}$ képlékenységi viszkozitási tényező. Így a független anyagállandók száma izotróp képlékeny anyagok szigorúan lineáris elméletében, kis deformációk esetén a térfogati egyenleteket is figyelembe véve kétszer öt, azaz tíz.

Ha átléptük a képlékenységi küszöböt, akkor $\Psi = 1$, s a torzulási anyagegyenlet:

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon_f + 2G_{pl}(\varepsilon - \varepsilon_f) + 2\eta_{pl}\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon},$$

amely 2 újabb anyagállandót tartalmaz. Nem követjük az összes modell felírásának az előző pontban bejárt útját, mert ennyi ismeret alapján már szükségtelennek tartjuk az összes lehetséges kapcsolási eset felsorolását. Az előzőekben vizsgált kapcsolások közül a tehetetlenségi standard testet legáltalánosabban reprezentáló, a 29. ábrán látható modellt tekintjük a további vizsgálatok alapjául. .

AZ ANYAGTÖRVÉNY A VERHÁS-ELEM NÉLKÜL. Ha rugalmas ($W' \leq W_f'$) állapotban vagyunk, akkor az anyagtörvény a

$$\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma},$$

illetve az elemek karakterisztikájával kifejezve a

$$\sigma = C_1 \varepsilon + \left[\mu_1 + \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \mu_2 \right] \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_1 \mu_2}{C_2} \ddot{\varepsilon} - \frac{\mu_2}{C_2} \dot{\sigma}$$

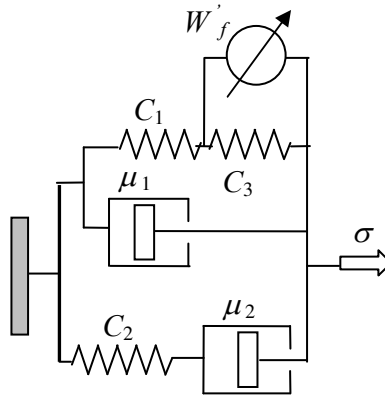
alakot ölti. Ha már képlékeny ($W' > W'_f$) állapotban van az anyag, akkor a C_1 rugó-
állandó átvált az eredő C_Σ -ra:

$$\frac{1}{C_\Sigma} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}, \quad C_\Sigma = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3},$$

s az anyagtörvény a folyási határtól (és csakis onnan) kezdődően

$$\begin{aligned} \sigma' = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \varepsilon' + \left[\mu_1 + \left(1 + \frac{C_1 C_3}{(C_1 + C_3) C_2} \right) \mu_2 \right] \dot{\varepsilon} + \\ + \frac{\mu_1 \mu_2}{C_2} \ddot{\varepsilon} - \frac{\mu_2}{C_2} \dot{\sigma} \end{aligned}$$

formájú lesz, ahol $\sigma' := \sigma - \sigma_f$, $\varepsilon' := \varepsilon - \varepsilon_f$.



36. ábra. A rugalmas-képlékeny anyagtörvény reológiai kapcsolási vázlata

Ez az átváltás a torzulási deformációs munka W'_f értékénél következik be, ahol $\varepsilon = \varepsilon_f$,
egyszerű felterhelés esetén.

Rugalmas modulusunk tehát (látszólag) kettő van:

$$2G = C_1, \quad (\text{ha } \varepsilon < \varepsilon_f) \quad 2\eta = \mu_1 + \mu_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right), \quad (\text{ha } \varepsilon \geq \varepsilon_f),$$

és képlékeny modulusunk is kettő:

$$2G_{pl} = C_1 \frac{C_3}{C_1 + C_3}, \quad (\text{ha } \varepsilon < \varepsilon_f) \quad 2\eta_{pl} = \mu_1 + \mu_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \frac{C_3}{C_1 + C_3} \right) \quad (\text{ha } \varepsilon \geq \varepsilon_f).$$

ahol

$$2G > 2G_{pl} \text{ és } 2\eta > 2\eta_{pl}.$$

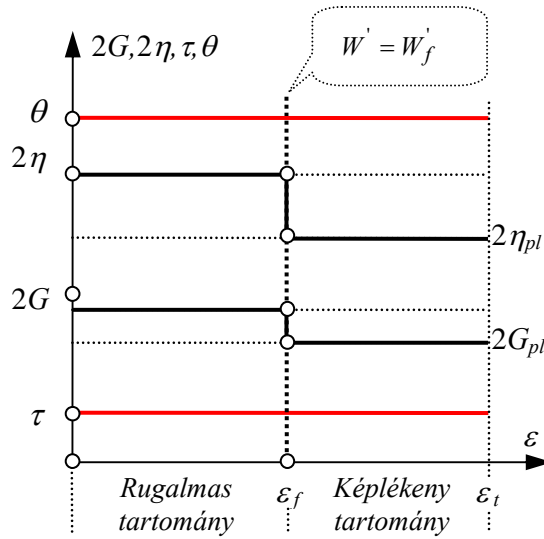
A kapu kinyitásával aktivizálódó – C_3 karakterisztikájú – rugó:

$$C_3 = 2G \frac{2G_{pl}}{2G - 2G_{pl}}.$$

Ha ismerjük az egyensúlyi állapotra vonatkozó rugalmassági modulusokat $[G, G_{pl}]$ és a 2η viszkozitási tényezőt a rugalmas tartományban, akkor már ismerjük a képlékenységi viszkozitási tényezőt is:⁴

$$2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau.$$

Ábrázolva az anyagállandókat, a 36. ábrán látható képet kapjuk (természetesen nem elfelejtve, hogy a függőleges tengelyen eltérő dimenziójú mennyiségeket tüntettünk fel egyszerre $[h, \text{MPa}, \text{MPa h}, \text{MPa h}^2]$).



37. ábra. Anyagállandók a rugalmas és a képlékeny tartományban

Ezzel az eredménnyel az anyagtörvény tovább egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} \sigma + \tau \dot{\sigma} &= \underbrace{2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}}_{\text{elasztikus}} - \underbrace{\Psi\{(2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f) + (2G - 2G_{pl})\tau\dot{\varepsilon}\}}_{\text{plasztikus}}, \\ \sigma + \tau \dot{\sigma} &= \underbrace{2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}}_{\text{elasztikus}} - \underbrace{\Psi\{(2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f + \tau\dot{\varepsilon})\}}_{\text{plasztikus}} \end{aligned}$$

s ennek megfelelően a torzulási és térfogati anyagállandók a következők:

- csúsztató rugalmassági modulus: G , - kompresszibilitási modulus: K ,

$$\begin{aligned} 2\eta_{pl} &= 2\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 \frac{G}{G_2} \frac{G_3}{G + G_3} = 2\eta_1 + 2G_2\tau + 2G_2\tau \frac{G}{G_2} \frac{G_3}{G + G_3} = \\ &= 2\eta_1 + 2G_2\tau + 2G\tau \frac{G_{pl}}{G} = \frac{\theta}{\tau} + 2\left(\frac{\eta}{\tau} - G - \frac{\theta}{2\tau^2}\right)\tau + 2G_{pl}\tau = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau \end{aligned}$$

- viszkozitási együttható: η , - térfogati viszkozitási modulus: K_v ,
- relaxációs idő: τ , - térfogati relaxációs idő: τ_o ,
- gyorsulási együttható: θ , - térfogati gyorsulási együttható: θ_o ,
- képlékenységi modulus: G_{pl} , - képlékenységi kompresszibilitás: K_{pl} .

AZ ANYAGTÖRVÉNY A VERHÁS-ELEM FELHASZNÁLÁSÁVAL. Ha rugalmas ($W' \leq W'_f$) állapotban vagyunk, akkor az anyagtörvény a

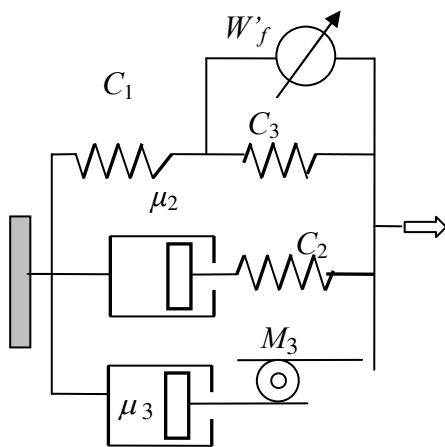
$$\sigma = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma},$$

illetve az elemek karakterisztikájával kifejezve a

$$\sigma = C_1\varepsilon + \left(\mu_1 + C_1 \frac{\mu_2}{C_2} \right) \dot{\varepsilon} + M_3\ddot{\varepsilon} - \frac{\mu_2}{C_2} \dot{\sigma}$$

alakot ölti a $\frac{\mu_2}{C_2} = \frac{M_3}{\mu_3}$ feltétellel.

Ha már képlékeny ($W' > W'_f$) állapotban van az anyag, akkor a C_1 rugóállandó átvált az eredő C_Σ -ra:



$$\frac{1}{C_\Sigma} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}, \quad C_\Sigma = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3},$$

s az anyagtörvény a folyási határtól kezdődően

$$\sigma - \sigma_f = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} (\varepsilon - \varepsilon_f) + \left(\mu_2 + \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \frac{\mu_2}{C_2} \right) \dot{\varepsilon} + M_3 \ddot{\varepsilon} - \frac{\mu_2}{C_2} \dot{\sigma}$$

formájú lesz,

38. ábra. A rugalmas-képlékeny anyagmodell reológiai kapcsolási vázlata Verhás-elemmel

s ennek megfelelően

$$2G = C_1, \quad \Rightarrow \quad 2G_{pl} = C_1 \frac{C_3}{C_1 + C_3},$$

$$2\eta = \mu_1 + C_1 \frac{\mu_2}{C_2}, \quad \Rightarrow \quad 2\eta_{pl} = \mu_1 + \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \frac{\mu_2}{C_2},$$

és

$$2G > 2G_{pl} \text{ és } 2\eta > 2\eta_{pl}.$$

Látható, hogy azonos eredményre jutunk a VERHÁS-féle tehetetlenségi elem bekapcsolásával, mint anélkül:

$$2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau.$$

Ezzel a kapcsolással viszont a teljes termodinamikai paraméterteret lefedtük.

Mivel a vizsgált esetekben minden változást a rugalmassági modulus változása indukál, koncentráljunk az egyszerűség kedvéért a

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f + \tau\dot{\varepsilon})$$

helyett, csak az egyensúlyi anyagtörvényre:

$$\sigma = 2G\varepsilon - \Psi(2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f).$$

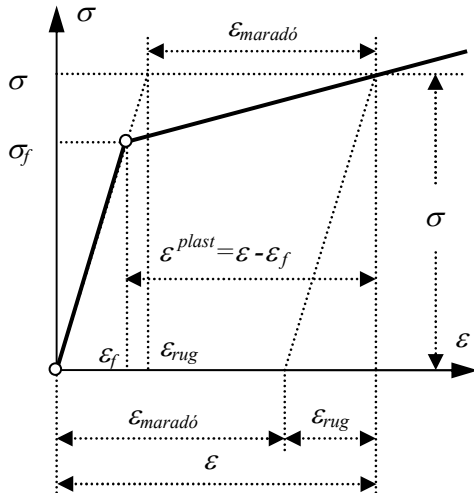
Vezessük be a φ jelölést a két modulus arányának kifejezésére:

$$\varphi = \frac{G_{pl}}{G} \text{ és } 0 \leq \varphi < 1,^5$$

s ekkor felírható, hogy

$$\sigma = 2G\varepsilon - \Psi 2G(1 - \varphi)(\varepsilon - \varepsilon_f).$$

Ezt a helyzetet a megszokott deformáció jelölésekkel a 39. ábra mutatja. Ha túléptünk a képlékenységi határon, akkor $\Psi = 1$, és az egyszerű anyagegyenlet a következő:



39. ábra

$$\begin{aligned} \sigma &= 2G\varepsilon - (2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f), \\ \sigma - 2G\varepsilon_f &= 2G_{pl}(\varepsilon - \varepsilon_f), \quad \sigma - \sigma_f = 2G_{pl}(\varepsilon - \varepsilon_f), \\ \sigma &= 2G_{pl}\varepsilon + (2G - 2G_{pl})\varepsilon_f \end{aligned}$$

Ennek alapján a deformációk

$$\varepsilon = \varepsilon_{rug} + \varepsilon_{mar} = \varepsilon_f + \varepsilon^{plast}$$

általános összefüggéséből a konkrét egyenletek a deformációkra:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rug} &= \frac{1}{2G}\sigma, \quad \varepsilon^{plast} = \frac{1}{2G_{pl}}(\sigma - \sigma_f), \\ \varepsilon_{mar} &= \varepsilon - \varepsilon_{rug} = \left(1 - \frac{G_{pl}}{G}\right)(\varepsilon - \varepsilon_f), \end{aligned}$$

⁵ Gyakorlatban a φ -re 0,2 ... 0,9 közötti értékeket mértek az anyagfajtától függően.

illetve a feszültségekre:

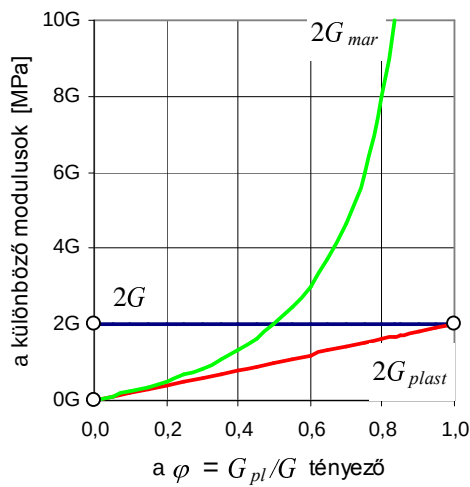
$$\sigma = 2G\varepsilon_{rug}, \sigma - \sigma_f = 2G_{pl}(\varepsilon - \varepsilon_f) \Rightarrow \sigma' = 2G_{pl}\varepsilon', \varepsilon_{mar} = \frac{1-\varphi}{2G\varphi}(\sigma - \sigma_f);$$

a rugalmas deformációhoz tartozó együttható:

$$\sigma = 2G\varepsilon_{rug} \quad \Rightarrow \quad 2G,$$

a rugalmas-képlékeny (plasztikus) deformációhoz tartozó együttható:

$$\sigma' = 2G_{pl}\varepsilon' \quad \Rightarrow \quad 2G_{pl} = 2G\varphi,$$



40. ábra

a maradó deformációhoz tartozó együttható:

$$\sigma' = 2G_{mar}\varepsilon_{mar} \quad \Rightarrow \quad 2G_{mar} = 2G \frac{\varphi}{1-\varphi}.$$

Ezek az összefüggések azt mutatják, hogy adott rugalmas-képlékeny – és most már reológiai – feladat megoldásához φ tényezőt célszerű meghatározni.

Egy konkrét feladat esetén tehát az összes rugalmas reológiai anyagállandó és a φ , valamint a képlékenységi határt kijelölő W_f' torzulási munka ismerete szükséges.

Korábbi munkáinkban bemutattuk, hogy a rugalmas-képlékeny reológiai feladatot, több gyakorlatilag fontos egyszerű esetben, mint tisztán rugalmas feladatot kell megoldani, s az ε_{rug} deformációs mező ismeretében az ε teljes deformáció mező, az ε^{plast} , illetve $\varepsilon_{maradó}$ mezők már egyszerű szorzással és szuperpozícióval már előállíthatók.

10. AZ IDŐFÜGGÉS

Az anyag jellemzésére négyféle időparamétert használunk:

$$\begin{array}{ll} t_{def} & \text{– a deformációk késési ideje,} & \Delta t & \text{– a kettő differenciája (időbeli eltolás),}^6 \\ t_{rel} & \text{– a relaxációs idő, és} & t_{teh} & \text{– a tehetetlenségi idő,} \end{array}$$

⁶ amely ha zérus, akkor az anyag úgy viselkedik mintha időfüggetlen lenne, vagyis a hatás fellépésekor azonnal bekövetkezik a válasz, azaz a deformáció.

amelyek közül kettőnek $[t_{def}, \Delta t]$ az értéke más és más a rugalmas tartományban és a képlékeny tartományban, s kettőnek $[t_{rel}, t_{teh}]$ az értéke pedig változatlan, hiába jelennek meg a maradó deformációk. Ennek oka, hogy a képlékeny tartományban csak a G rugalmassági modulus értéke változik meg (csökken) G_{pl} képlékenységi modulussá, s ez a változás tükröződik abban, hogy az η viszkozitási tényező is megváltozik (csökken) η_{pl} képlékenységi viszkozitási tényezővé az

$$2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau$$

összefüggésnek megfelelően.

A φ arányossági tényezővel:

$$2\eta_{pl} = 2\eta - (1 - \varphi)2G\tau.$$

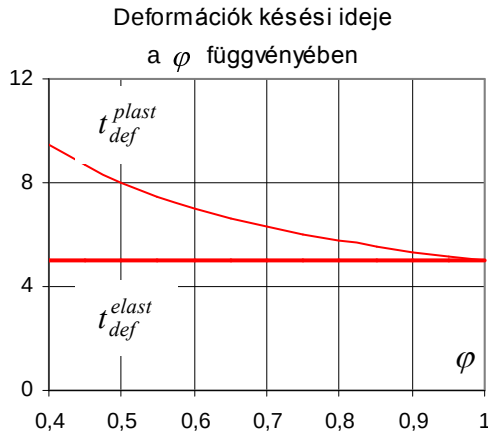
Az időparaméterek a definíciós összefüggései a következők:

$$t_{def} := \frac{\eta}{G} > 0, \quad t_{rel} := \tau > 0, \quad \Delta t := \frac{\eta}{G} - \tau = t_{def} - t_{rel} > t_{teh} > 0, \quad t_{teh} := \frac{\theta}{2G\tau} > 0,$$

s ekkor

AZ IDŐTÉNYEZŐ		
MEGNEVEZÉSE	A RUGALMAS TARTOMÁNYBAN	A KÉPLÉKENY TARTOMÁNYBAN
deformációk késési ideje	$t_{def}^{elast} := \frac{\eta}{G} > 0$	$t_{def}^{plast} := \frac{\eta_{pl}}{G_{pl}} > 0$ $t_{def}^{plast} = \frac{1}{\varphi} \frac{\eta}{G} - \frac{1-\varphi}{\varphi} \tau > 0$
relaxációs idő	$t_{rel}^{elast} := \tau = t_{rel}^{plast} > 0$	
időbeli eltolás	$\Delta t^{elast} := t_{def}^{elast} - t_{rel}^{elast} =$ $= \frac{\eta}{G} - \tau > 0$	$\Delta t^{plast} := t_{def}^{plast} - t_{rel}^{plast} = \frac{\eta_{pl}}{G_{pl}} - \tau > 0$ $\Delta t^{plast} = \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\eta}{G} - \frac{1-\varphi}{\varphi} \tau \right)$
tehetetlenségi idő	$t_{teh}^{elast} := \frac{\theta}{2G\tau} > 0$	$t_{teh}^{plast} := \frac{\theta}{2G_{pl}\tau} > 0$ $t_{teh}^{plast} = \frac{\theta}{\varphi 2G\tau} = \frac{1}{\varphi 2G} \frac{\theta}{t_{rel}^{plast}} > 0$

Innen kiolvasható, hogy a képlékenységi határ átlépésével bekövetkező *változás* mivel a G_{pl} értékének a függvénye, helyesebben a φ értékétől, vagyis a G_{pl}/G aránytól függ.

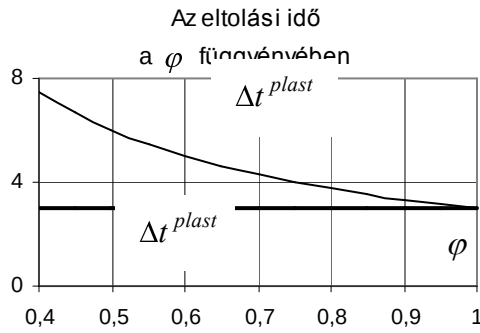


Mivel a φ -re termodinamikailag semmiféle összefüggést nem találtunk, nem tételezhetünk fel rá más korlátozást csak azt, hogy $0 \leq \varphi < 1$.

$\varphi = 1$ esetben az anyagnak nincs képlékeny tartománya, s így tönkremenetele is maradó deformációk nélkül következik be.

Az időtényezők a képlékenységi határ átlépése után növekednek – a relaxációs állandó kivételével, amely nem változik –, azonban ez a növekedés markánsan függ a φ értékétől (31. ábra):

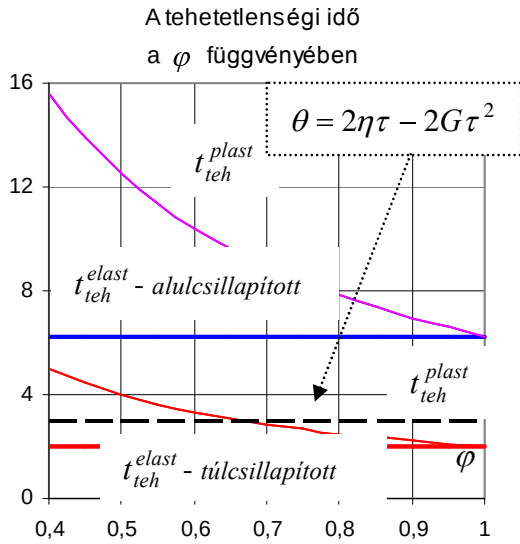
$$t_{def}^{plast} > t_{def}^{elast},$$



$$\underbrace{\left(\frac{1}{\varphi} \frac{\eta}{G} - \frac{1-\varphi}{\varphi} \tau \right)}_{t_{def}^{plast}} - \underbrace{\left(\frac{\eta}{G} \right)}_{t_{def}^{elast}} = \frac{1-\varphi}{\varphi} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) > 0,$$

$$t_{rel}^{elast} = t_{rel}^{plast},$$

$$\Delta t^{plast} > \Delta t^{elast},$$



$$\underbrace{\frac{1}{\varphi} \left(\frac{\eta}{G} - \frac{1-\varphi}{\varphi} \tau \right)}_{\Delta t^{plast}} - \underbrace{\left(\frac{\eta}{G} - \tau \right)}_{\Delta t^{elast}} = \frac{1-\varphi}{\varphi} \frac{\eta}{G} - \frac{1}{\varphi} \tau > 0,$$

$$t_{teh}^{plast} > t_{teh}^{plast},$$

$$\underbrace{\left(\frac{\theta}{2G\tau} \right)}_{t_{teh}^{plast}} - \underbrace{\left(\frac{\theta}{2G_{pl}\tau} \right)}_{t_{teh}^{elast}} = \frac{1-\varphi}{\varphi} \frac{\theta}{2G\tau} > 0.$$

A 41. ábrán feltüntetett összefüggéseknél: $2G = 4.000 \text{ MPa}$, $2\eta = 20.000 \text{ MPa h}$, $\tau = 2 \text{ h}$ értékeket vettünk. A θ értékeit a

41. ábra

$$\frac{\theta_{tül}}{2G\tau} < \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) < \frac{\theta_{alul}}{2G\tau}.$$

feltételnek megfelelően $\theta_{alul} = 16.000 \text{ MPa h}^2$ és $\theta_{tül} = 50.000 \text{ MPa h}^2$ -nak választottuk.

11. AZ EGYSÉGES ANYAGTÖRVÉNY

Az előző fejezetekben számos új ismeretre tettünk szert, amelyek az anyagtörvény egyszerűbb alakját eredményezték. A rugalmas torzulási állapot leírásához a tehetetlenségi standard modellnél négy anyagállandó szükséges. A képlékeny állapotba történő átmenetnél azonban már vannak esetek, amikor csak egyetlen újabb anyagállandó bukkant fel [G_{pl} , vagy φ]. Az ilyen esetek fellépésének kísérleti feltételeit további vizsgálatokkal kell tisztázni. Ez azért is érdekes, mert az elmúlt 40 év során a reológiai irodalomban azt valószínűsítették, hogy ahány rugalmas állapotbeli anyagállandó van, ugyanannyi kell a képlékeny állapot leírására is.⁷ Itt megmutattuk, hogy a termodinamikai elméletünk által eredményezett egyszerűsítésen túl (2 állandó változott, az entrópiafüggvénybe épített képlékenységi feltétel miatt), további paraméterredukció is lehetséges.

Az egyetlen változást kifejezi a

$$2G \Rightarrow 2G_{pl}, \text{ ahol } 2G_{pl} = 2G\varphi,$$

átmenet, illetve ennek következményeként fellépő

$$2\eta \Rightarrow 2\eta_{pl}, \text{ ahol } 2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau = 2\eta - 2G\tau(1 - \varphi)$$

összefüggés. A másik két anyagállandó [τ és θ] az átmenet során változatlan marad.

A képlékenységi határfeltételben szereplő

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \text{ha } W' < W_f', \text{ vagy } \dot{W} < 0, \\ 1, & \text{ha } W' \geq W_f', \text{ és } \dot{W} \geq 0, \end{cases}$$

függvény segítségével a rugalmas és plasztikus modulust egyetlen összefüggésbe foglalhatjuk össze, amelynek adhatnánk a *komplex, egységes, általános*, stb. elnevezést, s ekkor az

általános csúsztató rugalmassági modulus:

$$2\hat{G} = (1 - \Psi)2G + \Psi 2G_{pl} = (1 - \Psi)2G + \Psi 2G\varphi = 2G - 2G(1 - \varphi)\Psi,$$

általános viszkozitási tényező:

$$2\hat{\eta} = (1 - \Psi)2\eta + \Psi 2\eta_{pl} = (1 - \Psi)2\eta + \Psi[2\eta - 2G\tau(1 - \varphi)] = 2\eta - 2G\tau(1 - \varphi)\Psi.$$

Ez utóbbi két felírás (definíció) természetesen azt jelenti, hogy

$$2\hat{G} = \begin{cases} 2G, & \text{ha } \Psi = 0, \\ 2G\varphi, & \text{ha } \Psi = 1. \end{cases} \quad 2\hat{\eta} = \begin{cases} 2\eta, & \text{ha } \Psi = 0, \\ 2\eta - 2G\tau(1 - \varphi), & \text{ha } \Psi = 1. \end{cases}$$

⁷ Hogy ne másokat említsünk, erre példa ASSZONYI, Cs. akadémiai doktori disszertációja, valamint több cikke és könyve.

Azt látjuk, hogy a φ és Ψ egymás szorzótényezőjeként jelenik meg. Eddig azt mondtuk, hogy a φ rugalmas állapotban [$\Psi = 0$] értéke zérus: $\varphi = 0$, míg viszont képlékeny állapotban [$\Psi = 1$] értéke az anyagra jellemző meghatározott pozitív konstans: $\varphi > 0$. Innen látszik, hogy a φ -t mindig egy meghatározott állandónak tekinthetjük, csak rugalmas állapotban $\varphi \Psi$ zérus, a Ψ miatt.

Ha a *deformációk egész tartományán* – a rugalmas és a képlékeny zónában egyaránt – egységes felírást akarunk, akkor ezt a függést figyelembe kell venni, s az anyagtörvényt

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = 2\widehat{G}\varepsilon + 2\widehat{\eta}\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}$$

formában állíthatjuk elő.

A két felírás közötti azonosság azonnal evidens, ha figyelembe vesszük, hogy a $\psi(W' - W'_f) = 0$ képlékenységi határhoz tartozó értékek egyszerű felterhelés esetén σ_f, ε_f , tehát a kétszeres HEAVISIDE-féle ugrás függvény

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \text{ha } \varepsilon < \varepsilon_f, \text{ vagy } \dot{W} = \sigma\dot{\varepsilon} < 0, \\ 1, & \text{ha } \varepsilon \geq \varepsilon_f, \text{ és } \dot{W} = \sigma\dot{\varepsilon} \geq 0, \end{cases}$$

formában is felírható.

Ez azt jelenti, hogy elméleti vizsgálatainknál, levezetéseinknél a teljes deformációs tartományon a nagyon egyszerű

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = 2\widehat{G}\varepsilon + 2\widehat{\eta}\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}$$

tehetetlenségi standard testtel dolgozhatunk.

IRODALOM

- ASSZONYI CS. – VÁN P. – SZARKA Z. (2007): Izotrop kontinuumok rugalmas és képlékeny állapotai. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **5**. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007
- SZERK. ASSZONYI CS. (2006): Izotrop kontinuumok anyagtörvénye. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **3**. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006
- VÁN P. – ASSZONYI CS. (2006): Izotrop kontinuumok anyagtörvénye II. Az általános törvényszerűségek; *Izotrop kontinuumok anyagtörvénye*. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **3**. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006, 25-88. old.
- BODOR G. – VAS L. M. (2005): Polimer anyagszerkezettan. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2005.
- HORVÁTH R. (1985): Adalékok a kontinuummechanika reológiai elméletéhez. *Kandidátusi értekezés*, Debrecen, 1985.
- VERHÁS J. (1985): Termodinamika és reológia, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, 1985.
- VÁN P. – BEREZOVSKI A. – ENGELBRECHT, J. (2008): Internal variables and dynamic degrees of freedom, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, megjelenés alatt.
- FÜLÖP T. (2008): Reológiai elemkapcsolások. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **6**. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008, 92-116. old.

REOLÓGIAI ELEMKAPCSOLÁSOK

Fülöp Tamás

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Ebben a cikkben

- *eljárást dolgozunk ki reológiai elemek összes lehetséges kapcsolásának előállítására,*
- *általános formulát vezetünk le reológiai modellek soros és párhuzamos kapcsolásainak eredő egyenletére,*
- *számítógépes programot alkotunk az összes soros és párhuzamos kapcsolat előállítására és eredő egyenleteik kiszámolására,*
- *eljárásunkat a rugók, olajfékek és tehetetlenségi elemek soros és párhuzamos kapcsolásaira alkalmazzuk,*
- *és diszkutáljuk e kapcsolások eredő egyenleteit, elsősorban a tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell szempontjait figyelembe véve.*

Hogy az itt olvasható eredmények jól elkülöníthetők legyenek a hozzájuk vezető hosszadalmas technikai részletektől, a cikk szerkezete a következő:

- 1. Bevezetés*
- 2. Az eredmények (kézikönyvszerű összefoglaló)*
- 3. Az eredményekhez vezető részletes út (levezetések, számítások és bizonyítások)*

1. BEVEZETÉS

Az itt ismertetett munkát a Montavid Kutatócsoport ama kutatása motiválta, amely termodinamikai alapon keresi és vizsgálja a reológia modelljeit [VÁN–ASSZONYI (2006); ASSZONYI–VÁN–SZARKA (2007); VÁN–ASSZONYI (2008), jelen kötetben]. Az így érdeklődésünk homlokterébe került tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell reológiai elemkapcsolásokkal való viszonyát kívántuk tisztázni. A vizsgálatok azonban számos általánosan használható, reológiai kapcsoláselméleti eredményre is vezettek.

A Kutatócsoport által felállított termodinamikai módszer a reológiai testek közül a négyparaméteres tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-testet eredményezi mint

a legtermészetesebb, de egyben a legtágabb reológiai modellt. Ezért a most ismertetésre kerülő kutatásban az összes létező olyan négyelemes reológiai kapcsolást megkerestük és megvizsgáltuk, amelyek ennek a modellnek realizálásai.

Első megközelítésként csak rugók (HOOKE-testek) és olajfékek (NEWTON-testek) kapcsolásait tekintettük, de a vizsgálatok során kiderült, hogy ezek a kapcsolások a termodinamikailag megengedett tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modelleknek csak egy részét képesek előállítani. Közelebbről, a kapcsolásokat vizsgálva két olyan—az elemegyütthathatókból képzett—jellemző mennyiséget ismertünk fel, amelyek közül az egyik, a *csillapítási index* mindig pontosan a termodinamikai módszer ONSAGER-i feltétele által megengedett tartományt feszíti ki, a másik, a *tehetetlenségi index* azonban szűkebb tartományt fed le, mint amit a termodinamikai keret megenged. Ezért előállítottuk és megvizsgáltuk a VERHÁS-elemet [VERHÁS (1985), 136. o.] is tartalmazó kapcsolásokat is, és azt találtuk, hogy pontosan ezekkel fedhető le a megengedett tartomány másik fele. Mint az rövidesen kiderült [VÁN-ASSZONYI (2008), jelen kötetben], a termodinamikai keretben e két tartomány annak felel meg, hogy a vezetési mátrixban a szimmetrikus vagy az antiszimmetrikus rész dominál-e.

Az ötelemes kapcsolásokat is megvizsgálva—az öt elemegyütthatható egyikét egy feltétellel megszorítva—már olyan kapcsolást is találtunk, amely mindkét szóbanforgó tartományt, tehát pontosan a termodinamikailag megengedett összes lehetőséget képes lefedni.

Az itt ismertetett eredmények reológiai elemzését jelen kötet második cikke [ASSZONYI-FÜLÖP-VÁN-SZARKA-HORVÁTH (2008)] adja meg. A kötet negyedik cikkében [SZARKA-ASSZONYI-FÜLÖP (2008)] pedig a tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell viselkedésének bemutatása olvasható.

Az e fejezetben közölt módszertan maga azonban nem szorítkozik a négy- vagy ötelemes, és a POYNTING-THOMSON-modellhez kapcsolódó kapcsolásokra, vagy az elemi elemfajták (rugó, olajfék, VERHÁS-elem) konkrét számára vagy speciális tulajdonságaira. Akárhány fajta, akármilyen alapelem tetszőleges (nemcsak párhuzamos és sorbakötések révén épített) kapcsolásait előállítja. Megadja továbbá két tetszőleges (nem is feltétlenül kapcsolásokból származó) reológiai modell soros és párhuzamos kapcsolásának eredő egyenletét. Az elektrotechnikai lineáris hálózatelmélet Kirchoff-törvényeihez hasonló egyenletekkel dolgozunk, de az eredőimpedancia-számítástól eltérően nem szorítkozunk adott frekvenciájú harmonikus időfüggésekre, hanem a tetszőleges időfüggésekre érvényes differenciálegyenletekkel operálunk. Az eredő egyenlet is differenciálegyenletként adódik, elkerüljük tehát integrálegyenletek bevonását. A soros és párhuzamos kapcsolások révén építhető összes modell algoritmikus meghatározására számítógépes (Maple-) programot alkottunk, mely egyben az eredő egyenletek kiszámítását is elvégzi.

2. AZ EREDMÉNYEK

2.1. JELÖLÉSEK, ELNEVEZÉSEK

- $X \sim Y$ az X és Y elemek (kétpólusok) soros kapcsolása
- $X \parallel Y$ az X és Y elemek párhuzamos kapcsolása
- $(X \sim Y) \parallel Z$ egy példa zárójelzésre, bonyolultabb kapcsolásokban
- $\mathcal{D} \equiv \frac{d}{dt}$ az időderiválás mint differenciáloperátor
- $\mathcal{A}\sigma = \tilde{\mathcal{P}}\varepsilon$ egy reológiai modell egyenletét ilyen differenciáloperátoros alakban írjuk, ahol
- (1)
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 1 + A_1\mathcal{D} + A_2\mathcal{D}^2 + \cdots + A_a\mathcal{D}^a, & A_i &\in \mathbb{R}, \quad A_a \neq 0, \\ \mathcal{P} &= P_0 + P_1\mathcal{D} + P_2\mathcal{D}^2 + \cdots + P_p\mathcal{D}^p, & P_i &\in \mathbb{R}, \quad P_0 \neq 0, \quad P_p \neq 0, \\ \tilde{\mathcal{P}} &= \mathcal{D}^m\mathcal{P} = P_0\mathcal{D}^m + \cdots + P_p\mathcal{D}^{\tilde{p}}, & \tilde{p} &= m + p; \quad a, p, m \in \{0, 1, \dots\} \end{aligned}$$
- $\mathcal{B}\sigma = \tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon$ amikor egy másik reológiai modellre is szükségünk van (mert kettőt sorba vagy párhuzamosan kapcsolunk), a másikat így jelöljük, ahol
- (2)
$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= 1 + B_1\mathcal{D} + B_2\mathcal{D}^2 + \cdots + B_b\mathcal{D}^b, & B_i &\in \mathbb{R}, \quad B_b \neq 0, \\ \mathcal{Q} &= Q_0 + Q_1\mathcal{D} + Q_2\mathcal{D}^2 + \cdots + Q_q\mathcal{D}^q, & Q_i &\in \mathbb{R}, \quad Q_0 \neq 0, \quad Q_q \neq 0, \\ \tilde{\mathcal{Q}} &= \mathcal{D}^n\mathcal{Q} = Q_0\mathcal{D}^n + \cdots + Q_q\mathcal{D}^{\tilde{q}}, & \tilde{q} &= n + q; \quad b, q, n \in \{0, 1, \dots\} \end{aligned}$$
- $\mathcal{A} = \mathcal{F}\mathcal{G}$,
 $\mathcal{B} = \mathcal{F}\mathcal{H}$ $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ legnagyobb közös osztóját jelölje $\mathcal{F}$, a maradék szorzókat pedig $\mathcal{G}$ és $\mathcal{H}$, melyek a következő alakú valós differenciáloperátorok:
- (3)
$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= 1 + F_1\mathcal{D} + \cdots + F_f\mathcal{D}^f, & F_f &\neq 0, \quad f \leq a, b; \quad f \in \{0, 1, \dots\}, \\ \mathcal{G} &= G_0 + G_1\mathcal{D} + \cdots + G_g\mathcal{D}^g, & G_0 &\neq 0, \quad G_g \neq 0, \quad g = a - f, \\ \mathcal{H} &= H_0 + H_1\mathcal{D} + \cdots + H_h\mathcal{D}^h, & H_0 &\neq 0, \quad H_h \neq 0, \quad h = b - f \end{aligned}$$
- $\mathcal{P} = \mathcal{X}\mathcal{Y}$,
 $\mathcal{Q} = \mathcal{X}\mathcal{Z}$ $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ legnagyobb közös osztóját pedig jelölje $\mathcal{X}$, a maradék szorzókat pedig $\mathcal{Y}$ és $\mathcal{Z}$, melyek, hasonlóan, a következő alakúak:
- (4)
$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= 1 + X_1\mathcal{D} + \cdots + X_x\mathcal{D}^x, & X_x &\neq 0, \quad x \leq p, q; \quad x \in \{0, 1, \dots\}, \\ \mathcal{Y} &= Y_0 + Y_1\mathcal{D} + \cdots + Y_y\mathcal{D}^y, & Y_0 &\neq 0, \quad Y_y \neq 0, \quad y = p - x, \\ \mathcal{Z} &= Z_0 + Z_1\mathcal{D} + \cdots + Z_z\mathcal{D}^z, & Z_0 &\neq 0, \quad Z_z \neq 0, \quad z = q - x \end{aligned}$$
- δ_{mn} a Kronecker-delta jelölés: $\delta_{mn} = 1$, ha $m = n$, és $\delta_{mn} = 0$, ha $m \neq n$

$$\sigma + \tau\dot{\sigma} = C\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon} + M\ddot{\varepsilon}$$

a *tehetetlenségi* POYNTING-THOMSON-modell, más néven *tehetetlenségi standard test*. Tenzori alkalmazásban a deviátoros rész szokásos jelölései: $C = 2G$, $\mu = 2\eta$, $M = \theta$, a gömbi rész szokásos jelölései: $C = 3K$, $\mu = 3K_v$, $M = \theta_0$

$I_\mu := \mu - \tau C$	a modellhez rendelhető <i>csillapítási index</i>
$I_M := M - \tau I_\mu \equiv M - \tau\mu + \tau^2 C$	a hozzá rendelhető <i>tehetetlenségi index</i>
<i>alulcsillapított (túltehetetlen) modell</i>	ha $I_M > 0$ (azaz $\mu < \tau C + M/\tau$)
<i>túlcsillapított (alultehetetlen) modell</i>	ha $I_M < 0$ (azaz $\mu > \tau C + M/\tau$)
<i>kritikusan csillapított/tehetetlen modell</i>	ha $I_M = 0$.

2.2. KÉT MODELL PÁRHUZAMOS ÉS SOROS KAPCSOLÁSÁNAK EREDŐ EGYENLETE

2.2.1. $(\mathcal{A}\sigma = \tilde{\mathcal{P}}\varepsilon) \parallel (\mathcal{B}\sigma = \tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon)$ EREDŐ EGYENLETE:

$$(5) \quad \mathcal{A}\mathcal{B}\sigma = \mathcal{B}\tilde{\mathcal{P}}\varepsilon + \mathcal{A}\tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon.$$

Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közös osztója nemtriviális ($f > 0$), akkor

$$(6) \quad \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{H}\sigma = \mathcal{H}\tilde{\mathcal{P}}\varepsilon + \mathcal{G}\tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon$$

egy egyszerűbb (alacsonyabb rendű deriváltakat tartalmazó) eredő egyenlet.

2.2.2. $(\mathcal{A}\sigma = \tilde{\mathcal{P}}\varepsilon) \sim (\mathcal{B}\sigma = \tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon)$ EREDŐ EGYENLETE:

$$(7) \quad m \geq n : \quad \frac{1}{\delta_{mn}P_0 + Q_0} [\mathcal{D}^{m-n}\mathcal{P}\mathcal{B}\sigma + \mathcal{Q}\mathcal{A}\sigma] = \frac{1}{\delta_{mn}P_0 + Q_0} \mathcal{Q}\tilde{\mathcal{P}}\varepsilon,$$

$$(8) \quad m \leq n : \quad \frac{1}{P_0 + \delta_{mn}Q_0} [\mathcal{P}\mathcal{B}\sigma + \mathcal{D}^{n-m}\mathcal{Q}\mathcal{A}\sigma] = \frac{1}{P_0 + \delta_{mn}Q_0} \mathcal{P}\tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon.$$

Ha $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ közös osztója nemtriviális ($x > 0$), akkor

$$(9) \quad m \geq n : \quad \frac{1}{\delta_{mn}Y_0 + Z_0} [\mathcal{D}^{m-n}\mathcal{Y}\mathcal{B}\sigma + \mathcal{Z}\mathcal{A}\sigma] = \frac{1}{\delta_{mn}Y_0 + Z_0} \mathcal{Z}\tilde{\mathcal{P}}\varepsilon,$$

$$(10) \quad m \leq n : \quad \frac{1}{Y_0 + \delta_{mn}Z_0} [\mathcal{Y}\mathcal{B}\sigma + \mathcal{D}^{n-m}\mathcal{Z}\mathcal{A}\sigma] = \frac{1}{Y_0 + \delta_{mn}Z_0} \mathcal{Y}\tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon$$

egy egyszerűbb (alacsonyabb rendű deriváltakat tartalmazó) eredő egyenlet.

Az (5)–(10) egyenletek mindegyikében σ együtthatója 1-re lett rendezve.

Mind a párhuzamos, mind a soros kapcsolás során az eredő egyenletben legalább akkora a legmagasabb deriváltak rendje (mind σ , mind ε szempontjából), amekkora a bemenő kapcsolások bármelyikében.

2.3. A RUGÓKBÓL, OLAJFÉKEKBŐL ÉS TEHETETLENSÉGI ELEMÉKBŐL ÉPÍTHETŐ ÖSSZES LEGFELJEBB NÉGYELEMES KAPCSOLÁS ÉS EREDŐ EGYENLETE

- Csak azok az eredő egyenletek vannak kiírva, amelyek beleférnek a tehetetlenségi standard modell keretébe, azaz nem tartalmazznak $\dot{\sigma}$ -nál és $\ddot{\varepsilon}$ -nál magasabb rendű deriváltakat.
- Az eredő egyenletek (5) és (7)-(8) szerint számolódnak, tehát itt nem vizsgáljuk azokat a speciális eseteket—az olyan speciális elemegyütthetők—, amikor (6), illetve (9)-(10) egyszerűbb eredő egyenleteket nyújt. Mindenesetre négy szabad paraméteres tehetetlenségi standard modellre vezető kapcsolást nem veszítünk el ezáltal, mert az együtthetők közti speciális feltétel csökkenti a szabad paraméterek számát, mely legfeljebb négyelemes kapcsolások esetén legfeljebb három. (Ötelemes kapcsolások már adhatnak ilyen esetet: ld. a 2.5.1 példát.)
- Az ötelemes, híd típusú kapcsolások a legkisebb olyanok, amelyek már nem állnak elő egyszerűbb kapcsolások soros és párhuzamos kombinációjaként.

2.3.1. EGYELEMES

$$(11) \quad C \quad \text{HOOKE} \\ \sigma = C\varepsilon$$

$$(12) \quad \mu \quad \text{NEWTON} \\ \sigma = \mu\dot{\varepsilon}$$

$$(13) \quad M \quad \text{tehetetlenségi vagy VERHÁS-elem} \\ \sigma = M\ddot{\varepsilon}$$

2.3.2. KÉTELEMES

$$(14) \quad C_1 || C_2 \quad \text{HOOKE} || \text{HOOKE} = \text{HOOKE} \\ \sigma = (C_1 + C_2)\varepsilon$$

$$(15) \quad C_1 || \mu_2 \quad \text{HOOKE} || \text{NEWTON} = \text{KELVIN} \\ \sigma = C_1\varepsilon + \mu_2\dot{\varepsilon}$$

- (16) $C_1 \parallel M_2$ HOOKE $\parallel$ tehetetlenségi =
= tehetetlenségi HOOKE
 $\sigma = C_1 \varepsilon + M_2 \ddot{\varepsilon}$
- (17) $\mu_1 \parallel \mu_2$ NEWTON $\parallel$ NEWTON = NEWTON
 $\sigma = (\mu_1 + \mu_2) \dot{\varepsilon}$
- (18) $\mu_1 \parallel M_2$ NEWTON $\parallel$ tehetetlenségi =
= tehetetlenségi NEWTON
 $\sigma = \mu_1 \dot{\varepsilon} + M_2 \ddot{\varepsilon}$
- (19) $M_1 \parallel M_2$ tehetetlenségi $\parallel$ tehetetlenségi = tehetetlenségi
 $\sigma = (M_1 + M_2) \ddot{\varepsilon}$
- (20) $C_1 \sim C_2$ HOOKE $\sim$ HOOKE = HOOKE
 $\sigma = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon$
- (21) $C_1 \sim \mu_2$ HOOKE $\sim$ NEWTON = MAXWELL
 $\sigma + \frac{\mu_2}{C_1} \dot{\sigma} = \mu_2 \dot{\varepsilon}$
- (22) $C_1 \sim M_2$ HOOKE $\sim$ tehetetlenségi
magasabbrendű deriváltak
- (23) $\mu_1 \sim \mu_2$ NEWTON $\sim$ NEWTON = NEWTON
 $\sigma = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \dot{\varepsilon}$
- (24) $\mu_1 \sim M_2$ NEWTON $\sim$ tehetetlenségi =
= tehetetlenségi relaxáció
 $\sigma + \frac{M_2}{\mu_1} \dot{\sigma} = M_2 \ddot{\varepsilon}$
- (25) $M_1 \sim M_2$ tehetetlenségi $\sim$ tehetetlenségi = tehetetlenségi
 $\sigma = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \ddot{\varepsilon}$

2.3.3. HÁROMELEMESEK

$$(26) \quad C_1 \parallel \mu_2 \parallel M_3 \quad \text{HOOKE} \parallel \text{NEWTON} \parallel \text{tehetetlenségi} = \\ = \text{tehetetlenségi KELVIN}$$

$$\sigma = C_1 \varepsilon + \mu_2 \dot{\varepsilon} + M_3 \ddot{\varepsilon}$$

$$(27) \quad (C_1 \parallel \mu_2) \sim C_3 \quad \text{KELVIN} \sim \text{HOOKE} = \text{standard}$$

$$\sigma + \frac{\mu_2}{C_1 + C_3} \dot{\sigma} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \varepsilon + \frac{C_3 \mu_2}{C_1 + C_3} \dot{\varepsilon}$$

$$(28) \quad (C_1 \parallel \mu_2) \sim \mu_3 \quad \text{KELVIN} \sim \text{NEWTON} = \\ = \text{tehetetlenségi MAXWELL}$$

$$\sigma + \frac{\mu_2 + \mu_3}{C_1} \dot{\sigma} = \mu_3 \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_3}{C_1} \ddot{\varepsilon}$$

$$(29) \quad (C_1 \parallel \mu_2) \sim M_3 \quad \text{KELVIN} \sim \text{tehetetlenségi} \\ \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(30) \quad (C_1 \parallel M_2) \sim C_3 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(31) \quad (C_1 \parallel M_2) \sim \mu_3 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(32) \quad (C_1 \parallel M_2) \sim M_3 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(33) \quad (\mu_1 \parallel M_2) \sim C_3 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(34) \quad (\mu_1 \parallel M_2) \sim \mu_3$$

$$\sigma + \frac{M_2}{\mu_1 + \mu_3} \dot{\sigma} = \frac{\mu_1 \mu_3}{\mu_1 + \mu_3} \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_3 M_2}{\mu_1 + \mu_3} \ddot{\varepsilon}$$

$$(35) \quad (\mu_1 \parallel M_2) \sim M_3 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(36) \quad (C_1 \sim \mu_2) \parallel C_3 \quad \text{MAXWELL} \parallel \text{HOOKE} = \text{standard}$$

$$\sigma + \frac{\mu_2}{C_1} \dot{\sigma} = C_3 \varepsilon + \frac{C_1 + C_3}{C_1} \mu_2 \dot{\varepsilon}$$

$$(37) \quad (C_1 \sim \mu_2) \parallel \mu_3 \quad \text{MAXWELL} \parallel \text{NEWTON}$$

$$\sigma + \frac{\mu_2}{C_1} \dot{\sigma} = (\mu_2 + \mu_3) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_3}{C_1} \ddot{\varepsilon}$$

$$(38) \quad (C_1 \sim \mu_2) \parallel M_3 \quad \text{MAXWELL} \parallel \text{tehetetlenségi} \\ \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(39) \quad (C_1 \sim M_2) \parallel C_3 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(40) \quad (C_1 \sim M_2) \parallel \mu_3 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(41) \quad (C_1 \sim M_2) \parallel M_3 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(42) \quad (\mu_1 \sim M_2) \parallel C_3 \quad \text{tehetetlenségi standard} \\ \text{(három szabad paraméteres)}$$

$$\sigma + \frac{M_2}{\mu_1} \dot{\sigma} = C_3 \varepsilon + \frac{C_3 M_2}{\mu_1} \dot{\varepsilon} + M_2 \ddot{\varepsilon}$$

$$(43) \quad (\mu_1 \sim M_2) \parallel \mu_3$$

$$\sigma + \frac{M_2}{\mu_1} \dot{\sigma} = \mu_3 \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_1 + \mu_3}{\mu_1} M_2 \ddot{\varepsilon}$$

$$(44) \quad (\mu_1 \sim M_2) \parallel M_3 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(45) \quad C_1 \sim \mu_2 \sim M_3 \quad \text{HOOKE} \sim \text{NEWTON} \sim \text{tehetetlenségi} \\ \text{magasabbrendű deriváltak}$$

2.3.4. NÉGYELEMESÉK

$$(46) \quad (C_1 \parallel \mu_2 \parallel M_3) \sim C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(47) \quad (C_1 \parallel \mu_2 \parallel M_3) \sim \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(48) \quad (C_1 \parallel \mu_2 \parallel M_3) \sim M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(49) \quad [(C_1 \parallel \mu_2) \sim C_3] \parallel C_4 \quad \text{standard} \parallel \text{HOOKE} = \text{standard}$$

$$\sigma + \frac{\mu_2}{C_1 + C_3} \dot{\sigma} = \left(\frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + C_4 \right) \varepsilon + \frac{C_3 + C_4}{C_1 + C_3} \mu_2 \dot{\varepsilon}$$

$$(50) \quad [(C_1 \parallel \mu_2) \sim C_3] \parallel \mu_4 \quad \text{standard} \parallel \text{NEWTON} = \\ = \text{tehetetlenségi standard}$$

$$\sigma + \frac{\mu_2}{C_1 + C_3} \dot{\sigma} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \varepsilon + \left(\frac{C_3 \mu_2}{C_1 + C_3} + \mu_4 \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_4}{C_1 + C_3} \ddot{\varepsilon}$$

$$(51) \quad [(C_1 \parallel \mu_2) \sim C_3] \parallel M_4 \quad \text{standard} \parallel \text{tehetetlenségi} \\ \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(52) \quad [(C_1 \parallel \mu_2) \sim \mu_3] \parallel C_4 \quad \text{tehetetlenségi standard}$$

$$\sigma + \frac{\mu_2 + \mu_3}{C_1} \dot{\sigma} = C_4 \varepsilon + \left(\frac{C_4}{C_1} \mu_2 + \frac{C_1 + C_4}{C_1} \mu_3 \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_3}{C_1} \ddot{\varepsilon}$$

$$(53) \quad [(C_1 \parallel \mu_2) \sim \mu_3] \parallel \mu_4$$

$$\sigma + \frac{\mu_2 + \mu_3}{C_1} \dot{\sigma} = (\mu_3 + \mu_4) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 + \mu_3 \mu_4}{C_1} \ddot{\varepsilon}$$

$$(54) \quad [(C_1 \parallel \mu_2) \sim \mu_3] \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(55) \quad [(C_1 \parallel \mu_2) \sim M_3] \parallel C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(56) \quad [(C_1 \parallel \mu_2) \sim M_3] \parallel \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(57) \quad [(C_1 \parallel \mu_2) \sim M_3] \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(58) \quad [(C_1 \parallel M_2) \sim C_3] \parallel C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(59) \quad [(C_1 \parallel M_2) \sim C_3] \parallel \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(60) \quad [(C_1 \parallel M_2) \sim C_3] \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(61) \quad [(C_1 \parallel M_2) \sim \mu_3] \parallel C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(62) \quad [(C_1 \parallel M_2) \sim \mu_3] \parallel \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(63) \quad [(C_1 \parallel M_2) \sim \mu_3] \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(64) \quad [(C_1 \parallel M_2) \sim M_3] \parallel C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(65) \quad [(C_1 \parallel M_2) \sim M_3] \parallel \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(66) \quad [(C_1 \parallel M_2) \sim M_3] \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(67) \quad [(\mu_1 \parallel M_2) \sim C_3] \parallel C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(68) \quad [(\mu_1 \parallel M_2) \sim C_3] \parallel \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(69) \quad [(\mu_1 \parallel M_2) \sim C_3] \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(70) \quad [(\mu_1 \parallel M_2) \sim \mu_3] \parallel C_4 \quad \text{tehetetlenségi standard}$$

$$\sigma + \frac{M_2}{\mu_1 + \mu_3} \dot{\sigma} = C_4 \varepsilon + \frac{\mu_1 \mu_3 + C_4 M_2}{\mu_1 + \mu_3} \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} M_2 \ddot{\varepsilon}$$

$$(71) \quad [(\mu_1 \parallel M_2) \sim \mu_3] \parallel \mu_4$$

$$\sigma + \frac{M_2}{\mu_1 + \mu_3} \dot{\sigma} = \left(\frac{\mu_1 \mu_3}{\mu_1 + \mu_3} + \mu_4 \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_3 + \mu_4}{\mu_1 + \mu_3} M_2 \ddot{\varepsilon}$$

$$(72) \quad [(\mu_1 \parallel M_2) \sim \mu_3] \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(73) \quad [(\mu_1 \parallel M_2) \sim M_3] \parallel C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(74) \quad [(\mu_1 \parallel M_2) \sim M_3] \parallel \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(75) \quad [(\mu_1 \parallel M_2) \sim M_3] \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(76) \quad (C_1 \sim \mu_2) \parallel C_3 \parallel \mu_4 \quad \begin{array}{l} \text{MAXWELL} \parallel \text{KELVIN} = \\ = \text{standard} \parallel \text{NEWTON} = \\ = \text{tehetetlenségi standard} \end{array}$$

$$\sigma + \frac{\mu_2}{C_1} \dot{\sigma} = C_3 \varepsilon + \left(\frac{C_1 + C_3}{C_1} \mu_2 + \mu_4 \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_4}{C_1} \ddot{\varepsilon}$$

$$(77) \quad (C_1 \sim \mu_2) \parallel C_3 \parallel M_4 \quad \begin{array}{l} \text{standard} \parallel \text{tehetetlenségi} \\ \text{magasabbrendű deriváltak} \end{array}$$

$$(78) \quad (C_1 \sim \mu_2) \parallel \mu_3 \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(79) \quad (C_1 \sim M_2) \parallel C_3 \parallel \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(80) \quad (C_1 \sim M_2) \parallel C_3 \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(81) \quad (C_1 \sim M_2) \parallel \mu_3 \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(82) \quad (\mu_1 \sim M_2) \parallel C_3 \parallel \mu_4 \quad \begin{array}{l} \text{tehetetlenségi standard} \parallel \text{NEWTON} = \\ = \text{tehetetlenségi standard} \end{array}$$

$$\sigma + \frac{M_2}{\mu_1} \dot{\sigma} = C_3 \varepsilon + \left(\mu_4 + \frac{C_3 M_2}{\mu_1} \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_1 + \mu_4}{\mu_1} M_2 \ddot{\varepsilon}$$

$$(83) \quad (\mu_1 \sim M_2) \parallel C_3 \parallel M_4 \quad \text{tehetetlenségi standard} \parallel \text{tehetetlenségi} \\ \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(84) \quad (\mu_1 \sim M_2) \parallel \mu_3 \parallel M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(85) \quad (C_1 \parallel \mu_2) \sim (C_3 \parallel \mu_4) \quad \text{KELVIN} \sim \text{KELVIN} = \\ = \text{tehetetlenségi standard}$$

$$\sigma + \frac{\mu_2 + \mu_4}{C_1 + C_3} \dot{\sigma} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \varepsilon + \frac{C_1 \mu_4 + C_3 \mu_2}{C_1 + C_3} \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_4}{C_1 + C_3} \ddot{\varepsilon}$$

$$(86) \quad (C_1 \parallel \mu_2) \sim (C_3 \parallel M_4) \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(87) \quad (C_1 \parallel \mu_2) \sim (\mu_3 \parallel M_4) \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(88) \quad (C_1 \parallel M_2) \sim (C_3 \parallel M_4) \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(89) \quad (C_1 \parallel M_2) \sim (\mu_3 \parallel M_4) \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(90) \quad (\mu_1 \parallel M_2) \sim (\mu_3 \parallel M_4) \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(91) \quad (C_1 \parallel \mu_2) \sim C_3 \sim \mu_4 \quad \text{KELVIN} \sim \text{MAXWELL} = \\ = \text{standard} \sim \text{NEWTON} = \text{BURGERS} \\ \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(92) \quad (C_1 \parallel \mu_2) \sim C_3 \sim M_4 \quad \text{standard} \sim \text{tehetetlenségi} \\ \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(93) \quad (C_1 \parallel \mu_2) \sim \mu_3 \sim M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(94) \quad (C_1 \parallel M_2) \sim C_3 \sim \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(95) \quad (C_1 \parallel M_2) \sim C_3 \sim M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(96) \quad (C_1 \parallel M_2) \sim \mu_3 \sim M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(97) \quad (\mu_1 \parallel M_2) \sim C_3 \sim \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(98) \quad (\mu_1 \parallel M_2) \sim C_3 \sim M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(99) \quad (\mu_1 \parallel M_2) \sim \mu_3 \sim M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(100) \quad [(C_1 \sim \mu_2) \parallel C_3] \sim C_4 \quad \text{standard} \sim \text{HOOKE} = \text{standard}$$

$$\sigma + \frac{C_1 + C_3 + C_4}{C_1(C_3 + C_4)} \mu_2 \dot{\sigma} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \varepsilon + \frac{(C_1 + C_3) C_4}{C_1(C_3 + C_4)} \mu_2 \dot{\varepsilon}$$

$$(101) \quad [(C_1 \sim \mu_2) \parallel C_3] \sim \mu_4 \quad \text{standard} \sim \text{NEWTON} \\ \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(102) \quad [(C_1 \sim \mu_2) \parallel C_3] \sim M_4 \quad \text{standard} \sim \text{tehetetlenségi} \\ \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(103) \quad [(C_1 \sim \mu_2) \parallel \mu_3] \sim C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(104) \quad [(C_1 \sim \mu_2) \parallel \mu_3] \sim \mu_4 \\ \sigma + \frac{\mu_2(\mu_3 + \mu_4)}{C_1(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)} \dot{\sigma} = \frac{(\mu_2 + \mu_3)\mu_4}{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4} \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2\mu_3\mu_4}{C_1(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)} \ddot{\varepsilon}$$

$$(105) \quad [(C_1 \sim \mu_2) \parallel \mu_3] \sim M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(106) \quad [(C_1 \sim \mu_2) \parallel M_3] \sim C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(107) \quad [(C_1 \sim \mu_2) \parallel M_3] \sim \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(108) \quad [(C_1 \sim \mu_2) \parallel M_3] \sim M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(109) \quad [(C_1 \sim M_2) \parallel C_3] \sim C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(110) \quad [(C_1 \sim M_2) \parallel C_3] \sim \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(111) \quad [(C_1 \sim M_2) \parallel C_3] \sim M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(112) \quad [(C_1 \sim M_2) \parallel \mu_3] \sim C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(113) \quad [(C_1 \sim M_2) \parallel \mu_3] \sim \mu_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(114) \quad [(C_1 \sim M_2) \parallel \mu_3] \sim M_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

$$(115) \quad [(C_1 \sim M_2) \parallel M_3] \sim C_4 \quad \text{magasabbrendű deriváltak}$$

- (116) $[(C_1 \sim M_2) \parallel M_3] \sim \mu_4$ magasabbrendű deriváltak
- (117) $[(C_1 \sim M_2) \parallel M_3] \sim M_4$ magasabbrendű deriváltak
- (118) $[(\mu_1 \sim M_2) \parallel C_3] \sim C_4$ tehetetlenségi standard $\sim$ HOOKE
magasabbrendű deriváltak
- (119) $[(\mu_1 \sim M_2) \parallel C_3] \sim \mu_4$ tehetetlenségi standard $\sim$ NEWTON
magasabbrendű deriváltak
- (120) $[(\mu_1 \sim M_2) \parallel C_3] \sim M_4$ tehetetlenségi standard $\sim$ tehetetlenségi
magasabbrendű deriváltak
- (121) $[(\mu_1 \sim M_2) \parallel \mu_3] \sim C_4$ magasabbrendű deriváltak
- (122) $[(\mu_1 \sim M_2) \parallel \mu_3] \sim \mu_4$

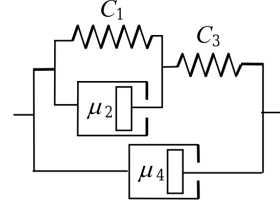
$$\sigma + \frac{\mu_1 + \mu_3 + \mu_4}{\mu_1(\mu_3 + \mu_4)} M_2 \dot{\sigma} = \frac{\mu_3 \mu_4}{\mu_3 + \mu_4} \dot{\varepsilon} + \frac{(\mu_1 + \mu_3) \mu_4}{\mu_1(\mu_3 + \mu_4)} M_2 \ddot{\varepsilon}$$
- (123) $[(\mu_1 \sim M_2) \parallel \mu_3] \sim M_4$ magasabbrendű deriváltak
- (124) $[(\mu_1 \sim M_2) \parallel M_3] \sim C_4$ magasabbrendű deriváltak
- (125) $[(\mu_1 \sim M_2) \parallel M_3] \sim \mu_4$ magasabbrendű deriváltak
- (126) $[(\mu_1 \sim M_2) \parallel M_3] \sim M_4$ magasabbrendű deriváltak
- (127) $(C_1 \sim \mu_2) \parallel (C_3 \sim \mu_4)$ MAXWELL $\parallel$ MAXWELL
magasabbrendű deriváltak
- (128) $(C_1 \sim \mu_2) \parallel (C_3 \sim M_4)$ magasabbrendű deriváltak
- (129) $(C_1 \sim \mu_2) \parallel (\mu_3 \sim M_4)$ magasabbrendű deriváltak
- (130) $(C_1 \sim M_2) \parallel (C_3 \sim M_4)$ magasabbrendű deriváltak
- (131) $(C_1 \sim M_2) \parallel (\mu_3 \sim M_4)$ magasabbrendű deriváltak
- (132) $(\mu_1 \sim M_2) \parallel (\mu_3 \sim M_4)$ magasabbrendű deriváltak

2.4. RUGÓK, OLAJFÉKEK ÉS TEHETETLENSÉGI ELEMÉK TEHETETLENSÉGI
STANDARD MODELLRE VEZETŐ NÉGYELEMŰ KAPCSOLÁSAINAK NÉHÁNY
JELLEMZŐJE

2.4.1. AZ (50) KAPCSOLÁS: $[(C_1 \parallel \mu_2) \sim C_3] \parallel \mu_4$

$$(133) \quad \sigma + \frac{\mu_2}{C_1 + C_3} \dot{\sigma} =$$

$$= \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \varepsilon + \left(\frac{C_3 \mu_2}{C_1 + C_3} + \mu_4 \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_4}{C_1 + C_3} \ddot{\varepsilon}$$



$$(134) \quad \tau = \frac{\mu_2}{C_1 + C_3}, \quad C = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}, \quad \mu = \frac{C_3 \mu_2}{C_1 + C_3} + \mu_4, \quad M = \frac{\mu_2 \mu_4}{C_1 + C_3},$$

$$(135) \quad I_\mu = \frac{C_3^2}{(C_1 + C_3)^2} \mu_2 + \mu_4 > 0, \quad I_M = -\frac{C_3^2 \mu_2^2}{(C_1 + C_3)^2} < 0.$$

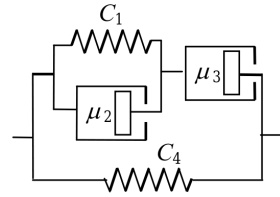
Megfordítva:

$$(136) \quad C_1 = \frac{\tau^2 C - I_M}{-I_M} C, \quad \mu_2 = \frac{(\tau^2 C - I_M)^2}{\tau(-I_M)}, \quad C_3 = C + \frac{-I_M}{\tau^2}, \quad \mu_4 = \frac{M}{\tau}.$$

2.4.2. AZ (52) KAPCSOLÁS: $[(C_1 \parallel \mu_2) \sim \mu_3] \parallel C_4$

$$(137) \quad \sigma + \frac{\mu_2 + \mu_3}{C_1} \dot{\sigma} =$$

$$= C_4 \varepsilon + \left(\frac{C_4}{C_1} \mu_2 + \frac{C_1 + C_4}{C_1} \mu_3 \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_3}{C_1} \ddot{\varepsilon}$$



$$(138) \quad \tau = \frac{\mu_2 + \mu_3}{C_1}, \quad C = C_4, \quad \mu = \frac{C_4}{C_1} \mu_2 + \frac{C_1 + C_4}{C_1} \mu_3, \quad M = \frac{\mu_2 \mu_3}{C_1},$$

$$(139) \quad I_\mu = \mu_3 > 0, \quad I_M = -\frac{\mu_3^2}{C_1} < 0.$$

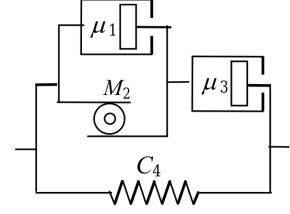
Megfordítva:

$$(140) \quad C_1 = \frac{I_\mu^2}{-I_M}, \quad \mu_2 = \frac{I_\mu M}{-I_M}, \quad \mu_3 = I_\mu, \quad C_4 = C.$$

2.4.3. A (70) KAPCSOLÁS: $[(\mu_1 \parallel M_2) \sim \mu_3] \parallel C_4$

$$(141) \quad \sigma + \frac{M_2}{\mu_1 + \mu_3} \dot{\sigma} =$$

$$= C_4 \varepsilon + \frac{\mu_1 \mu_3 + C_4 M_2}{\mu_1 + \mu_3} \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} M_2 \ddot{\varepsilon}$$



$$(142) \quad \tau = \frac{M_2}{\mu_1 + \mu_3}, \quad C = C_4, \quad \mu = \frac{\mu_1 \mu_3 + C_4 M_2}{\mu_1 + \mu_3}, \quad M = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} M_2,$$

$$(143) \quad I_\mu = \frac{\mu_1 \mu_3}{\mu_1 + \mu_3} > 0, \quad I_M = \frac{\mu_3^2 M_2}{(\mu_1 + \mu_3)^2} > 0.$$

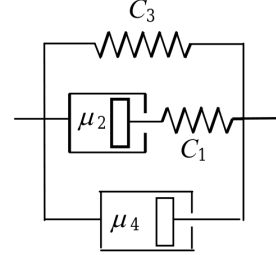
Megfordítva:

$$(144) \quad \mu_1 = \frac{I_\mu M}{I_M}, \quad M_2 = \frac{M^2}{I_M}, \quad \mu_3 = \frac{M}{\tau}, \quad C_4 = C.$$

2.4.4. A (76) KAPCSOLÁS: $(C_1 \sim \mu_2) \parallel C_3 \parallel \mu_4$

$$(145) \quad \sigma + \frac{\mu_2}{C_1} \dot{\sigma} =$$

$$= C_3 \varepsilon + \left(\frac{C_1 + C_3}{C_1} \mu_2 + \mu_4 \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_4}{C_1} \ddot{\varepsilon}$$



$$(146) \quad \tau = \frac{\mu_2}{C_1}, \quad C = C_3, \quad \mu = \mu_4 + \frac{C_1 + C_3}{C_1} \mu_2, \quad M = \frac{\mu_2 \mu_4}{C_1},$$

$$(147) \quad I_\mu = \mu_2 + \mu_4 > 0, \quad I_M = -\frac{\mu_2^2}{C_1} < 0.$$

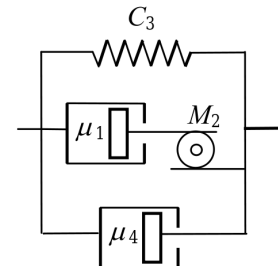
Megfordítva:

$$(148) \quad C_1 = -\frac{I_M}{\tau^2}, \quad \mu_2 = -\frac{I_M}{\tau}, \quad C_3 = C, \quad \mu_4 = \frac{M}{\tau}.$$

2.4.5. A (82) KAPCSOLÁS: $(\mu_1 \sim M_2) \parallel C_3 \parallel \mu_4$

$$(149) \quad \sigma + \frac{M_2}{\mu_1} \dot{\sigma} =$$

$$= C_3 \varepsilon + \left(\mu_4 + \frac{C_3 M_2}{\mu_1} \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_1 + \mu_4}{\mu_1} M_2 \ddot{\varepsilon}$$



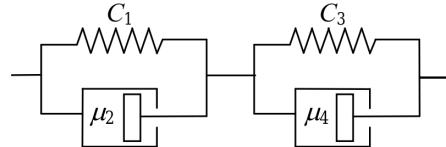
$$(150) \quad \tau = \frac{M_2}{\mu_1}, \quad C = C_3, \quad \mu = \mu_4 + \frac{C_3 M_2}{\mu_1}, \quad M = \frac{\mu_1 + \mu_4}{\mu_1} M_2,$$

$$(151) \quad I_\mu = \mu_4 > 0, \quad I_M = M_2 > 0.$$

Megfordítva:

$$(152) \quad \mu_1 = \frac{I_M}{\tau}, \quad M_2 = I_M, \quad C_3 = C, \quad \mu_4 = I_\mu.$$

2.4.6. A (85) KAPCSOLÁS: $(C_1 \parallel \mu_2) \sim (C_3 \parallel \mu_4)$

$$(153) \quad \sigma + \frac{\mu_2 + \mu_4}{C_1 + C_3} \dot{\sigma} =$$


$$= \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \varepsilon + \frac{C_1 \mu_4 + C_3 \mu_2}{C_1 + C_3} \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_4}{C_1 + C_3} \ddot{\varepsilon}$$

$$(154) \quad \tau = \frac{\mu_2 + \mu_4}{C_1 + C_3}, \quad C = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}, \quad \mu = \frac{C_1 \mu_4 + C_3 \mu_2}{C_1 + C_3}, \quad M = \frac{\mu_2 \mu_4}{C_1 + C_3},$$

$$(155) \quad I_\mu = \frac{C_1^2 \mu_4 + C_3^2 \mu_2}{(C_1 + C_3)^2} > 0, \quad I_M = -\frac{(C_1 \mu_4 + C_3 \mu_2)^2}{(C_1 + C_3)^3} < 0.$$

KIVÉTEL a $\frac{\mu_2}{C_1} = \frac{\mu_4}{C_3}$, azaz $C_1 \mu_4 = C_3 \mu_2$ speciális eset, amikor a nemtriviális közös osztó a következő egyszerűbb eredő egyenletre vezet:

$$(156) \quad \sigma = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \varepsilon + \frac{C_1}{C_1 + C_3} \mu_4 \dot{\varepsilon}.$$

Megfordítva: az általános esetben

$$(157) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{2C\sqrt{\mu^2 - 4CM}}{\sqrt{\mu^2 - 4CM} + (\mu - 2\tau C)}, & \mu_2 &= \frac{\mu\sqrt{\mu^2 - 4CM} + (\mu^2 - 4CM)}{\sqrt{\mu^2 - 4CM} + (\mu - 2\tau C)}, \\ C_3 &= \frac{2C\sqrt{\mu^2 - 4CM}}{\sqrt{\mu^2 - 4CM} - (\mu - 2\tau C)}, & \mu_4 &= \frac{\mu\sqrt{\mu^2 - 4CM} - (\mu^2 - 4CM)}{\sqrt{\mu^2 - 4CM} - (\mu - 2\tau C)}. \end{aligned}$$

A (155) feltételek biztosítják, hogy a (157) képletek valós és pozitív C_1 , μ_2 , C_3 , μ_4 eredményeket szolgáltatassanak.

MIND A HAT KAPCSOLÁSRA (2.4.1–2.4.6) teljesül, hogy

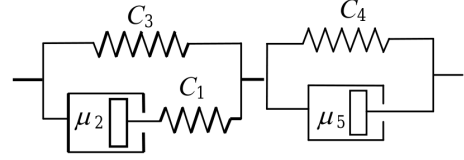
- $I_\mu > 0$,
- a tehetetlenségi elemet nem tartalmazó kapcsolásokra $I_M < 0$, a tehetetlenségi elemet tartalmazókra $I_M > 0$.

2.5. NÉHÁNY NÉGYNÉL TÖBB ELEMES KAPCSOLÁS VISZONYA A TEHETETLENSÉGI STANDARD MODELLHEZ

2.5.1. $[(C_1 \sim \mu_2) \parallel C_3] \sim (C_4 \parallel \mu_5)$:

standard $\sim$ KELVIN;

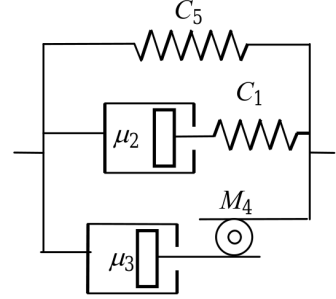
magasabbrendű deriváltak ($\ddot{\sigma}$).



2.5.2. $(C_1 \sim \mu_2) \parallel (\mu_3 \sim M_4) \parallel C_5$ A $\frac{\mu_2}{C_1} = \frac{M_4}{\mu_3}$ FELTÉTEL MELLETT:

- MAXWELL $\parallel$ (speciális) tehetetlenségi standard,
- a feltétel miatt négy szabad paraméter van,
- ezúttal a speciális (6) képletet alkalmazzuk,

$$(158) \quad \sigma + \frac{\mu_2}{C_1} \dot{\sigma} = C_5 \varepsilon + \frac{C_1 + C_5}{C_1} \mu_2 \dot{\varepsilon} + M_4 \ddot{\varepsilon},$$



$$(159) \quad \tau = \frac{\mu_2}{C_1}, \quad C = C_5, \quad \mu = \frac{C_1 + C_5}{C_1} \mu_2, \quad M = M_4,$$

$$(160) \quad I_\mu = \mu_2 > 0, \quad I_M = \frac{\mu_2}{C_1} (\mu_3 - \mu_2) \quad (\text{előjele tetszőleges}).$$

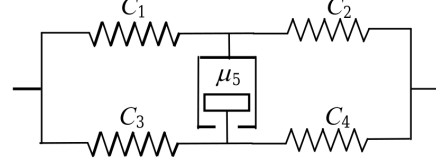
Megfordítva:

$$(161) \quad C_1 = \frac{I_\mu}{\tau}, \quad \mu_2 = I_\mu, \quad \mu_3 = \tau M, \quad M_4 = M, \quad C_5 = C.$$

Ez tehát egy olyan kapcsolás, amely lefedi az alulcsillapított, túlcsillapított és kritikus csillapított eseteket egyaránt.

2.5.3. $(C_1 \sim C_2) \parallel (C_3 \sim C_4)$ KÉT ÁGA KÖZÉ HÍDKÉNT KAPCSOLVA μ_5 :

- példa olyan kapcsolásra, mely nem áll elő egyszerűbbek soros és párhuzamos kapcsolásaként,
- a Kirchoff-törvények megfelelőit kell felírni, és az egyenletek—és bizonyos deriváltjaik—rendszerét megoldani;



$$(162) \quad \sigma + \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \mu_5 \dot{\sigma} = \frac{C_1 C_2 C_3 C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right) \varepsilon + \frac{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \mu_5 \dot{\varepsilon}$$

$$(163) \quad \tau = \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \mu_5, \quad C = \frac{C_1 C_2 C_3 + C_1 C_2 C_4 + C_1 C_3 C_4 + C_2 C_3 C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)},$$

$$\mu = \frac{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \mu_5, \quad M = 0,$$

$$(164) \quad I_\mu = \frac{(C_1 C_4 - C_2 C_3)^2}{(C_1 + C_2)^2 (C_3 + C_4)^2} \mu_5 > 0,$$

$$I_M = -\frac{(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)(C_1 C_4 - C_2 C_3)^2}{(C_1 + C_2)^3 (C_3 + C_4)^3} \mu_5^2 < 0.$$

2.6. TEHETETLENSÉGI STANDARD MODELLRE VEZETŐ SOROS ÉS PÁRHUZAMOS KAPCSOLÁSOK CSILLAPÍTÁSI ÉS TEHETETLENSÉGI INDEXE ÁLTALÁNOSAN

$$(\mathcal{A}\sigma = \tilde{P}\varepsilon) \parallel (\mathcal{B}\sigma = \tilde{Q}\varepsilon), \quad \text{azaz} \quad \underbrace{(\mathcal{F}\mathcal{G}\sigma = \tilde{P}\varepsilon)}_{I_{\mu_1}, I_{M_1}} \parallel \underbrace{(\mathcal{F}\mathcal{H}\sigma = \tilde{Q}\varepsilon)}_{I_{\mu_2}, I_{M_2}} :$$

$$(165) \quad I_\mu = I_{\mu_1} + I_{\mu_2}, \quad I_M = I_{M_1} + I_{M_2},$$

utóbbi csak olyankor, ha az eredő egy tehetetlenségi standard modell.

$$(\mathcal{A}\sigma = \tilde{P}\varepsilon) \sim (\mathcal{B}\sigma = \tilde{Q}\varepsilon), \quad \text{azaz} \quad \underbrace{(\mathcal{A}\sigma = \mathcal{D}^m \mathcal{X} \mathcal{Y} \varepsilon)}_{I_{\mu_1}, I_{M_1}} \sim \underbrace{(\mathcal{B}\sigma = \mathcal{D}^n \mathcal{X} \mathcal{Z} \varepsilon)}_{I_{\mu_2}, I_{M_2}} :$$

$m \geq n$ esetén:

$$(166) \quad I_\mu = \frac{\delta_{mn} Y_0^2 I_{\mu_2} + Z_0^2 I_{\mu_1}}{(\delta_{mn} Y_0 + Z_0)^2},$$

$$(167) \quad I_M = \frac{\delta_{mn} Y_0^2 I_{M2} + Z_0^2 I_{M1}}{(\delta_{mn} Y_0 + Z_0)^2} - \delta_{n0} \left[\delta_{m0} \frac{[Y_0(Z_1 - B_1 Z_0) - Z_0(Y_1 - A_1 Y_0)]^2}{(Y_0 + Z_0)^3} + \delta_{m1} \frac{Y_0^2}{Z_0} \right];$$

$m \leq n$ esetén:

$$(168) \quad I_\mu = \frac{Y_0^2 I_{\mu 2} + \delta_{mn} Z_0^2 I_{\mu 1}}{(Y_0 + \delta_{mn} Z_0)^2},$$

$$(169) \quad I_M = \frac{Y_0^2 I_{M2} + \delta_{mn} Z_0^2 I_{M1}}{(Y_0 + \delta_{mn} Z_0)^2} - \delta_{m0} \left[\delta_{n0} \frac{[Y_0(Z_1 - B_1 Z_0) - Z_0(Y_1 - A_1 Y_0)]^2}{(Y_0 + Z_0)^3} + \delta_{n1} \frac{Z_0^2}{Y_0} \right];$$

ahol a tehetetlenségi indexet megadó képletek ismét csak olyankor érvényesek, ha az eredő egy tehetetlenségi standard modell.

(165)–(169) a nemtriviális közös osztókhöz tartozó egyszerűbb eredő egyenletekre is érvényesek.

Következmények:

- nemnegatív csillapítási indexűek soros és párhuzamos kapcsolásainak csillapítási indexe nemnegatív (és pozitívúaké pozitív) — így például a rugókból, olajfékekből és tehetetlenségi elemekből sorosan és párhuzamosan kapcsolt hálózatok csillapítási indexe nemnegatív (ezért például nem állíthatják elő a $\sigma + \tau \dot{\sigma} = C\varepsilon$ egyenlettel jellemzett ún. *relaxációs* modellt);
- nempozitív tehetetlenségi indexűek soros és párhuzamos kapcsolásainak tehetetlenségi indexe nempozitív (és negatívúaké negatív) — így például a rugókból és olajfékekből sorosan és párhuzamosan kapcsolt hálózatok tehetetlenségi indexe nempozitív (tehát tehetetlenségi elem hozzáadása nélkül nem lehet belőlük alulcsillapított, túltehetetlen kapcsolásokat létrehozni).

3. AZ EREDMÉNYEKHEZ VEZETŐ RÉSZLETES ÚT

3.1. ELJÁRÁS F -FAJTA REOLÓGIAI ELEM ÖSSZES LEHETSÉGES, LEGFELJEBB N -ELEMŰ KAPCSOLÁSÁNAK ELŐÁLLÍTÁSÁRA

Olyan algoritmust keresünk, ami nemcsak azokat a kapcsolásokat találja meg, amelyek előállnak egyszerűbb kapcsolások soros vagy párhuzamos kapcsolásaként, hanem az összes lehetségeset (így például a híd típusúakat is).

Egy kapcsolást egy gráffal modellezhetünk. Minden reológiai elemet (kétpólust) a gráf egy éle reprezentál, a két pólust pedig az él két csúcsa. Egy-egy csúcsba más elemek, azaz élek is befuthatnak: a csúcsokban kapcsolódnak egymáshoz az elemek. Egy csúcs fokának azt nevezzük, ahány él fut be hozzá. A teljes kapcsolásnak lesz továbbá két „kivezetése” [szintén éle, a végén „szabad” (egy fokú) csúccsal].

Első lépésként tekintsünk el a két kivezetéstől — ezeket egy későbbi fázisban fogjuk majd a gráfhoz hozzákötni. Jelölje N a gráf éleinek számát (azaz az elemek számát), C pedig a csúcsok számát. Csak összefüggő gráfokra kívánunk szorítkozni (a kapcsolat ne álljon több független részből), és csak olyanokra, amelyekben minden él két csúcsa különböző. Ekkor $2 \leq C \leq N+1$ (egy élnek máris van két csúcsa, további behúzott élek pedig vagy behoznak egy-egy új csúcsot, vagy mindkét végükkel már jelenlevő csúcsba futnak be). A $C = N + 1$ esetek az úgynevezett fagráfok.

Az összes N élű gráfot rekurzívan, az $N - 1$ élűekből generálhatjuk: minden egyes $N - 1$ élű gráfba minden lehetséges módon behúzzunk egy új élet. Az $N = 1$ élű egyetlen triviális gráfból indulhatunk.

Közelebbről, az N , C -jű gráfokat az $N - 1$, C -jűekből kaphatjuk meg úgy, hogy minden lehetséges módon behúzzunk egy új élet a meglévő C csúcs közül két különböző közé. Kivétel az N , $C = N + 1$ eset: az ilyeneket úgy kaphatjuk meg, hogy az $N - 1$, $C = N$ -ű gráfok minden egyes csúcsába behúzzunk egy élet, melynek másik csúcsát szabadon hagyjuk: az lesz az új csúcs.

Ha így elkészültünk az összes legfeljebb N élű gráffal, ezután következhet a két kivezetés behúzása, két él behúzása bármely két különböző csúcsba.

Észrevehetjük, hogy olyan kapcsolásokat is kapunk, amelyeknek van redundáns, inaktív része: pl. olyan él, ami nem kivezetés, mégis az egyik csúcsa „szabad” (egy fokú). Általánosabban, redundancia van, ha akad olyan csúcs, hogy a bele futó élek közül bizonyosokat elvágva két vagy több független részre esik szét a gráf, mely részek némelyikéből nem áll ki kivezetés. Az ilyen redundáns résszel rendelkező gráfokat eldobhatjuk (nem érhet miatta veszteség minket, mert a redundáns rész nélküli gráfnak szerepelnie kell az összes megtalált gráf között).

Mindezidáig nem különböztettük meg az éleket aszerint, hogy az F elemfajta

közül melyik élen melyik fajta elem van. Most kapcsoljuk be ezt a megkülönböztetést (mondhatni, minden elem-élet színezzünk ki F szín egyikével). Ez természetesen jelentősen megnöveli a lehetséges kapcsolások számát. Két vagy több azonos típusú elem soros kapcsolása is, párhuzamos kapcsolása is helyettesíthető viszont egyetlen olyan típusú elemmel, ami valamennyivel csökkenti a (lényegileg különböző) lehetőségeket.

Az ezek után előttünk álló kapcsolások kerültek feltüntetésre a 2.3 pontban, az $F = 3$ elemfajta és a legfeljebb $N = 4$ összekapcsolt elem esetére. Módszerünkkel azt is megállapíthatjuk, hogy a legfeljebb négyelemes kapcsolások mind előállnak egyszerűbbek soros vagy párhuzamos kapcsolásaként (ez az állítás független F értékétől). Az ötelemes kapcsolások is még majdnem mind ilyenek: a híd típusú kapcsolások bizonyulnak csak kivételnek.

3.2. ÁLTALÁNOS FORMULA REOLÓGIAI MODELLEK SOROS ÉS PÁRHUZAMOS KAPCSOLÁSAINAK EREDŐ EGYENLETÉRE

A $\mathcal{D}$ időderivált operátor bármely polinomja felcserélhető bármely másik polinomjával. Ezt észrevéve,

$(\mathcal{A}\sigma = \tilde{\mathcal{P}}\varepsilon) \parallel (\mathcal{B}\sigma = \tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon)$ eredő egyenlete:

$$(170) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \mathcal{A}\sigma_1 = \tilde{\mathcal{P}}\varepsilon, \quad \mathcal{B}\mathcal{A}\sigma_1 = \mathcal{B}\tilde{\mathcal{P}}\varepsilon \\ \mathcal{B}\sigma_2 = \tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon, \quad \mathcal{A}\mathcal{B}\sigma_2 = \mathcal{A}\tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}\sigma = \mathcal{B}\tilde{\mathcal{P}}\varepsilon + \mathcal{A}\tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon.$$

Ha $\mathcal{A} = \mathcal{F}\mathcal{G}$ és $\mathcal{B} = \mathcal{F}\mathcal{H}$ közös osztója, $\mathcal{F}$ nemtriviális, akkor egyszerűbb (alacsonyabb rendű deriváltakat tartalmazó) eredő egyenletet is kaphatunk:

$$(171) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \mathcal{F}\mathcal{G}\sigma_1 = \tilde{\mathcal{P}}\varepsilon, \quad \mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{G}\sigma_1 = \mathcal{H}\tilde{\mathcal{P}}\varepsilon \\ \mathcal{F}\mathcal{H}\sigma_2 = \tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon, \quad \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{H}\sigma_2 = \mathcal{G}\tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{H}\sigma = \mathcal{H}\tilde{\mathcal{P}}\varepsilon + \mathcal{G}\tilde{\mathcal{Q}}\varepsilon.$$

$(\mathcal{A}\sigma = \mathcal{D}^m \mathcal{P}\varepsilon) \sim (\mathcal{B}\sigma = \mathcal{D}^n \mathcal{Q}\varepsilon)$ eredő egyenlete: ha $m \geq n$:

$$(172) \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \mathcal{A}\sigma = \mathcal{D}^m \mathcal{P}\varepsilon_1, \quad \mathcal{Q}\mathcal{A}\sigma = \mathcal{Q}\mathcal{D}^m \mathcal{P}\varepsilon_1 \\ \mathcal{B}\sigma = \mathcal{D}^n \mathcal{Q}\varepsilon_2, \quad \mathcal{D}^{m-n} \mathcal{P}\mathcal{B}\sigma = \mathcal{D}^m \mathcal{P}\mathcal{Q}\varepsilon_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(173) \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \mathcal{D}^{m-n} \mathcal{P}\mathcal{B} + \mathcal{Q}\mathcal{A}\sigma = \mathcal{D}^m \mathcal{P}\mathcal{Q}\varepsilon, \\ &\frac{1}{\delta_{mn}P_0 + Q_0} [\mathcal{D}^{m-n} \mathcal{P}\mathcal{B}\sigma + \mathcal{Q}\mathcal{A}\sigma] = \frac{1}{\delta_{mn}P_0 + Q_0} \mathcal{Q}\tilde{\mathcal{P}}\varepsilon. \end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk $m \leq n$ esetén, hogy

$$(174) \quad \frac{1}{P_0 + \delta_{mn}Q_0}[\mathcal{P}\mathcal{B}\sigma + \mathcal{D}^{n-m}Q\mathcal{A}\sigma] = \frac{1}{P_0 + \delta_{mn}Q_0}\mathcal{P}\tilde{Q}_\varepsilon.$$

Ha $\mathcal{A} = \mathcal{X}\mathcal{Y}$ és $\mathcal{B} = \mathcal{X}\mathcal{Y}$ közös osztója, $\mathcal{X}$ nemtriviális, akkor hasonló lépésekkel kapjuk az

$$(175) \quad m \geq n : \quad \frac{1}{\delta_{mn}Y_0 + Z_0}[\mathcal{D}^{m-n}\mathcal{Y}\mathcal{B}\sigma + Z\mathcal{A}\sigma] = \frac{1}{\delta_{mn}Y_0 + Z_0}Z\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon,$$

$$(176) \quad m \leq n : \quad \frac{1}{Y_0 + \delta_{mn}Z_0}[\mathcal{Y}\mathcal{B}\sigma + \mathcal{D}^{n-m}Z\mathcal{A}\sigma] = \frac{1}{Y_0 + \delta_{mn}Z_0}\mathcal{Y}\tilde{Q}_\varepsilon$$

egyszerűbb egyenleteket.

3.3. SZÁMÍTÓGÉPES MAPLE-PROGRAM F -FAJTA REOLÓGIAI ELEM ÖSSZES, LEGFELJEBB N -ELEMŰ SOROS ÉS PÁRHUZAMOS KAPCSOLÁSÁNAK ELŐÁLLÍTÁSÁRA ÉS EREDŐ EGYENLETEIK KISZÁMOLÁSÁRA

A program az internetről is elérhető: egy keresővel keressünk rá az elemkapcs-ft-080504.mws file-névre.

```
## Reologiai alapelemek soros es parhuzamos kapcsolasainak
## eloallitasa
##
## Az eredo egyenletet is eloallitja
## Nem nezi, hogy van-e nemtrivialis kozos osztó

## Elokészületek:
F := 3: ## Ennyifajta kulonbozo elemből építkezünk
Nmax := 4: ## A max. ennyi elemből álló kapcsolásokat állítjuk elő
S := -1/2: ## A soros és a parhuzamos kapcsolásokat
P := -S: ## ezekkel a számokkal jelöljük
igazit := proc(Op) local X: ## Egyszerűsít és d
X := collect(expand(Op), d): ## növekvő hatványai
series( simplify(X), d, infinity ): ## szerint rendez
end:
minfokszam := proc(Op) local i, x: i := 0: x := Op:
while subs( d=0, x ) = 0 do x := x/d: i := i + 1: od: i:
end: ## A gyári ldegree nem jó erre a célra
maxfokszam := proc(Op) local i, x: i := -1: x := Op:
while x <> 0 do x := diff(x, d): i := i + 1: od: i:
end: ## A gyári degree nem jó erre a célra
kifejtKs := proc(k, n) ## k: kapcsolás sorszáma,
## n: eddig ennyi elem lett beszámolva
local K, j, i, l, S: K := Ks[k]: j := n:
for i to nops(K) do l := op(i, K):
if l > F then
S := kifejtKs(l, j):
```

```

        K := subsop(i = op(1, [S]), K):
        j := op(2, [S]):
    elif l >= 1 then
        j := j + 1:
        K := subsop(i = o1k(Pop[l], j), K):
    fi:
od: sp(K), j:
end: ## Így áll össze az alapelemek kapcsolásaként
SP1[S] := Soros: SP1[P] := Parh:
sp := L -> subsop(1 = SP1[ op(1, L) ], L):
## Konvencionálisabb jelölések az egyutthatokra:
Konvl := [C, mu, M]:
o1k:= proc(Op, oo) local i, X: X := Op:
    for i to F do X := subs( U[i-1] = Konvl[i], X ): od:
    subs( o = oo, X ):
end:

Ks := NULL: ## A talált kapcsolások sorozata, egyelőre üres
Ts := NULL: ## Eltesszük azt is, amelyik alakban találtuk
kmin[1] := 1: ## A kapcsolások sorozatában az egyelemű
kmax[1] := F: ## kapcsolások sorszáma 1-től F-ig terjed majd
for k from kmin[1] to kmax[1] do
    ## Az egyelemű kapcsolásokat egyszerűen a sorszámmal jelöljük, most
    ## beírjuk őket a kapcsolások sorozatába, fokszamaikat pedig leolvassuk
    ##  $\sigma = P_0 D^{(k-1)} \epsilon$  alakú egyenletükből:
    Ks := Ks, k: Ts := Ts, k: n[k] := 1: ## n: hánylelemes kapcsolás
    Aop[k] := 1: ## A bal oldalon a  $\sigma$ -ra ható operátor
    Pop[k] := U[k-1][o]: ## A jobb oldalon az  $\epsilon$ -ra ható operátor
    ##  $d^{(k-1)}$  utáni része, U az egyuttható
    a[k] := 0: m[k] := k - 1: ## A bal oldal maximális fokszáma, a jobb
    ph[k] := m[k]: p[k] := 0: ## oldal minimális és maximális fokszáma,
    od: ## a kettő különbsége (max. - min.)
for N from 2 to Nmax do ## Eloallítjuk az N elemből álló kapcsolásokat
    kmin[N] := kmax[N-1] + 1: ## Kezdeti értékek;
    kmax[N] := kmax[N-1]: ## egyelőre még egyet sem találtunk
    for SP in [S, P] do ## Eloszor a sorosakat, utána a párhuzamosakat
        for N1 to floor(N/2) do ## Egy N1 és egy N2 = N - N1 >= N1 elem-
            N2 := N - N1: ## ből álló kapcsolásaként keressük őket
            for k1 from kmin[N1] to kmax[N1] do ## Vesszük sorban az N1
                for k2 from kmin[N2] to kmax[N2] do ## és az N2 eleműeket
                    if op(1, Ks[k1]) = SP then ## Ha az első válto-
                        s := op( 2 .. nops(Ks[k1]), Ks[k1] ): ## zó is soros/pár-
                    else ## huz., egyesítjük /
                        s := k1: ## felemeljük a maga-
                    fi: ## sabb szintre
                    if op(1, Ks[k2]) = SP then ## A második
                        s := s, op( 2 .. nops(Ks[k2]), Ks[k2] ): ## változóval
                    else ## ugyanez
                        s := s, k2:
                    fi: l := sort( [SP, s] ): i := 2: ## Sorrendbe rendezzük
                    for i from nops(l) to 3 by -1 do ## Ha egyfajta elemből
                        if l[i] <= F and l[i-1] = l[i] then ## több szerepel,
                            l := subsop(i = NULL, l): ## egyetlen eredő
                        fi: ## elemme vonjuk össze
                    od:
                    megnincs := true:

```

```

for k to kmax[N] do ## Uj kapcsolás-e
  if l = Ks[k] then megnincs := false: fi:
od: ## A ciklus lejárta után k értéke kmax[N] + 1
if megnincs and nops(1) > 2 then ## Pl. [S, 1] nem új
  kmax[N] := k: n[k] := N: ## Eggyel növeljük kmax[N] -et
  Ks := Ks, 1: ## Eltesszük az újat, és azt az
  Ts := Ts, [SP, k1, k2]: ## alakját is, amelyben találtuk
  Bop := subs( o = o + n[k1], Aop[k2] ): ## Eltoljuk az
  Qop := subs( o = o + n[k1], Pop[k2] ): ## együtthatóit
  if SP = P then ## Kiszámoljuk és eltesszük a fókuszokat:
    a[k] := a[k1] + a[k2]: m[k] := min( m[k1], m[k2] ):
    ph[k] := max( a[k2] + ph[k1], a[k1] + ph[k2] ):
    p[k] := ph[k] - m[k]:
    Po := d^(m[k1] - m[k]) * Pop[k1]:
    Qo := d^(m[k2] - m[k]) * Qop:
    Aop[k] := igazit( Aop[k1] * Bop ):
    Pop[k] := igazit( Bop * Po + Aop[k1] * Qo ):
  else ## Eloszor is a Kronecker-delta(m[k1], m[k2]):
    if m[k1] = m[k2] then Kd := 1: else Kd := 0: fi:
    if m[k1] >= m[k2] then m[k] := m[k1]:
      a[k] := max( ph[k1] - m[k2] + a[k2], a[k1] + p[k2] ):
      ## Most pedig az operatorok:
      t := 1/( Kd*coeff(Pop[k1], d, 0) + coeff(Qop, d, 0) ):
      Op := d^(m[k1] - m[k2]) * Pop[k1] * Bop:
      Aop[k] := igazit( t * ( Op + Qop * Aop[k1] ) ):
    else m[k] := m[k2]:
      a[k] := max( ph[k2] - m[k1] + a[k1], a[k2] + p[k1] ):
      t := 1/( coeff(Pop[k1], d, 0) ):
      Op := d^(m[k2] - m[k1]) * Qop * Aop[k1]:
      Aop[k] := igazit( t * ( Op + Pop[k1] * Bop ) ):
    fi: ## m[k1] >= m[k2] volt-e
    p[k] := p[k1] + p[k2]: ## Most pedig ha-
    ph[k] := p[k] + m[k]: ## rom ettől fug-
    Pop[k] := igazit( t * Pop[k1] * Qop ): ## getlen keplet
    fi: ## S vagy P volt-e
  fi: ## Új volt-e
od: ## k2
od: ## k1
od: ## N1
od: ## SP
od: ## N

## A kapott operatorok és a fókuszok bizonyos ellenőrzései:
for k to kmax[Nmax] do
  if minfokszam(Aop[k]) <> 0 then
    print(k, "Aop min", minfokszam(Aop[k] )):
  fi:
  if simplify( coeff(Aop[k], d, 0) - 1 ) <> 0 then
    print(k, "A_0", coeff(Aop[k], d, 0) ):
  fi:
  if maxfokszam(Aop[k]) <> a[k] then
    print(k, "a", maxfokszam(Aop[k]), a[k] ):
  fi:
  if minfokszam(Pop[k]) <> 0 then
    print(k, "Pop min", minfokszam(Pop[k] )):
  fi:

```

```

if maxfokszam(Pop[k]) <> p[k] then
  print(k, "p", maxfokszam(Pop[k]), p[k] ):
fi:
if ph[k] <> p[k] + m[k] then
  print(k, "ph", ph[k], p[k] + m[k]):
fi:
od: ## Ha nem ir ki semmit, akkor nem talalt semmi hibát

## Mely negyelemesek vannak tehetetlenségi Poynting-Thomson-on belül:
for k from kmin[4] to kmax[4] do
  if a[k] <= 1 and ph[k] <= 2 then
    print( k, op( 1, [kifejtKs(k, 0)] ) ):
    print( o1k(Aop[k], 1)*sigma = o1k(igazit(d^(m[k]))*Pop[k]), 1)*epsilon ):
  fi:
od:

```

3.4. RUGÓK, OLAJFÉKEK ÉS TEHETETLENSÉGI ELEMÉK LEGFELJEBB NÉGYELEMŰ SOROS ÉS PÁRHUZAMOS KAPCSOLÁSAI ÉS EREDŐ EGYENLETEIK

Ha a fenti Maple-programmal generáljuk a kapcsolásokat és egyenletüket, ügyeljünk rá, hogy a személyes ízlésünk szerinti konvenció a kapcsolások megadására—pl. $(C \sim \mu) \parallel \mu$, azaz $(C_1 \sim \mu_2) \parallel \mu_3$ —eltérhet a program sorrend-konvenciójától [a példában: $\mu \parallel (C \sim \mu)$, azaz $\mu_1 \parallel (C_2 \sim \mu_3)$]. Ilyenkor a program által kiírt eredő egyenletben az elem-együtthatók program választotta sorrendi indexeit át kell cserélnünk az általunk preferált sorrend szerint. A példában: $\mu_1 \rightarrow \mu_3$, $C_2 \rightarrow C_1$, $\mu_3 \rightarrow \mu_2$, és így a program kiírta

$$\sigma + \frac{\mu_3}{C_2} \dot{\sigma} = (\mu_1 + \mu_3) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_1 \mu_3}{C_2} \ddot{\varepsilon}$$

átírandó a következőre:

$$\sigma + \frac{\mu_2}{C_1} \dot{\sigma} = (\mu_2 + \mu_3) \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_3}{C_1} \ddot{\varepsilon}.$$

3.5. RUGÓK, OLAJFÉKEK ÉS TEHETETLENSÉGI ELEMÉK TEHETETLENSÉGI STANDARD MODELLRE VEZETŐ NÉGYELEMŰ KAPCSOLÁSAINAK NÉHÁNY JELLEMZŐJE

A 2.4.6 pontban tekintett kapcsolások közül a (85) kapcsoláshoz tartoznak nem-triviális számítások, melyek a következők.

$$(177) \quad (C_1 \parallel \mu_2) \sim (C_3 \parallel \mu_4)$$

$$\sigma + \frac{\mu_2 + \mu_4}{C_1 + C_3} \dot{\sigma} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \varepsilon + \frac{C_1 \mu_4 + C_3 \mu_2}{C_1 + C_3} \dot{\varepsilon} + \frac{\mu_2 \mu_4}{C_1 + C_3} \ddot{\varepsilon}$$

$$(178) \quad \tau = \frac{\mu_2 + \mu_4}{C_1 + C_3}, \quad C = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}, \quad \mu = \frac{C_1 \mu_4 + C_3 \mu_2}{C_1 + C_3}, \quad M = \frac{\mu_2 \mu_4}{C_1 + C_3},$$

$$(179) \quad I_\mu = \frac{C_1^2 \mu_4 + C_3^2 \mu_2}{(C_1 + C_3)^2} > 0, \quad I_M = -\frac{(C_1 \mu_4 + C_3 \mu_2)^2}{(C_1 + C_3)^3} < 0.$$

SPECIÁLISAN $\frac{\mu_2}{C_1} = \frac{\mu_4}{C_3}$, azaz $C_1 \mu_4 = C_3 \mu_2$ a nemtriviális közös osztó egyszerűbb eredő egyenletet tesz lehetővé:

$$(180) \quad \sigma = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \varepsilon + \frac{C_1}{C_1 + C_3} \mu_4 \dot{\varepsilon},$$

Ilyenkor

$$(181) \quad \tau = 0, \quad C = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}, \quad \mu = \frac{C_1}{C_1 + C_3} \mu_4, \quad M = 0,$$

$$(182) \quad I_\mu = \frac{C_1}{C_1 + C_3} \mu_4, \quad I_M = 0.$$

Megfordítva: AZ ÁLTALÁNOS ESETBEN vegyük észre, hogy

$$(183) \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}, \quad \frac{\tau}{M} = \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_4}, \quad \frac{\mu}{C} = \frac{\mu_2}{C_1} + \frac{\mu_4}{C_3}, \quad \frac{M}{C} = \frac{\mu_2}{C_1} \frac{\mu_4}{C_3},$$

és itt az utóbbi kettő a gyökök és együttthatók közötti összefüggés alapján azt adja, hogy $\frac{\mu_2}{C_1}$ és $\frac{\mu_4}{C_3}$ az $x^2 - \frac{\mu}{C}x + \frac{M}{C} = 0$ másodfokú egyenlet két gyökének felel meg. Az általánosság megszorítása nélkül *tegyük fel, hogy $\frac{\mu_2}{C_1} > \frac{\mu_4}{C_3}$* , ekkor

$$(184) \quad \frac{\mu_2}{C_1} = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4CM}}{2C}, \quad \frac{\mu_4}{C_3} = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4CM}}{2C}.$$

Ezután

$$(185) \quad \begin{aligned} \frac{\tau}{C} &= \frac{\mu_4}{C_3} \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{C_1} \frac{1}{\mu_4} = \frac{\mu}{2C} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4CM}}{2C} \left(\frac{1}{C_3} - \frac{1}{C_1} \right) = \\ &= \frac{\mu}{2C^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4CM}}{2C} \left(\frac{1}{C_3} - \frac{1}{C_1} \right) \implies \frac{1}{C_3} - \frac{1}{C_1} = \frac{2\tau - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{\mu^2 - 4CM}}. \end{aligned}$$

Ezt egyrészt összeadva $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}$ -vel, másrészt kivonva belőle, kapjuk, hogy

$$(186) \quad \begin{aligned} \frac{1}{C_1} &= \frac{1}{2C} + \frac{\frac{\mu}{2C} - \tau}{\sqrt{\mu^2 - 4CM}}, \quad C_1 = \frac{2C\sqrt{\mu^2 - 4CM}}{\sqrt{\mu^2 - 4CM} + (\mu - 2C\tau)}, \\ \frac{1}{C_3} &= \frac{1}{2C} - \frac{\frac{\mu}{2C} - \tau}{\sqrt{\mu^2 - 4CM}}, \quad C_3 = \frac{2C\sqrt{\mu^2 - 4CM}}{\sqrt{\mu^2 - 4CM} - (\mu - 2C\tau)}. \end{aligned}$$

Mivel $\frac{\mu_2}{C_1}$ -t és $\frac{\mu_4}{C_3}$ -t már meghatároztuk, innen az is adódik, hogy

$$(187) \quad \mu_2 = \frac{\mu\sqrt{\mu^2 - 4CM} + (\mu^2 - 4CM)}{\sqrt{\mu^2 - 4CM} + (\mu - 2C\tau)}, \quad \mu_4 = \frac{\mu\sqrt{\mu^2 - 4CM} - (\mu^2 - 4CM)}{\sqrt{\mu^2 - 4CM} - (\mu - 2C\tau)}.$$

MEGJEGYZÉS:

$$I_M < 0 \implies M < \tau(\mu - \tau C) \implies \mu^2 - 4CM > (\mu - 2C\tau)^2 \implies$$

$$(188) \quad \implies \sqrt{\mu^2 - 4CM} > |\mu - 2C\tau|,$$

ezért (186) és (187) mindig valós és pozitív C_1 , C_3 -at illetve μ_2 , μ_4 -et adnak.

A SPECIÁLIS $\frac{\mu_2}{C_1} = \frac{\mu_4}{C_3}$, azaz $C_1\mu_4 = C_3\mu_2$ esetben a „megfordítva” irány nem egyértelmű: a négy elemegyütthetők közül a speciális feltétel miatt három független, de meghatározásukra csak két egyenlet áll rendelkezésre. $\frac{\mu}{C}$ meghatározza $\frac{\mu_2}{C_1} = \frac{\mu_4}{C_3}$ -at, de bármely olyan C_1 , C_3 megfelelő, amelyek eleget tesznek $C = \frac{C_1C_3}{C_1+C_3}$ -nak.

3.6. NÉHÁNY NÉGYNÉL TÖBB ELEMES KAPCSOLÁS VISZONYA A TEHETETLENSÉGI STANDARD MODELLHEZ

A 2.5.3 pontban ismertetett kapcsolás, $(C_1 \sim C_2) \parallel (C_3 \sim C_4)$ két ága közé híd-ként kapcsolva μ_5 részletei:

$$(189) \quad \sigma_1 = C_1\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = C_2\varepsilon_2, \quad \sigma_3 = C_3\varepsilon_3, \quad \sigma_4 = C_4\varepsilon_4, \quad \sigma_5 = \mu_5\dot{\varepsilon}_5,$$

a Kirchoff-törvények analogonjai pedig:

$$(190) \quad \begin{array}{llll} \sigma = \sigma_1 + \sigma_3, & \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_5, & \sigma_4 = \sigma_3 + \sigma_5, & \sigma = \sigma_2 + \sigma_4, \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, & \varepsilon = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, & \varepsilon_2 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5, & \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5 \end{array}$$

(a négy-négy egyenletből csak három-három független). Az utóbbiakból kifejezhetjük például ε_2 -t, ε_4 -et és ε_5 -öt. Ekkor a hat független (190)-beli egyenlet a következő háromra redukálódik:

$$(191) \quad \sigma = C_1\varepsilon_1 + C_3\varepsilon_3,$$

$$(192) \quad C_1\varepsilon_1 = C_2(\varepsilon - \varepsilon_1) + \mu_5(\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1),$$

$$(193) \quad \sigma = C_2(\varepsilon - \varepsilon_1) + C_4(\varepsilon - \varepsilon_3),$$

A (191) és (193) egyenletek rendszerét megoldhatjuk ε_1 -re és ε_3 -ra. A megoldásokat (192)-be helyettesítve és átrendezve kapjuk a végeredményt:

$$(194) \quad \begin{aligned} \sigma + \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}\mu_5\dot{\sigma} &= \frac{C_1C_2C_3C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right)\varepsilon + \\ &+ \frac{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}\mu_5\dot{\varepsilon}. \end{aligned}$$

3.7. TEHETETLENSÉGI STANDARD MODELLRE VEZETŐ SOROS ÉS PÁRHUZAMOS KAPCSOLÁSOK CSILLAPÍTÁSI ÉS TEHETETLENSÉGI INDEXE ÁLTALÁNOSAN

A (165)–(169) képleteket levezetni nem egyszerű, ezért inkább ellenőrizni érdemes. Az eredő egyenletet megadó (6) illetve (9) képletekben (ui. az általánosság megszorítása nélkül elegendő az $m \geq n$ esetet ellenőrizni) az $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{X}, \dots$ operátorokat

$\mathcal{D}$ szerinti polinom alakjukban [ld. (1)–(4)] tekintsük, és az eredő egyenletet is $\mathcal{D}$ szerinti polinom alakban fejtjük ki. A (166)–(167) képleteket konkrét m, n esetén érdemes ellenőrizni, sorban végigvéve a szóbaeső $0 \leq m \leq 2$ és $0 \leq n \leq m$ értékeket (a bemenő kapcsolásoktól megköveteljük, hogy tehetetlenségi standard modellek). A (167) képlet helyett célszerű azt az általánosított változatát ellenőrizni, ahol a bal oldalon I_M helyett $I_M - \xi C$ áll, ahol ξ az eredő egyenlet

$$(195) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} + \xi \ddot{\sigma} + \dots = C\varepsilon + \mu \dot{\varepsilon} + M \ddot{\varepsilon} + \dots$$

alakjában $\ddot{\sigma}$ együtthatója. Ez a változat az eredetire egyszerűsödik, amikor kirójuk, hogy az eredő egyenlet is tehetetlenségi standard modell legyen, hiszen olyankor $\xi = 0$.

IRODALOM

VÁN, P. – ASSZONYI, CS. (2006): *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye. II. Az általános törvényszerűségek levezetése*. In: Asszonyi Cs. (szerk.), *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye*, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **3**. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006. pp. 25–88.

ASSZONYI, CS. – VÁN, P. – SZARKA, Z. (2007): *Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota*, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **5**. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007.

VÁN, P. – ASSZONYI, CS. (2008): *Izotrop kontinuumok anyagtörvénye és speciális esetei*, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **6**. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008. pp. 9–52.

ASSZONYI, CS. – FÜLÖP, T. – VÁN, P. – SZARKA, Z. – HORVÁTH, R. (2008): *Reológiai alapmodellek és összekapcsolásuk*, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **6**. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008. pp. 53–92.

SZARKA, Z. – ASSZONYI, CS. – FÜLÖP, T. (2008): *Anyagok mechanikai tulajdonságai az anyagtörvény alapján*, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **6**. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008. pp. 121–160.

VERHÁS, J. (1985): *Termodinamika és reológia*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

ANYAGOK MECHANIKAI TULAJDONSÁGAI AZ ANYAGTÖRVÉNY ALAPJÁN

Szarka Zoltán

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Asszonyi Csaba

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Fülöp Tamás

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A tanulmány célja, hogy a tehetetlenségi standard test anyagegyenletének (differenciál-egyenletének) különböző szituációk melletti megoldását megadja, amely önmagában egy egyszerű rutinfeladat. Ezzel kapcsolatosan két célunk volt. Egyrészt, hogy az anyagállandók meghatározására szolgáló mérések kiértékeléséhez a szükséges matematikai formulák rendelkezésre álljanak, amelyeket kézikönyvszerűen össze is foglaltuk. Másrészt, hogy az anyagtulajdonságokat, az anyagviselkedést jobban megértsük, s ezáltal a gyakorlati feladatok megoldásához ötletek, ökölszabályok legyenek kialakíthatók.

Újdonságnak számít a rugalmas-képlékeny határon történő anyagviselkedés feltárása, amely által felkészült anyagvizsgálók anélkül tudják meghatározni a képlékenységi határt, hogy a próbatestet tehermentesíteniük kellene, tehát adott esetben roncsolásos vizsgálattal is.

Általában csak akkor szoktak az anyag saját rezgésszámával foglalkozni, ha a mechanikai szituáció, pl. ismételt igénybevételek esetén megkívánja. Ezeknél az eseteknél sem igazán az anyag saját rezgésszámáról van szó, hanem legtöbbször a határfeltételek által determinált frekvenciáról. A tanulmány ezt a kérdést is megvizsgálja.

BEVEZETÉS

Izotrop kontinuumok anyagegyenlete – a már megszokott és az előző tanulmányoknál alkalmazott jelölésekkel – a következő:

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} + \theta\ddot{\mathbf{E}} - \Psi \left\{ (2G - 2G_{pl}) (\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) + (2\eta - 2\eta_{pl}) \dot{\mathbf{E}} \right\}, \\ \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o &= 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o + \theta_o\ddot{\mathbf{E}}_o, \end{aligned}$$

illetve a $2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau$ képlékenységi viszkozitási tényező összefüggésének a felhasználásával

$$(1') \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} + \theta\ddot{\mathbf{E}} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f - \tau\dot{\mathbf{E}}), \\ \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o &= 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o + \theta_o\ddot{\mathbf{E}}_o, \end{aligned}$$

ahol

$$(2) \quad \Psi = \begin{cases} 0, & \text{ha } W' < W'_f, \text{ vagy } \dot{W}' < 0, \\ 1, & \text{ha } W' \geq W'_f, \text{ és } \dot{W}' \geq 0. \end{cases}$$

Az (1') tenzoregyenlet skaláris komponensegyenleteivel

$$(1a) \quad \begin{aligned} s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij} &= 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} + \theta\ddot{e}_{ij} - \Psi(2G - 2G_{pl})(e_{ij} - e_{ij,f} + \tau\dot{e}_{ij}), \\ \sigma_o + \tau_o \dot{\sigma}_o &= 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o + \theta_o\ddot{\varepsilon}_o, \end{aligned}$$

illetve

$$(1b) \quad \begin{aligned} \sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \Psi 2G(1 - \varphi)(\varepsilon - \varepsilon_f + \tau\dot{\varepsilon}), \\ \sigma_o + \tau_o \dot{\sigma}_o &= 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o + \theta_o\ddot{\varepsilon}_o \end{aligned}$$

formában írható fel, ahol

$$s_{ij} := \sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij} := \sigma, \quad e_{ij} := \varepsilon_{ij} - \varepsilon_o \delta_{ij} := \varepsilon, \quad \sigma_o := \frac{1}{3} \Sigma \sigma_{ii}, \quad \varepsilon_o := \frac{1}{3} \Sigma \varepsilon_{ii},$$

$$(3) \quad \varphi := \frac{G_{pl}}{G}, \quad 0 < \varphi \leq 1.$$

Ebből következik, hogy az anyag jellemzéséhez az *anyagállandók* a következők:

TORZULÁSI ÁLLANDÓK

TÉRFOGATI ÁLLANDÓK

Rugalmassági anyagállandók

csúsztató rugalmassági modulus: G , kompresszibilitási modulus: K ,

Rugalmassági reológiai anyagállandók

viszkozitási együttható:	η ,	térfogati viszkozitási modulus:	K_v ,
relaxációs idő:	τ ,	térfogati relaxációs idő:	τ_o ,
gyorsulási együttható:	θ ,	térfogati gyorsulási együttható:	θ_o ,

Képlékenységi anyagállandók

képlékenységi modulus: G_{pl} $G_{pl} = \varphi G$.

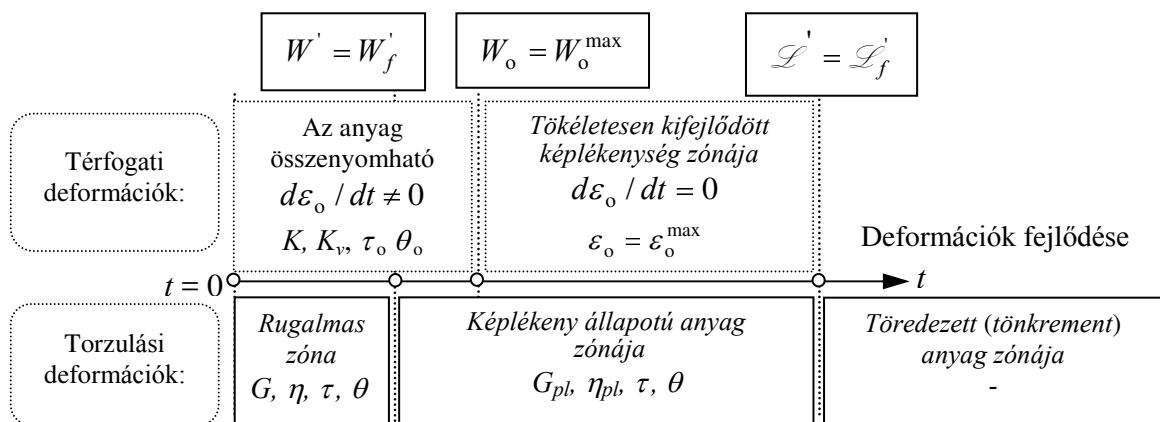
Szükséges még az anyagra jellemző

képlékenységi határ: W_f' – torzulási deformációs munka,
teljesen kifejlődött képlékenység határa: W_o' – térfogati rugalmas munka,
tönkremeneteli határ: $\mathcal{L}_t'$ – torzulási disszipációs munka

értékének ismerete.

Az $\mathcal{L}_t'$ tönkremeneteli határérték az értelmezési tartomány felső határát adja meg, vagyis azt a határt, ameddig az anyag kontinuumnak tekinthető, s az anyagjellemzők értelmezhetők.

A [VÁN-ASSZONYI (2008)] 21. oldalon lévő 1. ábráját alapul véve, a deformációk tartományának felosztását a következő módon tüntettük fel, egy olyan mechanikai pálya mentén, ahol a $t = 0$ időponthoz a deformálatlan és terheletlen állapotot rendeltük hozzá.



A folytonos deformációk tartományának felosztása

Ez a felosztás azonban csupán tájékoztató jellegű, mivel az ábrázolttól eltérő esetek tömkelege fordulhat elő, amelyek az anyagtulajdonságoktól függenek, vagyis az anyagtulajdonságokat reprezentáló anyagállandókban visszatükröződnek. Ezek a következők lehetnek:

- (a) NINCS RUGALMAS ZÓNA: a maradó deformációk már a deformációk kezdetén megjelennek, vagyis $W_f' = 0$, s ilyenkor „nullától” a tönkremenetelig képlékeny állapot van, ekkor $2G$ és $3K$ értéke zérus, csupán $2G_{pl}$ és $3K_{pl}$ értelmezhető.
- (b) NINCS TÖKÉLETESEN KIFEJLÖDÖTT KÉPLÉKENY ZÓNA: Ez az anyagtulajdonságoktól függ, mert van olyan anyag is, amelynél hamarabb bekövetkezik a tönkremenetel, minthogy összenyomhatatlanná válna.

- (c) NINCS KÉPLÉKENY ÁLLAPOT A TÖNKREMENTEL ELŐTT, vagyis még a rugalmas állapotban bekövetkezik a törés. Ez akkor lehetséges, ha az anyag torzulási disszipációs munkájának $\mathcal{L}'_t$ határértéke hamarabb bekövetkezik, mint hogy a torzulási deformációs munka értéke elérné a W'_f határértéket. Ezt a jelenséget jól ismerjük, s a rideg törés, a kifáradási törés címszó alatt emlegetik. Ennek oka a kétféle munkakifejezés ($\mathcal{L}', W'$) jellegének eltérése. A

$$W' = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$$

értéke az igénybevételtől függően növekedhet és csökkenhet egyaránt. Az $\mathcal{L}'$ értéke azonban monoton növekszik, de legalábbis nem csökkenhet.¹

Felvethetnénk olyan esetet is, mint pl.

- (d) A KÉPLÉKENY ZÓNA ÉS A TÖKÉLETESEN KÉPLÉKENY ZÓNA AZONOS. Ez azonban annyira valószínűtlen eset lenne, hogy nyugodtan kizárhatjuk. Korábbi kiadványunkban [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007), 143-145. old.] ezt az esetet tárgyaltuk. Azonban annak elméleti tisztázása, hogy ez esetleg lehetetlen, vagy milyen speciális esetekben lehetséges, még várat magára.
- (e) KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓK MÁR KEZDETTŐL FOGVA JELENTKEZNEK. Sokan érvelnek mellette, mondván, hogy egy darabig nagyságrendekkel kisebb a maradó deformáció, és így nem is észleljük a rugalmas mellett. Ez annak felel meg az ábránkban, hogy a képlékenységi határ a deformálatlan határhoz kötődik. Ez viszont felveti azt a kérdést, hogyha egyszeri terhelés, majd az ezt követő tehermentesítés után észlelünk egy $\varepsilon_{maradó}$ deformációt, akkor a következő – ugyanilyen ciklus után – mit észlelünk? Semmi több maradót, vagy még egyszer ugyanennyit?

A következőkben a rugalmas-képlékeny tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-féle (standard) modell tulajdonságait próbáljuk feltárni. A másodrendű időderivált nélküli – $\sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon}$ – standard modellt már alaposan kielemeztük. Kérdés, hogy mit eredményez az (1b) egyenlet jobboldalán fellépő $\theta\dot{\varepsilon}$ tehetetlenségi tag? A képlékeny tartománybeli viselkedés leírásával pedig még teljes egészében adósak vagyunk, leszámítva néhány bártortalan utalást a nem tehetetlenségi standard testnél [SZARKA (2006), 154. old.].

A tárgyalt reológiai modellek vizsgálata technológia szempontból is nagyon fontos. Egyrészt önmagukban is alkalmasak hagyományos laboratóriumi kísérletek (lásd pl.

¹ Jó példa erre egy olyan terhelési sorozat, amelynek végén visszajutunk a kiindulási helyzetbe. A terhelés-deformáció görbe által bezárt terület (a hiszterézis) a disszipációs munka. Ez minden körfolyamatnál állandóan nő, annak ellenére, hogy a deformációs munka értéke állandó.

[CSATÁR, 2008]) finomabb elemzésére, másrészt kontinuummechanikai alkalmazásuk konkrét mérnöki problémák elemzésekor sajátosságaik esetleg kvalitatíven befolyásolják az adott mérnöki konstrukció (pl. alagút) talaj és közetkörnyezetének megértését. [VÁN-SZARKA, 2006].

A) AZ ANYAGTULAJDONSÁGOK RUGALMAS ÁLLAPOTBAN AZ ANYAGEGYENLET MEGOLDÁSA $\Psi = 0$ ESETÉRE

A KIINDULÁS. Az első lépésben a anyagtörvény (tehetetlenségi standard test) rugalmas tartományban érvényes alakjából indulunk ki, amelyet az (1b) egyenletből a $\Psi = 0$ helyettesítéssel kapunk:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2G\dot{\varepsilon} + 2\eta\ddot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}, \\ \sigma_0 + \tau_0\dot{\sigma}_0 &= 3K\dot{\varepsilon}_0 + 3K_v\dot{\varepsilon}_0 + \theta_0\ddot{\varepsilon}_0. \end{aligned}$$

Mivel a (4) torzulási és térfogatváltozási egyenlet az anyagállandók különbözőségét leszámítva teljesen azonos alakú, az egyszerűség kedvéért az anyagegyenlet torzulási állapotra vonatkozó alábbi skalár egyenletéből indulunk ki:

$$(5) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\dot{\varepsilon} + 2\eta\ddot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}.$$

Ezt a kérdést eddigiekben csupán a $\sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\dot{\varepsilon} + 2\eta\ddot{\varepsilon}$ normál standard modell alapján tárgyaltuk, amikor az anyag tehetetlensége nem játszott szerepet.

A következőkben a tulajdonságok elemzését – a laboratóriumi kísérleteknél megszokott formában – két különböző estre bontva tárgyaljuk:

- egyrészt, amikor a külső hatást az elmozdulásokkal, illetve deformálással állítjuk elő, s ezt nevezzük *deformációvezérelt* esetnek;
- másrészt, amikor a külső hatást terhelésváltozással állítjuk elő, s ezt nevezzük *terhelésvezérelt* esetnek.

A modelltől alkotott képek a normál és a tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-test esetében mindaddig azonosak, amíg a $\theta\ddot{\varepsilon}$ tag hatása fel nem lép. Ennek megfelelően az egyenletes sebességű terhelés, vagy deformálás, a feszültség állandó értéken tartása – az ún. kúszás –, illetve a deformáció állandó értéken tartása – az ún. relaxáció – jelensége a két modellnél azonos. E miatt a θ tehetetlenségi állandó hatása következtében fellépő anyagtulajdonságokra csak a gyorsulásra és a periodicitásra vonatkozó kísérletek adnak felvilágosítást.

1. DEFORMÁCIÓVEZÉRELT ESET

A FELADAT MATEMATIKAI MEGFOGALMAZÁSA. Ekkor a

$$(5) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}$$

differenciálegyenletben σ az ismeretlen, ε pedig adott függvény. Az egyenlet

$$(6) \quad \tau \dot{\sigma} + \sigma = g, \quad \tau > 0$$

alakban írható fel, amelynek $\sigma(0) = \sigma_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását keressük adott $g = g(t)$ mellett.

A (6) elsőrendű differenciálegyenlet $\sigma(0) = \sigma_0$ feltételt kielégítő partikuláris megoldása az alábbi alakban írható fel:

$$(7) \quad \sigma(t) = e^{-\frac{1}{\tau}t} \left[\frac{1}{\tau} \int_0^t g(t') e^{\frac{1}{\tau}t'} dt' + \sigma_0 \right] = \frac{1}{\tau} \int_0^t g(t') e^{\frac{1}{\tau}(t'-t)} dt' + \sigma_0 e^{-\frac{1}{\tau}t}.$$

A megoldás speciális $g = g(t)$ függvények esetén integrálás nélkül, algebrai úton is előállítható (ld. Függelék 1.).

A következőkben az anyagtulajdonságok megismeréséhez különböző $g = g(t)$ függvények esetét vizsgáljuk meg, amelyek az anyagállandók meghatározására szolgáló laboratóriumi anyagvizsgálat során előfordulhatnak.²

1.1. ÁLLANDÓ DEFORMÁCIÓGYORSULÁS

Legyen $\varepsilon = \frac{1}{2}at^2$, ahol $a > 0$ állandó. Ekkor $\dot{\varepsilon} = at$, $\ddot{\varepsilon} = a$, tehát a deformáció gyorsulása állandó. Ebben az esetben $g(t) = Gat^2 + 2\eta at + \theta a$, és a megoldás, a Függelék 2 1.1 pontja alapján,

$$(8) \quad \sigma = \sigma(t) = -Ce^{-\frac{1}{\tau}t} + At^2 + Bt + C,$$

ahol az A, B, C együtthatók:

$$(9) \quad A = aG, \quad B = 2aG\left(\frac{\eta}{G} - \tau\right), \quad C = a\theta - \tau B = a\theta - 2a(\eta - G\tau)\tau.$$

² Kivételt képez az állandó deformációgyorsulás, amelyet azért érdemes vizsgálni, mert ebben az esetben jelentős az eltérés a már sokat vizsgált POYNTING-THOMSON-féle, ún. standard modell és a *tehetetlenségi standard* modell között.

Mint látható, a (8) megoldás két részből áll. Az első $-Ce^{-\frac{1}{\tau}t}$ exponenciális rész nagy t esetén elhanyagolható az $At^2 + Bt + C$ rész mellett, mivel τ és t egyaránt pozitív. Ezt a részt átmeneti, vagy tranziens résznek is nevezik. A második rész, amelyet állandósult résznek is neveznek, nagy t értékeknél már a megoldás döntő részét teszi ki.

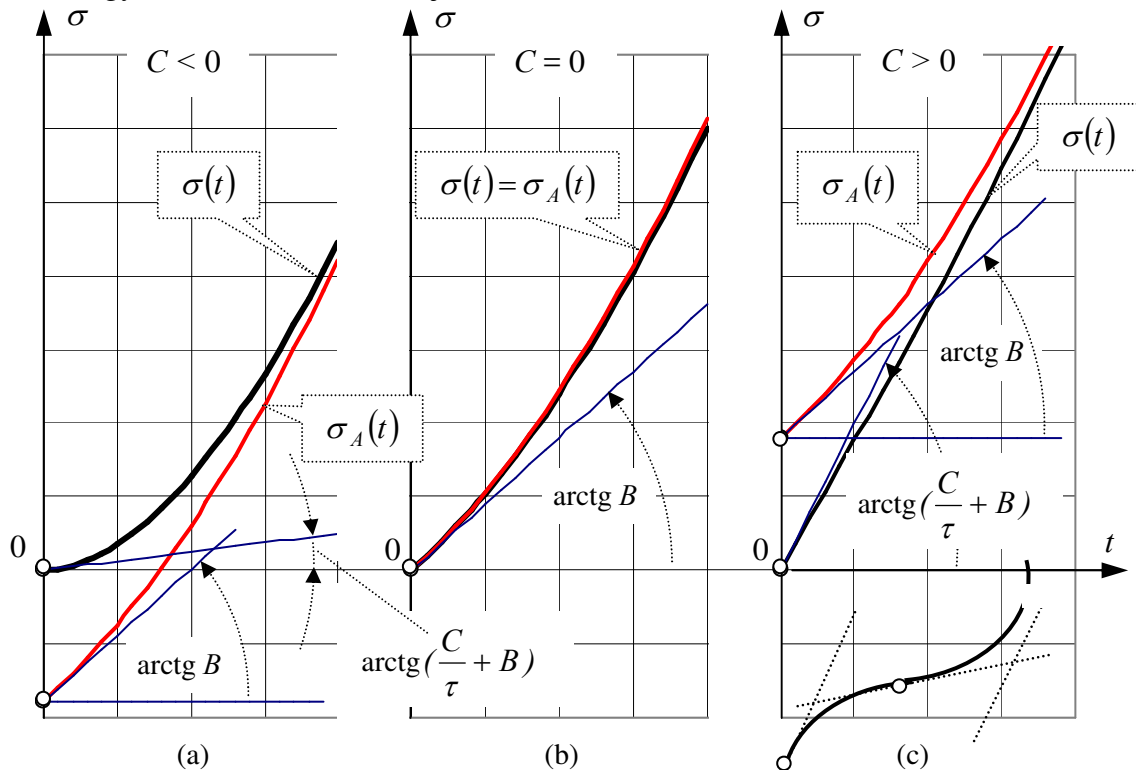
A tranziens rész exponenciális csökkenésének (csillapodásának) mértékét a kitevőben lévő $1/\tau$ tényező jellemzi. Ha τ értéke kicsi, akkor a csillapodás erős (gyors), ha nagy, akkor gyenge (lassú).

A (8) megoldásból szépen látszik, hogy a $\sigma = \sigma(t)$ függvény görbéje nagy t értékeknél aszimptotikusan simul a $\sigma_A = At^2 + Bt + C$ parabolához amiatt, hogy az átmeneti rész ilyen t értékeknél már elhanyagolható.

A (8) megoldásnál eleve feltételeztük, hogy $t \geq 0$. A feladat természetéből következik, hogy a G, η, θ, τ anyagállandók pozitívak, és $a > 0$. Ennek következtében $A > 0$, $B > 0$, de C értéke egyaránt lehet pozitív, negatív vagy nulla. Elsősorban az érdekel bennünket, hogy a C együttható értékét a θ tehetetlenségi állandó hogyan befolyásolja. A $C = a[\theta - (2\eta - 2G\tau)\tau]$ összefüggésből látható, hogy ha $C = 0$, akkor

$$(10) \quad \theta = \theta_{krit} \doteq (2\eta - 2G\tau)\tau = 2G\tau\left(\frac{\eta}{G} - \tau\right) > 0.$$

A C együttható tehát itt vált előjelet.



1. ábra

Az 1. ábrán a (8) megoldás görbéi láthatók a három jellegzetes esetre. Ennek megfelelően

ha $\theta < \theta_{krit}$, akkor $C < 0$, az anyagi közeget „túlcsillapított” jelzővel illetjük (v.ö. az előző két tanulmányban közöltekkel), s a $\sigma(t)$ görbe felülről simul az aszimptotához (1.(a) ábra);

ha $\theta = \theta_{krit}$, akkor $C = 0$, s a $\sigma(t)$ görbe és az aszimptota egybeesik (1.(b) ábra);

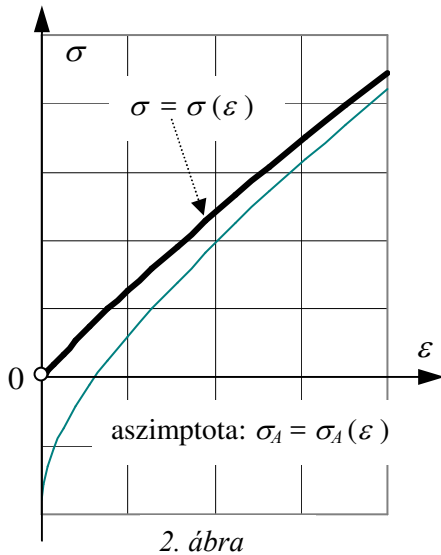
ha $\theta > \theta_{krit}$, akkor $C > 0$, az anyagi közeget „alulcsillapított”-nak tekintjük, s a $\sigma(t)$ görbe alulról simul az aszimptotához (1.(c) ábra);. Ez utóbbi esetben a görbének inflexiós pontja van a

$$(11) \quad t_{infl} = -\tau \ln \frac{2A\tau^2}{C} = -\tau \ln \frac{2G\tau^2}{\theta + 2G\tau^2 - 2\eta\tau}$$

helyen (időpontban). Az inflexiós pont a C (azaz a θ) növekedésével kifelé tolódik az időben. (Mivel ez az ábrán nem vehető ki, ezért a (c) ábra alá eltorzítva – összenyomva – kirajzoltuk.)

Az $\varepsilon = \frac{1}{2}at^2$ felhasználásával a (8)-ból a σ feszültség a t helyett az ε függvényében is felírható:

$$(8a) \quad \sigma \equiv \sigma(\varepsilon) = C \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2}{a}} \varepsilon} \right) + \frac{2A}{a} \varepsilon + B \sqrt{\frac{2}{a}} \varepsilon.$$

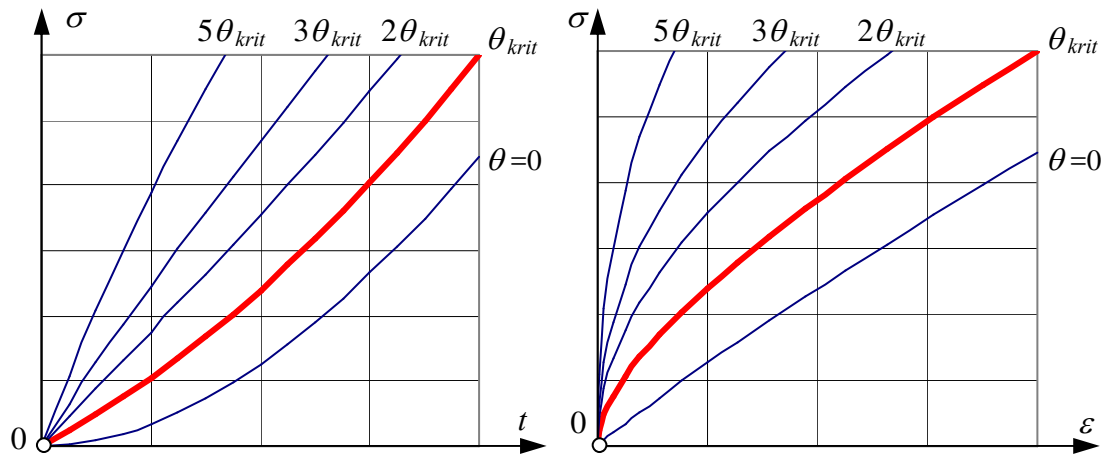


A $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ görbe alulról konkáv (2. ábra), aszimptotája a

$$\sigma_1 := \frac{2A}{a} \varepsilon + B \sqrt{\frac{2}{a}} \varepsilon + C$$

görbe (2. ábra).

Különböző θ tehetetlenségi állandók esetén a $\sigma = \sigma(t)$ és $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ görbéket a 3. ábra mutatja.



3. ábra

1.2. ÁLLANDÓ DEFORMÁCIÓSEBESSÉG

Legyen most $\dot{\varepsilon} = a = \text{állandó}$, $a > 0$. Ekkor $\ddot{\varepsilon} = 0$, $\varepsilon = at + \varepsilon_0$. Induljunk ki a deformálatlan állapotból, azaz legyen $\varepsilon_0 = \varepsilon(0) = 0$, és így az (5) differenciálegyenlet (az anyagtörvény)

$$(12) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = a(2Gt + 2\eta).$$

A (12) egyenlet $\varepsilon(0) = 0$ feltételt kielégítő partikuláris megoldása (ld. Függelék 2 1.2 pont):

$$(13) \quad \sigma = \sigma(t) = B \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) + At = -Be^{-\frac{1}{\tau}t} + At + B,$$

ahol
$$A = 2Ga, \quad B = 2Ga \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right).$$

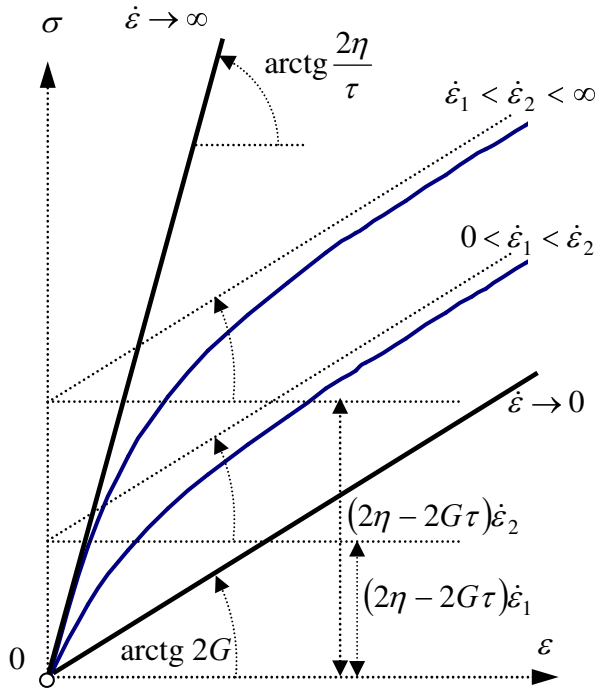
A $t = \varepsilon / a$ helyettesítéssel

$$(14) \quad \sigma = \sigma(\varepsilon) = B \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{a\tau}} \right) + \frac{A}{a} \varepsilon.$$

Ezeket a megoldásokat részletesebben kiírva,

$$(15) \quad \sigma = \sigma(t) = 2Ga \left\{ t + \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \right\},$$

$$(16) \quad \sigma = \sigma(\varepsilon) = 2G \left\{ \varepsilon + a \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{a\tau}} \right) \right\}.$$



4. ábra

A $\sigma(\varepsilon)$ görbék a 4. ábrán láthatók a két szélső és két közbülső esetben:

- „nagyon lassú” esetben, amikor a deformációsebesség közelít nullához, azaz $\dot{\varepsilon} = a \rightarrow 0$
- „nagyon gyors” esetben, amikor a deformációsebesség végtelenhez közelít, valamint
- „köztes” deformációsebességeknél.

A $\sigma(\varepsilon)$ görbe az ún. dinamikus rugalmassági modulusnak megfelelő $2G_{din} := 2\eta/\tau$ iránytangensű érintővel indul, és a statikus rugalmassági modulusnak megfelelő $2G_{stat} := 2G$ iránytangensű aszimptotához tart.

Az elmondottak az állandó deformációsebességgel történő felterhelésre vonatkoztak.

Állandó deformációsebességgel történő „tehermentesítés” esetén a következő a helyzet.

A $0 \leq t \leq t_0$ intervallumon történő felterhelés során az anyag a t_0 idő alatt a $(\sigma_0, \varepsilon_0)$ állapotba jutott, ahonnan t_0 után állandó $\dot{\varepsilon} = -b$ ($=$ állandó), $b > 0$ deformációsebességgel tehermentesítünk $(t_1 - t_0)$ időtartam alatt. Mivel ekkor $\varepsilon = \varepsilon_0 - b(t - t_0)$, ezért az (5) egyenlet

$$\tau \dot{\sigma} + \sigma = -2Gb(t - t_0) + 2G\varepsilon_0 - 2\eta b$$

alakú lesz, melynek a $\sigma(t_0) = \sigma_0$ feltételt kielégítő partikuláris megoldása

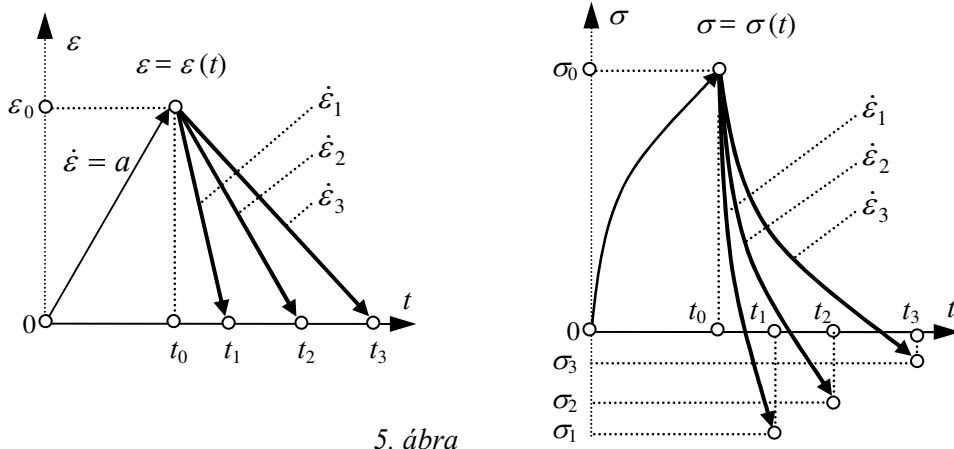
$$(17) \quad \sigma = \sigma(t) = (\sigma_0 - B')e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + A'(t - t_0) + B', \quad t \geq t_0 > 0,$$

illetve a $t - t_0 = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{b}$ helyettesítéssel

$$(18) \quad \sigma = \sigma(\varepsilon) = (\sigma_0 - B')e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{b\tau}} - A'\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{b} + B', \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 > 0,$$

ahol

$$A' := -2Gb, \quad B' := 2G\varepsilon_0 + A'\left(\frac{\eta}{G} - \tau\right) = 2G\varepsilon_0 - 2Gb\left(\frac{\eta}{G} - \tau\right).$$

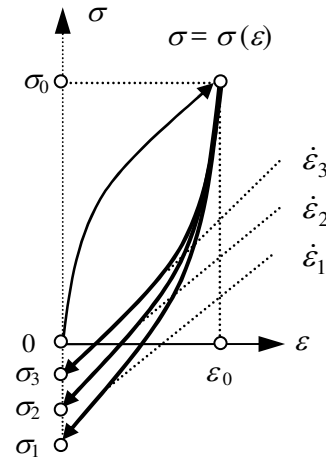


5. ábra

A felterhelés és a tehermentesítés szakaszában – tehát a $[0; t_1, t_2, t_3]$ intervallumokon – érvényes $\varepsilon = \varepsilon(t)$ és $\sigma = \sigma(t)$ függvények jelleggörbéi az 5. ábrán láthatók, különböző $\dot{\varepsilon} = b$ esetén. A t_0 helyen (időpontban) a bal oldali és a jobb oldali görbék folytonosan csatlakoznak egymáshoz. Lényeges, hogy a tehermentesítés során a $\sigma(t)$ feszültség előjelet vált még azelőtt, mielőtt a deformáció a nulla értéket elné. Ez azt jelenti, hogy a felterhelés után (a t_0 időpontban) előálló lineáris deformációcsökkenést az anyag csak a feszültség előjelváltásával tudja követni.

Ennek az az oka, hogy a felterhelés (pon-tosítva a feldeformálás) után a magára hagyott anyag elvileg csak végtelen idő alatt válik feszültségmentessé. A lineáris deformáció mentesítéssel viszont ezt a feszültségmentes állapotot véges idő alatt kényszerítjük rá az anyagra, ami csak a feszültség előjelváltásával következhet be. A 6. ábra a $\sigma(\varepsilon)$ összefüggést szemlélteti mind a felterhelés, mind a tehermentesítés szakaszában.

Jelölje $\sigma(0; b)$ azt a feszültségértéket, amely a tehermentesítés során az $\varepsilon = 0$ értékhez tartozik tetszőlegesen b esetén. A (18) képletet felhasználva



6. ábra

$$\sigma(0; b) = \left(\sigma_0 - B' \right) e^{\frac{\varepsilon_0}{b\tau}} - 2Gb \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right).$$

Ha σ_0 és ε_0 pozitív, akkor $\sigma(b)$ negatív b minden szóbajöhető értékénél, és

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sigma(0; b) = 0, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \sigma(0; b) = \sigma_0 - \frac{2\eta}{\tau} \varepsilon_0.$$

1.3. ÁLLANDÓ DEFORMÁCIÓ (RELAXÁCIÓ)

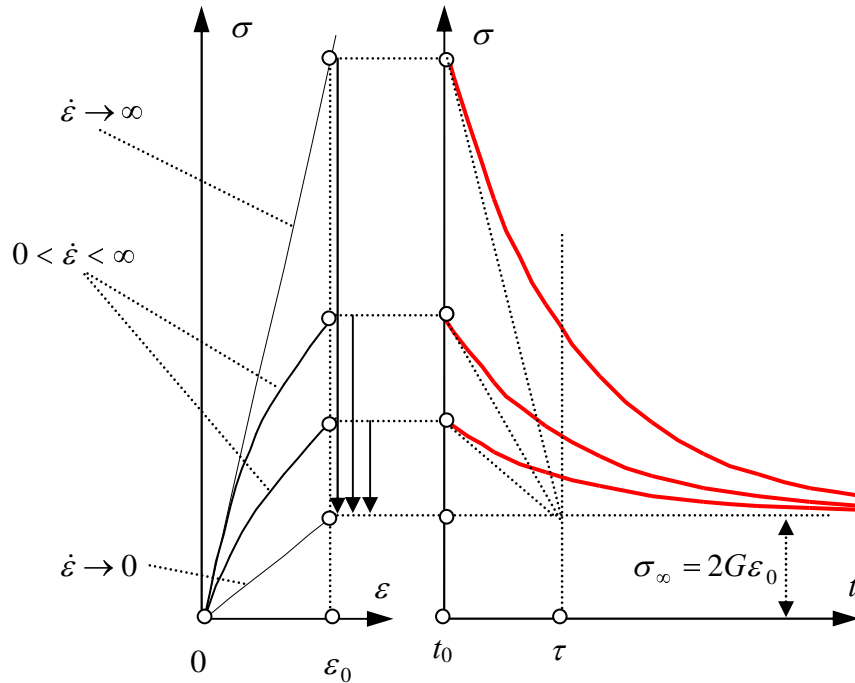
Tételezzük fel, hogy a t_0 időpontban a deformáció elérte az ε_0 értéket, és ezután állandó marad. A $t \geq t_0$ intervallumon tehát $\varepsilon = \varepsilon_0$ állandó, és így $\dot{\varepsilon} = 0$. Ekkor az (5) egyenlet alakja

$$(19) \quad \tau \dot{\sigma} + \sigma = 2G\varepsilon_0, \quad t \geq t_0.$$

Ha a „feldeformálás” például az előző szakaszban leírt módon, vagyis az $\varepsilon = at$ összefüggés szerint történt, akkor a t_0 időpontban a feszültség értéke a (14) alapján számított $\sigma_0 = \sigma(t_0)$ érték. Keressük tehát a (19) egyenlet megoldását a $\sigma(t_0) = \sigma_0$ feltétel mellett. A megoldás (ld. Függelék 2 1.3 pont):

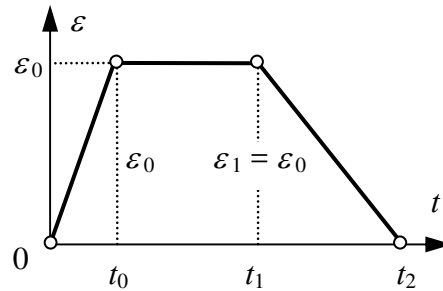
$$(20) \quad \sigma = (\sigma_0 - 2G\varepsilon_0)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + 2G\varepsilon_0, \quad t \geq t_0.$$

A megoldás állandósult része a $\sigma_\infty := 2G\varepsilon_0$ tag, amelyhez $t \rightarrow \infty$ esetén a feszültség konvergál. A 7. ábrán mind a felterhelési, mind a relaxációs szakaszon érvényes $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, $\sigma = \sigma(t)$ függvények jelleggörbéi láthatók.



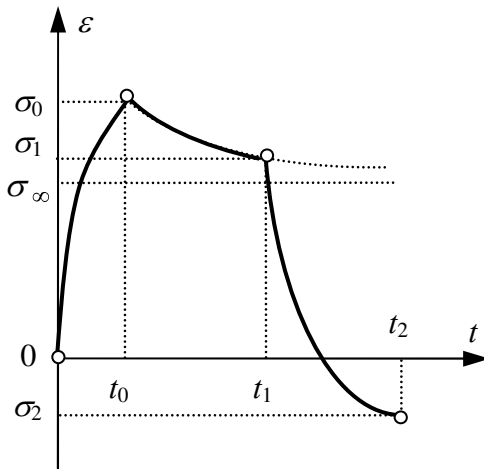
7. ábra

Ha a relaxációt a $t_1 > t_0$ helyen (időpontban) megszüntetjük, és ettől kezdve az $\varepsilon = \varepsilon_1 - b(t - t_1)$ összefüggés szerint csökkentjük a deformációt ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $b > 0$), akkor a $t \geq t_1$ intervallumon érvényes megoldás formailag megegyezik a (17), ill. (18) megoldásokkal, azzal a különbséggel, hogy σ_0 helyére a (20)-ból számított $\sigma_1 = \sigma(t_1)$ kerül.

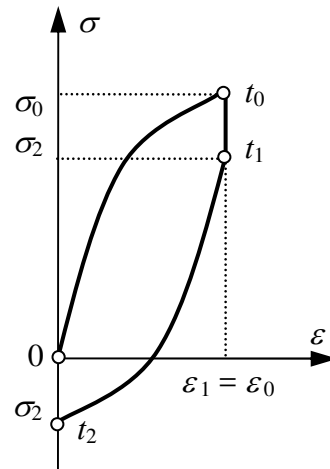


8. ábra

A 8. ábra egy háromszakaszos deformáció-változatot mutat be. Az ennek megfelelő $\sigma = \sigma(t)$ és $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ görbék a 9. és 10. ábrán láthatók.



9. ábra



10. ábra

A 10. ábrán a $\sigma(\varepsilon)$ görbe jellegzetes pontjai mellett feltüntettük az aktuális időpontokat is.

1.4. A DEFORMÁCIÓ PERIÓDIKUSAN VÁLTOZIK

Legyen most $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$, vagyis a deformáció periodikusan változik. Ekkor $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 \omega \cos \omega t$, $\ddot{\varepsilon} = -\varepsilon_0 \omega^2 \sin \omega t$, és így az (5) egyenlet

$$(21) \quad \tau \dot{\sigma} + \sigma = (2G - \theta \omega^2) \varepsilon_0 \sin \omega t + 2\eta \varepsilon_0 \omega \cos \omega t = f(t).$$

A $\sigma(0) = 0$ feltételt kielégítő partikuláris megoldás

$$(22) \quad \sigma = -Ae^{-\frac{1}{\tau}t} + A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

(v.ö. Függelék 2 1.4 pont), ahol

$$A = \frac{\omega(2\eta - 2G\tau + \theta\tau\omega^2)}{1 + \tau^2\omega^2} \varepsilon_0, \quad B = \frac{2G + 2\eta\tau\omega^2 - \theta\omega^2}{1 + \tau^2\omega^2} \varepsilon_0.$$

A (22) megoldás felírható

$$(23) \quad \sigma = -Ae^{-\frac{1}{\tau}t} + \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{B}, \quad 0 \leq \varphi < \pi$$

alakban is. Igazolható továbbá, hogy

$$(23a) \quad A^2 + B^2 = \frac{4\eta^2\omega^2 + (2G - \theta\omega^2)^2}{1 + \tau^2\omega^2} \varepsilon_0^2.$$

Mind a (22), mind a (23) megoldásból látható, hogy nagy t értékek esetén az exponenciális rész elhanyagolható, és ezen a tartományon a σ feszültség gyakorlatilag tiszta szinuszos rezgésként jelenik meg, ugyanakkora (ω) körfrekvenciával, mint az ε deformáció, de ahhoz képest φ fáziseltéréssel.

Itt lényeges megjegyezni, hogy bár a gerjesztés fizikailag az $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$ törvény szerint történik, az anyagtörvényből származtatott (21) egyenlet jobb oldalán a gerjesztő függvény $f(t)$ (és nem $\varepsilon(t)$) áll, amely ε első és második deriváltját is tartalmazza. A matematikai modell tehát összetettebb módon írja le a jelenséget.

Mivel nagy t értékek esetén a (23) megoldás igen jó közelítéssel

$$(24) \quad \sigma_k := \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

ezért ezt a közelítő megoldást érdemes összehasonlítani az $f(t)$ gerjesztő függvénnyel. Írjuk fel azt

$$f(t) = R \cos \omega t + S \sin \omega t, \quad R = 2\eta\omega\varepsilon_0, \quad S = (2G - \theta\omega^2)\varepsilon_0$$

alakban. Az előbbihez hasonló átalakítással

$$(25) \quad f(t) = \sqrt{R^2 + S^2} \sin(\omega t + \psi) = \sqrt{R^2 + S^2} \cos\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right), \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{2\eta\omega}{2G - \theta\omega^2}.$$

A (24) és (25) formulákból leolvasható, hogy $f(t)$ és σ_k körfrekvenciája (ω) megegyezik, igazolható, hogy $\sqrt{A^2 + B^2} < \sqrt{R^2 + S^2}$, továbbá $\varphi < \psi$, ami azt jelenti, hogy σ_k fázisban késik $f(t)$ -hez képest. A késés mértéke: $\psi - \varphi$.

Mindezekhez az eredményekhez más úton is eljuthatunk. Ehhez írjuk fel a (21) egyenletet úgy, hogy a jobb oldalra az $f(t)$ függvény (25) alakjának szinuszos vagy koszinuszos változatát írjuk. Legyen például

$$(26) \quad \tau\dot{\sigma} + \sigma = f_0 \sin(\omega t + \psi), \quad f_0 = \sqrt{R^2 + S^2} = \sqrt{4\eta^2 \omega^2 + (2G - \theta\omega^2)^2} \varepsilon_0.$$

Innen látszik, hogy a gerjesztő függvény (a bemenő jel) amplitúdója f_0 , körfrekvenciája ω , a kezdőfázis ψ . A lényeges változás az előző eljáráshoz képest az, hogy a (26) egyenlet ama partikuláris megoldását, amely nagy t értékeknél igen jó közelítése a (26) egyenlet általános megoldásának, most

$$\sigma_k = B_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

alakban keressük, ahol a B_0 amplitúdó és a φ kezdőfázis ismeretlenek. Ezeket abból a feltételből határozzuk meg, hogy a $\sigma_k(t)$ függvényt behelyettesítve a (26) egyenletbe, azonosságot kapunk. Jelen esetben

$$(27) \quad B_0 \tau \omega \cos(\omega t + \varphi) + B_0 \sin(\omega t + \varphi) \equiv f_0 \sin(\omega t + \psi).$$

Ennek az egyenletnek a bal oldalát alakítsuk át egyetlen szinuszos rezgésre:

$$\begin{aligned} B_0 \tau \omega \cos(\omega t + \varphi) + B_0 \sin(\omega t + \varphi) &= \\ &= B_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \left[\sin(\omega t + \varphi) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} + \cos(\omega t + \varphi) \cdot \frac{\tau \omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \right] = \\ &= B_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \sin(\omega t + \varphi + \alpha), \quad \operatorname{tg} \alpha = \tau \omega. \end{aligned}$$

Ezt beírva a (27) egyenletbe, a

$$B_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \sin(\omega t + \varphi + \alpha) \equiv f_0 \sin(\omega t + \psi)$$

azonosságot kapjuk. Innen

$$\begin{aligned} B_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} = f_0, \Rightarrow B_0 &= \frac{f_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} = \sqrt{\frac{(2G - \theta\omega^2)^2 + 4\eta^2 \omega^2}{1 + \tau^2 \omega^2}} \varepsilon_0 = \sqrt{A^2 + B^2}, \\ \varphi + \alpha = \psi &\Rightarrow \varphi = \psi - \alpha. \end{aligned}$$

Ezeket felhasználva,

$$(28) \quad \sigma_k = \frac{f_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \psi - \alpha).$$

Ebből az eredményből a következők olvashatók ki: nagy t értékek esetén az $f(t)$ bemenő jel (gerjesztő függvény)

- amplitúdója $\frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$ - szeresére csökken, azaz $\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{f_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}};$

- körfrekvenciája változatlan marad;
- a kimenő jelhez képest α szöggel siet, vagyis $\sigma_k(t)$ az $f(t)$ -hez képest α szöggel késik.

Mint látható, ezzel az eljárással kényelmesebben juthatunk lényeges információkhoz.

Gyakori az az eset, amikor a (21) egyenletnek csupán a σ_k alakú partikuláris megoldására van szükség. Ekkor célszerűbb ezt az eljárást, esetleg ennek egy – komplex számokat is felhasználó – változatát alkalmazni. A (26) egyenlet jobb oldalára f koszinuszos változata is írható.

PÉLDA. Legyen $G = 1500 \text{ MPa}$, $\eta = 7500 \text{ MPa min}$, $\theta = 100 \text{ MPa min}^2$, $\tau = 2 \text{ min}$, $\omega = 1 \text{ min}^{-1}$, $\varepsilon_0 = 0,1$. Ekkor $A = 184 \text{ MPa}$, $B = 658 \text{ MPa}$, $\sqrt{A^2 + B^2} = 683,2423 \text{ MPa}$, $\operatorname{tg} \varphi = 0,2796 \Rightarrow \varphi = 15,6229^\circ = 0,2727 \text{ Rad}$.

A $\sigma(0) = 0$ feltételt kielégítő megoldás a (22) szerint (min és MPa egységekben dolgozva):

$$\sigma(t) = -184e^{-0,5t} + 184 \cos t + 658 \sin t, \quad t \geq 0.$$

A megoldás átmeneti (tranziens) része $-184e^{-0,5t}$. Az állandósult (stacionárius) rész, amely nagy t értékeknél igen jó közelítés:

$$\sigma_k = 184 \cos t + 658 \sin t = 683,2423 \sin(t + 0,2727) = 683,2423 \sin(t + 15,6229^\circ).$$

A gerjesztő függvény:

$$f(t) = R \cos t + S \sin t = 1500 \cos t + 290 \sin t = 1527,7762 \sin(t + 79,0578^\circ),$$

tehát $f_0 = 1527,7762$, $\psi = 79,0578^\circ = 1,3798 \text{ Rad}$.

A $\operatorname{tg} \alpha = \tau \omega$ képlet alapján $\alpha = \operatorname{arctg} 2 = 63,4349^\circ = 1,1071 \text{ Rad}$. A $\sigma_k(t)$ késése az $f(t)$ bemenő jelhez képest $\psi - \varphi = 63,4349^\circ$, amely megegyezik α értékével.

Ellenőrzésképpen írjuk fel még a σ_k függvényt a (28) képlet felhasználásával.

$$\sigma_k = \frac{1527,7762}{\sqrt{5}} \sin(t + 15,6229^\circ) = 683,2423 \sin(t + 15,6229^\circ).$$

Mint látható, jelen esetben $f(t)$ amplitúdója $\sqrt{5}$ -ödrészére csökken.

A 11. ábra közel alakhelyesen szemlélteti a példában szereplő

$$\sigma_k(t), f(t), \sigma(t)$$

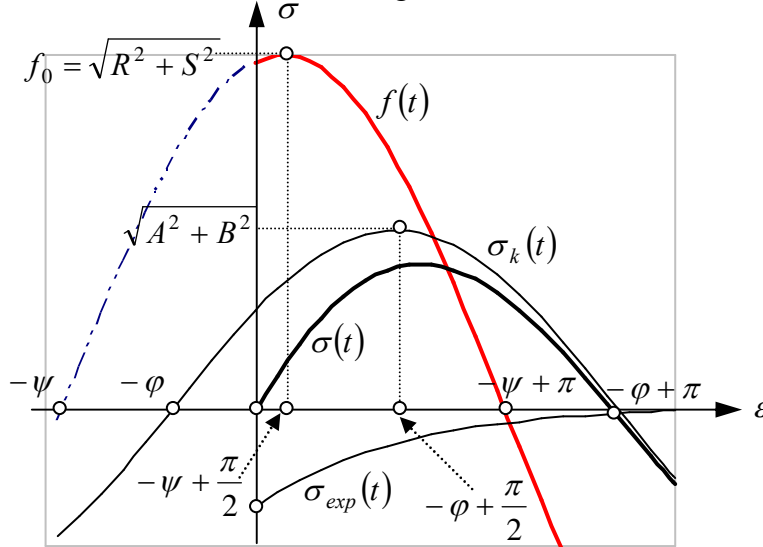
és a

$$\sigma_{\text{exp}} = -Ae^{-0,5t}$$

függvényeket.

Nyilvánvaló, hogy csak a $t \geq 0$ intervallumon érvényes görbék érdekesek számunkra. Az $\alpha = \psi - \varphi$ késés bárhol kijelölhető a t tengely mentén.

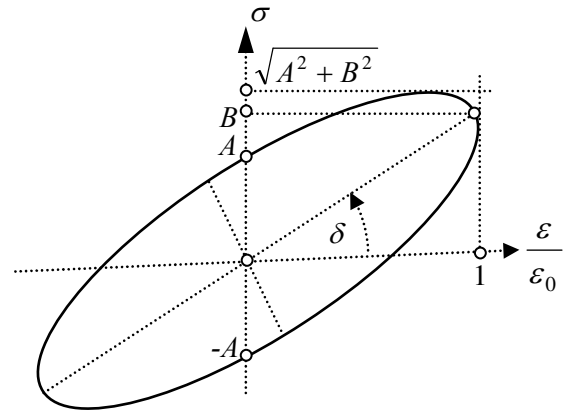
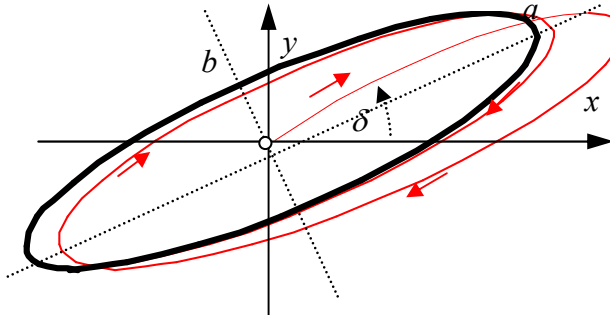
Tekintsük most a közelítő megoldás



11. ábra

$$(A^2 + B^2)x^2 - 2Bxy + y^2 - A^2 = 0$$

alakot kapjuk.



12. ábra.

Ez egy olyan ellipszis egyenlete, amelynek féltengelyei $A/\sqrt{\lambda_1}$, $A/\sqrt{\lambda_2}$, a nagytengelye pedig az x tengellyel δ szöget zár közre, ahol λ_1 és λ_2 a

$$\lambda^2 - \lambda(A^2 + B^2 + 1) + A^2 = 0$$

egyenlet gyökei, és $\text{tg} 2\delta = \frac{-2B}{A^2 + B^2 - 1}$. Az ellipszis területe $|A|\pi$. Mindez azt jelenti,

hogy a $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ görbe az idő növekedésével mind jobban közelít az

$$(A^2 + B^2)\varepsilon^2 \sigma_k^2 - 2B\varepsilon_0 \varepsilon \sigma_k + \varepsilon_0 \sigma_k^2 - A^2 \varepsilon_0^2 = 0$$

ellipszishez, végtelenszer megkerülve azt (12. ábra és 13. ábra (a)-(d) része).

$$(29) \sigma_k = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

alakját és az

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

deformációt.

Bevezetve az

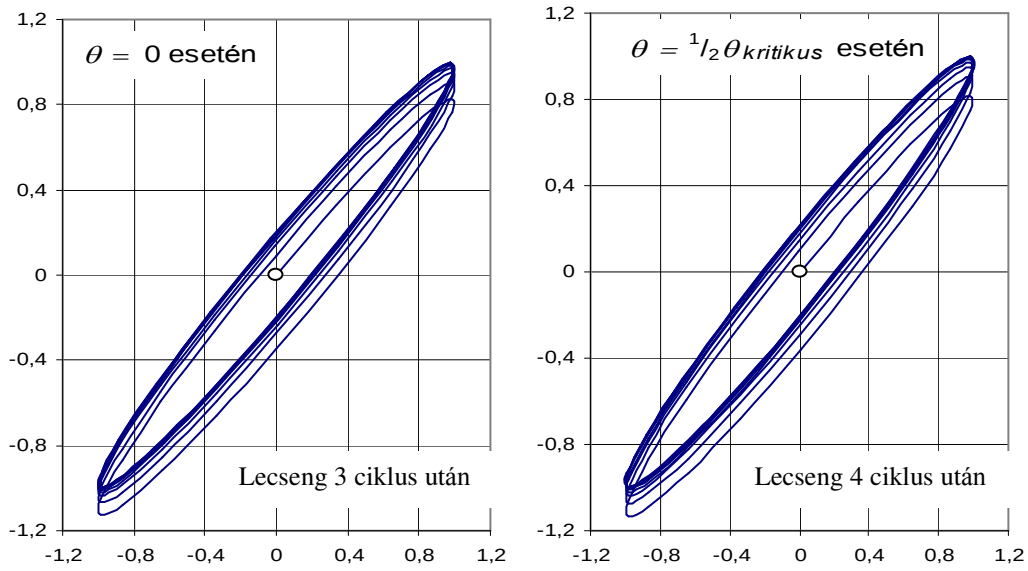
$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \sin \omega t = x, \quad \sigma_k = y$$

jelöléseket, a (29) felírható

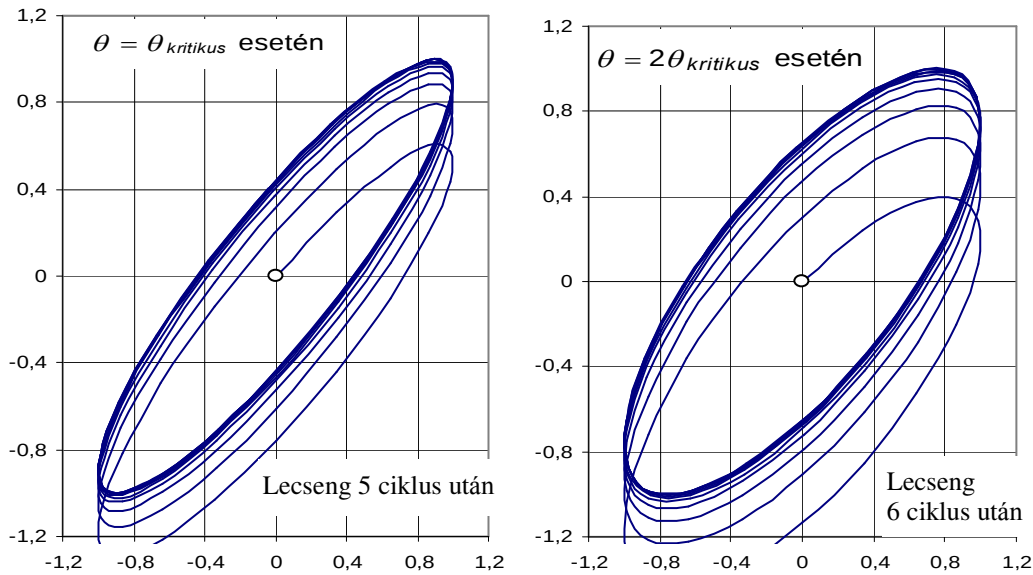
$$y = A\sqrt{1-x^2} + Bx$$

alakban, amelyből kis átalakítással az

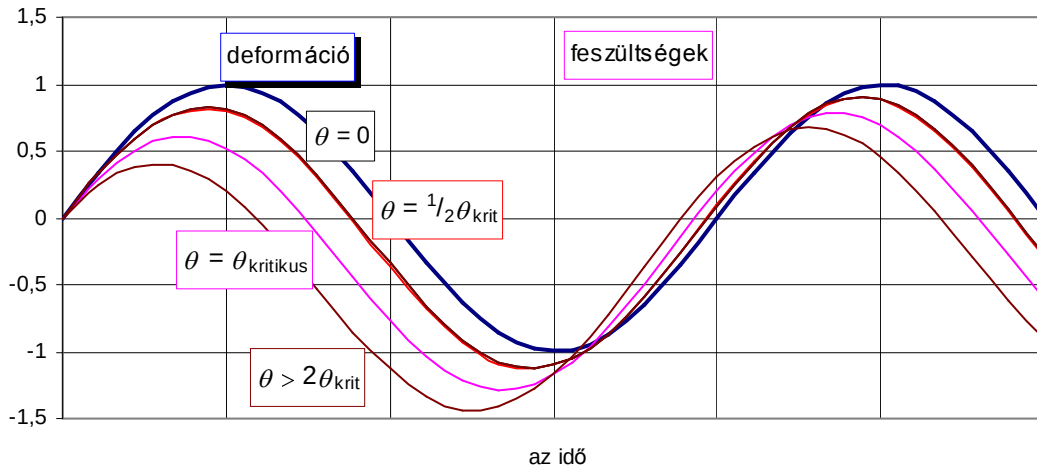
A $\sigma(\varepsilon)$ görbe ábrázolásával kapcsolatban megjegyezzük, hogy a mi gyakorlatunkban A értéke 1-nél mintegy két nagyságrenddel nagyobb (szokásos egységeinkben dolgozva). Ennek következménye, hogy az említett ellipszis igen ellapult, és nagytengeleje az abszcisszatengellyel közel 90° -os szöget zár be. Ezért a tényleges ábrázoláshoz célszerű az ordinátatengelyekre a $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ értékeket felvinni. Ezzel elérjük azt, hogy ez a határellipszis a $[-1,1] \times [-1,1]$ zárt négyzettartományba esik ($\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_0$ változó eleve a zárt intervallumban van), továbbá a δ szög is felrajzolhatóvá transzformálódik. A 13. ábrát ennek megfelelően szerkesztettük meg.



13.(a)-(b) ábra



13.(c)-(d) ábra



13.(e) ábra

Az ábra (a)-(d) részén négy különböző θ értékhez tartozó $\tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})$ görbét ábrázoltunk. Szépen látszik rajtuk, hogy az origóból induló $\tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})$ görbe az idő előre haladtával hogyan közelíti a vastagabb vonallal rajzolt határellipszist (aszimptotikusan hogyan simul hozzá). Az ábra (e) részén a különböző θ értékhez tartozó $\tilde{\sigma}(t)$ görbék és a vastag vonallal rajzolt $\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon/\varepsilon_0 = \sin \omega t$ görbe látható. [Az ábrához használt értékek: $2G = 4000 \text{ MPa}$, $2\eta = 60000 \text{ MPah}$, $\tau = 10 \text{ h}$, $\theta_{kr} = 176000 \text{ MPah}^2$, $\omega = 0,1 \text{ Hz}$.]

Végül megvizsgáljuk azt, hogy a $\sigma_k = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ amplitúdója (B_0) és fáziseltolódása (φ) hogyan függ ω -tól. A (24)-ből és a (23a)-ból látható, hogy

$$B_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{(2G - \theta\omega^2)^2 + 4\eta^2\omega^2}{1 + \tau^2\omega^2}} \varepsilon_0 = B_0(\omega).$$

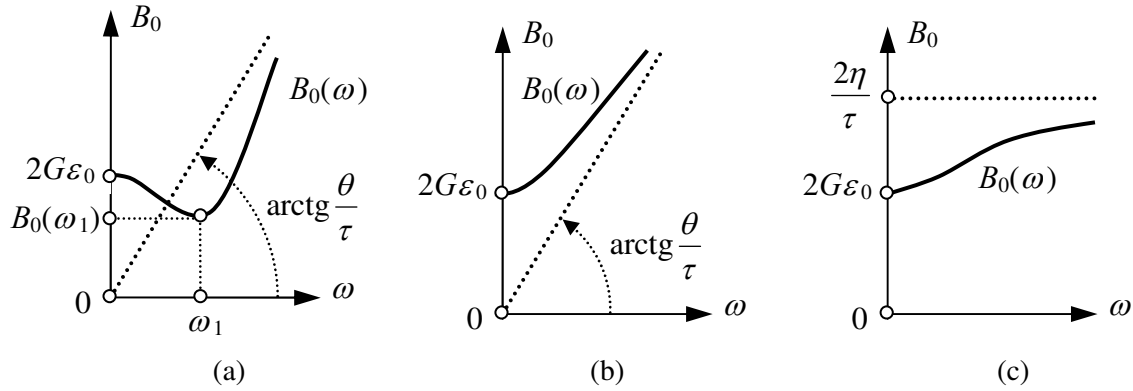
A paraméterek változásával nyilván változik B_0 értéke is. Csupán az ω paraméter változása esetén az alábbiak állapíthatók meg:

1. Felülről nem korlátos, tehát ha ω elég nagy, akkor B_0 is nagy.
2. A $B_0(\omega)$ görbéje aszimptotikusan simul a $\theta\omega/\tau$ egyeneshez.
3. Helyi szélsőértéke $\omega = 0$ -nál van, továbbá azokon a helyeken lehet, ahol

$$\omega^2 = \frac{-\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4\tau^2(\eta^2 - G\theta - G^2\tau^2)}}{\theta\tau^2}.$$

Jelölje ennek egyetlen pozitív gyökét ω_1 .

Ha $\eta^2 - G\theta - G^2\tau^2 < 0$, akkor az $\omega = 0$ helyen B_0 -nak helyi maximuma, az $\omega = \omega_1$ helyen pedig helyi minimuma van. A maximum értéke $\max B_0 = 2G\varepsilon_0$, a minimum értéke $\min B_0 = B_0(\omega_1)$. Ezt az esetet a 14.a) ábra mutatja.



14. ábra

Ha $\eta^2 - G\theta - G^2\tau^2 \geq 0$, akkor az $\omega = 0$ helyen minimum van, és más helyen nincs szélsőérték. A minimum értéke $\min B_0 = 2G\epsilon_0$. Ez az eset a 14.b) ábrán látható.

4. Ha $\theta = 0$, akkor

$$B_0 = \sqrt{\frac{4\eta^2\omega^2 + 4G^2}{1 + \tau^2\omega^2}}\epsilon_0.$$

Ebben az esetben B_0 korlátos, görbéje aszimptotikusan simul a $B_0 = 2\eta/\tau$ egyeneshez. Az $\omega = 0$ helyen minimuma van, és $\min B_0 = 2G\epsilon_0$. Ez a görbe a 14. (c) ábrán látható.

A közvetlenül is szemléletes jelentést hordozó φ fáziseltérés frekvenciafüggése kvalitatíve egyszerűbb. A gyakorlat számára legérdekesebb $G > 0$, $\eta - G\tau > 0$, $\theta \geq 0$ paramétertartományt tekintve, ω -t 0-ról fokozatosan növelve, φ a 0 értéktől indulva szigorúan monoton növekszik. Nagyobb θ érték esetén φ növekedése gyorsabb. $\omega \rightarrow \infty$ -re a növekedés $\theta \leq 2\eta\tau$ esetén a $\pi/2$ értékhez, $\theta > 2\eta\tau$ esetén a π értékhez konvergál.

2. TERHELÉSVEZÉRELT ESET

A FELADAT MATEMATIKAI MEGFOGALMAZÁSA. Az előző szakaszban tárgyalt feladattal ellentétben a

$$(30) \quad \theta\ddot{\epsilon} + 2\eta\dot{\epsilon} + 2G\epsilon = \sigma + \tau\dot{\sigma}$$

differenciálegyenletben $\epsilon = \epsilon(t)$ az ismeretlen függvény, míg σ a t változónak adott függvénye. Keressük tehát ennek a másodrendű differenciálegyenletnek a megoldását az

$\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_0$ kezdeti feltételek mellett. Az egyenletben valamennyi együtthatót pozitívnak van tekintjük. Legyen $f(t) := \sigma + \tau \dot{\sigma}$.

2.1. ÁLLANDÓ FESZÜLTSEGGYORSULÁS

Válasszuk a feszültség (a felterhelés) sebességét lineárisnak a $\dot{\sigma} = at$ függvény szerint úgy, hogy $\sigma(0) = 0$ legyen, $a > 0$. Ekkor $\sigma = \frac{1}{2}at^2$. Ebben az esetben

$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + \tau at$, és a (2.1) egyenlet

$$(31) \quad \theta \ddot{\varepsilon} + 2\eta \dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = \frac{1}{2}at^2 + \tau at.$$

Keressük ennek az egyenletnek az $\varepsilon(0) = 0$, $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_0$ feltételeket kielégítő partikuláris megoldását. A Függelék 2-ben tömören összefoglalt megoldás mögé a következő tekintést adhatjuk.

A $\theta \ddot{\varepsilon} + 2\eta \dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = 0$ homogén egyenletnek van $\varepsilon = e^{rt}$ alakú megoldása. A karakterisztikus egyenlet: $\theta r^2 + 2\eta r + 2G = 0$. Ennek gyökei

$$r_1 = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 2G\theta}}{\theta}, \quad r_2 = \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 2G\theta}}{\theta}.$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$(32) \quad \varepsilon_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad C_1, C_2 \text{ tetszőleges állandók.}$$

Mivel a (31) inhomogén egyenlet jobb oldala másodfokú polinom, ezért ennek az egyenletnek egy partikuláris megoldását másodfokú polinom alakjában, azaz

$$(33) \quad \varepsilon = At^2 + Bt + C$$

alakban kereshetjük, ahol A, B, C egyelőre ismeretlen állandók. Behelyettesítve ezt a (31) egyenletbe, a kapott azonosságot kihasználva, az ismeretlenekre az

$$A = \frac{a}{4G}, \quad B = \frac{-a}{2G} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right), \quad C = -\frac{\eta}{G} B - \frac{\theta}{G} A$$

értékeket kapjuk. A (31) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása a (32) és (33) függvények összege, azaz

$$(34) \quad \varepsilon = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + At^2 + Bt + C.$$

Az $\varepsilon(0) = 0$ és $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_0$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldást akkor kapjuk, ha a (34)–ben

$$C_1 = \frac{-r_2 C + B - \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}, \quad C_2 = \frac{r_1 C - B + \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}.$$

Ebből az eredményből látható, hogy mindez csak akkor érvényes, ha $r_2 \neq r_1$. Az $r_2 = r_1$ egyenlőség csak akkor következhet be, ha $\eta^2 - 2G\theta = 0$. Ekkor a homogén egyenlet általános megoldása

$$\varepsilon_h = C_1 e^{\eta t} + C_2 t e^{\eta t} = (C_1 + C_2 t) e^{\eta t}.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökeit valósak tételeztük fel. Előfordulhat azonban az az eset, amikor a gyökök komplexek. Ha $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ komplex számok, akkor a homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$\varepsilon_h = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad \alpha < 0.$$

Ennek következményeit a 2.4. szakaszban részletezzük.

A kiindulásnál eleve feltételeztük, hogy $\theta \neq 0$. Igazolható, hogy ha $\theta \rightarrow 0$, akkor a (31) egyenlet megoldása a $2\eta\dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = \frac{1}{2}at^2 + \tau at$ egyenlet megoldásához tart. Az elvi különbséget is jelentő $\dot{\varepsilon}_0$ szerepe is gyorsan lecseng.

A karakterisztikus egyenlet (valós) gyökei negatívak. Ennek következtében a megoldások exponenciális tagjai t növekedésével erősen csökkennek, és elég nagy t esetén már el is hanyagolhatók. Ez azt jelenti, hogy ilyen t értékeknél a $\sigma(t)$ feszültségek igen jól közelíthetők a megoldások stacionárius részével. Ez vonatkozik a következő szakaszokban tárgyalt esetekre is. Kissé bővebben tárgyaljuk ezt a 2.4. szakaszban.

2.2. A FESZÜLTSG SEBESSÉGE ÁLLANDÓ

Legyen $\dot{\sigma} = a > 0$ állandó, és $\sigma = at$. Ekkor a gerjesztő függvény $f(t) = at + a\tau$, és a (30) differenciálegyenlet

$$(35) \quad \theta\ddot{\varepsilon} + 2\eta\dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = at + a\tau.$$

Az előzőekhez hasonló utat követve kaphatjuk meg ennek az egyenletnek az $\varepsilon(0) = 0$ és $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_0$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását, mely most

$$(36) \quad \varepsilon = C_1 e^{\eta t} + C_2 e^{r_2 t} + At + B,$$

$$\text{ahol} \quad A = \frac{a}{2G}, \quad B = \frac{-a}{2G} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right), \quad C_1 = \frac{-Br_2 + A - \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}, \quad C_2 = \frac{r_1 B - A + \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}.$$

Egy kissé általánosítva, legyen most $\sigma = at + \sigma_0$. Ekkor a (30) differenciálegyenlet

$$(37) \quad \theta \ddot{\varepsilon} + 2\eta \dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = at + \sigma_0 + a\tau.$$

Ennek az egyenletnek az $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldása:

$$(38) \quad \varepsilon = C_1 e^{\eta t} + C_2 e^{r_2 t} + A^* t + B^*,$$

ahol

$$A^* = \frac{a}{2G}, \quad B^* = \frac{-a}{2G} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) + \frac{\sigma_0}{2G},$$

$$C_1 = \frac{r_2(\varepsilon_0 - B^*) + A^* - \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}, \quad C_2 = \frac{r_1(B^* - \varepsilon_0) - A^* + \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}.$$

Legyen most a feszültség értéke a t_1 időpontban σ_1 . Ez bekövetkezhet akár lineáris, akár más felterhelés révén. Legyen továbbá a $t \geq t_1$ intervallumon $\sigma = \sigma_1 - b(t - t_1)$, $b > 0$ állandó, tehát lineáris tehermentesítésről van szó. Ekkor a (30) egyenlet

$$(39) \quad \theta \ddot{\varepsilon} + 2\eta \dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = -b(t - t_1) + \sigma_1 - b\tau, \quad t \geq t_1.$$

Az $\varepsilon(t_1) = \varepsilon_1$, $\dot{\varepsilon}(t_1) = \dot{\varepsilon}_1$ feltételeket kielégítő partikuláris megoldása:

$$(40) \quad \varepsilon = C_1 e^{\eta(t-t_1)} + C_2 e^{r_2(t-t_1)} + A'(t - t_1) + B', \quad t \geq t_1,$$

ahol

$$A' = \frac{-b}{2G}, \quad B' = \frac{\sigma_1}{2G} + \frac{b}{2G} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right),$$

$$C_1 = \frac{r_2(\varepsilon_1 - B') - \dot{\varepsilon}_1 + A'}{r_2 - r_1}, \quad C_2 = \frac{-r_1(\varepsilon_1 - B') + \dot{\varepsilon}_1 - A'}{r_2 - r_1}.$$

2.3. A FESZÜLTSG ÁLLANDÓ

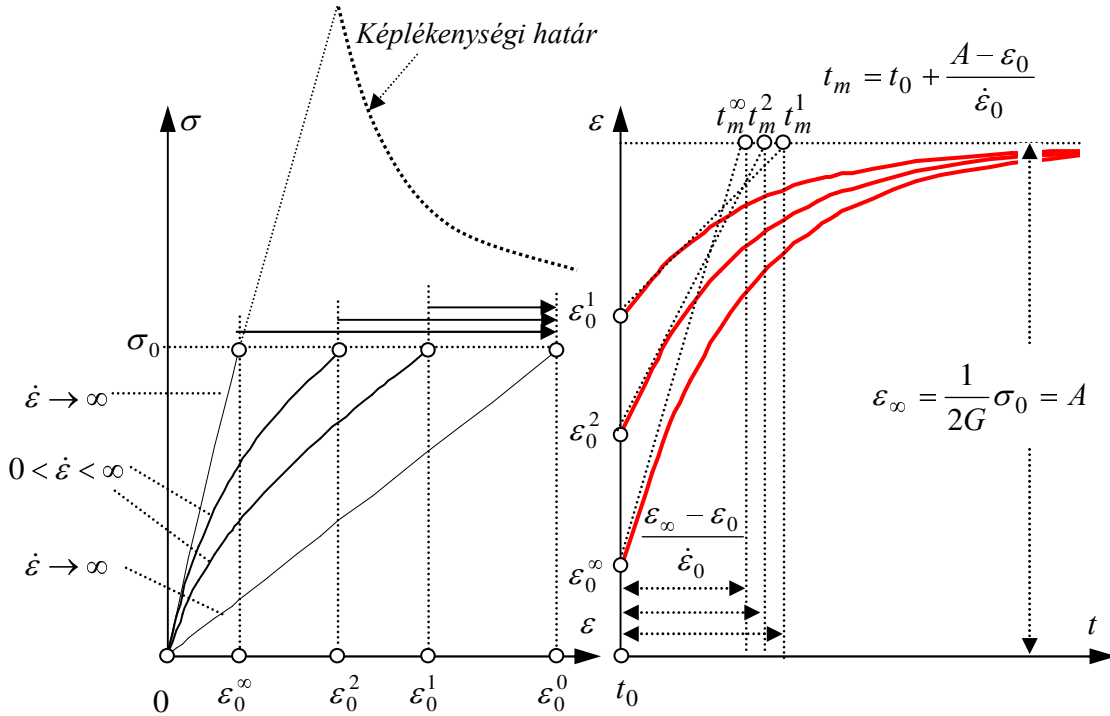
Tételezzük fel, hogy a feszültség a $t = t_0$ időpontban elérte a σ_0 értéket, és ezután állandó marad. A $t \geq t_0$ intervallumon tehát $\sigma = \sigma_0$ állandó, $\dot{\sigma} = 0$. Ekkor a (30) egyenlet

$$(41) \quad \theta \ddot{\varepsilon} + 2\eta \dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = \sigma_0, \quad t \geq t_0.$$

Az $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$, $\dot{\varepsilon}(t_0) = \dot{\varepsilon}_0$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás:

$$(42) \quad \varepsilon = C_1 e^{r_1(t-t_0)} + C_2 e^{r_2(t-t_0)} + A, \quad t \geq t_0,$$

ahol $A = \frac{\sigma_0}{2G}$, $C_1 = \frac{r_2(\varepsilon_0 - A) - \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}$, $C_2 = \frac{-r_1(\varepsilon_0 - A) + \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}$.



15. ábra

2.4. TEHERMENTESÍTÉS MÁSODFOKÚ FESZÜLTSGCSÖKKENTÉSSSEL

Tételezzük fel, hogy a t_1 időpontban a feszültség értéke σ_1 , a deformáció értéke ε_1 , a $t \geq t_1$ intervallumon pedig a feszültség $\sigma = \sigma_1 - \frac{1}{2} a(t - t_1)^2$ szerint változik ($a > 0$) (15.a) ábra).

Ebben az esetben a (30) differenciálegyenlet

$$(43) \quad \theta \ddot{\varepsilon} + 2\eta \dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = -\frac{1}{2} a(t - t_1)^2 - a\tau(t - t_1) + \sigma_1.$$

Mivel $a > 0$, nyilvánvaló, hogy tehermentesítésről van szó, és σ a $t = t_0 = t_1 + \sqrt{\frac{2\sigma_1}{a}}$ értéknél lesz zérus, vagyis a teljes tehermentesítés ekkor következik be.

A (43) egyenlet $\varepsilon(t_1) = \varepsilon_1$, $\dot{\varepsilon}(t_1) = \dot{\varepsilon}_1$ feltételeket kielégítő megoldása:

$$(44) \quad \varepsilon = C_1 e^{\eta(t-t_1)} + C_2 e^{r_2(t-t_1)} + A(t-t_1)^2 + B(t-t_1) + C,$$

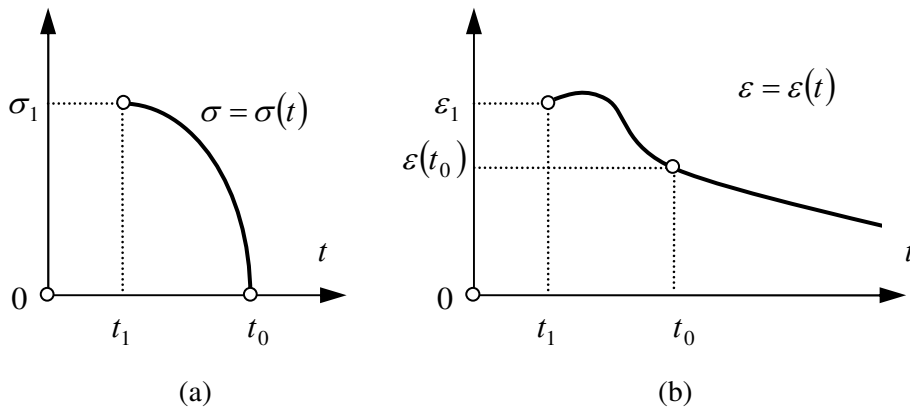
ahol

$$A = \frac{-a}{4G}, \quad B = \frac{a}{2G} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right), \quad C = \frac{1}{2G} (\sigma_1 - 2\theta A - 2\eta B),$$

$$C_1 = \frac{B - r_2(C - \varepsilon_1) - \dot{\varepsilon}_1}{r_2 - r_1}, \quad C_2 = \frac{-B + r_1(C - \varepsilon_1) + \dot{\varepsilon}_1}{r_2 - r_1}.$$

Ha a $t \leq t_1$ intervallumon történő felterhelés során a deformáció értéke a t_1 helyen $\varepsilon(t_1) = \varepsilon_1$ volt, akkor a (44) függvény folytonosan csatlakozik az előző intervallumon érvényes $\varepsilon(t)$ függvényhez. A deriváltak t_1 helyen való folytonossága nem feltétlenül szükséges, de $\dot{\varepsilon}_1$ alkalmas választásával esetleg lehetséges.

A (44) függvény jelleggörbáját a 16. (b) ábra szemlélteti. Szépen látszik rajta, hogy a tehermentesítés megkezdése után a deformáció egy ideig még növekszik, majd utána kezd csökkenni. Ha σ zérussá válik, ami a t_0 értéknél következik be, ε értéke még jelentős lesz. Ha t_0 után (tehát a $t \geq t_0$ intervallumon) σ értékét zéruson tartjuk, akkor ε csak végtelen idő alatt válik zérussá, mint ahogy az látható a 2.3. szakaszban szereplő (42) függvényből, ha $\sigma_0 = 0$ (ugyanis r_1 és r_2 , vagy ezek valós része negatív).

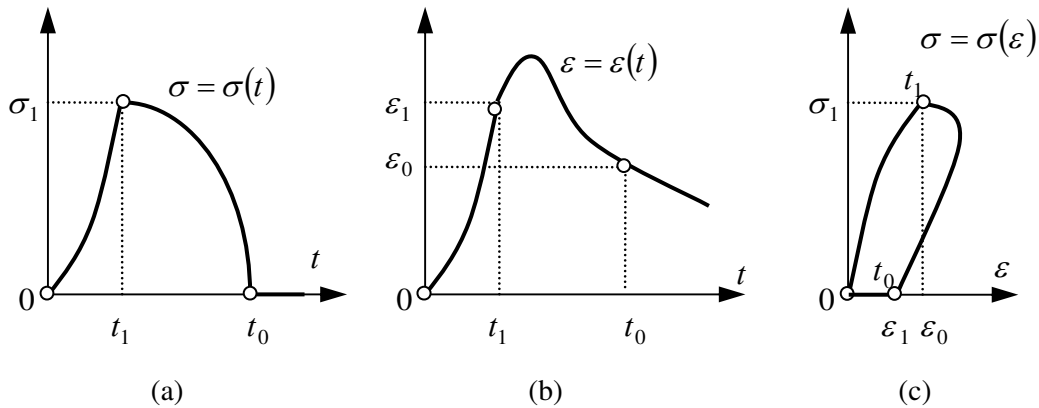


16. ábra

Ha például a felterhelés a $0 \leq t \leq 5$ min intervallumon $\sigma = \frac{1}{2}at^2$ szerint megy végbe, a $G = 1500$ MPa, $\eta = 7500$ MPa min, $\theta = 100$ MPa min², $\tau = 2$ min, $a = 100$ MPa/min, $\sigma_1 = 1250$ MPa példa adataival és a $t_1 = 5$ min értékkel számolva, akkor $\varepsilon_1 = 0,23433$. A tehermentesítés az $5 \leq t \leq 10$ min intervallumon $\sigma = \sigma_1 - \frac{1}{2}a(t - 5 \text{ min})^2$ szerint történik.

Ennek során σ a $t = t_0 = 10$ min értéknél lesz nulla. A (44) képletet használva, $\varepsilon(t_0) = \varepsilon(10 \text{ min}) = 0,116415$. A $t \geq t_0 = 10$ min intervallumon legyen $\sigma \equiv 0$. Ekkor az $\varepsilon(t)$ függvény monoton módon csökkenve tart nullához, ha t tart a végtelenhez.

Ezt a három szakaszból álló folyamatot a 17. (a), (b), (c) ábrák szemléltetik. A 17. (c) ábrán a $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ függvény görbéje látható, a jellegzetes pontok mellett feltüntetve az aktuális t értéket is.



17. ábra

Ha t_1 után a terhelést állandó szinten tartjuk egy közbeiktatott véges intervallumon, akkor a folyamat ennek megfelelően bővül, de a deformáció változásának jellege lényegesen nem változik.

2.5. PERIODIKUS TERHELÉS

Itt ismét érdemes részletesebb betekintést nyújtani a Függelék 2-ben tömören összefoglalt megoldás mögé.

Elöljáróban tekintsük azt a szélsőséges esetet, amikor $\eta = 0$, és $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$. Ekkor a (30) differenciálegyenlet

$$(45) \quad \theta \ddot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = \sigma_0 (\sin \omega t + \tau \omega \cos \omega t).$$

A jobb oldalt egyetlen szinuszrezgéssé alakítva,

$$(46) \quad \theta \ddot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = f_0 \sin(\omega t + \psi), \quad f_0 = \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \cdot \sigma_0, \quad \operatorname{tg} \psi = \tau \omega.$$

A $\theta \ddot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = 0$ homogén differenciálegyenlet megoldása

$$(47) \quad \varepsilon_h = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad \omega_0^2 = \frac{2G}{\theta}.$$

Ugyanis a karakterisztikus egyenlet $\theta r^2 + 2G = 0$, ennek gyökei: $r_1 = \sqrt{\frac{2G}{\theta}}i = \omega_0 i$,
 $r_2 = -\sqrt{\frac{2G}{\theta}}i = -\omega_0 i$. Ebből $\varepsilon_1 = e^{\omega_0 i t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$, így a megoldás a $\cos \omega t$ és $\sin \omega t$ függvények lineáris kombinációja.

A (46) inhomogén differenciálegyenlet megoldása

$$(48) \quad \varepsilon = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + A_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

alakú (C_1 és C_2 integrációs állandók, $A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ egy partikuláris megoldás). Az eredmény tehát csillapítatlan rezgés, amely két részből áll. Az első rész körfrekvenciája ω_0 (a rendszer saját-körfrekvenciája), a másodiké ω (a gerjesztés körfrekvenciája). A második rész önmagában is megoldása a (46) differenciálegyenletnek. Az A_0 amplitúdó meghatározására ezt használjuk ki. Helyettesítsük be ugyanis az $A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ függvényt a (45) egyenletbe:

$$-\theta A_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + 2G A_0 \sin(\omega t + \varphi) \equiv f_0 \sin(\omega t + \psi).$$

Ebből az azonosságból következik, hogy

$$(49) \quad A_0(2G - \theta \omega^2) = f_0 \Rightarrow A_0 = \frac{f_0}{2G - \theta \omega^2} = \frac{f_0}{\theta(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad \text{és} \quad \varphi = \psi.$$

Innen látható, hogy az $A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ megoldás A_0 amplitúdója igen nagy lehet, ha a gerjesztés frekvenciája (ω) közel van a rendszer saját-körfrekvenciájához (ω_0 -hoz). Az $\omega = \omega_0$ esetet szokás rezonanciakatasztrófának nevezni, mert ekkor A_0 végtelen nagy lesz.³ Ez csak csillapítatlan rezgés esetén állhat elő.

Most vizsgáljuk azt az általánosabb esetet, amikor $\eta > 0$, vagyis a differenciálegyenlet

$$(50) \quad \theta \ddot{\varepsilon} + 2\eta \dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = \sigma_0(\sin \omega t + \tau \omega \cos \omega t).$$

A próbatestre adott terhelés változatlanul a $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$ periodikus függvény szerinti, és így az egyenlet jobb oldalán álló $f(t)$ gerjesztő függvény változatlanul

$$(51) \quad f(t) = \sigma_0(\sin \omega t + \tau \omega \cos \omega t) = f_0 \sin(\omega t + \psi),$$

alakban is felírható.

³ Valójában ebben a speciális esetben a megoldás nem (48) alakú, hanem az egyik harmonikus tag egy idővel arányosan növekvő amplitúdót kap. A megoldás tehát véges lesz – viszont korlátlanul növekvő.

A karakterisztikus egyenlet és megoldása:

$$\theta r^2 + 2\eta r + 2G = 0, \quad r_{1,2} = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 2\theta G}}{\theta}.$$

Itt három esetet különböztetünk meg.

$$\text{AZ } \eta^2 > 2G\theta \text{ ESET}$$

Ha $\eta^2 > 2G\theta$, akkor a gyökök valósak, és $r_1 \neq r_2$. Ebben az esetben az (50) egyenlet általános megoldása

$$(52) \quad \begin{cases} \varepsilon = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ A = \frac{\omega[(2G - \theta\omega^2)\tau - 2\eta]}{(2G - \theta\omega^2)^2 + (2\eta\omega)^2} \sigma_0, \quad B = \frac{(2G - \theta\omega^2) + 2\eta\tau\omega^2}{(2G - \theta\omega^2)^2 + (2\eta\omega)^2} \sigma_0. \end{cases}$$

Az $\varepsilon(0) = 0$ és $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldást kapjuk, ha az (52) megoldásba a

$$(53) \quad C_1 = \frac{-Ar_2 + B\omega - \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}, \quad C_2 = \frac{Ar_1 - B\omega + \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}$$

értékeket helyettesítjük be.

Kényelmesebben juthatunk bizonyos információkhoz, ha az (50) egyenletet

$$(54) \quad \theta \ddot{\varepsilon} + 2\eta \dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = f_0 \sin(\omega t + \psi), \quad f_0 = \sigma_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \tau \omega$$

alakban kezeljük. Ekkor az általános megoldást

$$(55) \quad \varepsilon = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + A_0 \sin(\omega t + \varphi) = \varepsilon_{\text{exp}} + \varepsilon_k$$

alakban vehetjük fel. Itt tehát az (54) egyenlet egy partikuláris megoldását ugyanolyan trigonometrikus alakban keressük, amilyen alakú az $f(t)$ gerjesztő függvény. Az (52) alakú megoldás esetében is ezt tettük. Mivel az (55) megoldás $\varepsilon_k \doteq A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ része önmagában is megoldása az (54) egyenletnek, ezt az ε_k függvényt behelyettesítve (54)-be, azonosságot kapunk:

$$-\theta A_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + 2\eta A_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) + 2G A_0 \sin(\omega t + \varphi) \equiv f_0 \sin(\omega t + \psi).$$

Innen

$$A_0(-\theta\omega^2 + 2G)\sin(\omega t + \varphi) + 2\eta A_0 \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= A_0 \sqrt{(2G - \theta\omega^2)^2 + (2\eta\omega)^2} \sin(\omega t + \varphi + \alpha) \equiv f_0 \sin(\omega t + \psi),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\eta\omega}{2G - \theta\omega^2},$$

amelyből leolvasható, hogy

$$(56) \quad A_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(2G - \theta\omega^2)^2 + (2\eta\omega)^2}} \quad \text{és} \quad \varphi + \alpha = \psi \Rightarrow \alpha = \psi - \varphi.$$

Az (55)-ből látható, hogy a megoldás két részből áll. Az első rész $(C_1 e^{\eta t} + C_2 e^{r_2 t})$ egy exponenciálisan csökkenő nemperiodikus függvény, amely viszonylag gyorsan lecseng, és ezután a megoldás (a kimenőjel) gyakorlatilag a trigonometrikus rész lesz. Az exponenciális csökkenés onnan látható, hogy a karakterisztikus egyenlet gyökei negatívak. A megoldás második részének körfrekvenciája (ω) ugyanakkora, mint az $f(t)$ gerjesztő függvényé (a bemenő jelé), amplitúdója (A_0) az (56) alapján számítható. Az $f_0 = \sigma_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}$ alapján A_0 számlálója ugyan függ ω -tól, és ω növekedésével korlátlanul növekszik, ennek ellenére A_0 tart a nullához, ha ω tart a végtelenhez. A $\varphi + \alpha = \psi$ összefüggés azt jelenti, hogy a $\sigma_k = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ kimenő jel fázisban α -val késik az $f(t) = f_0 \sin(\omega t + \psi)$ bemenő jelhez képest.

Ha az általános megoldásnak az (55) alakját választjuk, akkor az $\varepsilon(0) = 0$, $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_0$ feltételeket kielégítő megoldást abban az esetben kapjuk, ha

$$(57) \quad C_1 = \frac{-A_0 r_2 \sin \varphi + A_0 \omega \cos \varphi - \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}, \quad C_2 = \frac{A_0 r_1 \sin \varphi - A_0 \omega \cos \varphi + \dot{\varepsilon}_0}{r_2 - r_1}.$$

Gyakran előfordul, hogy az (50) differenciálegyenlet megoldásának csak a második részére, a megoldást elég nagy t értékeknél igen jól közelítő σ_k függvényre van szükségünk. Ekkor célszerű a gerjesztő függvényt $f(t) = f_0 \sin(\omega t + \psi)$ alakban felírni, és a σ_k függvényt $\sigma_k(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ alakban keresni.

Megjegyezzük, hogy mind az $f(t)$, mind a $\sigma_k(t)$ függvény koszinuszos alakban is felírható, például $f(t) = f_0 \cos(\omega t + \psi)$, $\sigma_k(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$ alakban.

$$\text{AZ } \eta^2 = 2G\theta \text{ ESET}$$

Legyen most $\eta^2 = 2G\theta$. Ekkor a karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$r_1 = r_2 = r = -\frac{\eta}{\theta}. \quad \text{Ekkor az (50) differenciálegyenlet általános megoldása}$$

$$(58) \quad \varepsilon = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} + A_0 \sin(\omega t + \varphi) ,$$

ahol A_0 és φ az (56) képletekkel adottak. Kihasználva azt, hogy $\eta^2 = 2G\theta$, az amplitúdó

$$A_0 = \frac{f_0}{2G + \theta\omega^2} .$$

Az $\varepsilon(0) = 0$, $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_0$ feltételeket kielégítő partikuláris megoldást a

$$(59) \quad C_1 = -A_0 \sin \varphi, \quad C_2 = r_1 A_0 \sin \varphi - A_0 \omega \cos \varphi + \dot{\varepsilon}_0$$

választással kapjuk.

Az (58) megoldás annyiban tér el az (55) megoldástól, hogy az exponenciális rész második tagja t -nek első hatványát szorzótényezőként tartalmazza. Ennek ellenére az exponenciális csökkenés miatt ez is viszonylag hamar lecseng, és nagy t értékek esetén elhanyagolható.

$$AZ \quad \eta^2 < 2G\theta \quad \text{ESET}$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet gyökei komplexek, és

$$r_1 = -\frac{\eta}{\theta} + i\sqrt{\frac{2G}{\theta} - \frac{\eta^2}{\theta^2}}, \quad r_2 = -\frac{\eta}{\theta} - i\sqrt{\frac{2G}{\theta} - \frac{\eta^2}{\theta^2}} .$$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be az $\frac{\eta}{\theta} = a$, $\frac{2G}{\theta} - \frac{\eta^2}{\theta^2} = \omega_s^2$ jelöléseket. Ezekkel $r_1 = -a + i\omega_s$, $r_2 = -a - i\omega_s$. Az (50) differenciálegyenletet írjuk

$$(60) \quad \theta \ddot{\varepsilon} + 2\eta \dot{\varepsilon} + 2G\varepsilon = f_0 \sin(\omega t + \psi), \quad f_0 = \sigma_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \tau \omega$$

alakba. Általános megoldása:

$$(61) \quad \varepsilon = e^{-at} (C_1 \cos \omega_s t + C_2 \sin \omega_s t) + A_0 \sin(\omega t + \varphi) .$$

A megoldásnak ebből az alakjából látható, hogy a megoldás első része egy ω_s körfrekvenciájú, exponenciálisan csillapított rezgés, a második rész egy ω körfrekvenciájú, A_0 amplitúdójú csillapítatlan rezgés. Az A_0 amplitúdó és a φ fáziseltolás az (58)-ban már adott. Ez onnan adódik, hogy a σ_k állandósult rész nem függ a kezdeti feltételektől. Ha a (61) megoldásban

$$C_1 = -A_0 \sin \varphi, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_s} (\dot{\varepsilon}_0 - A_0 \omega \cos \varphi - a A_0 \sin \varphi) ,$$

akkor a megoldás kielégíti az $\varepsilon(0) = 0$, $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_0$ kezdeti feltételeket.

Érdemes még megvizsgálni, hogy az (56) alatti A_0 amplitúdó hogyan változik ω függvényében. Az

$$(62) \quad A_0 = \frac{\sigma_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{\sqrt{(2G - \theta \omega^2)^2 + (2\eta \omega)^2}} = A_0(\omega)$$

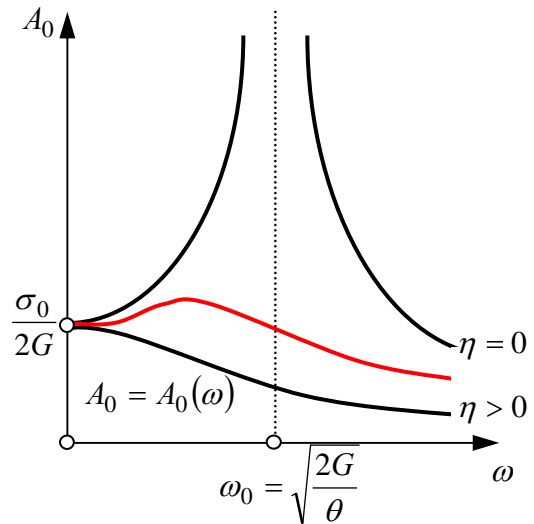
összefüggésből látható, hogy A_0 páros függvény, továbbá $A_0(0) = \frac{\sigma_0}{2G}$. Ha ω igen nagy, akkor A_0 igen kicsi, tehát $\lim_{\omega \rightarrow \infty} A_0(\omega) = 0$. Ha $\eta \neq 0$, akkor A_0 korlátos, tehát nem válik végtelenné akkor sem, ha ω megegyezik az ω_s saját-körfrekvenciával (ω_s a (60) egyenlettel leírt rendszer saját-körfrekvenciája). Részletesebb vizsgálattal kimutatható, hogy a mi gyakorlatunkban előforduló esetekben A_0 -nak az $\omega = 0$ helyen minimuma, a (47) képlettel értelmezett ω_0 hely környékén maximuma van, ha $\eta^2 - G\theta - G^2\tau^2 < 0$.

Megjegyezzük, hogy a maximum értéke nem túlságosan érzékeny ω változására, sokkal inkább η -ra. Ha $\eta = 0$, akkor

$$A_0 = \frac{\sigma_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{2G - \theta \omega^2} = \frac{\sigma_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{\theta \left(\frac{2G}{\theta} - \omega^2 \right)} = \frac{\sigma_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{\theta (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Ezzel visszakaptuk a (49) formulát, amely azt mutatja, hogy csillapítatlan rendszer esetében az A_0 végtelenné válik.

A 18. ábra az $A_0(\omega)$ függvény jelleggörbáját mutatja durva közelítésben. Összehasonlítva az A_0 amplitúdót az 1.5. szakaszban szereplő B_0 amplitúdóval, látható, hogy az ε_0 , ill. σ_0 állandóktól eltekintve, A_0 és B_0 egymásnak reciproka, és $A_0 B_0 = \varepsilon_0 \sigma_0$.



18. ábra

Természetesen feltételezzük, hogy ω mindkét helyen ugyanazt a szerepet tölti be, hasonlóan a többi paraméterhez. Ez megkönnyíti a két amplitúdó vizsgálatát. Ennek

megfelelően A_0 korlátos, és ha ω nagy, akkor A_0 kicsi (ha $\omega \rightarrow \infty$, akkor $A_0 \rightarrow 0$). Ahol az egyiknek maximuma van, ott a másiknak minimuma, és fordítva. Így például, ha $\eta^2 - G\theta - G^2\tau^2 < 0$, akkor az $\omega = 0$ helyen A_0 -nak minimuma, az $\omega = \omega_1$ helyen maximuma van, és

$$\min A_0 = \frac{\sigma_0}{2G} = \frac{\varepsilon_0 \sigma_0}{\max B_0}, \quad \max A_0 = A_0(\varepsilon_1) = \frac{\varepsilon_0 \sigma_0}{B_0(\omega_1)}.$$

Végül arra hívjuk fel a figyelmet, hogy a tranziensek lecsengése után állandósuló periodikus deformáció ugyanazzal a fáziskéséssel követi a feszültséget, amivel a deformációvezérelt esetben (v.ö. 1.4 szakasz).

B) AZ ANYAGTULAJDONSÁGOK KÉPLÉKENY ÁLLAPOTBAN, ANYAGEGYENLET MEGOLDÁSA $\Psi = 1$ ESETÉRE

A KIINDULÁS. A tehetetlenségi standard test anyagtörvénye az (1) egyenlet alapján:

$$(63a) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \Psi \left\{ (2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f) + (2\eta - 2\eta_{pl})\dot{\varepsilon} \right\},$$

illetve

$$(63b) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = \begin{cases} 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}, & \text{ha } \varepsilon \leq \varepsilon_f, \\ 2G\varepsilon_f + 2G_{pl}(\varepsilon - \varepsilon_f) + 2\eta_{pl}\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon}, & \text{ha } \varepsilon \geq \varepsilon_f, \end{cases}$$

ahol

$$(64) \quad \Psi = \begin{cases} 0, & \text{ha } W' < W'_f, \quad \text{vagy} \quad \Delta W' < 0, \\ 1, & \text{ha } W' \geq W'_f, \quad \text{és} \quad \Delta W' \geq 0, \end{cases} \quad \text{ill. } \Psi = \begin{cases} 0, & \text{ha } \varepsilon < \varepsilon_f, \quad \text{vagy} \quad \sigma d\varepsilon < 0, \\ 1, & \text{ha } \varepsilon \geq \varepsilon_f, \quad \text{és} \quad \sigma d\varepsilon \geq 0. \end{cases}$$

Az anyagtörvény a képlékenységi viszkozitási tényező

$$2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau \Rightarrow 2\eta - 2\eta_{pl} = (2G - 2G_{pl})\tau$$

összefüggésének a felhasználásával:

$$(63c) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\varepsilon - \varepsilon_f + \tau \dot{\varepsilon}),$$

vagy a rugalmas és képlékeny modulusok arányát kifejező φ tényező

$$(65) \quad \varphi := \frac{G_{pl}}{G}, \quad 0 < \varphi \leq 1$$

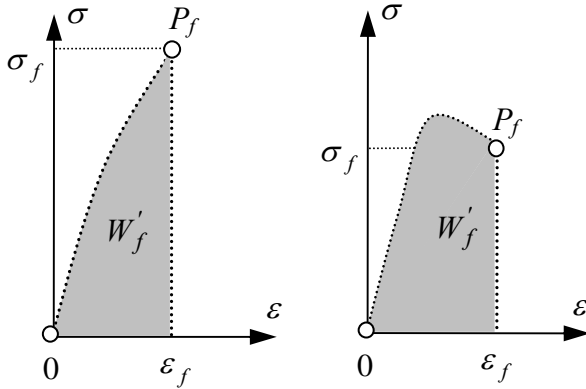
képletével:

$$(63d) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} - \Psi 2G(1 - \varphi)(\varepsilon - \varepsilon_f + \tau \dot{\varepsilon})$$

alakot ölti.

Az (63b) összefüggés első (a rugalmasságra vonatkozó) egyenlete, és a második (a képlékeny állapotra jellemző) egyenlete nagyon hasonló formájú, sőt egy alkalmas $[\sigma' = \sigma - \sigma_f, \varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_f]$ transzformációval azonos alakra is hozható. Ezért teljesen felesleges lenne az előző – rugalmasságtani – pontban közöltek megismételni. A következőkben csak a speciális különbségekre koncentrálnak.

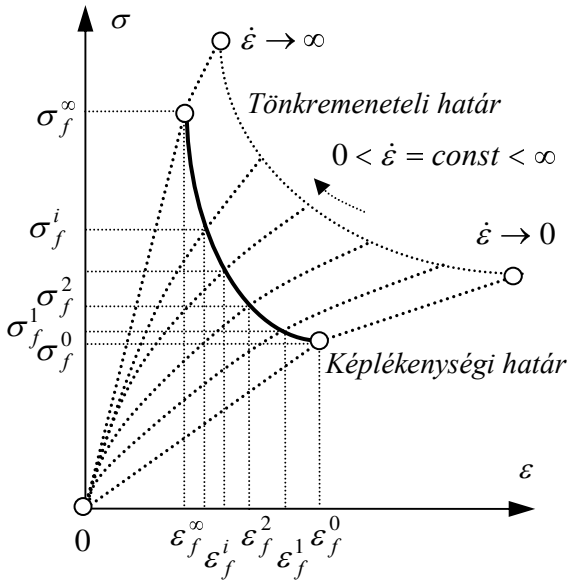
VÁLTOZÁS A KÉPLÉKENYSÉGI HATÁRON. Minden egyes $\sigma(\varepsilon)$ terhelési görbén kijelölhető egy $P_f\{\varepsilon_f, \sigma_f\}$ pont, nevezzük ezt képlékenységi határpontnak, melyre az a jellemző, hogy a $W' = \int_0^t \sigma \dot{\varepsilon} dt = \int_0^{\varepsilon} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$ torzulási deformáció munka éppen a $W'_f = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma \dot{\varepsilon} dt = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$ értékkel egyenlő.



19.a) ábra

19.b) ábra

Egyszerűsítve a 19.a) ábra alapján fogalmazhatunk úgy, hogy a kontinuum egy vizsgált anyagi pontban akkor kerül képlékeny állapotba, ha az $(\varepsilon_f, \sigma_f)$ terheléshez (terhelési állapothoz) tartozó terhelési görbe alatti terület túllépi a W'_f értéket. Ha ugyanazt az anyagi pontot másképpen terheljük, akkor más $\sigma(\varepsilon)$ terhelési görbét, s így más $(\varepsilon_f, \sigma_f)$ értékpárt, azaz más P_f pontot kapunk. Az anyagi pont most is akkor kerül képlékeny állapotba, ha ezen másik görbe alatti terület túllépi ugyanazt a W'_f értéket (19.b) ábra). Ebből következik, hogy bármely $\sigma(\varepsilon)$ terhelési görbe esetén a görbe alatti területnek a $[0; \varepsilon_f]$ intervallum fölötti része W'_f .



20. ábra. A képlékenységi határfeltétel állandó deformációsebességek esetén

A képlékenységi határpontok mértani helye a képlékenységi határ, a 20. ábrán vastag vonallal jelölt görbe (egyenletes deformációsebesség esetén). Ugyanezen az ábrán a vékony vonal a tönkremeneteli határt

jelöli. A képlékenységi határgörbe természetesen az ε, σ síkon van.⁴ A gyakorlatban azonban a terhelt kontinuumon is ki kell jelölni az a görbét (felületet), amely elválasztja a képlékeny részt a rugalmas résztól. Ez úgy történhet, hogy a terhelési görbe ismeretében meghatározzuk (kijelöljük) a kontinuum azon pontjait, amely pontokban $\sigma = \sigma_f$, vagy $\varepsilon = \varepsilon_f$. Ezeknek a pontoknak a halmaza a kontinuumon érvényes képlékenységi határ.

A képlékenységi határon az anyagtulajdonságok megváltoznak. A rugalmas állapot-változás esetén a test pl. adott felterhelés után, ha tehermentesítünk, mindig visszanyerheti eredeti alakját. Ez a folyáshatár átlépése után már nem lehetséges, mert megjelennek a maradó deformációk (ezek tehermentesítés után is megmaradnak).

A mechanikai jellemzők az ε_f képlékenységi határon történő megváltozásának elemzéséhez jelöljük a bal illetve jobb oldali határértéket $^-$ és $^+$ indexekkel, pl. ε_f^- , ε_f^+ módon, azaz

$$\begin{aligned} \text{bal oldali határérték: } \quad \varepsilon_f^- &= \lim_{t \rightarrow t_f} \varepsilon = \varepsilon(t_f - 0), \quad \varepsilon < \varepsilon_f \text{ esetén,} \\ \text{jobb oldali határérték: } \quad \varepsilon_f^+ &= \lim_{t_f \leftarrow t} \varepsilon = \varepsilon(t_f + 0), \quad \varepsilon > \varepsilon_f \text{ esetén.} \end{aligned}$$

A (63b) egyenlet alapján

$$\begin{aligned} \text{ha } \varepsilon = \varepsilon_f - 0, \text{ akkor } \sigma_f^- + \tau \dot{\sigma}_f^- &= 2G\varepsilon_f^- + 2\eta \dot{\varepsilon}_f^- + \theta \ddot{\varepsilon}_f^-, \\ \text{ha } \varepsilon = \varepsilon_f + 0, \text{ akkor } \sigma_f^+ + \tau \dot{\sigma}_f^+ &= 2G\varepsilon_f^+ + 2\eta_{pl} \dot{\varepsilon}_f^+ + \theta \ddot{\varepsilon}_f^+. \end{aligned}$$

Feszültségvezérelt esetben a feszültségek és deriváltjaik folytonossága magától érthető, hiszen a felterhelés változatlan módon történik, így a képlékenységi határon is

$$(66a) \quad \sigma_f^- = \sigma_f^+ = \sigma_f.$$

Deformációvezérelt esetben viszont a deformációk és deriváltjaik folytonossága evidens, azaz

$$(66b) \quad \varepsilon_f^- = \varepsilon_f^+ = \varepsilon_f.$$

Fizikai intuíció és tapasztalatok alapján ez azt jelenti, hogy a feszültségek és deformációk folytonossága általában feltételezhető, amiből következik, hogy

$$\begin{aligned} \text{ha } t = t_f - 0, \text{ akkor } \sigma_f + \tau \dot{\sigma}_f^- &= 2G\varepsilon_f + 2\eta \dot{\varepsilon}_f^- + \theta \ddot{\varepsilon}_f^-, \\ \text{ha } t = t_f + 0, \text{ akkor } \sigma_f + \tau \dot{\sigma}_f^+ &= 2G\varepsilon_f + 2\eta_{pl} \dot{\varepsilon}_f^+ + \theta \ddot{\varepsilon}_f^+, \end{aligned}$$

ahonnan, a két egyenletet kivonva egymásból,

⁴ amely valójában a $\mathbf{T}$ és $\mathbf{E}$ tenzorok által kifeszített mechanikai térben egy felület (hiperfelület)

$$(67) \quad \tau \dot{\sigma}_f^+ - \tau \dot{\sigma}_f^- = 2\eta_{pl} \dot{\epsilon}_f^+ - 2\eta \dot{\epsilon}_f^- + \theta \ddot{\epsilon}_f^+ - \theta \ddot{\epsilon}_f^-,$$

amely az elemzéshez a kiinduló összefüggést képezi.

Bevezetve az időbeli ugrásra a

$$\llbracket \dot{\sigma}_f \rrbracket := (\dot{\sigma}_f^+ - \dot{\sigma}_f^-), \quad \llbracket \dot{\epsilon}_f \rrbracket := (\dot{\epsilon}_f^+ - \dot{\epsilon}_f^-), \quad \llbracket \ddot{\epsilon}_f \rrbracket := (\ddot{\epsilon}_f^+ - \ddot{\epsilon}_f^-)$$

jelölést, a

$$(68) \quad \llbracket \dot{\sigma}_f \rrbracket = \frac{\theta}{\tau} \llbracket \ddot{\epsilon}_f \rrbracket - \frac{1}{\tau} (2\eta \dot{\epsilon}_f^- - 2\eta_{pl} \dot{\epsilon}_f^+),$$

$$(69) \quad \llbracket \ddot{\epsilon}_f \rrbracket = \frac{\tau}{\theta} \llbracket \dot{\sigma}_f \rrbracket - \frac{1}{\theta} (2\eta \dot{\epsilon}_f^- - 2\eta_{pl} \dot{\epsilon}_f^+).$$

eredményt kapjuk.

A feszültségváltozás sebességének ugrását és a deformációgyorsulás ugrását fel tudtuk írni. A deformációsebesség ugrását viszont nem. Játszodozhatnánk azzal a – semmivel sem igazolható – gondolattal, hogy mi lenne, ha a deformációsebesség jobb- és baloldali határértéke megegyezne. Ekkor a (55) és (56) egyszerűsödne:

$$\llbracket \dot{\sigma}_f \rrbracket = \frac{\theta}{\tau} \llbracket \ddot{\epsilon}_f^- \rrbracket - \frac{1}{\tau} (2\eta - 2\eta_{pl}) \dot{\epsilon}_f^-, \quad \llbracket \ddot{\epsilon}_f \rrbracket = \frac{\tau}{\theta} \llbracket \dot{\sigma}_f \rrbracket - \frac{1}{\theta} (2\eta - 2\eta_{pl}) \dot{\epsilon}_f^-.$$

Általánosan csupán a feszültségek és deformációk folytonosságának

$$\llbracket \sigma_f \rrbracket = 0 \text{ és } \llbracket \epsilon_f \rrbracket = 0$$

összefüggése, valamint

$$\text{feszültségvezérelt szituációban a} \quad \llbracket \dot{\sigma}_f \rrbracket = 0,$$

$$\text{deformációvezérelt szituációban a} \quad \llbracket \dot{\epsilon}_f \rrbracket = 0, \quad \llbracket \ddot{\epsilon}_f \rrbracket = 0$$

egyenletek állnak rendelkezésünkre.

A folyáshatáron nemcsak a feszültségváltozási sebességnek van „időbeli” ugrása, hanem a feszültség deformáció szerinti deriváltjának is van „ ϵ -térbeli” ugrása:

$$\llbracket \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon_f} \rrbracket = \llbracket \frac{\partial \sigma_f}{\partial \epsilon} \rrbracket := \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=\epsilon_f+0} - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=\epsilon_f-0},$$

s ez a két ugrás a $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}}$ összefüggésből következően kapcsolatban van egymással:

$$(70) \quad \llbracket \frac{\partial \sigma_f}{\partial \epsilon} \rrbracket = \llbracket \frac{\dot{\sigma}_f}{\dot{\epsilon}_f} \rrbracket.$$

Ez a felírás így első látszatra nagyon félrevezethető lehet, mert σ -val, ill. ε -nal a **T** feszültségi deviátortenzor $\sigma := \sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij} = s_{ij}$ komponenseit, ill. az **E** deformációs deviátortenzor $\varepsilon := \varepsilon_{ij} - \varepsilon_o \delta_{ij} = e_{ij}$ komponenseit jelöltük az egyszerűbb tárgyalás érdekében, s a (70) a tenzorok mindegyik komponensére vonatkozik:

$$\left[\left[\frac{\partial s_{ij}}{\partial e_{ij}} \right]_{\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^f} \right] = \left[\left[\frac{\dot{s}_{ij}}{\dot{e}_{ij}} \right]_{t=t_f} \right], \text{ illetve } \left[\left[\frac{\partial s_{ij}^f}{\partial e_{ij}^f} \right] \right] = \left[\left[\frac{\dot{s}_{ij}^f}{\dot{e}_{ij}^f} \right] \right].$$

Ahhoz, hogy többet is megtudhassunk az ugrásokról, a következőkben a speciális eseteket (peremfeltételeket) vesszük alapul.

ÁLLANDÓ DEFORMÁCIÓGYORSULÁS [$\ddot{\varepsilon} = \text{constans} = a$].

Ekkor $\dot{\varepsilon} = at + \dot{\varepsilon}_0$, $\varepsilon = \frac{1}{2}at^2 + \dot{\varepsilon}_0 t + \varepsilon_0$, ahol $\dot{\varepsilon}(0) := \dot{\varepsilon}_0$, $\varepsilon(0) := \varepsilon_0$, tehát

$$[\ddot{\varepsilon}_f] = 0, \quad [\dot{\varepsilon}_f] = 0, \quad [\varepsilon_f] = 0.$$

Ennek megfelelően a (69) összefüggés jobb oldala nullával egyenlő, míg a (68) a

$$(71) \quad [\dot{\sigma}_f] = -\frac{1}{\tau}(2\eta - 2\eta_{pl})\dot{\varepsilon}_f$$

formára egyszerűsödik, illetve a $2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau$ összefüggést felhasználva:

$$(71') \quad [\dot{\sigma}_f] = -(2G - 2G_{pl})\dot{\varepsilon}_f.$$

A (60) összefüggés ennek megfelelően:

$$(72) \quad \left[\left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \varepsilon} \right] \right] = -\frac{1}{\tau}(2\eta - 2\eta_{pl}).$$

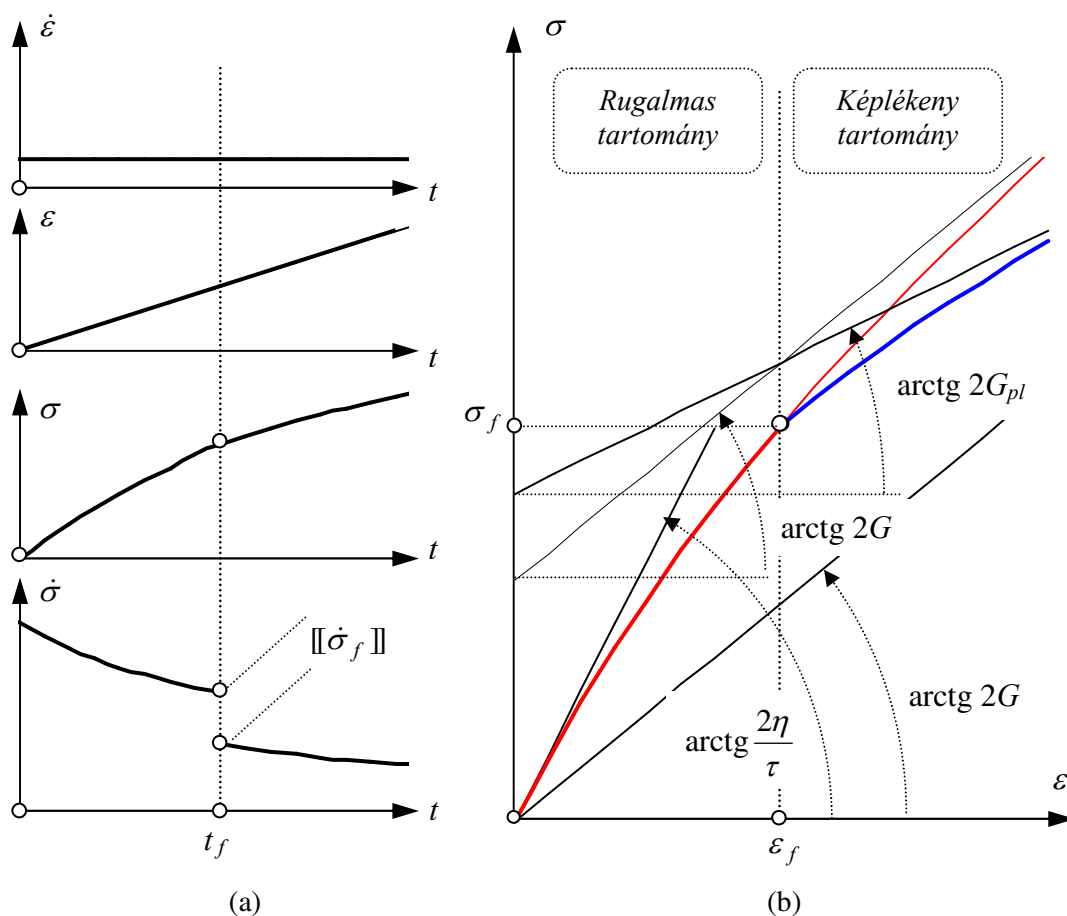
ÁLLANDÓ DEFORMÁCIÓSEBESSÉG [$\dot{\varepsilon} = \text{constans} = a$].

Ekkor $\ddot{\varepsilon} = 0$ és legyen $\varepsilon = at$, vagyis $\varepsilon(0) = 0$, $[\ddot{\varepsilon}_f] = 0$, $[\dot{\varepsilon}_f] = 0$, $[\varepsilon_f] = 0$,

s ugyancsak az előző eredményre jutunk:

$$[\dot{\sigma}_f] = -(2G - 2G_{pl})\dot{\varepsilon}_f, \text{ illetve } \left[\left[\frac{\partial \sigma_f}{\partial \varepsilon} \right] \right] = -(2G - 2G_{pl}).$$

A szituációt a 21. ábra mutatja.



21. ábra. A deformációk és a feszültségek és deriváltjaik időbeli alakulása (a), illetve az anyagtörvény a rugalmas és képlékeny tartományban (b) állandó deformációsebesség esetén

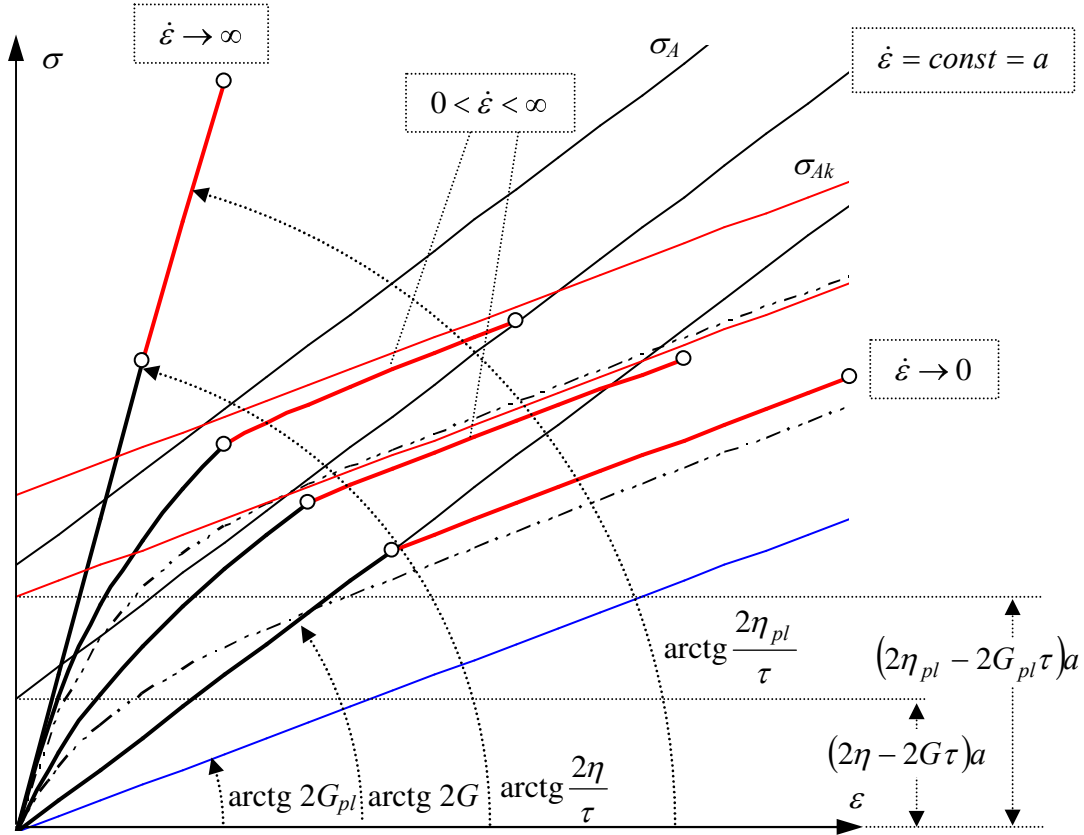
A feszültség időbeli változása:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 2Ga \left[t + \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right], & \text{ha } 0 \leq t \leq t_f, \\ \sigma_f e^{-\frac{t-t_f}{\tau}} + 2G_{pl}a \left[(t-t_f) + \left(\frac{\eta_{pl}}{G_{pl}} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{t-t_f}{\tau}} \right) \right], & \text{ha } t_f \leq t \leq \infty, \end{cases}$$

illetve a $t = \varepsilon / a$ és $t_f = \varepsilon_f / a$ behelyettesítéssel:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 2G \left[\varepsilon + a \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} \frac{\varepsilon}{a}} \right) \right], & \text{ha } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_f, \\ \sigma_f e^{-\frac{1}{\tau} \frac{\varepsilon - \varepsilon_f}{a}} + 2G_{pl} \left[(\varepsilon - \varepsilon_f) + a \left(\frac{\eta_{pl}}{G_{pl}} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} \frac{\varepsilon - \varepsilon_f}{a}} \right) \right], & \text{ha } \varepsilon_f \leq \varepsilon \leq \infty. \end{cases}$$

A megoldásokból látszik, hogy rugalmas alakváltozás esetén a $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ görbe a $\sigma_A := (2\eta - 2G\tau)a + 2G\varepsilon$ egyenletű aszimptotához, míg képlékeny alakváltozás esetén a $\sigma_{Ak} := (2\eta_{pl} - 2G_{pl}\tau)a + 2G_{pl}\varepsilon$ egyenletű aszimptotához tart (ld. 22. ábra).



22. ábra. Az anyagtörvény a rugalmas és képlékeny tartományban különböző deformációsebességek esetén

ÁLLANDÓ FESZÜLTÉSGYORSULÁS [$\ddot{\sigma} = \text{const} s = a$].

Ekkor $\dot{\sigma} = at + \dot{\sigma}_0$ és $\sigma = \frac{1}{2}at^2 + \dot{\sigma}_0 t + \sigma_0$, ahol $\dot{\sigma}(0) := \dot{\sigma}_0$ $\sigma(0) := \sigma_0$, tehát

$$[\![\ddot{\sigma}_f]\!] = 0, \quad [\![\dot{\sigma}_f]\!] = 0, \quad [\![\sigma_f]\!] = 0,$$

s ekkor a (71) egyenletből

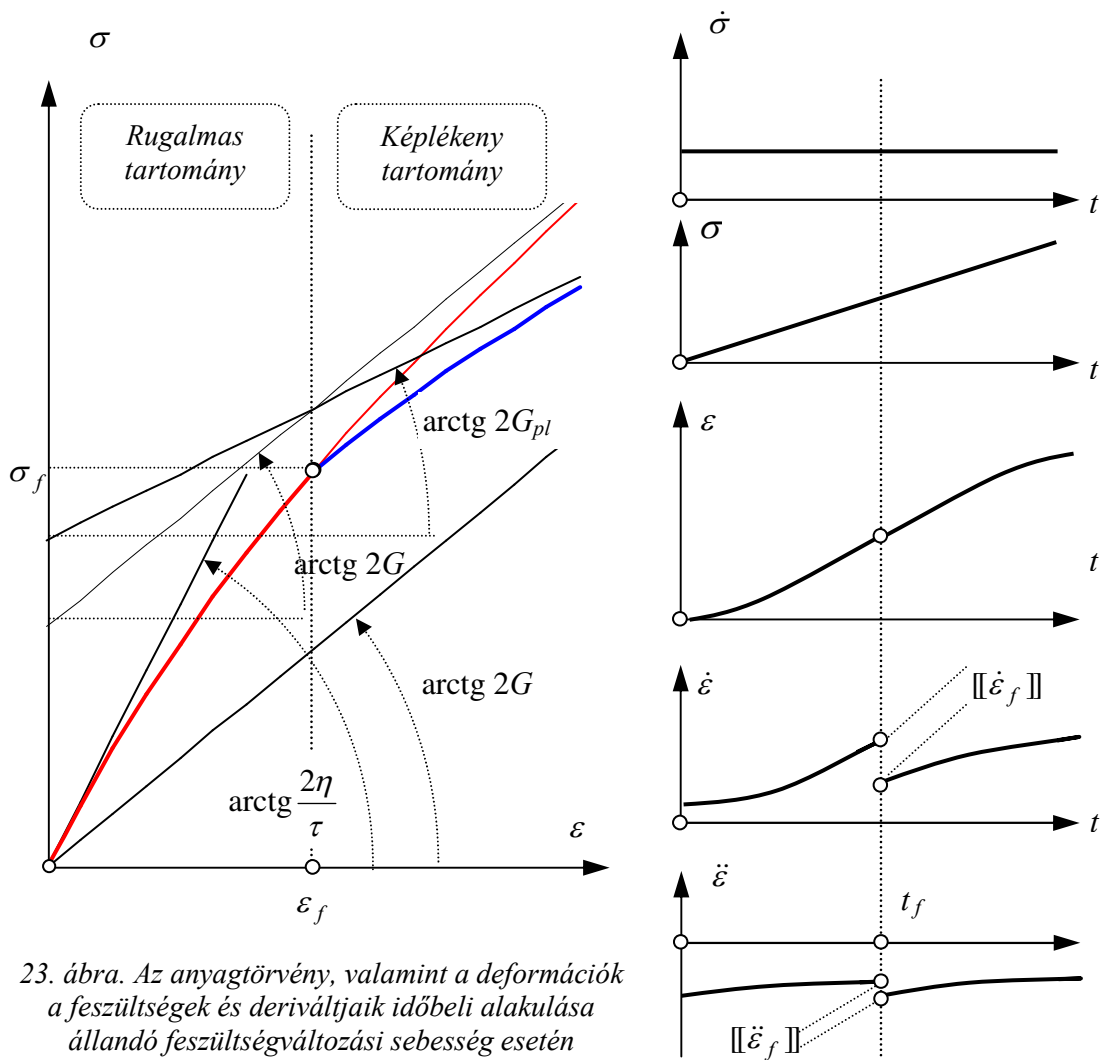
$$(71'') \quad [\![\varepsilon_f]\!] = -\frac{1}{\theta} (2\eta \dot{\varepsilon}_f^- - 2\eta_{pl} \dot{\varepsilon}_f^+).$$

összefüggés adódik.

ÁLLANDÓ FESZÜLTÉGVÁLTOZÁSI SEBESSÉG [$\dot{\sigma} = \text{const} s = a$].

Ekkor $\ddot{\sigma} = 0$ és $\sigma = at + \sigma_0$, ahol $\dot{\sigma}(0) := \dot{\sigma}_0$ $\sigma(0) := \sigma_0$, tehát

$$[\![\ddot{\sigma}_f]\!] = 0, \quad [\![\dot{\sigma}_f]\!] = 0, \quad [\![\sigma_f]\!] = 0,$$



23. ábra. Az anyagtörvény, valamint a deformációk a feszültségek és deriváltjaik időbeli alakulása állandó feszültségváltozási sebesség esetén s ekkor ugyancsak

$$(71) \quad \llbracket \ddot{\varepsilon}_f \rrbracket = -\frac{1}{\theta} (2\eta \dot{\varepsilon}_f^- - 2\eta_{pl} \dot{\varepsilon}_f^+).$$

összefüggés adódik (23. ábra).

☆ ☆ ☆

A további megszokott speciális esetek: a relaxáció, a kúszás és a periodikus igénybevétel.

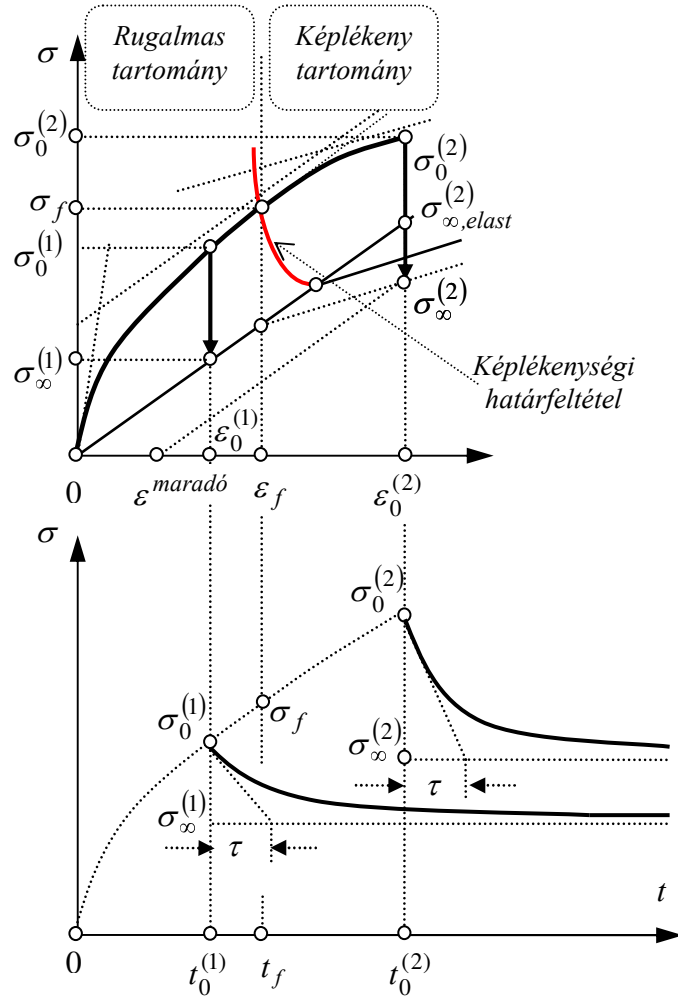
Az állandó amplitúdójú periodikus terhelés esetével nem kell foglalkoznunk, mert ha az első periódusban átléptük a folyáshatárt, akkor a folyáshatár tovább került (eltolódott az eddigi legmagasabb W' értékhez), s a következő periódusokban már csak rugalmas alakváltozások zajlanak.⁵

⁵ Természetesen lehetne növekvő amplitúdójú gerjesztést adni az anyagra, de ez a feladat bonyolultsága miatt sem szolgáltat újabb hasznos információkat.

Marad még a rögzített deformáció melletti relaxáció, és a rögzített feszültség melletti kúszás jelensége.

ÁLLANDÓ DEFORMÁCIÓ (RELAXÁCIÓ). A relaxáció a képlékenységi határ körüli viselkedésre nem szolgáltat információt. Ugyanis ha a rögzített deformáció a rugalmas tartományban van [ld. 24. ábra (1) eset], akkor az ott is marad, csupán a feszültség csökken (ernyed). A relaxáció a rugalmas egyensúlyi értékhez tart ($\sigma_{\infty}^{(1)}$).

Ha a felterheléssel már átléptük a képlékenységi határt, akkor a rögzített deformáció már a képlékeny tartományban esik [ld. 24. ábra (2) eset], s a relaxáció akkor is rugalmas tehermentesítést ír le, viszont már megjelennek a maradó deformációk is [ld. $\varepsilon^{maradó}$]. A relaxáció ekkor már nem a rugalmas egyensúlyi értékhez tart ($\sigma_{\infty,elast}^{(2)}$), hanem a $\sigma_{\infty}^{(2)}$ képlékeny értékhez.



24. ábra

ÁLLANDÓ FESZÜLTSG (KÚSZÁS). Ha valamilyen pálya mentén eljutunk a $t_0, \sigma_0, \varepsilon_0$ értékig, s ott a feszültséget stabilizáljuk: $\sigma = const \text{ s } \sigma_0$ [$\varepsilon \geq \varepsilon_0$, illetve $t \geq t_0$], akkor a deformációk tovább növekednek (kúsznak), s ha közben átlépik az $\varepsilon = \varepsilon_f$ képlékenységi határt a t_f időpontban, akkor az anyag attól kezdve képlékeny állapotba kerül. A feltételek:

$$\sigma = \sigma_0, \llbracket \ddot{\sigma}_f \rrbracket = 0, \llbracket \dot{\sigma}_f \rrbracket = 0, \llbracket \sigma_f \rrbracket = 0,$$

s ekkor szintén

$$(71) \quad \llbracket \ddot{\varepsilon}_f \rrbracket = -\frac{1}{\theta} (2\eta \dot{\varepsilon}_f^- - 2\eta_{pl} \dot{\varepsilon}_f^+)$$

összefüggés adódik. A (70) egyenletbe behelyettesítve:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} = \frac{0}{\dot{\varepsilon}} = 0,$$

azt a triviális eredményt kapjuk, hogy amikor kúszás közben átlépjük a képlékenységi határt, a $\sigma(\varepsilon)$ függvényben sehol nincs ugrás (hiszen az egy $\sigma = \sigma_0$ állandó egyenes).

A deformáció

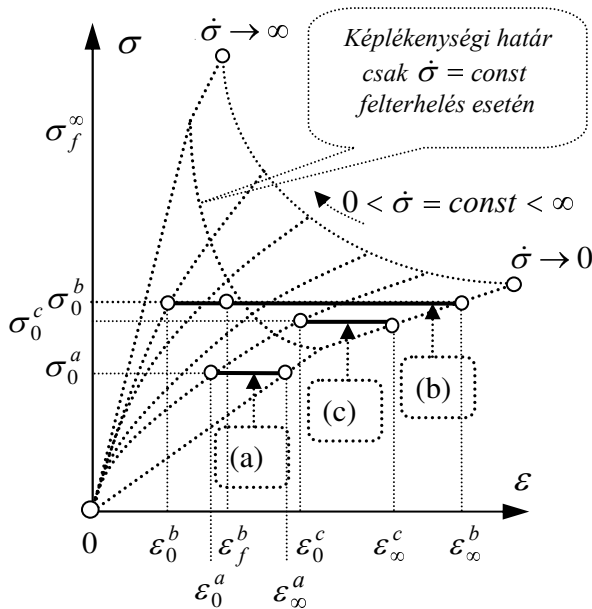
$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_{\infty}^{elast} + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}^{elast}) e^{-\frac{G}{\eta} t}, & \text{ha } 0 \leq t \leq t_f, \\ \varepsilon_{\infty}^{plast} + (\varepsilon_f - \varepsilon_{\infty}^{plast}) e^{-\frac{G_{pl}}{\eta_{pl}} (t-t_f)}, & \text{ha } t_f \leq t < \infty, \end{cases}$$

ahol

$$\varepsilon_{\infty}^{elast} := \frac{1}{2G} \sigma_0, \quad \varepsilon_{\infty}^{plast} := \frac{1}{2G_{pl}} [\sigma_0 - (2G - 2G_{pl}) \varepsilon_f],$$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{\infty}^{elast} + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}^{elast}) e^{-\frac{G}{\eta} t_f}, \quad \eta_{pl} = \eta - (2G - 2G_{pl}) \tau.$$

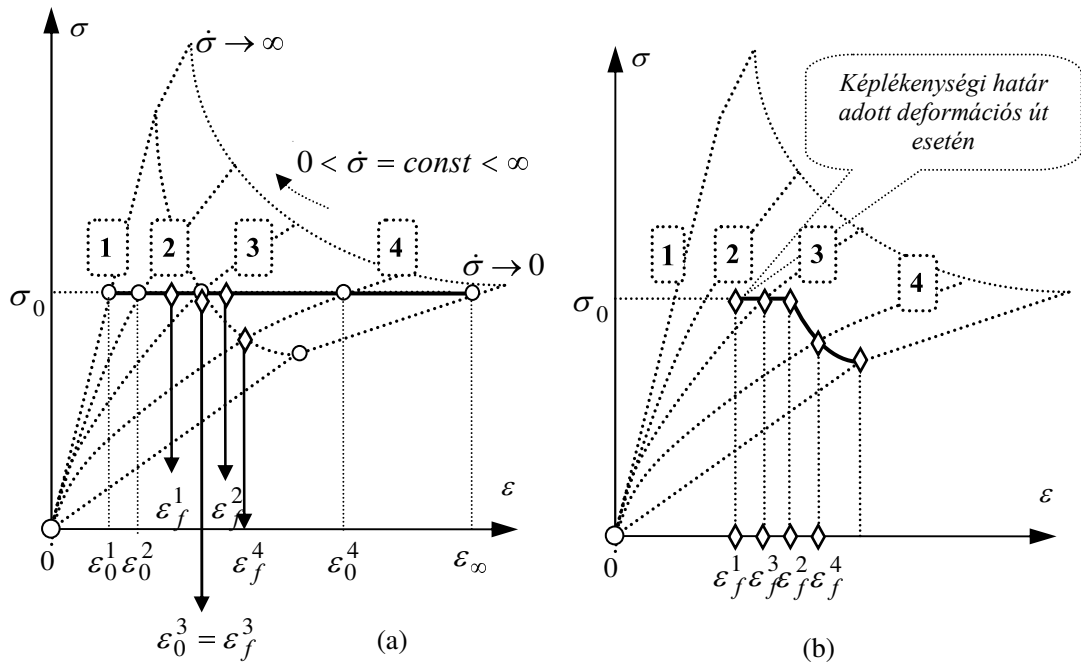
Az elemzéshez induljunk ki abból, hogy a t_0 időpontig valamilyen módon eljutottunk a $\sigma(t_0) = \sigma_0$, $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$ összetartozó értékekhez. (Mivel az útvonal indifferens, a 25. ábrán az egyenletes sebességű felterhelést ábrázoltuk.) A terhelést $\sigma = \text{const}$ σ_0 értéken rögzítve, a deformáció tovább folytatódik, az anyag kúszni kezd az ε_0 értékről az ε_{∞} értékre, ahol $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \varepsilon_{\infty}$. Ekkor a 25. ábrán látható három eset lehetséges:



25. ábra. A kúszás különböző esetei

- (a) a $\sigma(t_0) = \sigma_0$, $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$ értékek a rugalmas tartományban vannak, és a $t_0 < t < \infty$ időintervallumban a $\sigma_0, \varepsilon_{\infty}$ értékeknél sem léptük át a képlékenységi határt;
- (b) a σ_0, ε_0 értékek a rugalmas tartományban vannak, de a $\sigma_0, \varepsilon_{\infty}$ már a képlékeny tartományba esnek, s a $t = t_f > t_0$ időpontban elérkezünk a σ_0, ε_f értékekkel jelzett képlékenységi határhoz, ahol megjelennek a maradó deformációk is, s a kúszás $t_f \leq t < \infty$ tovább folytatódik;

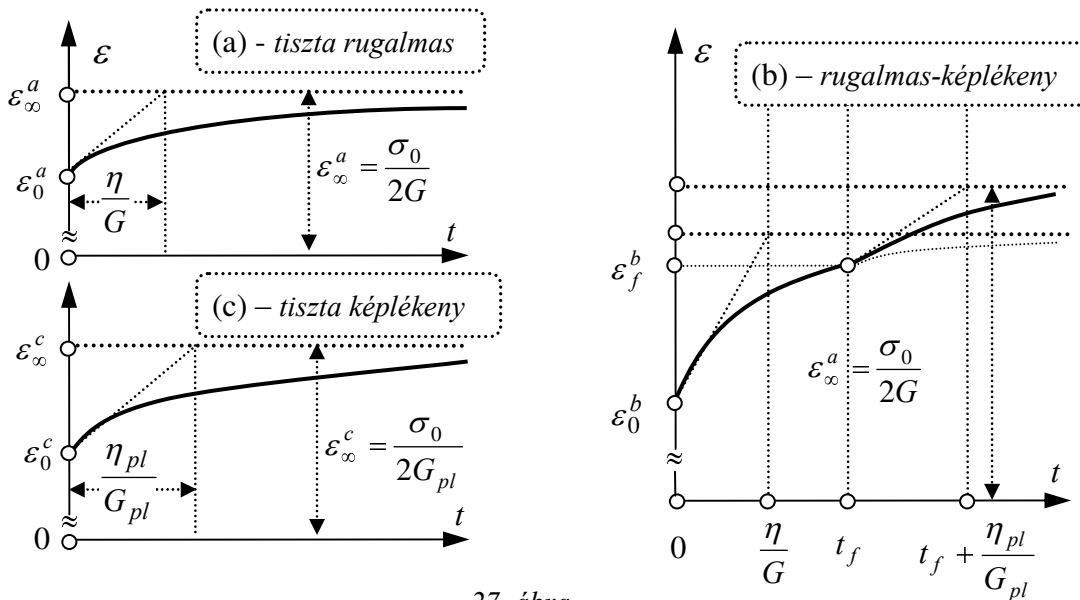
(c) a σ_0, ε_0 értékek már a képlékeny tartományban vannak [$\sigma_0 > \sigma_f$, $\varepsilon_0 > \varepsilon_f$], így a deformációk $\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_\infty$ további kúszása teljes egészében a képlékeny tartományban zajlik.



26. ábra. (a) Egyenletes sebességű felterhelés, majd σ_0 értéken való tartás (kúszás), (b) az ehhez a szituációhoz tartozó képlékenységi határ

Példaképpen a 26. ábra azt mutatja be, hogy a 25. ábrán bejelölt – $\dot{\sigma} = const$ esethez tartozó – folyáshatár ekkor természetesen már nem érvényes.

A 25. ábrán látható (a) esetet – a rugalmas kúszást – a 2.3. pontban részletesen tárgyaltuk (ld. 15. ábra).



27. ábra

3. AZ ANYAGTÖRVÉNY EGYSÉGES KEZELÉSE

Az eddigiek során mindig az anyagtörvény torzulási egyenletével és annak tulajdonságaival foglalkoztunk, mondván, hogy alakja a térfogatváltozási egyenlettel teljesen azonos, csupán az állandók másak benne:

$$\begin{array}{ll}
 \text{torzulási egyenlet anyagállandói:} & \begin{array}{l} \text{rugalmas} \\ \text{alakváltozások tartományán} \end{array} G, \eta, \tau, \theta, \\
 \text{térfogatváltozási egyenlet anyagállandói:} & K, K_v, \tau_o, \theta_o, \quad = \quad \begin{array}{l} \text{képlékeny} \\ \text{alakváltozások tartományán} \end{array} G_{pl}, \eta_{pl}, \tau, \theta,
 \end{array}$$

A levezetett összefüggések a torzulási állapotra vonatkoztak, mondván, hogy ugyanezek érvényesek értelemszerűen a térfogati állapotra. Az anyag viselkedését azonban a torzulási és térfogatváltozási egyenlet együtt határozza meg. Nagyon lényeges a két különböző anyagállandók egymáshoz viszonyított nagysága.

AZ IDŐTÉNYEZŐK. Láttuk, hogy az anyag időfüggését kifejező mennyiségek (az ún. időtényezők), maguk is anyagállandók, mert az anyagállandókkal fejezhetők ki.

Az időtényezők			
	<i>a rugalmas</i>	<i>a képlékeny</i>	
	<i>alakváltozások tartományán</i>		
<i>Torzulási (deviatorikus) deformációk</i>			
- késési ideje	$t_{def}^{elast} := \eta / G \, ,$	$t_{def}^{plast} := \eta_{pl} / G_{pl} \, ,$	$t_{def}^{elast} < t_{def}^{plast} \, ,$
- relaxációs ideje	$t_{rel}^{elast} := \tau =: t_{rel}^{plast} \, ,$		
- időeltolódása ($\Delta t = t_{def} - t_{rel}$) ⁶	$\Delta t^{elast} := \eta / G - \tau$	$\Delta t^{plast} := \eta_{pl} / G_{pl} - \tau \, ,$	$\Delta t^{elast} < \Delta t^{plast}$
- tehetetlenségi ideje	$t_{teh}^{elast} := \theta / 2G \tau \, ,$	$t_{teh}^{plast} := \theta / 2G_{pl} \tau \, ,$	$t_{teh}^{elast} = t_{teh}^{plast} \, ,$
<i>Térfogatváltozási (gömbi) deformációk</i>			
- késési ideje	$t_{o,def}^{elast} := K / K_v =: t_{o,def}^{plast} \, ,$		röviden: t_{def}^o
- relaxációs ideje	$t_{o,rel}^{elast} := \tau_o =: t_{o,rel}^{plast} \, ,$		röviden: t_{rel}^o
- időeltolódása	$\Delta t_o^{elast} := K / K_v - \tau_o =: \Delta t_o^{plast} \, ,$		röviden: Δt^o
- tehetetlenségi ideje	$t_{o,teh}^{elast} := \theta_o / 3K \tau_o =: t_{o,teh}^{plast} \, .$		röviden: t_o^o

⁶ Ha a Δt értéke zérus, akkor a deformáció pont annyit késik, mint amennyit a feszültség ernyed, s a közeg időfüggetlennek látszik a külső megfigyelő szemében (ekkor a tehetetlenségi standard test HOOKE-testként viselkedik – legalábbis bizonyos gyakori kezdeti feltételek és folyamatok esetén).

Azt azonban nem tudjuk, hogy a torzulási

$$t_{def}^{plast} > t_{def}^{elast}, \quad t_{rel}^{elast} = t_{rel}^{plast}, \quad \Delta t^{plast} > \Delta t^{elast}, \quad t_{teh}^{plast} > t_{teh}^{elast},$$

időtényezők, milyen relációban vannak a térfogatváltozás időtényezőivel:

$$t_{def}^{elast} < t_{def}^{plast} \stackrel{>}{<} t_{def}^o, \quad t_{rel}^{elast} = t_{rel}^{plast} \stackrel{>}{<} t_{rel}^o, \quad \Delta t^{elast} < \Delta t^{plast} \stackrel{>}{<} \Delta t^o, \quad t_{teh}^{elast} < t_{teh}^{plast} \stackrel{>}{<} t_{teh}^o$$

Ez az anyagállandók konkrét értékétől függ. Azt tudjuk, hogy a termodinamikai feltétel:

$$\frac{\eta}{G} - \tau > 0, \quad \frac{\eta_{pl}}{G_{pl}} - \tau > 0, \quad \frac{K_v}{K} - \tau_o > 0,$$

azonban a tehetetlenségi állandókra θ -ra és θ_o -ra vonatkozóan nincs semmiféle korlátunk, csupán annyit tudunk, hogy ha értéke a

$$\theta_{krit} = 2\eta\tau - 2G\tau^2, \quad \theta_o^{krit} = 3K_v\tau_o - 2G\tau_o^2$$

kritikus értéknél kisebb, akkor „túlcsillapított”, ha nagyobb, akkor „alulcsillapított” viselkedést mutat az anyag. Azt viszont nem, hogy milyen anyagállandó-arányoknál „siet” vagy „késik” a torzulási deformáció a térfogatához képest, a torzulási relaxáció a térfogatához képest, stb. Természetesen tudunk általánosságokat mondani, hogy például ha η/G nagyobb, mint K_v/K , akkor a torzulási deformációk lassabban játszódnak le mint a térfogatiak, de ha például a τ_o a nagyobb a τ -hoz képest, akkor ellenkezőleg, a térfogati relaxációk a gyorsabbak, és így tovább. Minden variáció lehetséges? Azért, hogy a kérdésre választ kapjunk, a következőkben egy egyszerű egytengelyű kísérletet értékelünk.

3.1. A HOSSZ- ÉS KERESZTIRÁNYÚ NYÚLÁSOK ARÁNYA EGYTENGELYŰ FESZÜLTÉGÁLLAPOTNÁL

A konvencionális kontinuummechanikában az egytengelyű állapotban mért $\varepsilon_{||} := \varepsilon$ tengelyirányú és a rá merőlegesen mért $\varepsilon_{\perp} := \varepsilon_k$ keresztirányú fajlagos nyúlások arányát nevezik m POISSON-számnak, illetve ν POISSON-tényezőnek:

$$(73) \quad m := -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_k}, \quad \nu := -\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} = \frac{1}{m},$$

és ezeket állandóknak tekintik, s anyagállandóknak nevezik.

Ezek a kifejezések azonban még közelítőleg sem állandók. A következőkben megvizsgáljuk ezt a kérdést.

EGYTENGELYŰ FESZÜLTÉGÁLLAPOTNÁL a feszültség- és a deformációtenzorok

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_k & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_k \end{Bmatrix},$$

ahol σ az adott irányú (pl. x irányú) feszültség, ε a hosszirányú, ε_k pedig a keresztirányú fajlagos megnyúlás.⁷ Ebben az esetben

$$\sigma_o = \frac{1}{3}\sigma, \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_k), \quad \sigma - \sigma_o = \frac{2}{3}\sigma, \quad \varepsilon - \varepsilon_o = \frac{2}{3}(\varepsilon - \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k - \varepsilon_o = \frac{1}{3}(\varepsilon_k - \varepsilon).$$

3.2. VIZSGÁLAT A RUGALMAS ALAKVÁLTOZÁSOK TARTOMÁNYÁBAN

A bevezetett jelöléseket felhasználva, a *tehetetlenségi standard test* tenzoregyenletei az alábbi két skalár egyenlettel:

$$(74) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) + 2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k) + \theta(\ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}_k),$$

$$(75) \quad \sigma + \tau_o \dot{\sigma} = 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k) + 3K_v(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k) + \theta_o(\ddot{\varepsilon} + 2\ddot{\varepsilon}_k)$$

egyenértékűek (jellemezhetők), az egyszerűség kedvéért először csak a rugalmas alakváltozások tartományára vonatkoztatva.

Ezeket az egyenleteket kell megoldani különböző feltételek mellett, hogy az $\varepsilon = \varepsilon(t)$ és $\varepsilon_k = \varepsilon_k(t)$ függvényeket meghatározzuk, és segítségükkel előállítsuk a (73) alatti kifejezéseket. Az egyenletek megoldásait az előző pontokban már előállítottuk, s a *Függelékben* a képleteket összefoglaltuk, így a következőkben csupán a végeredmény felírására és a diszkusszióra szorítkozunk.

Az egyszerűség kedvéért a terhelésvezérelt eseteket vesszük csak, mert azok megoldásai rögtön az ε értékeket szolgáltatják. Ezek közül hármat:

- az egyenletes terhelési sebesség esetét $[\dot{\sigma} = a = \text{const} \tan s],$
- az állandósult terhelés esetét $[\sigma = \sigma_0 = \text{const} \tan s],$
- az egyszerű periodikus terhelés esetét $[\sigma = \sigma_0 \sin \omega t]$

megvizsgáltunk, s mindegyik esetben ugyanazon következtetéseket vonhattuk le. Ezért csak az első esetet közöljük.

A megértést nagymértékben elősegíti, ha az egyszerűbb esettől haladunk a bonyolult felé, ezért először a standard modellt vizsgáljuk, s csak utána a tehetetlenségi standard testet. Ugyanis láttuk, hogy a tehetetlenségi állandó, mint egy kakukktojás, úgy viselkedik a többi anyagállandóhoz képest, ugyanis rá nem adódott termodinamikai korlátozás.

⁷ Ne felejtjük el, hogy ezek a jelölések nem egyeznek meg az eddig alkalmazott jelölésekkel, mert ott a σ és az ε a deviátortenzorok komponenseinek feleltek meg (az ij indexek elhagyásával).

A POYNTING-THOMSON-FÉLE STANDARD TEST. Ebben az esetben a (2) és (3) anyag-egyenletek:

$$(76) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) + 2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k),$$

$$(77) \quad \sigma + \tau_o \dot{\sigma} = 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k) + 3K_v(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k).$$

AZ EGYENLETES TERHELÉSI SEBESSÉG ESETE. Ekkor a $\dot{\sigma} = a = \text{const}$ egyenletes feszültségváltozási sebesség esetén [SZARKA (2006)]:

$$(78) \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \left(\frac{a}{G} \left[t - \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right] + \frac{a}{3K} \left[t - \left(\frac{K_v}{K} - \tau_o \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right] \right),$$

$$(79) \quad \varepsilon_k = \frac{1}{3} \left(-\frac{a}{2G} \left[t - \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right] + \frac{a}{3K} \left[t - \left(\frac{K_v}{K} - \tau_o \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right] \right),$$

s a kettő hányadosa a POISSON-szám

$$(80) \quad m = m(t) = \frac{\frac{1}{G} \left[t - \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right] + \frac{1}{3K} \left[t - \left(\frac{K_v}{K} - \tau_o \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right]}{\frac{1}{2G} \left[t - \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right] - \frac{1}{3K} \left[t - \left(\frac{K_v}{K} - \tau_o \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right]},$$

amelynek kezdeti és végső értéke:

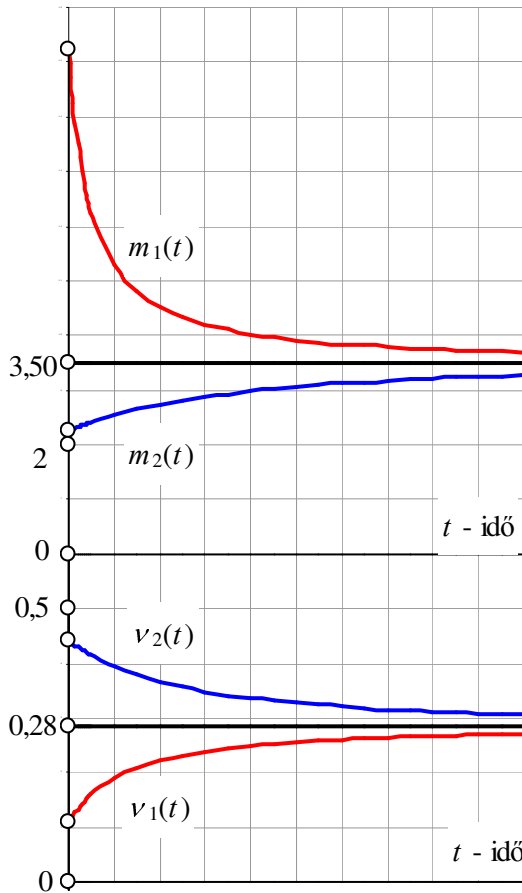
$$m_0 := \lim_{t \rightarrow 0} m(t) = \frac{6K_v\tau + 2\eta\tau_o}{3K_v\tau - 2\eta\tau_o},$$

$$m_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \frac{6K + 2G}{3K - 2G}.$$

A 28. ábra az m POISSON-szám (ill. reciproka, a ν POISSON-tényező) feltételezett $m_\infty = 3,5$ (ill. $\nu_\infty = 0,2857$) aszimptotikus értéknél mutatja az $m = m(t)$ (ill. $\nu = \nu(t)$) egyenletű görbék lehetséges lefutását két egyszerű esetben.

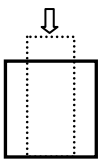
A (80) képletből látható, hogy egyenletes felterhelés, valamint $\varepsilon(0) = 0$, $\varepsilon_k(0) = 0$ kezdőfeltételek esetén a terhelési sebességnek semmiféle hatása nincs az $m(t)$ értékére nézve, az csupán az anyagállandók és a t függvénye.

Hogy egy adott anyag adott terhelése esetén az $m_0 \overset{>}{<} m_\infty$ variációk melyike áll fenn, az eldönthető a deformációk késési idejének és a relaxációs időnek az ismeretében is.



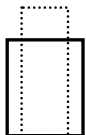
28. ábra

$$\text{ha } \frac{t'_{def}}{t'_{rel}} > \frac{t^o_{def}}{t^o_{rel}},$$



[akkor $m(t) > m_\infty$]

$$\text{ha } \frac{t'_{def}}{t'_{rel}} = \frac{t^o_{def}}{t^o_{rel}},$$



[akkor $m(t) = m_\infty$]

Fennállnak ugyanis az

$$m_0 > m_\infty \Rightarrow \frac{6K_v\tau + 2\eta\tau_o}{3K_v\tau - 2\eta\tau_o} > \frac{6K + 2G}{3K - 2G},$$

$$\Rightarrow \frac{\eta}{G\tau} > \frac{K_v}{K\tau_o} \Rightarrow \frac{t'_{def}}{t'_{rel}} > \frac{t^o_{def}}{t^o_{rel}}$$

relációk.

Mivel

$$t'_{def} - t'_{rel} > 0, \quad t^o_{def} - t^o_{rel} > 0, \text{ ezért}$$

$$\frac{t'_{def}}{t'_{rel}} > \frac{t^o_{def}}{t^o_{rel}} > 1, \quad \frac{\eta}{G\tau} > \frac{K_v}{K\tau_o} > 1.$$

A LEHETSÉGES ESETEK a következők:

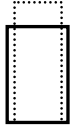
vagyis $m_0 > m_\infty$, s akkor a torzulási deformációk késési ideje a torzulási relaxációs időhöz viszonyítva nagyobb, mint a térfogati idők viszonyozsáma. (Ekkor a keresztirányú kitérés gyorsabban jelentkezik, mint a tengelyirányú rövidülés.)

vagyis $m_0 = m_\infty$, azaz $m = \text{constans}$, ekkor a tengelyirányú rövidülés és a keresztirányú nyúlás aránya állandó.

Ebben az esetben az általános standard modell helyett egy „speciális” standard modell jelentkezik, amelynél az anyagállandók száma 6-ról 5-re csökken, s egy állandó kifejezhető a többivel:

$$\tau_o = \tau \frac{G}{\eta} \frac{K_v}{K}, \quad K_v = K \frac{\eta}{G} \frac{\tau_o}{\tau}, \quad \dots \text{ stb.}$$

$$\text{ha } \frac{t'_{def}}{t'_{rel}} < \frac{t^o_{def}}{t^o_{rel}},$$



[akkor $m(t) < m_\infty$]

vagyis $m_0 < m_\infty$, s akkor a térfogati deformációk késve követik a torzulásit. (Ekkor pl. egytengelyű nyomásnál a keresztirányú kitérés késve jelentkezik a tengelyirányú rövidüléshez képest.)

Az anyagegyenletek „végtelen lassú” deformáció esetén köztudottan a HOOKE-törvényt adják, vagyis a „statikai” állapotot:

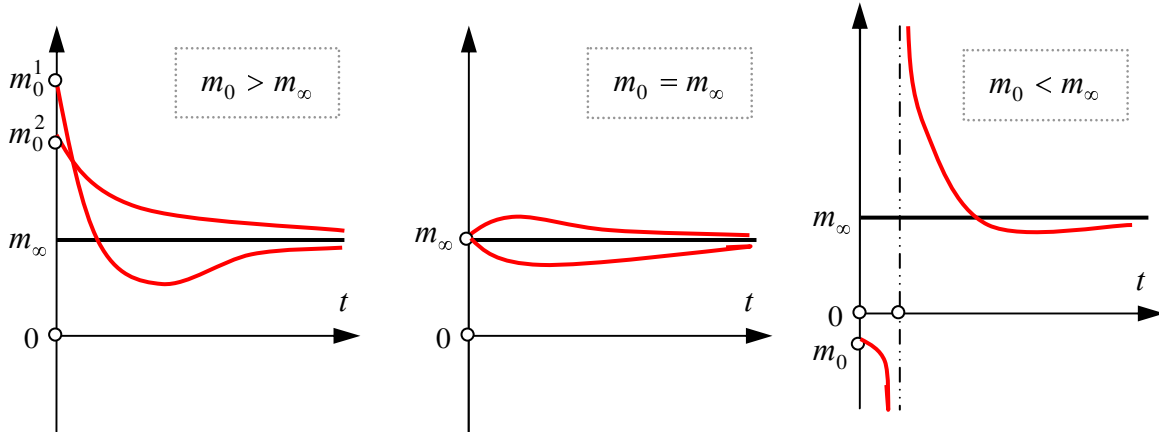
$$\sigma = 2G\varepsilon, \quad \sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad \text{s ekkor az } m \text{ állandó:} \quad m = \frac{6K + 2G}{3K - 2G},$$

„végtelen gyors” deformáció esetén pedig a dinamikai HOOKE-törvényt adják, vagyis a „dinamikai” állapotot:

$$\sigma = \frac{2\eta}{\tau}\varepsilon, \quad \sigma_0 = \frac{3K_v}{\tau_0}\varepsilon_0, \quad \text{s ekkor az } m \text{ szintén állandó:} \quad m = \frac{6K_v\tau + 2\eta\tau_0}{3K_v\tau - 2\eta\tau_0}.$$

A statikai és dinamikai POISSON-szám között 100...300 % is lehet az eltérés.

Az anyagállandók konkrét értékétől, de főképp ezek arányától függően az $m = m(t)$ görbe lefutása különféle lehet – mégpedig sokkal bonyolultabb is, mint a 28. ábrán feltüntetett két egyszerű lehetőség. A 29. ábrán néhány további lehetséges esetet mutatunk be, különböző feltételeknél.



29. ábra

A lehetőségek további analizálásába már nem bocsátkozunk, de megjegyezzük, hogy ebben például az $m(t)$ függvény $t = 0$ -kori deriváltja,

$$\dot{m}(0) = \frac{9[\tau\tau_0(GK_v - \eta K) + (\tau - \tau_0)\eta K_v]}{(3\tau K_v - 2\tau_0\eta)^2} = \frac{9\eta K_v \tau \tau_0}{(3\tau K_v - 2\tau_0\eta)^2} \left[\left(\frac{1}{t'_{def}} - \frac{1}{t^o_{def}} \right) - \left(\frac{1}{t'_{rel}} - \frac{1}{t^o_{rel}} \right) \right]$$

nyújthat nagy segítséget. Láthatóan a különböző időállandók egymáshoz való viszonyai alakítják ki $\dot{m}(0)$ előjelét is, és összességében az egyes kvalitatív különböző függvénymeneteket.

Az eddigi vizsgálataink a $\theta = 0$ esetre vonatkoztak. A tehetetlenségi standard test estén ezeknél összetettebb helyzet is kialakulhat.

A TEHETETLENSÉGI POYNTING-THOMSON-TEST. Ehhez bevezetve az $\varepsilon - \varepsilon_k = x$ és $\varepsilon + 2\varepsilon_k = y$ jelöléseket, továbbá feltételezve, hogy a felterhelés a $\sigma = at$ (ahol $a > 0$ állandó) összefüggés szerint történik, az anyagtörvényre a

$$(81) \quad \theta \ddot{x} + 2\eta \dot{x} + 2Gx = at + a\tau,$$

$$(82) \quad \theta_0 \ddot{y} + 3K_v \dot{y} + 3Ky = at + a\tau_0.$$

egyenleteket kapjuk. A (81) egyenlet $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ feltételek melletti megoldása

$$(83) \quad x = C_1 e^{\eta t} + C_2 e^{r_2 t} + At + B,$$

ahol

$$A = \frac{a}{2G}, \quad B = -\frac{a}{2G} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right), \quad C_1 = \frac{-Br_2 + A - \dot{x}_0}{r_2 - r_1}, \quad C_2 = \frac{Br_1 - A + \dot{x}_0}{r_2 - r_1},$$

r_1, r_2 pedig a $\theta r^2 + 2\eta r + 2G = 0$ karakterisztikus egyenlet két különböző valós gyöke.

Hasonlóképpen a (82) egyenlet $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ feltételeket kielégítő megoldása

$$(84) \quad x = C_1' e^{\eta' t} + C_2' e^{r_2' t} + A't + B',$$

ahol

$$A' = \frac{a}{3K}, \quad B' = -\frac{a}{3K} \left(\frac{K_v}{K} - \tau_0 \right), \quad C_1' = \frac{-B'r_2' + A' - \dot{y}_0}{r_2' - r_1'}, \quad C_2' = \frac{B'r_1' - A' + \dot{y}_0}{r_2' - r_1'},$$

r_1', r_2' pedig a $\theta_0 r'^2 + 3K_v r' + 3K = 0$ karakterisztikus egyenlet két különböző valós gyöke.

Megjegyezzük, hogy ha valamelyik karakterisztikus egyenlet gyökei egyenlők vagy komplex számok, akkor a megoldások formailag módosulnak.

Az $\varepsilon - \varepsilon_k = x$ és $\varepsilon + 2\varepsilon_k = y$ összefüggések alapján $\varepsilon = \frac{1}{3}(2x + y)$ és $\varepsilon_k = \frac{1}{3}(x + y)$. Ezeket felhasználva a POISSON-szám

$$(85) \quad m = m(t) = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_k} = -\frac{2x + y}{x - y},$$

amelynek a nulla helyen, ill. a végtelenben vett érték:

$$m_0 := \lim_{t \rightarrow 0} m(t) = -\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}_{k0}}, \quad \text{illetve} \quad m_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \frac{6K + 2G}{3K - 2G},$$

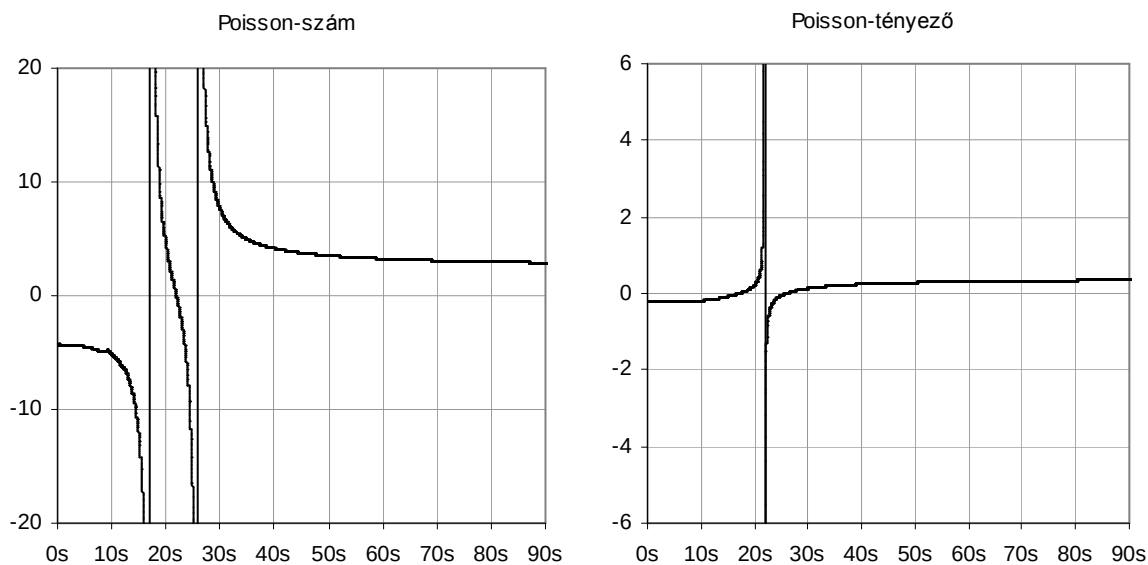
ahol $\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}(0)$, $\dot{\varepsilon}_{k0} = \dot{\varepsilon}_k(0)$.

A $\theta = 0$ esetre érvényes (80) képletben két (általában különböző) időállandójú exponenciális lecsengés van jelen mind a számlálóban, mind a nevezőben. $0 < \theta < \eta^2/2G$ esetén az ε -ra és ε_k -ra adódó megoldás következményeként a kettő helyett négy időállandójú exponenciális lecsengés szuperponálódik mind a számlálóban, mind a nevezőben. $\theta > \eta^2/2G$ esetén pedig két exponenciálisan lecsengő amplitúdójú (általában eltérő frekvenciájú) harmonikus oszcillálás jelentkezik. Megjegyzendő továbbá, hogy $\theta > 0$ esetén a megoldás az $\dot{\varepsilon}_0$ és $\dot{\varepsilon}_{k0}$ kezdeti értékektől is függ, mely kezdeti értékeket például a folyamat előéletének ismeretéből kell meghatároznunk.

☆ ☆ ☆

Egy kemény (araldit) műanyag próbakockán végzett konkrét nyomókísérlet eredményeit tüntettük fel a következő 30. és 31. ábrán. Az anyagválasztás oka, hogy ezáltal a próbatest teljesen homogénnek és izotropnak tekinthető, tehát az anyagból fakadó hibaforrás kiküszöbölhető volt.

A 30. ábrán egy – egyenletes deformációsebességű terhelés melletti – mindössze 90 másodperces időtartamú kísérlet adatait látjuk.⁸



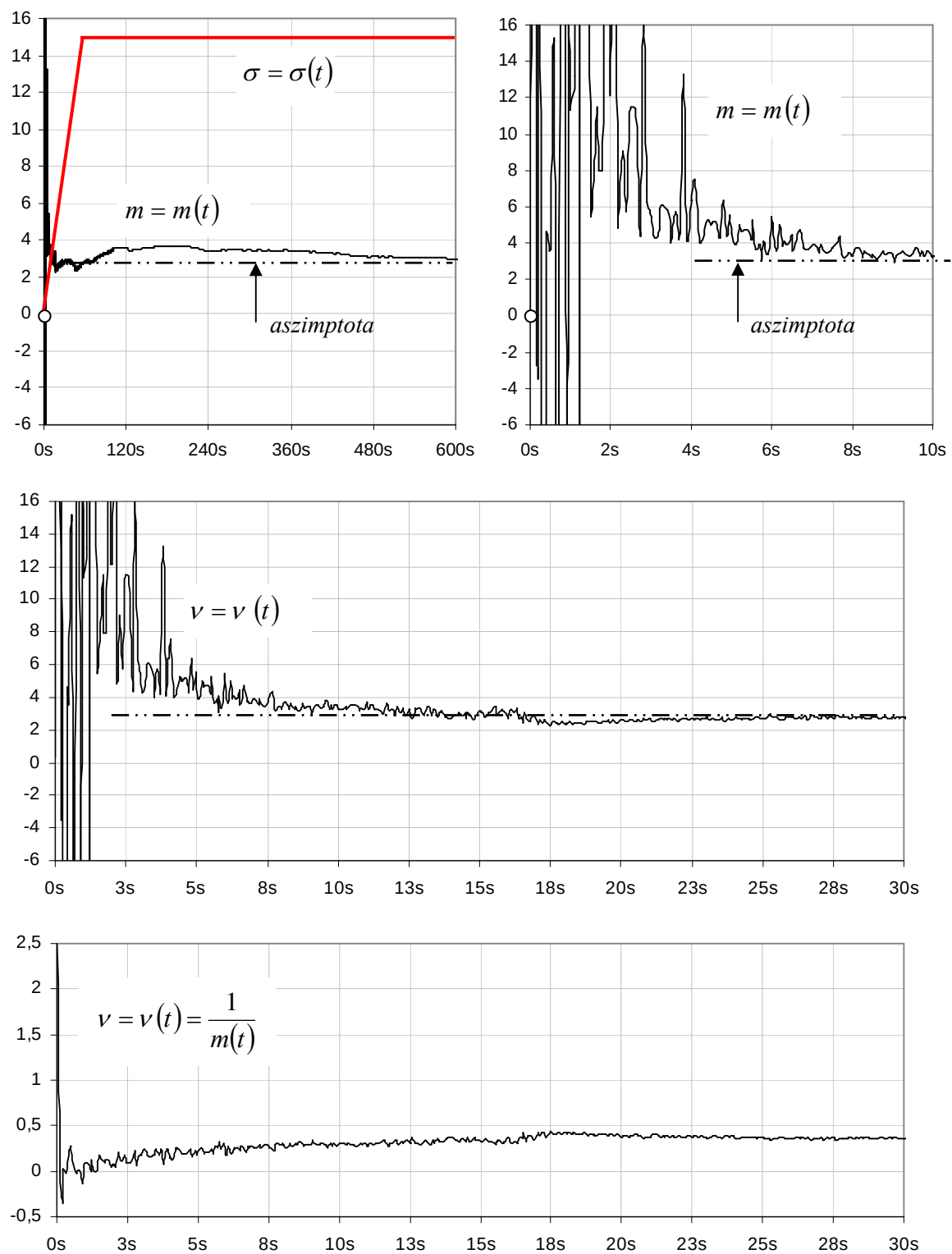
30. ábra

A 31. ábrán az egyenletes terhelés mellett, és az utána következő terheléstartás (kúszás) esetén bekövetkező változások is láthatók.⁹ A teljes mérési időtartam 3.600s

⁸ A kísérlet a gödöllői FVM MEZŐGAZDASÁGI GÉPKÍSÉRLETI INTÉZETBEN – 2006. januárjában – CSATÁR ATTILA által végzett méréssorozat része.

⁹ A kísérlet a DEBRECENI EGYETEM AMTC MK KÖRNYEZET- ÉS VEGYÉSZMÉRNÖKI TANSZÉK-én HORVÁTH RÓBERT és MANÓ SÁNDOR által – 2008. júliusában végzett – méréssorozat része.

volt, s ebből a felterhelés 60s. Az ábra jobb oldalán és az alsó részén az első 10s, illetve 30s időtartamra vonatkozó értékeket kinagyítottuk.



31. ábra

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. (1975): Kőzetkontinuumok reológiai elméletéről. Akadémiai doktori értekezés, Budapest. pp. 78.
- ASSZONYI, CS. – KAPOLYI L. (1981): A bányászat mechanikai rendszere II. kötet: Kőzetkontinuumok mechanikája. *MTA Veszprémi Akadémiai Bizottsága Monográfiái*, Veszprém (1981). pp. 1-421.
- BERTRAM, A.(2005): Elasticity and Plasticity of Large Deformations, *Springer*, Berlin-Heidelberg, 2005.
- BEZUHOV, N. I. (1958): Bevezetés a rugalmasságtanba és képlékenységtanba. *Tankönyvkiadó*, Budapest, p.228.
- BUDÓ, A. (1965): Mechanika. *Tankönyvkiadó*, Budapest. p.410.
- BOJTÁR, I. (1988): Mechanikai anyagmodellek. *Tankönyvkiadó*, Budapest. P.290.
- CSATÁR, A. (2008): Globális sugárzás és az időjárás hatása a többretegű mezőgazdasági csomagoló fóliák mechanikai jellemzőire, *Doktori értekezés*, Gödöllő, 2008.
- GYARMATI I. (1967): Nemegyensúlyi termodinamika, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, (1967).
- KALISZKY S. (1975): Képlékenységtan. Elmélet és mérnöki alkalmazások. *Akadémiai Kiadó*, Budapest, p.504.
- MÓZES, GY. – VÁMOS, E. (1968): Reológia és reometria. *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.
- MUSCHIK, W. (1993): Fundamentals of Nonequilibrium Thermodynamics. Non-Equilibrium Thermodynamics with Application to Solids. Springer-Verlag, Wien-New York. pp.1-63.
- PONOMARJOV, SZ. D. (1965): Szilárdsági számítások a gépészetben. 1. kötet: Elméleti alapok, vizsgálati módszerek. p. 400 - 4. kötet: Képlékeny alakváltozás, tartós folyás. *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, p.380.
- OBÁDOVICS, J.GY.- SZARKA, Z. (1999): Felsőbb matematika. SCOLAR Kiadó, Budapest. P.706.
- SZARKA, Z. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye 5. Anyagjellemzők laboratóriumi meghatározása. *Kőzetmechanika - Mérnökgeológia 2006. ISRM Konferencia*, MÉRNÖKGEO-LÓGIA-KÖZETMECHANIKA KISKÖNYVTÁR **3**, Budapest. Pp. 131-165.
- SZOKOLOVSKIJ, V.V. (1953): A képlékenységtan elmélete. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- SZTYEPANOV, V.V. (1952): A differenciálegyenletek tankönyve. *Tankönyvkiadó*, Budapest. P.410.
- TRUESDELL, C. - NOLL. W.: The non-linear field theories of mechanics, (Handbuch der Physik, III/3.) *Springer Verlag*, (1965).
- VERHÁS J. (1985) : Termodinamika és reológia, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest
- VÁN P.: Internal Thermodynamic Variables and the Failure of Microcracked materials, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, (2001), **26/2**}, 167-189 o.

- VÁN P. (2001): Internal thermodynamic variables and the failure of microcracked
- VÁN P.: Weakly Nonlocal Irreversible Thermodynamics, *Annalen der Physik Leipzig*, (2003), **12/3**, 142-169 o., (cond-mat/0112214)
- VÁN P. - VÁSÁRHELYI B.: Second Law of thermodynamics and the failure of rock materials, in *Rock Mechanics in the National Interest VI*, ed. D. Elsworth, J. P. Tinucci and K. A. Heasley, Balkema Publishers, Lisse-Abingdon-Exton(PA)-Tokyo, p767-773, (Proceedings of the 9th North American Rock Mechanics Symposium, Washington, USA, 2001), (2001).
- VÁN P. - ASSZONYI, CS. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye. 2. Az általános törvényszerűségek levezetése. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2006 ISRM Konferencia*. MÉRNÖKGEOLÓGIA-KŐZETMECHANIKA KISKÖNYVTÁR **3**, pp. 25-88.
- VÁN P. (2007): Objektív anyagfüggvények felé a reológiában. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007 ISRM Konferencia*. MÉRNÖKGEOLÓGIA-KŐZETMECHANIKA KISKÖNYVTÁR **4**.
- VÁN P. – SZARKA, Z. (2006): Rock Rheology – Time Dependence of Dilatation and Stress Around a Tunnel. EUROROCK 2006 – Multiphysics Coupling and Long Term Behavior in Rock Mechanics. *Proceedings of the International Symposium of the International Society for Rock Mechanics*. 9-12 May 2006. Liège, Belgium. pp. 357-363.

FÜGGELÉK 1:

ÁTTEKINTÉS AZ ELSŐRENDŰ ÉS MÁSODRENDŰ, LINEÁRIS, ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS DIFFERENCIÁLEGYENLETEKRŐL

1. AZ ELSŐRENDŰ, LINEÁRIS, ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS DIFFERENCIÁLEGYENLET

Általános alakja

$$(F.1) \quad a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t),$$

ahol az a_1, a_0 együtthatók valós számok, f adott folytonos függvény, y az ismeretlen függvény ($a_1 \neq 0$). Ha $f(t) \neq 0$, akkor az (F.1) egyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

Az $a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$(F.2) \quad y = Ce^{-\frac{a_0}{a_1}t} = y_h,$$

ahol C tetszőleges állandó.

Ha az (F.1) inhomogén egyenlet egy y_p partikuláris megoldása ismert, akkor azt hozzáadva a homogén egyenlet általános megoldásához, az inhomogén egyenlet általános megoldását kapjuk, azaz

$$(F.3) \quad y = y_h + y_p = Ce^{-\frac{a_0}{a_1}t} + y_p(t).$$

Az inhomogén egyenlet megoldása tehát gyakorlatilag egy partikuláris megoldásának megkeresésére korlátozódik. Ez lehetséges az *állandó variálásának módszerével*. Ennek az a lényege, hogy a homogén egyenlet általános megoldásában szereplő C

menyiséget t függvényének tekintjük, és az így keletkező $C(t)e^{-\frac{a_0}{a_1}t}$ függvényt az inhomogén egyenlet megoldásának tételezzük fel. Ezt behelyettesítve (F.1)–be, a $C(t)$ függvény meghatározható. Az eljárás elég hosszadalmas, de elvileg mindig célra vezet.

Partikuláris megoldást azonban kereshetünk az ún. *próbafüggvény-módszerrel* is. Ez akkor lehetséges, ha az $f(t)$ függvény speciális szerkezetű (l. a másodrendű differenciálegyenletnél). A módszer nagyon egyszerű, nem igényel integrálást.

Az elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása végtelen sok megoldást tartalmaz, hiszen például az (F.3) megoldásban a C állandó tetszőleges lehet. Egy konkrét feladathoz tartozó egyetlen megoldást a végtelen sok megoldásból úgy választhatunk ki, hogy egy adott $t = t_0$ értékhez megadjuk az $y = y(t_0)$ helyettesítési értéket. Az $y(0) = y_0$ feltételt kezdeti feltételnek nevezzük. Ilyen feltétel megadásával az általános megoldásban szereplő C állandó meghatározható. Az (F.1) differenciálegyenlet $y(0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása képletszerűen is felírható az alábbi módon:

$$y = y_0 e^{-\frac{a_0}{a_1}t} + \frac{1}{a_1} \int_0^t e^{-\frac{a_0}{a_1}(t-t')} f(t') dt'.$$

2. A MÁSODRENDŰ, LINEÁRIS, ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS DIFFERENCIÁLEGYENLET

Általános alakja

$$(F.4) \quad a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t),$$

ahol az a_2 , a_1 és a_0 együtthatók valós számok (állandók), f adott folytonos függvény, y az ismeretlen függvény ($a_2 \neq 0$). Célszerű lehet az (1) egyenletet $L[y] = f(t)$ alakban felírni. Ha $f(t) \equiv 0$, akkor az (1) egyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

HOMOGEN EGYENLETEK

Az $a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$ homogén differenciálegyenlet mindig megoldható. Ha ismert az egyenlet két lineárisan független megoldása, legyenek ezek y_1 és y_2 , akkor az egyenlet *általános megoldása*

$$(F.5) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

ahol C_1 és C_2 tetszőleges állandók. Ez a megoldás kvadrátúra (integrálás) nélkül meghatározható. Feltételezhető ugyanis, hogy az egyenletnek van $y = e^{rt}$ alakú megoldása, r egyelőre ismeretlen állandó. Ezt behelyettesítve az $a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$ egyenletbe, az

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk. Legyen ennek a két gyöke r_1 és r_2 . Ha $r_1 \neq r_2$, akkor a két lineárisan független megoldás $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = e^{r_2 t}$. Az általános megoldás tehát

$$(F.6) \quad y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Az y_1 és y_2 két lineárisan független megoldás együtt a differenciálegyenlet *alaprendszer*e.

A gyököktől függően három esetet különböztetünk meg.

1. ESET. A gyökök különböző valós számok. Ekkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

2. ESET. A két gyök megegyezik, azaz $r_1 = r_2 = r$. Ekkor két lineárisan független megoldás $y_1 = e^{r t}$, $y_2 = t e^{r t}$, így az általános megoldás

$$(F.7) \quad y = C_1 e^{r t} + C_2 t e^{r t} = e^{r t} (C_1 + C_2 t).$$

3. ESET. A gyökök komplex számok. Ismert tétel, hogy ekkor a karakterisztikus egyenlet két gyöke egymásnak konjugáltja, azaz $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ alakú. Ebben az esetben is létezik a differenciálegyenletnek valós megoldása. Igazolható ugyanis, hogy az $y_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t$ és $y_2 = e^{\alpha t} \sin \beta t$ lineárisan független megoldások, s így az általános megoldás

$$(F.8) \quad y = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

Végeredményben fogalmazhatunk úgy, hogy a homogén differenciálegyenlet általános megoldása az alaprendszert alkotó két függvény (y_1 és y_2) lineáris kombinációja.

INHOMOGÉN EGYENLETEK

Az inhomogén differenciálegyenlet általános alakja

$$(F.9) \quad a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t), \text{ és } f(t) \neq 0, \quad a_2 \neq 0.$$

Ennek az egyenletnek a megoldásához előbb meg kell oldani az $a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$ homogén egyenletet. Legyen ennek az általános megoldása y_h . Könnyen belátható, hogy ha y_p az (F.9) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, akkor az (F.9) általános megoldása

$$(F.10) \quad y = y_h + y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p.$$

Itt tehát egy partikuláris megoldás keresésére kell fordítani figyelmünket. Ez lehetséges az ún. *állandók variálásának* módszerével. Ennek az a lényege, hogy az $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ megoldásban (a homogén egyenlet megoldásában) szereplő C_1 és C_2 mennyiségeket nem állandónak, hanem t függvényének tekintjük, és az így keletkező $C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2$ függvényt az (F.9) egyenlet megoldásának tételezzük fel. Ez alapján, elég hosszadalmas eljárással, a C_1 és C_2 függvények meghatározhatók. A módszer előnye az, hogy általánosan érvényes megoldóképletre vezet. Sokkal egyszerűbb az ún. *próbafüggvény módszer*. Ennek az alkalmazása korlátozott ugyan, de a mi feladatainkban szinte mindig használható. Alkalmazása nem igényel kvadratúrát, gyakorlatilag (a differenciálást leszámítva) egyszerű algebrai úton célra vezet. A módszer akkor alkalmazható, ha az (F.9) egyenlet jobb oldalán álló f függvény $P_m(t)e^{st}$ alakú, ahol $P_m(t)$ m -edfokú polinom, s pedig tetszőleges valós vagy komplex szám. A továbbiakban tehát az

$$(F.11) \quad a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} - a_0 y = P_m(t)e^{st}$$

differenciálegyenlettel foglalkozunk. Itt két esetet különböztetünk meg.

1. ESET. s nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek. Ebben az esetben az (F.11) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p = Q_m(t)e^{st}$$

alakban keressük, ahol $Q_m(t)$ m -edfokú polinom. Ez a próbafüggvény. Ha például $f(t) = (3t^2 - 1)e^{-2t}$, akkor $y_p = (At^2 + Bt + C)e^{-2t}$, és a -2 nem gyöke az

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

karakterisztikus egyenletnek. Az y_p próbafüggvényt behelyettesítve az (F.11) egyenletbe, azonosságot kapunk. Ebből az azonosságból az A, B, C együtthatók egyszerűen határozhatók meg. Ezek ismeretében az y_p függvény felírható, és így az (F.10) alapján az (F.11) inhomogén egyenlet megoldása is.

2. ESET. s gyöke a karakterisztikus egyenletnek. Ha ez a gyök egyszeres, akkor a próbafüggvény $y_p = tQ_m(t)e^{st}$, ha kétszeres, akkor $y_p = t^2 Q_m(t)e^{st}$. Egyébként az y_p együtthatóit ugyanúgy határozzuk meg mint az előbbi esetben.

Nyomatékosan felhívjuk a figyelmet arra, hogy s komplex szám is lehet, pl. ha az (F.11) egyenlet jobb oldalán st helyett a kitevőben $(\alpha + i\beta)t$ áll. Ekkor a jobb oldal felírható $f(t) = P_m(t)e^{st}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$ alakban. Ha pedig $\alpha = 0$, akkor $f(t) = P_m(t)$,

ill. $f(t) = P_m(t)(\cos \beta t + i \sin \beta t)$. A jobb oldalon a komplex tényező nem jelent komolyabb nehézséget.

Gyakori eset, hogy a jobb oldal $P_m(t) \cos \omega t$, vagy $P_m(t) \sin \omega t$ alakú. Ekkor $s = i\omega$. Ha $i\omega$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor a próbafüggvényt célszerű

$$y_p = Q_m^{(1)} \cos \omega t + Q_m^{(2)} \sin \omega t$$

alakban felvenni. Például ha $f(t) = (t^2 + 2t) \sin \omega t$, akkor

$$y_p = (A^{(1)}t^2 + B^{(1)}t + C^{(1)}) \cos \omega t + (A^{(2)}t^2 + B^{(2)}t + C^{(2)}) \sin \omega t.$$

Végeredményben a próbafüggvényt – kissé pontatlanul ugyan – a következő ökölszabálynak megfelelően választhatjuk meg: a próbafüggvényt olyan alakban vesszük fel, amilyen alakú az $f(t)$ zavaró tag.

Lényeges lehet még az az eset, amikor az (F.11) egyenlet jobb oldala két függvény összege, azaz

$$L[y] = f_1(t) + f_2(t).$$

Ha az $L[y] = f_1(t)$ egyenlet partikuláris megoldása y_{p1} , és az $L[y] = f_2(t)$ egyenleté y_{p2} , akkor az $L[y] = f_1(t) + f_2(t)$ egyenlet partikuláris megoldása $y_{p1} + y_{p2}$.

A másodrendű differenciálegyenlet – adott feladathoz illeszthető – partikuláris megoldásának kiválasztásához két feltételt kell megadni. Ugyanis az általános megoldásban két állandó (C_1 és C_2) szerepel, és ezeket kell meghatározni. Gyakran egy adott t_0 értékhez tartozó $y(t_0)$ és $\dot{y}(t_0)$ értéket adjuk meg. Az $y(0) = y_0$ és az $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ feltételeket kezdeti feltételeknek nevezzük.

A HARMONIKUS REZGÉSEK DIFFERENCIÁLEGYENLETE

Az alkalmazásokban jelentős szerepe van a szabad harmonikus rezgés

$$(F.12) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 \text{ állandó}$$

alakú differenciálegyenletének. Általános megoldása

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t,$$

amely felírható

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \text{ vagy } x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

alakban is, ahol A és φ tetszőleges állandók. Innen látható, hogy ez egy olyan *csillapítatlan rezgést* ír le, melynek amplitúdója A , körfrekvenciája ω , a kezdőfázis (fáziseltolás) pedig φ . Megjegyezzük, hogy a rezgésidő, azaz egy periódus ideje $T := \frac{2\pi}{\omega}$, az időegység alatti rezgések száma $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Ezt szokás rezgésszámnak vagy frekvenciának nevezni.

Ha a rezgő mozgásnál a gyakorlatilag mindig fellépő csillapítást is figyelembe vesszük, egy sebességgel arányos tag formájában, akkor a mozgás differenciálegyenlete

$$(F.13) \quad \ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \kappa > 0, \quad \omega_0 > 0.$$

Feltételezve azt, hogy $\omega_0 > \kappa$, akkor az $r^2 + 2\kappa r + \omega_0^2 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei

$$r_1 = -\kappa + i\omega, \quad r_2 = -\kappa - i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2},$$

így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x = e^{-\kappa t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}.$$

Ez a megoldás is felírható

$$x = x(t) = A e^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi), \quad \text{vagy} \quad x = x(t) = A e^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi)$$

alakban, ahol A és φ tetszőleges állandók. Mint látható, exponenciálisan *csillapított rezgésről* van szó.

Az

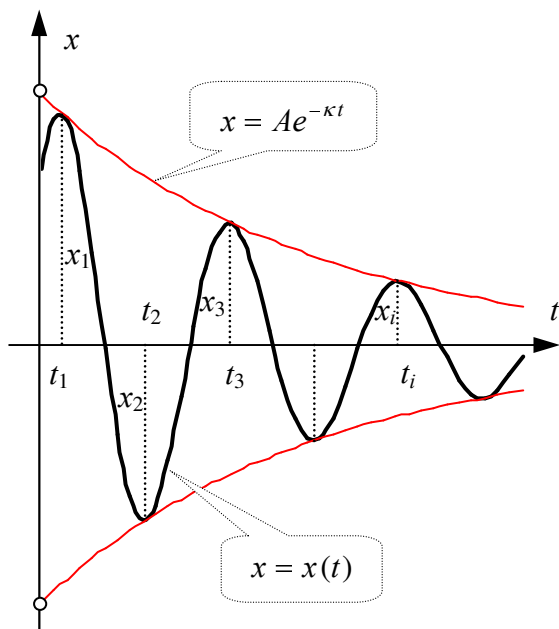
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$$

összefüggésből látszik, hogy $\omega < \omega_0$, vagyis a súrlódó erő megjelenése csökkenti a rezgésszámot, ennek megfelelően növeli a rezgésidőt.

Könnyen igazolható, hogy a megoldás bármely két egymást követő maximumának, vagy minimumának hányadosa állandó. A 32. ábra jelöléseivel $\frac{x_n}{x_{n+2}} = e^{\kappa T} = K$ (állandó), $n = 1, 2, \dots$.

A csillapodás mértéke jellemezhető ezzel a K hányadossal vagy ennek logaritmusával, amit logaritmikus dekrementumnak nevezünk.

Ennek a csillapított rezgésnek a körfrekvenciája, ill. rezgésideje



32. ábra

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}, \text{ ill. } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}}.$$

Az (F.12) és (F.13) differenciálegyenlet történelmileg a tömegpont mozgásának mechanikai leírására keletkezett, de ezen túlmenően számos alkalmazásuk van, egészen szerteágazó területeken – fizikától a biológiáig és a közgazdaságtanig.

$\omega_0 < \kappa$ esetén a karakterisztikus egyenlet megoldásai valós, negatív mennyiségek, a megoldás pedig két lecsengő exponenciális függvény összege lesz.

FÜGGELÉK 2:

AZ ANYAGTÖRVÉNY - KÜLÖNBÖZŐ FELTÉTELEK MELLETTI - MEGOLDÁSÁNAK ÖSSZEFOGLALÁSA

JELÖLÉSEK: az egyenlet: $\sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta \dot{\varepsilon} + \theta \ddot{\varepsilon}$,

a $t = 0$ időpontbeli kezdeti értékek:

$$\varepsilon_0 := \varepsilon(0), \quad \dot{\varepsilon}_0 := \dot{\varepsilon}(0), \quad \ddot{\varepsilon}_0 := \ddot{\varepsilon}(0), \quad \sigma_0 := \sigma(0), \quad \dot{\sigma}_0 := \dot{\sigma}(0).$$

1. DEFORMÁCIÓVEZÉRLÉS

1.1. ÁLLANDÓ DEFORMÁCIÓGYORSULÁS

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \dot{\varepsilon}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \ddot{\varepsilon}_0 \cdot t^2 : \quad \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_0 + \ddot{\varepsilon}_0 \cdot t, \quad \ddot{\varepsilon}(t) = \ddot{\varepsilon}_0,$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & (\sigma_0 - \{2G\varepsilon_0 + (2\eta - 2G\tau)\dot{\varepsilon}_0 + [\theta - \tau(2\eta - 2G\tau)]\ddot{\varepsilon}_0\})e^{-\frac{1}{\tau}t} + \\ & + \{2G\varepsilon_0 + (2\eta - 2G\tau)\dot{\varepsilon}_0 + [\theta - \tau(2\eta - 2G\tau)]\ddot{\varepsilon}_0\} + [2G\dot{\varepsilon}_0 + (2\eta - 2G\tau)\ddot{\varepsilon}_0]t + G\ddot{\varepsilon}_0 t^2. \end{aligned}$$

Speciális eset: felterhelés: $\varepsilon_0 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_0 = 0, \quad \varepsilon(t) = \frac{1}{2} \ddot{\varepsilon}_0 \cdot t^2, \quad t(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\ddot{\varepsilon}_0}} :$

$$\sigma(t) = (\sigma_0 - [\theta - \tau(2\eta - 2G\tau)]\ddot{\varepsilon}_0)e^{-\frac{1}{\tau}t} + [\theta - \tau(2\eta - 2G\tau)]\ddot{\varepsilon}_0 + (2\eta - 2G\tau)\ddot{\varepsilon}_0 t + G\ddot{\varepsilon}_0 t^2,$$

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon) = & (\sigma_0 - [\theta - \tau(2\eta - 2G\tau)]\ddot{\varepsilon}_0)e^{-\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\ddot{\varepsilon}_0}}} + [\theta - \tau(2\eta - 2G\tau)]\ddot{\varepsilon}_0 + \\ & + (2\eta - 2G\tau)\sqrt{2\ddot{\varepsilon}_0\varepsilon} + 2G\varepsilon. \end{aligned}$$

1.2. ÁLLANDÓ DEFORMÁCIÓSEBESSÉGŰ FELTERHELÉS

$$[\varepsilon_0 = 0, \quad \ddot{\varepsilon}_0 = 0, \quad \varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_0 \cdot t, \quad t(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}_0}]$$

$$\sigma(t) = [\sigma_0 - (2\eta - 2G\tau)\dot{\varepsilon}_0]e^{-\frac{1}{\tau}t} + (2\eta - 2G\tau)\dot{\varepsilon}_0 + 2G\dot{\varepsilon}_0 t,$$

$$\sigma(\varepsilon) = [\sigma_0 - (2\eta - 2G\tau)\dot{\varepsilon}_0]e^{-\frac{1}{\tau}\frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}_0}} + (2\eta - 2G\tau)\dot{\varepsilon}_0 + 2G\varepsilon.$$

1.3. ÁLLANDÓ DEFORMÁCIÓ (RELAXÁCIÓ) $[\dot{\varepsilon}_0 = 0, \quad \ddot{\varepsilon}_0 = 0, \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0]$

$$\sigma(t) = (\sigma_0 - 2G\varepsilon_0)e^{-\frac{1}{\tau}t} + 2G\varepsilon_0 = (\sigma_0 - \sigma_\infty)e^{-\frac{1}{\tau}t} + \sigma_\infty, \quad \text{ahol } \sigma_\infty = 2G\varepsilon_0.$$

1.4. PERIODIKUS DEFORMÁCIÓ [$\varepsilon(t) = \varepsilon_{\text{közepes}} + \varepsilon_{\text{amplitúdó}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$]

$$\sigma(t) = \left[\sigma_0 - 2G\varepsilon_{\text{közepes}} - \zeta\varepsilon_{\text{amplitúdó}} \sin(\varphi_0 + \varphi) \right] e^{-\frac{1}{\tau}t} + 2G\varepsilon_{\text{közepes}} + \zeta\varepsilon_{\text{amplitúdó}} \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi),$$

ahol

$$\zeta = \sqrt{\frac{(2G - \theta\omega^2)^2 + 4\eta^2\omega^2}{1 + \tau^2\omega^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega(2\eta - 2G\tau + \theta\tau\omega^2)}{2G + 2\eta\tau\omega^2 - \theta\omega^2}$$

és $2G > 0$, $2\eta - 2G\tau \geq 0$ esetén $0 \leq \varphi < \pi$.

2. FESZÜLTSGVEZÉRLÉS

2.1. ÁLLANDÓ FESZÜLTSGGYORSULÁS

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \dot{\sigma}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \ddot{\sigma}_0 \cdot t^2 : \quad \dot{\sigma}(t) = \dot{\sigma}_0 + \ddot{\sigma}_0 \cdot t,$$

$$\varepsilon(t) = e^{-\frac{\eta}{\theta}t} [S \cdot s(t) + C \cdot c(t)] + F(t), \quad \text{ahol}$$

$$\begin{aligned} f_0 &= \sigma_0 + \tau \dot{\sigma}_0, \\ f_1 &= \dot{\sigma}_0 + \tau \ddot{\sigma}_0, \\ f_2 &= \ddot{\sigma}_0, \\ S &= \frac{\eta}{\theta} \varepsilon_0 + \dot{\varepsilon}_0 - \frac{\eta}{2\theta G} f_0 + \frac{\eta^2 - \theta G}{2\theta G^2} f_1 + \frac{\eta(3\theta G - 2\eta^2)}{4\theta G^3} f_2, \\ C &= \varepsilon_0 - \frac{1}{2G} f_0 + \frac{\eta}{2G^2} f_1 + \frac{\theta G - 2\eta^2}{4G^3} f_2, \\ F(t) &= \frac{1}{2G} f_0 + \frac{Gt - \eta}{2G^2} f_1 + \frac{(Gt - \eta)^2 + \eta^2 - \theta G}{4G^3} f_2, \end{aligned}$$

$$s(t) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\frac{2G}{\theta} - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2} t}{\sqrt{\frac{2G}{\theta} - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2}}, & \text{ha } 2\theta G > \eta^2, \\ t, & \text{ha } 2\theta G = \eta^2, \\ \frac{\text{sh} \sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}} t}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}}, & \text{ha } 2\theta G < \eta^2, \end{cases} \quad c(t) = \begin{cases} \cos \sqrt{\frac{2G}{\theta} - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2} t, & \text{ha } 2\theta G > \eta^2, \\ 1, & \text{ha } 2\theta G = \eta^2, \\ \text{ch} \sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}} t & \text{ha } 2\theta G < \eta^2, \end{cases}$$

és mindhárom ágban érvényesek a következő összefüggések:

$$\dot{s} = c, \quad \dot{c} = \left[\left(\frac{\eta}{\theta} \right)^2 - \frac{2G}{\theta} \right] \dot{s}, \quad s(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = 1, \quad c(0) = 1, \quad \dot{c}(0) = 0.$$

A megoldás a $2\theta G < \eta^2$ esetben a következő alakban is írható:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \left(C + \frac{S}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}} \right) e^{\left(\frac{\eta}{\theta} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}\right)t} + \frac{1}{2} \left(C - \frac{S}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}} \right) e^{\left(\frac{\eta}{\theta} - \sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}\right)t} + F(t).$$

Speciális eset: felterhelés: $\sigma_0 = 0$, $\dot{\sigma}_0 = 0$, $\sigma(t) = \frac{1}{2} \ddot{\sigma}_0 \cdot t^2$:

$f_0 = 0$, $f_1 = \tau \ddot{\sigma}_0$, $f_2 = \ddot{\sigma}_0$. $t(\sigma) = \sqrt{\frac{2\sigma}{\ddot{\sigma}_0}}$ -ot $\varepsilon(t)$ -be helyettesítve $\varepsilon(\sigma)$ kapható meg.

2.2. ÁLLANDÓ FESZÜLTÉGSEBESSÉGŰ FELTERHELÉS

$$[\sigma_0 = 0, \ddot{\sigma}_0 = 0, \sigma(t) = \dot{\sigma}_0 \cdot t]$$

$f_0 = \tau \dot{\sigma}_0$, $f_1 = \dot{\sigma}_0$, $f_2 = 0$. $t(\sigma) = \frac{\sigma}{\dot{\sigma}_0}$ -ot $\varepsilon(t)$ -be helyettesítve $\varepsilon(\sigma)$ kapható meg.

2.3. ÁLLANDÓ FESZÜLTÉG (KÚSZÁS) [$\dot{\sigma}_0 = 0$, $\ddot{\sigma}_0 = 0$, $\sigma(t) = \sigma_0$]

$$f_0 = \sigma_0, f_1 = 0, f_2 = 0.$$

2.4. PERIODIKUS FESZÜLTÉGVEZÉRLÉS¹⁰ [$\sigma(t) = \sigma_{\text{közepes}} + \sigma_{\text{amplitúdó}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$]

$$\varepsilon(t) = e^{-\frac{\eta}{\theta}t} \left[\Sigma \cdot s(t) + \Gamma \cdot c(t) \right] + \frac{\sigma_{\text{közepes}}}{2G} + \frac{1}{\zeta} \sigma_{\text{amplitúdó}} \sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi),$$

ahol $s(t)$ és $c(t)$ a fenti 2.1 pontbeliek, ζ és φ a fenti 1.4 pontbeliek, és

$$\begin{aligned} \Sigma &= \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\eta}{\theta} (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\text{közepes}}) - \varepsilon_{\text{amplitúdó}} \left[\omega \cos(\varphi_0 - \varphi) + \frac{\eta}{\theta} \sin(\varphi_0 - \varphi) \right], \\ \Gamma &= \varepsilon_0 - \varepsilon_{\text{közepes}} - \varepsilon_{\text{amplitúdó}} \sin(\varphi_0 - \varphi). \end{aligned}$$

A megoldás a $2\theta G < \eta^2$ esetben a következő alakban is írható:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{1}{2} \left(\Gamma + \frac{\Sigma}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}} \right) e^{\left(\frac{\eta}{\theta} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}\right)t} + \frac{1}{2} \left(\Gamma - \frac{\Sigma}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}} \right) e^{\left(\frac{\eta}{\theta} - \sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}\right)t} + \\ &+ \frac{\sigma_{\text{közepes}}}{2G} + \frac{1}{\zeta} \sigma_{\text{amplitúdó}} \sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi). \end{aligned}$$

¹⁰ Az $\eta = 0$, $\omega = \sqrt{2G/\theta}$ speciális esetet („rezonancia-katasztrófa”) itt nem tárgyaljuk.

JELÖLÉSEK JEGYZÉKE

A	- alakváltozási tenzor (másodrendű szimmetrikus),
D	- deformációtenzor (másodrendű szimmetrikus),
E	- deformációs deviátortenzor,
e	- a belsőenergia-sűrűsége (fajlagos belső energia)
E	- rugalmassági (YOUNG-féle) modulus,
E_o	- deformációs gömbtenzor,
ε_o	- átlagos (vagy közepes) deformáció,
ε^m	- maradó, vagy irreverzibilis deformáció,
ε^{plast}	- plasztikus (v. képlékeny deformáció),
ε^{rev}	- reverzibilis (v. rugalmas egyensúlyi) deformáció,
η	- viszkozitási együttható,
F	- feszültségtenzor (másodrendű, szimmetrikus) lokális leírásban, az impulzus konduktív áramsűrűsége (időegység alatt egységnyi felületen konduktíve – diffúz úton – átáramló impulzus mennyisége),
Φ	- rugalmas deformációs munka, a deformációs munka potenciális (reverzibilis) része,
Φ'	- rugalmas torzulási deformációs munka,
Φ_o	- rugalmas térfogatváltozási deformációs munka,
ψ	- képlékenységi függvény ($\psi = 0$ képlékenységi határfeltétel),
G	- csúsztató (torzulási) rugalmassági modulus,
K	- kompresszibilitási (térfogatváltozási) modulus,
L	- impulzusvezetési tenzor (negyedrendű, szimmetrikus, pozitív definit),
$\mathcal{L}$	- disszipációs munka, a deformációs munka irreverzibilis részre,
$\mathcal{L}'$	- torzulási disszipációs munka,
$\mathcal{L}_o$	- térfogatváltozási disszipációs munka,
m	- POISSON-féle szám,
P	- deformációs teljesítmény (térfogategységre jutó),
Ψ	- HEAVISIDE-féle egységugrás-függvény,
ρ	- tömegsűrűség
s	- fajlagos (tömegegységre jutó) entrópia,
$\tilde{s}$	- egyensúlyi fajlagos entrópia (fajlagos entrópia egyensúly esetén),
σ_o	- átlagos (vagy közepes) feszültség,
T	- feszültségi deviátortenzor,
T_o	- feszültségi gömbtenzor,
T	- hőmérséklet °K-ben,

- t - idő,
 τ - relaxációs idő,
 W - deformációs munka (térfogategységre jutó),
 W' - torzulási deformációs munka,
 W_o - térfogatváltozási deformációs munka,
 ξ - belső dinamikai változó (szimmetrikus másodrendű tenzor), az egyensúlytól való eltérés kifejezője.

A MECHANIKAI JELLEMZŐK ÖSSZEFÜGGÉSE

A *feszültségállapotot* reprezentáló feszültségtenzor (derékszögű, egyenesvonalú koordináta-rendszerben):

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \left\| \sigma_{ij} \right\|_{\substack{(i=x,y,z) \\ (j=x,y,z)}}, \text{ ahol } \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (i \neq j), \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^T.$$

A feszültségtenzor a mechanikai impulzus ($m\mathbf{v}$) konduktív áramsűrűsége (a felületegységen, időegység alatt átfolyó mennyisége). A feszültségtenzort a sebességtér inhomogenitása (sebességgradiens) határozza meg, és ezt hívjuk mechanikai *anyagtörvénynek*.

A *deformációs állapotot* reprezentáló deformációtenzor:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \left\| \varepsilon_{ij} \right\|_{\substack{(i=x,y,z) \\ (j=x,y,z)}}, \text{ ahol } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad (i \neq j), \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^T.$$

Az alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{I}.$$

Minden tenzor felbontható egy ún. *deviátortenzor* és egy *izotróp* (vagy *gömb*-) tenzor összegeként. A feszültségtenzor és a deformációtenzor deviátora a torzulási állapot egy közelítését reprezentálja, a gömbtenzora pedig a térfogatváltozás közelítését:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\mathbf{F} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{F})\mathbf{I}}_{\mathbf{T}} + \underbrace{\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{F})\mathbf{I}}_{\mathbf{T}_o} = \mathbf{T} + \mathbf{T}_o, \quad \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{F}) \equiv \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \sum \sigma_i = \sigma_o,$$

ahol σ_o az átlagos, vagy közepes főfeszültség, s így a torzulási feszültségtenzor (vagy feszültségi deviátortenzor):

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_o & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_o & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_o \end{vmatrix} = \left\| \sigma_{ij} - \sigma_o \right\|_{\substack{(i=x,y,z) \\ (j=x,y,z)}} = \left\| s_{ij} \right\|_{\substack{(i=x,y,z) \\ (j=x,y,z)}},$$

a térfogatváltozási feszültségtenzor (vagy feszültségi gömbtenzor):

$$\mathbf{T}_o = \begin{vmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{vmatrix} = \sigma_o \mathbf{I} = \sigma_o \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

A deformációmezőre hasonlóképpen:

$$\mathbf{D} = \underbrace{\mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I}}_{\mathbf{E}} + \underbrace{\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I}}_{\mathbf{E}_o} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_o, \quad \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \equiv \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3} \sum \varepsilon_i = \varepsilon_o,$$

ahol ε_o az átlagos, vagy közepes fődeformáció, s így a torzulási deformációtenzor (vagy deformációs deviátortenzor):

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \sigma_o & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \sigma_o & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \sigma_o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{ij} - \sigma_o \\ (i=x,y,z) \\ (j=x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{ij} \\ (i=x,y,z) \\ (j=x,y,z) \end{vmatrix},$$

a térfogatváltozási deformációtenzor (vagy deformációs gömbtenzor):

$$\mathbf{E}_o = \begin{vmatrix} \varepsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_o \end{vmatrix} = \varepsilon_o \mathbf{I} = \varepsilon_o \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Kontinuumok anyagtörvénye ennek megfelelően több formában is felírható:

- egyetlen egyenletbe összefogva:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{D}), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}), \quad (i, j = x, y, z),$$

- két egyenletre bontva:

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{E}), & s_{ij} = s_{ij}(e_{ij}), \\ \mathbf{T}_o = \mathbf{T}_o(\mathbf{E}_o), & \sigma_o = \sigma_o(\varepsilon_o), \end{cases} \quad (i, j = x, y, z).^1$$

A térfogategységre jutó *alakváltozási teljesítmény*: $P = \dot{W} = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla$, amely az $\mathbf{F}$ szimmetriája folytán

$$\begin{aligned} P = \dot{W} &= \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla = \mathbf{F} : \left[(\mathbf{v} \circ \nabla)^S + (\mathbf{v} \circ \nabla)^A \right] = \\ &= \mathbf{F} : (\mathbf{v} \circ \nabla)^S = \mathbf{F} : \frac{1}{2} [\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}] = \mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{F} : \ddot{\mathbf{D}}, \end{aligned}$$

ahol $\ddot{\mathbf{D}} := \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}$, s innen a deviatorikus felbontásnak megfelelően

$$P = \mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{T} + \mathbf{T}_o) : \left[(\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d + (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_o \right] = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{T}_o : \dot{\mathbf{E}}_o,$$

ahol $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}_o$, $\dot{\mathbf{E}} := (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_d = [\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}]_d$, $\dot{\mathbf{E}}_o := (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})_o = [\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}]_o$.

Ennek megfelelően a teljesítmény két részre bontható, a deviatoros és gömbi tagok szorzatából alkotott részekre:

¹ Nem írtuk ki külön változóként a tenzorok időderiváltjait. Lehet, hogy helyesebb lenne az

$$\mathbf{f}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \ddot{\mathbf{D}}, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{f}'(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{T}}, \dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{E}}, \ddot{\mathbf{E}}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{f}_o(\mathbf{T}_o, \dot{\mathbf{T}}_o, \dot{\mathbf{E}}_o, \dot{\mathbf{E}}_o, \ddot{\mathbf{E}}_o) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad \text{forma.}$$

$$P = P' + P_o, \quad P' := \mathbf{T} : \dot{\tilde{\mathbf{E}}}, \quad P_o := \mathbf{T}_o : \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_o,$$

s ezeket az irodalomban meghonosodott szóhasználatnál a P' -t *torzulási, vagy alaktorzulási teljesítménynek*, a P_o -t pedig *térfogati, vagy térfogatváltozási teljesítménynek* hívják.²

A térfogategységre jutó *alakváltozási munka* mindezek alapján

$$W = \int P dt = \int \dot{W} dt = \int \mathbf{F} : \dot{\tilde{\mathbf{D}}} dt = \int \mathbf{F} : d\tilde{\mathbf{D}} = W' + W_o = \int \mathbf{T} : d\tilde{\mathbf{E}} + \int \mathbf{T}_o : d\tilde{\mathbf{E}}_o.$$

A feszültségtenzort szokás felbontani reverzibilis és irreverzibilis részre:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{rev} + \mathbf{F}^{irrev},$$

s ennek megfelelően létezhet reverzibilis és irreverzibilis munka is.³

A reverzibilis rész a befektetett munkának az a része, amely veszteség nélkül vissza nyerhető, nem hoz létre entrópiánövekedést, vagyis az entrópiaprodukcója zérus: $\sigma_s = 0$, illetve körfolyamat esetén: $\oint ds = 0$. A

$$\Phi = \int \mathbf{F}^{rev} : d\tilde{\mathbf{D}}$$

rugalmas deformációs munkának (potenciális munkának, rugalmas energiának) nevezzük

Az irreverzibilis rész a befektetett munkának az a része, amely disszipálódik (hővé alakul, szétszóródik), amely az entrópia spontán növekedését okozza: $\sigma_s > 0$, illetve körfolyamat esetén: $\oint ds > 0$. Mindezt az

$$\mathcal{L} = \int \mathbf{F}^{irrev} : d\tilde{\mathbf{D}}$$

disszipációs munkának (disszipációs energiának) nevezzük. Természetesen a deviátoros felbontásnak megfelelően: $W = \Phi + \mathcal{L} = W' + W_o = \Phi' + \Phi + \mathcal{L}' + \mathcal{L}_o$,

$$\Phi' = \int \mathbf{T}^{rev} : d\tilde{\mathbf{E}} \quad - \text{ rugalmas torzulási munkának,}$$

$$\Phi_o = \int \mathbf{T}_o^{rev} : d\tilde{\mathbf{E}}_o \quad - \text{ rugalmas térfogati munkának,}$$

$$\mathcal{L}' = \int \mathbf{T}^{irrev} : d\tilde{\mathbf{E}} \quad - \text{ torzulási disszipációs munkának,}$$

$$\mathcal{L}_o = \int \mathbf{T}_o^{irrev} : d\tilde{\mathbf{E}}_o \quad - \text{ térfogati disszipációs munkának.}$$

² Erre szokás azt mondani, hogy semmi sem az mint aminek hívják. Köztudott, hogy a fajlagos térfogatváltozást nem a $\mathbf{D}$ deformációtenzor $\text{tr}(\mathbf{D})$ nyoma (Spur, trace) fejezi ki, hanem a $\det(\mathbf{D})$ determinánsa.

³ Itt rá kell mutatni bizonyos félreértések forrására. A reverzibilis folyamat mindig rugalmas állapotváltozások sorozatát takarja. Azonban a rugalmas állapotváltozások általában nem reverzibilisek. Vagyis azt kell mondanunk, hogy a rugalmas alakváltozások tartománya irreverzibilis állapotváltozásokat fog össze, de van egy határa, amely reverzibilis. Ezen a határon kívül - nincsenek fizikailag megengedhető állapotok, vagy folyamatok. A reverzibilis állapotváltozást mindig egyensúlyi állapotok sorozata adja. Ennek a fordítottja azonban nem igaz. Pl. kialakult képlékeny állapot lehet egyensúlyi, ha a mozgások elenyésztek, de semmiképp nem lehet reverzibilis, mert a maradó deformációk már általában vissza nem alakíthatók.

SZERZŐK

ASSZONYI CSABA DR. (1941) okl. gépészmérnök (NME, 1964), műszaki doktor (NME, 1965), a



műszaki tud. kandidátusa (1972), a műszaki tud. doktora (1976). Kutatási területe: a kontinuumok mechanikája és az irreverzibilis termodinamika. Eredményeit 192 publikációban és 10 könyvben tette közre. Főbb mérnöki eredményei és szabadalmai az alagút- és épület-rekonstrukciók, víz- és környezetvédelem területén találhatók. A bányászatban volt kutatómérnök, osztályvezető, gazdasági igazgató, trösztí főosztályvezető, kutatóintézeti igazgató. 1988-as megalakulásától kezdve a MONTAVID Csoport vezetője, s a MONTAVID INVESTMENT TECHNOLOGIES TRUST elnök-vezérigazgatója 2006-ig. Jelenleg kutatással, műszaki fejlesztéssel foglalkozik a MONTAVID RESEARCH GROUP keretei között.

1112 Budapest, Táncos u.6. T: (06) 309 215 684, (1) 215 8463, asszonyi@gmail.com

SZARKA ZOLTÁN DR. (1927) okl. mérnök (1950). 1950-től a Nehézipari Műszaki Egyetem – ma Miskolci Egyetem – Matematikai Tanszékének oktatója. 1967-től egyetemi docens, közben két időszakban tanszékvezető, 1991-től nyugdíjas, de oktatói munkáját 2006-ig folytatta. Szakterülete a kiegyenlítőszámítás, de 56 évi egyetemi munkája során a matematika számos területét (analízis, parciális differenciálegyenletek, valószínűségszámítás, komplex függvénytan, stb.) művelte.

Számos hazai és külföldi előadása mellett 46 szakkikke és 32 könyve és egyetemi jegyzete jelent meg, részben társszerzőkkel.

3529 Miskolc, Csabai kapu 34. Telefon: (46) 362 905, mateva@gold.uni-miskolc.hu



FÜLÖP TAMÁS DR. (1967). okl. fizikus (ELTE, 1991), egyetemi doktor (ELTE, 1996), PhD. (University of Tokyo, Japán, 2006). 1999-ig az ELTE Elméleti Fizika Tanszéken oktat fizika és matematika tárgyakat, az 1997-99 és 2002-06 években Japánban kutat, 2006-2007 között pedig Csehországban. Jelenleg a MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORTBAN dolgozik. Fő kutatási témája 2007-ig a határfeltételek fizikai szerepe és alkalmazásai a kvantummechanikában, jelenleg a kontinuumfizika (reológia, a téridő szerepe, elemkapcsolások, stb.).



Eddig 20 szakkikke jelent meg.

2120 Dunakeszi, Iskola u. 5. Tel: (1)-215-8463, tamas.fulop@gmail.com.

HORVÁTH RÓBERT DR. (1948) okl. gépészmérnök (NME, 1971), okl. matematikus (JATE, 1978), a műszaki tud. kandidátusa (1987), PhD (ME, 2000). 1972 óta dolgozik a DE AMTC Műszaki Karán, ill. jogelőd intézményeiben, jelenleg a Kar Környezet- és Vegyészmérnöki Tanszékének tanszékvezető főiskolai tanára. 1992-1995 között a Gépészeti Intézet igazgatója, 1995-1997 között a Kar tudományos főigazgató-helyettese, 1997-2003 között két ciklusban a Kar főigazgatója volt. A környezetmérnöki alapszak szakfelelőse, környezetvédelmi szakértő. Érdeklődési területe az irreverzibilis termodinamika és a kontinuummechanika elméleti és gyakorlati kérdései, az anyagok reológiai tulajdonságainak a vizsgálata, és alkalmazásuk a környezetvédelemben. Eddig 5 könyv, 4 jegyzet, és 23 szakcikk szerzője szerzője, ill. társszerzője, és 27 hazai és külföldi konferencia előadója volt.

4034 Debrecen, Félegyházi u. 22. Telefon: (30) 349 2021,
horvath@mfk.unideb.hu



VÁN PÉTER DR. (1964). okl. fizikus (ELTE, 1990), egyetemi doktor (BME, 1994), PhD (BME, 2002). 2005-ig a BME Kémiai Fizika Tanszékének munkatársa. Jelenleg a KFKI, RMKI Elméleti Főosztályán és a BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszékén dolgozik. Az ELFT Termodinamikai Szakcsoportjának elnöke. Több ízben dolgozott külföldön, Olaszországban, Németországban és Észtországban. Kutatási területe a nemegyensúlyi termodinamika mint általános fizikai keretelmélet, ennek alapjai, illetve különféle alkalmazásai. Az alapkérdések közül a nemegyensúlyi termodinamika variációs elveivel és gyengén nemlokális kiterjesztésével, az anyagi objektivitás elvével és a relativisztikus disszipatív folyadékok elméleteivel foglalkozott. Érdeklődési területéhez tartozik ezen kívül a károsodás mechanika és a reológia.

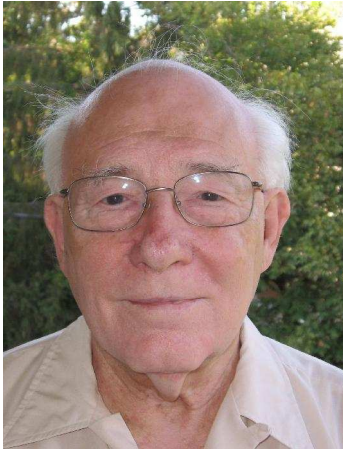


Eddig mintegy 70 szakcikke és egy könyve jelent meg.

1012 Budapest, Lovas utca 18. Telefon: 2145243, (70) 332 2831,
vpet@rmki.kfki.hu

LEKTOROK

BÉDA GYULA DR. (1931) okl. gépészmérnök (NME, 1953), a műszaki tudomány kandidátusa (1961), a műszaki tudomány doktora (1983). 1953-56 aspiráns, 1956-61 egyetemi adjunktus, 1961-67 egyetemi docens az NME Mechanikai Tanszékén, majd a BME Gépészmérnöki Kar Műszaki Mechanikai Tanszékén, ahol 1968-2001 egyetemi tanár, 1970-1995 között tanszékvezető volt. 2001-től professzor emeritus. Fő kutatási témái: kontinuummechanika, az anyagtörvény elméleti és kísérleti vizsgálata, a szilárd testben keltett hullámok, képlékenységtan, biomechanika a mechanika általános egyenletei. Kutatási eredményeiből 5 szakkönyv, 10 jegyzet, és több mint 80 publikáció jelent meg.



1530 Budapest, Pf. 18. Telefon: (1) 463 1369,
beda@mm.bme.hu

MATOLCSI TAMÁS DR. (1941) 1969-ben végzett az ELTE fizikus szakán, a matematikai tud. kandidátusa (1976). 1969-től 1973-ig az MTA Számítástechnikai Központjának tudományos segédmunkatársa, 1973-tól 1975-ig a szegedi József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetében tudományos munkatárs. 1975-től az ELTE TTK Alkalmazott Analízis tanszékének oktatója, 1981-től docensként. 2005-ben nyugdíjba vonult. Tudományos munkásságát a matematikai fizika területén fejti ki. Számos hazai és nemzetközi konferencián szerepelt előadóként.

Hét egyetemi jegyzetet írt, huszonhárom tudományos cikket és négy angol nyelvű könyvet publikált.

2071 Páty, Tölgyfa utca 14. Telefon: (23) 343 043, (20) 5444 086, matolcsi@ludens.elte.hu

