

Szerkesztette:
Fülöp Tamás

Új eredmények a kontinuumfizikában



Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8



ÚJ EREDMÉNYEK A
KONTINUUMFIZIKÁBAN

*International Society for Rock Mechanics
Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 Konferencia, Budapest*

ÚJ EREDMÉNYEK A KONTINUUMFIZIKÁBAN

SZERKESZTETTE

FÜLÖP TAMÁS

Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

ÍRTA

ASSZONYI CSABA, BÉDA PÉTER, BOJTÁR IMRE, FÜLÖP TAMÁS,
MATOLCSI TAMÁS, VÁN PÉTER, VÁSÁRHELYI BALÁZS



MŰEGYETEMI KIADÓ
2008

SZERKESZTETTE

DR. FÜLÖP TAMÁS

Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

ÍRTA

ASSZONYI CSABA, BÉDA PÉTER, BOJTÁR IMRE, FÜLÖP TAMÁS,
MATOLCSI TAMÁS, VÁN PÉTER, VÁSÁRHELYI BALÁZS

LEKTORÁLTA

DR. BÉDA GYULA

a műszaki tudomány doktora

(kivéve Béda P. tanulmányát)

DR. VERHÁS JÓZSEF

a fizikai tudomány doktora

(kivéve Béda P., Matolcsi T., Bojtár I. és tsai tanulmányát)

DR. MATOLCSI TAMÁS

a matematikai tudomány kandidátusa

(kivéve saját tanulmányát)

DR. ASSZONYI CSABA

a műszaki tudomány doktora

(kivéve Bojtár I. és tsai tanulmányát)

A KUTATÁST ÉS A KÖTET MEGJELENÉSÉT

A MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT,
A MAGYAR MÉRNÖKI KAMARA,
AZ ETTE EGYESÜLET A TUDOMÁNY ÉS TECHNOLÓGIA EGYSÉGÉÉRT ÉS
AZ ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS KUTATÁSI ALAP
TÁMOGATÁSA TETTE LEHETŐVÉ

ISBN 978-963-420-966-9

ISSN 1789-0454

Megjelent a *Műegyetemi Kiadó* gondozásában
www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 12,60 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Hungarian Printing House

Felelős vezető:

Kovács-Sebestény Szabolcs

©2008 BUDAPEST, ASSZONYI CSABA, BÉDA PÉTER, BOJTÁR IMRE, FÜLÖP TAMÁS,
MATOLCSI TAMÁS, VÁN PÉTER, VÁSÁRHELYI BALÁZS

ÚJ EREDMÉNYEK A KONTINUUMFIZIKÁBAN

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ	9
--------------	---

A TÉR NEM ABSZOLÚT – A TÉRIDŐ, MINT A GALILEI-FÉLE RELATIVITÁSI ELV KÖVETKEZMÉNYE (Fülöp Tamás)

1. BEVEZETÉS	11
2. ELSŐ LÉPÉS: A TÉR NEM ABSZOLÚT, TÉRIDŐRE VAN SZÜKSÉG	12
3. TUDOMÁNYTÖRTÉNETI ÉRTELMEZÉS	13
4. TOVÁBBI ISMERKEDÉS A TÉRIDŐVEKTOROKKAL	19
5. NÉGYES KOVEKTOROK, NÉGYESTENZOROK	21
6. A TÉRIDŐ SZERKEZETE	26
7. A NÉGYES MENNYISÉGEK FŐ JELLEGZETESSÉGEI	28
8. FÜGGVÉNYEK, DERIVÁLÁS, INTEGRÁLÁS	31
9. UTÓSZÓ	33
KÖSZÖNETMONDÁS	33
IRODALOM	34

ANYAGI SOKASÁGOK A NEMRELATIVISZTIKUS TÉRIDŐBEN (Ván Péter)

1. BEVEZETÉS	37
2. KINEMATIKA	39
2.1. Alapinverzek	40
2.2. Deriváltak	41
2.3. Vegyes deriváltak	42
2.3.1. Időderiváltakkal	42
2.3.2. Térderiváltakkal	43
3. ANYAGI MENNYISÉGEK ÉS ANYAGI DERIVÁLTAK	43
3.1. Skalár	44
3.2. Vektor	44
3.3. Kovektor	46
3.4. Tenzor	47
3.5. Kotenzor	48
3.6. Vegyes tenzor	50
3.6.1. Létezésgradiens és sebesség	51
4. EGYSÉGES KONTINUUMFIZIKA	51
5. KÖSZÖNETEK	53
IRODALOM	53

KONTINUUMOK KINEMATIKÁJÁNAK ÚJ ÉRTELMEZÉSE

(Fülöp Tamás)

1. BEVEZETÉS	55
2. AZ EDDIGI DEFORMÁCIÓTENZOR-FOGALMAK	57
3. AZ EDDIGI DEFORMÁCIÓ-ÉRTELMEZÉSEK HIÁNYOSSÁGAI	61
4. A KONTINUUMOK KINEMATIKÁJA, AZ ALAPOKTÓL KEZDVE	67
4.1. Merevtestszerű, távolságtartó közegáramlások	69
4.2. Irányfüggetlenül táguló közegek	72
4.3. Általános közegáramlások	72
5. KÖZEG SZERINT IRÁNYTARTÓ MENNYISÉGEK, ÉS A KÖZEGGEL EGYÜTTFORGÓ IDŐDERIVÁLT	76
6. A DEFORMÁCIÓ ÉRTELMEZÉSE	79
7. AZ ÚJ DEFORMÁCIÓTENZOR ÜTKÖZTETÉSE AZ ÖT KRITIKAI ÉSZREVÉTELLEL	82
8. A DEFORMÁCIÓTENZOR VISZONYA AZ EDDIG ISMERT DEFORMÁCIÓ-VÁLTOZATOKHOZ	83
9. ÁLTALÁNOS KÖZEGÁRAMLÁSOK DEFORMÁCIÓJA: A DEFORMÁCIÓFŐIRÁNY-TARTÓ KÖZELÍTÉS ...	86
10. KONKRÉT PÉLDÁK	89
Jelölések	89
A képletgyűjtemény	89
10.1. Az egytengelyű terhelésre jellemző alakváltozás	90
10.2. Az egyszerű nyírás	92
10.3. Példa a deformáció folyamatfüggésére	95
11. ÖSSZEGZÉS	96
KÖSZÖNETMONDÁS	97
IRODALOM	97

A YOUNG-FÉLE RUGALMASSÁGI MODULUS ÉS A POISSON-TÉNYEZŐ

(Bojtár Imre – Vásárhelyi Balázs – Asszonyi Csaba)

1. BEVEZETÉS	101
Kontinuumok mechanikai anyagmodellje	101
Izotrop kontinuumok anyagmodellje	102
A Hooke-modell	102
A Hooke-modell egytengelyű feszültségállapot esetén	102
Izotrop kontinuumok általános anyagmodellje	103
Egytengelyű feszültségállapot	104
2. YOUNG ÉS A RUGALMASSÁGI MODULUS	104
Thomas Young	104
Young tudományos munkássága	106
(a) Fizikai kutatások	106
(b) Orvostudomány	107
(c) Régészet	108
(d) Nyelvészet	109
A rugalmassági modulus	109
3. POISSON ÉS A POISSON-TÉNYEZŐ	111
Poisson élete	111
Tudományos munkásságának fontosabb adatai	113
A Poisson-tényező	115
4. MILYEN ANYAGI PARAMÉTEREKET HASZNÁLJUNK?	117
A ν Poisson-tényező	117
Az E lineáris rugalmassági modulus	119
IRODALOM	120

HENGERSZIMMETRIKUS DEFORMÁCIÓ
LABORATÓRIUMI PRÓBATESTEK MÉRETFÜGGÉSE
(Matolcsi Tamás)

1. BEVEZETÉS	121
2. ALAP-ÖSSZEFÜGGÉSEK	121
3. HATÁRFELTÉTELEK	123
3.1. Alap-feltételek	123
3.2. Egyéb feltételek	123
4. A KLASSZIKUS MEGOLDÁS	124
5. A KLASSZIKUS ESET VÁLTOZATAI	125
5.1. Első módosítás	125
5.2. Második módosítás	125
5.3. Harmadik módosítás	125
5.4. Nyíró erők hiánya	126
6. ÁLTALÁNOS FORMULÁK	127
6.1. Sorfejtések	127
6.2. Alapfeltételek	128
6.3. Rekurzió	128
6.3.1. Véges sorok	128
6.3.2. Egy általános eset	129
6.3.3. Első lépések	131
6.3.4. Második lépések	132
6.3.5. További lépések	132
6.4. Közelítő megoldások	133
6.4.1. Első közelítés	133
6.4.2. Második közelítés	134
IRODALOM	136

A PORTEVIN - LE CHATELIER HATÁS DINAMIKAI INTERPRETÁCIÓJA
(Béda Péter)

BEVEZETÉS	137
AZ ALAPEGYENLETEK	138
A STABILITÁSI FELTÉTELEK	140
A STABILITÁSVESZTÉS TÍPUSAI	141
PÉLDA EGY KONKRÉT ANYAGTÖRVÉNY ESETÉRE	143
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	144
IRODALOM	144
 SZERZŐK	 145
LEKTOROK	148

ELŐSZÓ

A kötetben található előadások a MONTAVID RESEARCH GROUP keretében folytatott „Izotrop kontinuumok mechanikája” elnevezésű kutatási program elmúlt évi eredményeinek egy részét foglalják össze.¹ A tanulmányok a Nemzetközi Kőzetmechanikai Társaság (ISRM – INTERNATIONAL SOCIETY FOR ROCK MECHANICS) Magyar Nemzeti Bizottsága által szervezett hazai konferenciájára készült előadások, amelyek logikai rendbe szerkesztve kerültek jelen kötetbe. Ez már a negyedik könyv az éves kutatások beszámolójából.

Az előadások két témakör köré csoportosulnak, mindkét témakörben három-három előadás szerepel.

Az első témakör az „*A nemrelativisztikus tér- és időviszonyok következményei a kontinuumfizikában*” címmel illethető.

Az első előadás a tér- és időviszonyok GALILEI-féle relativitási elvből és a GALILEI-transzformációból következő következményeit, és az ezekkel kompatibilis fizikai mennyiségtypusokat ismerteti.

A második előadás az első előadásban bemutatott követelményeket valósítja meg a kontinuumfizika kinematikájában, az anyagi sokaságon dolgozó formalizmusban, és megadja a különböző tenzori rendű mennyiségek anyagi időderiváltját.

A harmadik előadás szintén ezekkel az elvekkel összhangban vezet be és vizsgál meg egy új deformációtenzor-értelmezést, mely nem igényli az anyagi sokaság és referencia-időpont felvételét.

A második témakör a „*Rugalmasságtanon innen és túl*” címmel jellemezhető.

A negyedik előadás a konvencionális tervezési gyakorlatban fontos anyagállandóként számon tartott E rugalmassági modulust és ν POISSON-tényezőt vizsgálja. Az előadás rámutat e fogalmak történeti kialakulására és pontosítja értelmezésüket, mivel a legfrissebb kontinuummechanikai kutatási eredmények módosították az anyagtulajdonságokról, anyagállandókról vallott több évszázados felfogásunkat, s mindkettőnél megkérdőjelezhető az „anyagjellemző”, s főképp az „állandó” jelző.

¹ A továbbiak a Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6. kötetében találhatók.

Az *ötödik előadás* egy konkrét rugalmasságtani problémával, a hengeres próbatestek egytengelyű összenyomásakor kialakuló méretviszonyokkal és a kihasasodással foglalkozik. A Kiskönyvtár 3. kötetében bemutatott vezető rendű közelítés pontosítását ismerteti, a két következő rend meghatározása révén.

A *hatodik előadásban* egy izgalmas jelenség, a PORTEVIN–LE CHATELIER-hatás kerül terítékre, a rugalmasságtani anyagegyenlet deformációsebesség-függő kiterjesztésével, a jelenséget dinamikus bifurkációként értelmezve. A tárgyalás megtartja a kontinuumhipotézist, nincs szükség semmilyen mikromechanikai modell alkalmazására.

Az ELŐSZÓ végén, de cseppet sem utolsósorban, nagy köszönet illeti a kötet lektorait, akik számos értékes észrevétellel és javaslattal segítették a szerzők munkáját.

Budapest, 2008. november 7.

A SZERKESZTŐ

A TÉR NEM ABSZOLÚT — A TÉRIDŐ, MINT A GALILEI-FÉLE RELATIVITÁSI ELV KÖVETKEZMÉNYE

Fülöp Tamás

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Ez az írás a GALILEI-féle relativitási elv tér- és időfogalomra vonatkozó következményeit foglalja össze, és ismerteti a GALILEI-transzformáció által kijelölt négyes téridő-mennyiségek — négyesvektorok, négyestenzorok — jellemzőit.

1. BEVEZETÉS

A GALILEI-féle relativitási elvből és a GALILEI-transzformációból következik, hogy már a nemrelativisztikus vagy klasszikus — tehát a speciális és általános relativisztikus elvekkel még nem kompatibilis — fizikában is téridőről kell beszélnünk, és hogy minden fizikai elmélet általános elvi megfogalmazásánál és vizsgálatánál négyes mennyiségekkel (négyesvektorokkal, négyestenzorokkal) kell dolgoznunk. Ez vonatkozik tehát például a kontinuumfizikára is.

E következmények felismerése meg is történt, amikor arra megérték a tudománytörténeti feltételek. Az eredményeket ismertető alapművek [19, 4, 1, 5, 7] hatása azonban nem került bele a fizika általános köztudatába. Ez a lépés pedig szükséges és fontos lenne, és olyan szempontból is hasznos, hogy elkerülhető legyen például az a kontinuumfizikában és kinetikus fizikában több évtizede tartó vita, hogy „sérül-e az anyagi objektivitás elve, érvényesek-e a fizika törvényei minden vonatkoztatási rendszerben”.

Az elterjedést gátló egyik tényező az lehetett, hogy a szóbanforgó következményekhez illeszkedő új matematikai formalizmus némi tanulmányokat igényel, és ez sokak számára elbátortalanítóan hathatott. Pedig a helyzet, egy hétköznapi példával élve, az autóvezetéshez hasonló: aki belefektet az autóvezetéshez szükséges sok furcsa mozdulat és odafigyelés megtanulásába, a tanfolyam végére elsajátított képességgel nagymértékben gazdagítja életének lehetőségeit. A szóbanforgó matematikai leírás is olyan gazdag *fizikai* rálátással ajándékozza meg az azt megtanulókat, ami a „tanfolyam” elején még egyáltalán nem látszik valószínűnek.

Mindazonáltal, hasonlóan a speciális relativitáselmülethez, a GALILEI-féle nem-relativisztikus téridő-fogalomnak is lehetséges olyan tárgyalása, mely nem ebben a

vonatkoztatásirendszer-mentes, affin teres matematikai formában történik, hanem egy „gyalogosabb” leírást használ, amelyben egy választott segéd-inerciarendszer szerinti négyes koordinátákban dolgozunk. Ez az egyszerűsített tárgyalás nem igényel új technikai hozzávalókat, egy koordinátához szokott Olvasó könnyen fókuszálhat a tartalmi megállapításokra. Aztán, amikor már otthonosan mozog az új tudnivalók között, könnyebb az átlépés a vonatkoztatásirendszer-mentes leírásra — és az addig látottak fényében több is lesz a motiváció hozzá.

Ez az írás tehát koordinátás alakban ismerteti a GALILEI-féle relativitási elvből következő tér- és időfelfogást, és a GALILEI-transzformációból következő téridő négyes mennyiségeit — négyesvektorait, négyestenzorait. Ezzel kíván hozzájárulni a kontinuumfizika téridő szempontú modernizálásához. A kitűzött cél az, hogy a kontinuumfizika a jövőben magukra a kontinuumok jelenségeire összpontosíthasson, elhagyva azt a bezavaró technikai elemet, amit a kontinuumok szemlélése közben eddig használt (ti. a vonatkoztatásirendszer-függő leírást), és amely technikai elem — torzító szemüveggént — annyi fejfájást okozott mindezidáig, és zavarta a tisztánlátást.

2. ELSŐ LÉPÉS: A TÉR NEM ABSZOLÚT, TÉRIDŐRE VAN SZÜKSÉG

Ebben a szakaszban tömören, célratörően fogalmazzuk meg a szakasz címében megfogalmazott állítást. Az elhangzottak részletesebb fizikai kifejtése és tudománytörténeti értelmezése a következő szakaszban fog következni.

A tapasztalati úton felismert GALILEI-féle relativitási elv azt mondja ki, hogy az egymáshoz képest mozgó inerciális (tehetetlenségi) vonatkoztatási rendszerek — azaz az olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyek szerint egy magára hagyott test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, — egymással fizikailag egyenértékűek, nincs fizikai jelenség, mely az egyiket a másikhoz képest kitüntetné.

Tapasztalat továbbá, hogy a különböző inerciarendszerek egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgással mozognak. A GALILEI-transzformáció két egyszerű régi mozgástani tapasztalatot fogalmaz meg: ha van két inerciarendszerünk, $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$, ahol a második $\mathbf{V}$ sebességgel mozog az elsőhöz képest, és melyek idő- és térorigói úgy vannak összeillesztve, hogy $t = 0$ -kor az $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ helyhez $t' = 0$ és $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ tartozik,¹ akkor egy tetszőleges, időben pillanatszerű és hely szempontból pontszerű történéshez/eseményhez a $\mathcal{K}$ szerint rendelt t és $\mathbf{r}$, valamint a $\mathcal{K}'$ szerinti t' és $\mathbf{r}'$ értékek között a következő átszámítási képletek érvényesek:

$$t' = t, \tag{1}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t. \tag{2}$$

(Későbbi mérések kimutatták, hogy ezek a képletek csak a fénysebességnél jóval kisebb $\mathbf{V}$ esetén használhatóak, de most abban a jelenségekörben fogunk maradni, ahol nem lépnek fel fénysebességgel összemérhető nagyságú relatív sebességek.)

¹ Amikor inerciarendszereinkben DESCARTES-koordinátatengelyeket is választunk, akkor ezek irányait is össze fogjuk hangolni: az x' irány essen egybe az x iránnyal, az y' az y -nal, és a z' irány a z -vel.

Nos, az első képletről leolvasható, hogy eme tapasztalataink szerint az idő abszolút, mert a transzformációs képlet $t' = f(t)$ alakú.²

Hasonló szemmel ránézve, a második képletről pedig az olvasható le, hogy a tér nem abszolút, ugyanis a transzformációs képlet nem $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r})$ alakú, hanem $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r}, t)$ alakú.³ Az is látható, hogy a térbe belekeveredik az idő is. Ha a térvektorokból szeretnénk konstruálni valami abszolút mennyiséget (olyan mennyiséget, amelyek halmazából már nem visz ki a GALILEI-transzformáció), akkor az időt kell hozzákapcsolni valahogy. Ez megtehető úgy, ha a

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^0 \\ r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

négydimenziós vektort képezzük.⁴ Ilyen négyesvektor alakban a GALILEI-transzformáció

$$\begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{V} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (4)$$

(ahol $\mathbf{I}$ a hármass egységtenzor, és blokkmátrix alakot használtunk), tehát a lehetséges négyesvektorok halmaza már abszolút: nem visz ki belőle a GALILEI-transzformáció.

Abszolút téridő van tehát, és ezen belül abszolút idő, abszolút tér viszont nincs.

3. TUDOMÁNYTÖRTÉNETI ÉRTELMEZÉS

Mint látjuk, az oly ártatlannak tűnő, bizonyos szemszögből szinte triviális GALILEI-transzformációból pillanatok alatt egy sokak számára igencsak meghökkenítő eredmény következik. Érdemes ezért áttekinteni a vonatkozó tudománytörténeti hátteret, hogy tisztábban lássuk a helyzetet.

Idézzük föl először is azt, ahogyan GALILEI a róla elnevezett relativitási elvet megfogalmazta [3].⁵

„Zárkózzál be egy barátod társaságában egy nagy hajó fedélzete alatt egy meglehetősen nagy terembe. Vigyél oda szúnyogokat, lepkéket és egyéb röpködő állatokat, gondoskodjál egy apró halakkal teli vizesedényről is, azonkívül akassz fel egy kis vödört, melyből a víz egy alája helyezett szűk nyakú edénybe csöpög. Most figyelj meg gondosan, hogy a repülő állatok milyen sebességgel röpködnek a szobában minden

² Sőt, az idő egydimenziós lévén, belátható, hogy ekkor szükségképpen $t' = t$. Többdimenziós esetben létezhetnek olyan lehetőségek, amelyet például majd a 3. lábjegyzet említ.

³ Az egy adott inerciarendszerbeli térbeli forgatások $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r})$ alakúak. Nem visznek ki tehát az összes helyvektorok halmazából. Ha csak rajtuk múlna, a tér abszolút lenne.

⁴ Hogy az indexek miért nem alulra, hanem felülre lettek írva, az a 4. szakaszban lesz megindokolva.

⁵ A tartalmi állítások mellett érdemes megfigyelni a szerző ama törekvését is, hogy a szöveg az elbeszélő forma ellenére is tudományosan igényes, körültekintő és átfogó legyen.

irányba, míg a hajó áll. Meglátod azt is, hogy a halak egyformán úszkálnak minden irányban, a lehulló vízcseppek mind a vödör alatt álló edénybe esnek. Ha társad felé hajítasz egy tárgyat, mind az egyik, mind a másik irányba egyforma erővel kell hajítanod, feltéve, hogy azonos távolságokról van szó. Ha, mint mondani szokás, páros lábbal ugrasz, minden irányba ugyanolyan messzire jutsz. Jól vigyázz, hogy mindezt gondosan megfigyeld, nehogy bármi kétely támadhasson abban, hogy az álló hajón mindez így történik. Most mozogjon a hajó tetszés szerinti sebességgel: azt fogod tapasztalni - ha a mozgás egyenletes és nem ide-oda ingadozó -, hogy az említett jelenségekben semmiféle változás nem következik be. Azoknak egyikéből sem tudsz arra következtetni, hogy mozog-e a hajó, vagy sem. Ha ugrasz, ugyanakkora távolságra fogsz jutni, mint az előbb, és bármily gyorsan mozog a hajó, nem tudsz nagyobb ugrani hátrafelé, mint előre: pedig az alattad levő hajópadló az alatt az idő alatt, míg a levegőben vagy, ugrásoddal ellenkező irányban elmozdul előre. Ha társad felé egy tárgyat hajítasz, nem kell nagyobb erővel hajítanod, ha barátod a hajó elején tartózkodik, mint akkor, amikor hátul van. A cseppek éppúgy bele fognak hullani az alsó edénybe, mint előbb, egyetlenegy sem fog az edény mögé esni, pedig az, míg a csepp a levegőben van, több hüvelyknyi utat tesz meg. A halaknak sem kell az edényben nagyobb erőt kifejteni, hogy az edény elejére úszhassanak, és ugyanolyan könnyedséggel fognak a táplálék után menni, ha az edény bármely részén van is. Végül a szúnyogok és a lepkék is különbség nélkül fognak bármely irányba repkedni. Sohasem fog előfordulni, hogy a hátsó falhoz nyomódnak, mintegy elfáradva a gyorsan haladó hajó követésétől, pedig míg a levegőben tartózkodnak, el vannak választva tőle. Ha egy szem tömjént elégetünk, egy kevés füst képződik, mely fel száll a magasba és kis felhő gyanánt lebeg ott, és nem mozdul el sem az egyik, sem a másik irányba.”

A szöveget elemezve, a mozgásokat és egyéb fizikai jelenségeket valamilyen viszonyítási alaphoz (vonatköztatási rendszerhez) képest szoktuk vizsgálni, mely valamilyen anyagi objektumokból épül fel, és ezekhez az anyagi objektumokhoz képest végezzük méréseinket. Ilyen viszonyítási alap lehet egy Földhöz rögzített szoba a falai, padlójával és mennyezetével, például egy épületben egy kikötő partján, vagy egy világítótorny tetején. Vagy lehet ez a szoba egy hajóban is, mely a kikötő védett öblének csendes vizén kikötve nyugszik. De lehet egy egyenletesen mozgó hajóban is, miközben a védett öbölben kifelé halad, vagy egy nyílt vízen haladó hajóban is, miközben olyanok a hajózási viszonyok, hogy nem ingadozik a hajó mozgása (például a kikötőből vagy világítótornyból szemlélve). Lehet aztán egy hánykolódó hajóban is, vagy egy nagyerejű szélvihar miatt épp összedőlőfélben lévő világítótornyban, vagy egy épp földrengést elszenvedő parti épületben. Ez utóbbi viszonyítási alapokban (vonatköztatási rendszerekben) sajnos „hánykolódónak” fogjuk látni a jelenségeket, mert a viszonyítási alapunk, amihez képest mérünk, ide-oda hánykolódik. Ilyen viszonyok közepette pedig nehéz fizikailag hasznos következtetéseket leszűrni. Az előbb említett, békés viszonyok között létező viszonyítási alapok viszont jól, mégpedig GALILEI fenti felismerése szerint *egyformán jól* használhatóak maguknak a jelenségeknek a megfigyelésére, és ezekben a jelenségek *egyformán* játszódnak le. Ezért, bár ezek a nyugodt viszonyítási alapok egymáshoz képest általában egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek, egyikük sem kitüntetett semelyik másikukhoz képest, egyetlen jelenség szempontjából sem.

Másrészt, felismerjük, hogy a magukra hagyott testek egyenes vonalú egyenletes mozgással haladnak.

GALILEI ezt még csak a vízszintes mozgásokra mondta ki ([3], 146–148. o.), illetve az általános mozgások vízszintes részére — ismerte ugyanis a különböző irányú mozgások függetlenségét ([16], 173. o.) —, mert gondja volt a szabadon eső testekkel, melyek ugye szintén magukra hagyottnak mutatkoznak. Ugyanezekben az 1630-as években DESCARTES viszont már általános érvénnyel fogalmazta meg ezt az állítást ([16], 183. o.), ő már a szabadesés mögé is egy bizonyos, szemmel nem látható és közvetlenül nem nyomon követhető, de fizikai hatást tételezett fel ([16], 185. o.).

Az pedig, hogy a magukra hagyott testek egyenes vonalú egyenletes mozgása milyen vonatkoztatási rendszer szerint értendő, az eddigiek alapján kézenfekvő: az említett békés, nyugodt viszonyítási alapok szerint.⁶ Az alapján, hogy a magukra hagyott testek mozgását tehetetlenségi mozgásnak szokták hívni, ezeket a nyugodt viszonyítási alapokat tehetetlenségi/inerciális vonatkoztatási rendszereknek nevezhetjük.

Ami a GALILEI-transzformációt illeti, az először is az abszolút időt mint kísérleti tényt fejezi ki.⁷ Ezután pedig úgymond egyszerű geometriáról van szó: a $\mathcal{K}$ rendszer maga is látja, hogy a $\mathcal{K}'$ rendszer milyen helyvektort mér, és látja, hogy eme t időpillanatban a $\mathcal{K}'$ rendszer origója hol jár, így maga $\mathcal{K}$ is ki tudja számolni, hogy milyen helyvektort kell $\mathcal{K}'$ -nek kapnia.

A szabadesésre aztán NEWTON adott mennyiségileg is sikeres értelmezést, tömegvonzás-elméletével. A tapasztalathoz jól illeszkedő gravitációs erőtvénye azonban pillanatszerűen terjedő távolhatást jelentett. Ezt NEWTON — amellet, hogy egy fizikailag zavaró és nehezen hihető aspektusnak találta, — csak úgy tudta elképzelni, hogy feltételezte egy abszolút tér (és így egy kitüntetett inerciarendszer) fogalmát. Hogy miért is érezte szükségét ennek a hipotézisnek, az (legalábbis a közismert tudománytörténeti értékelésekből) nem világos. Lehetséges, hogy *fizikai* okból, mert az abszolút teret egyfajta közvetítő közegnek gondolta, egy gravitációs éternek (az elektromágneses hullámok terjedését biztosító közeg, az elektromágneses éter később megszületett elképzeléséhez hasonló szóhasználatkal élve). De az is lehet, hogy *matematikai* okból, mert nem tudott elképzelni más matematikai lehetőséget a pillanatszerű távolhatás megfogalmazására.

Mai szemmel nézve, ami az első lehetőséget illeti, az elektromágneses éter fogalmának elvetése óta a fizika gravitációs éter szükségességét sem igényli. A második lehetséges indok ügyében pedig a későbbiekben látni fogjuk (28. oldal), hogy a pillanatszerű távolhatás leírásához valójában nem szükséges abszolút tér, csak az abszolút térszerűség (abszolút egyidejűség) fogalma. Már kortársa, LEIBNIZ is bírálta NEWTONT, hogy az általa vélelmezett abszolút tér, így az abszolút inerciarendszer a tapasztalatoknak megfelelő GALILEI-féle relativitási elv miatt semmilyen módon

⁶ Egyébként ha egyikükben egyenes vonalú egyenletes a mozgás, akkor már a többiben is, hiszen ez sem különböztetheti meg egyik nyugodt viszonyítási alapot a többihez képest.

⁷ A hajózás volt a fő mozgatóereje a minél pontosabb, és a hajók hánykolódásának minél jobban ellenálló, minél zavartalanabban járó és megbízhatóbban működő órák kifejlesztésének. Ennek eredményeként az is kísérleti tapasztalat lett, hogy az idő még a hánykolódó (nemtehetetlenségi) vonatkoztatási rendszerekben is ugyanúgy telik, ahogy az inerciarendszerekben.

nem mutatható ki, tehát fizikailag helytelen feltételezés ([16], 227. o.). A problémát NEWTON is látta, de csak addig jutott el, hogy példát adott egy tehetetlenségi vonatkoztatási rendszer és egy nemtehetetlenségi megkülönböztetésére,⁸ továbbá hogy egy bizonyos misztikus feltételezést fogalmazott meg, miszerint „a világ igen távoli részében nagy tömegek vannak, amelyek rögzítik az abszolút teret” ([16], ugyanott). Az utókor közfelfogása azonban, a newtoni dinamika és gravitációelmélet sikerei miatt — GALILEI felismerése és LEIBNIZ intelme ellenére — a newtoni abszolút tér fogalmát is készpénzként vette át.

A téridő fogalmának megalkotása azonban nemcsak emiatt bizonyult nehéznek. A geometria EUKLIDESZ óta évszázadokon át euklideszi teret jelentett. E felfogás miatt a vektorok nemcsak vektorteret alkottak (melyben mindössze összegük és számszorosuk van értelmezve), hanem euklideszi vektorteret, ahol a vektoroknak hosszuk és bezárt szögük, vagy ezzel ekvivalens módon: pozitív definit skalárszorzatuk is van. Erre a helyzetre BOLYAI és LOBACSEVSKIJ nemeuklideszi geometriára vonatkozó, továbbá GAUSS és RIEMANN görbült geometriákra vonatkozó eredményei voltak aztán fellazító hatásúak. Ezáltal a geometria az általában görbült, helyileg euklideszi jellegű sokaságok fogalmáig általánosodott, de nem tovább.

Ezzel párhuzamosan az is időbe telt, míg az egy- a két- és a háromdimenziós euklideszi tér megismerése után a matematika értelmezte a négy- és többdimenziós euklideszi terek fogalmát. A háromnál magasabb dimenziós terek ráadásul értelmezésük után is megmaradtak matematikai kuriózumként, részben mert gyakorlati hasznuk nem látszott, részben pedig mert a közfelfogás számára túl absztrakt, a szemlélet számára oly nehezen felfogható geometriai képződmények. Márpedig a téridő fogalmához a dimenziószám tekintetében is a gondolkodás fellazítására volt szükség.

A következő felkavaró történés a fizikában következett be: a speciális relativitáselmélet megszületése. Közvetett, majd később közvetlen alátámasztást nyert, hogy az idő sem abszolút, az egyenértékű inerciarendszerek váltásakor idő és tér egyaránt keverednek egymásba. Az abszolút téridő fogalma azonban még ennek felismerése után is csak akkor született meg, amikor MINKOWSKI felismerte, hogy ha az i képzetes egység, a c fénysebesség és a t időkoordináta szorzataként bevezeti az x^1, x^2, x^3 térkoordináták mellett az $x^4 = ict$ képzetes koordinátát, akkor a LORENTZ-transzformáció (a GALILEI-transzformáció relativisztikus változata) eme négydimenziós térben forgatásokat jelent, ezek a vektorok egy négydimenziós euklideszi vektorteret alkotnak. Fontos egyből leszögezni, hogy a képzetes időkoordináta mögött semmi fizikai mélység nincs, ez egy tartalmilag félrevezető és roppant zavaró, pusztán technikailag kiizzadt konstrukció, acélból, hogy egy euklideszi skalárszorzatot, azaz egy euklideszi szerkezetet kapjunk.

Így, hogy egy euklideszi szerkezet bukkant elő, a tudomány végre elkezdett a téridőre mint geometriai objektumra gondolni. Később, amikor elkezdték vizsgálni,

⁸ Egy forgó vödörben kialakuló vízfelszín nem-vízszintes voltára mutatott rá. Egy általánosabb, bár elsőre kissé vulgárisan hangzó megfogalmazással azt mondhatnánk, hogy „inerciarendszer az, amelyhez rögzítve nem szédülünk”. Az ember egyensúlyérzékelő szervének műszaki, egyre nagyobb érzékenységgű reprodukálásával valóban egyre pontosabban ki tudjuk mutatni egy mozgás tehetetlenségi vagy nemtehetetlenségi voltát.

hogy az ict koordináta esetén adódó euklideszi skalárszorzat a valós ct koordináta esetén minnek felel meg, kiderült, hogy az euklideszi skalárszorzat-fogalom egy olyan általánosításának, mely nem pozitív definit (pszeudo-euklideszi skalárszorzat/belső szorzat, azaz egy nemdegenerált, szimmetrikus, bilineáris leképezés). Így ez a szerkezet is fokozatosan belekerült az elfogadott geometriai lehetőségek közé.

A nemrelativisztikus téridő azonban két további vonatkozásban is még általánosabb fogalom, mint a speciális relativisztikus téridő. Általánosabb egyrészt abból a szempontból, hogy a GALILEI-transzformáció semmilyen bűvészkedéssel nem fogható fel euklideszi forgatásként, vagy annak pszeudo-euklideszi megfelelőjeként. Egy négydimenziós euklideszi szerkezet helyett, mint a későbbiekben konkrétan látni fogjuk, egy egydimenziós abszolút idő-szerkezet, továbbá egy, az abszolút térszerű négyesvektorokra értelmezett háromdimenziós euklideszi szerkezet van rajta.⁹

A másik általánosabb aspektus pedig az, hogy — mint azt a (3) képletről leolvashatjuk, — különböző fizikai dimenziójú mennyiségeket kell összetennünk egy négyes mennyiséggé. A három távolság dimenziójú koordináta mellé egy idő (időtartam) dimenziójút kell helyezni. Relativisztikusan ez ügyben könnyű a dolgunk, mert a fénysebesség egy fizikailag kitüntetett megfeleltetést jelent távolság és időtartam között, ezért az $x^0 = ct$ választással élve egyenlő dimenziójú mennyiségeket helyezünk egymás mellé. Nemrelativisztikusan azonban nincs ilyen lehetőségünk. Ezért az euklideszi előzmények fényében roppant formabontónak mutatkozik ez a lépés.

A formabontó aspektus mellett azonban egyből felvetődik az a kérdés is, hogy egyáltalán meg lehet-e ezt a lépést konzisztensen tenni, nem jutunk-e az eltérő dimenziók miatt valahol fizikai ellentmondásba? A válasz az, hogy nem, ehhez pedig először is nézzük meg, hogy miért is merül fel ez a kérdés. Mint már elhangzott, annak megfelelően, hogy a geometria sokáig euklideszi geometriát jelentett, a vektorok fogalmához nemcsak a ma vektortér-tulajdonságnak hívott aspektusai (a vektorok összege és számszorosa) tartoztak hozzá, hanem euklideszi tulajdonságuk is (hosszuk és bezárt szögük, ill. az ezzel ekvivalens euklideszi skalárszorzatuk). Eltartott egy ideig a matematikatörténetben, míg különvált a vektortér fogalma az euklideszi vektortér fogalmától. A nemrelativisztikus téridő vektoraira nem kell euklideszi tulajdonság, csak a vektortér-tulajdonság, a vektorok összege és számmal való szorzata pedig mindketten tiszteletben tartják, ha a vektor különböző komponensei különböző dimenziójúak. Nemrelativisztikusan a két ezen felüli szerkezet (a már említett abszolút idő-szerkezet, és a térszerű négyesvektorok háromdimenziós euklideszi szerkezete) pedig, mint majd látni fogjuk, szintén tiszteletben tartják, hogy az időkoordináta más dimenziójú, mint a térkoordináták. Egy gyors megnyugtatóst már most is adhatunk: a (4) GALILEI-transzformáció konzisztens módon tiszteletben tartja a dimenziók különbözőségét, ahol keveredés van, ott a $\mathbf{V}$ a megfelelő módon viszi egymásba a dimenziókat [ha (2)-re nézünk, r' -be $\mathbf{V}$ révén a megfelelő dimenzióra hozva keveredik bele a t koordináta]. Márpedig a nemrelativisztikus téridő nem jelent mást, mint a GALILEI-transzformáció következményeit. Ezért nyugodt lélekkel várhatjuk, hogy a nemrelativisztikus téridő olyan lesz, hogy a dimenziók különbö-

⁹ Amikor a speciális relativisztikus téridőn végrehajtjuk a(z alkalmas értelemben vett) nemrelativisztikus határátmenetet, akkor a speciális relativisztikus négyes pszeudo-euklideszi szerkezet erre a két nemrelativisztikus szerkezetre vezet, e kettőre esik szét.

zóságát tiszteletben fogja tartani.

Mindenesetre látható, hogy a nemrelativisztikus téridő fogalmának bevezetését mind az euklideszi (és pszeudo-euklideszi) elvárás, mind az azonos dimenziók elvárása hátráltatja. WEYL [19] lépett túl először ezeken a beidegződéseken, és ő vezette be a nemrelativisztikus téridő matematikailag és fizikailag egyaránt kielégítő értelmezését.

WEYL tárgyalása azonban még egy harmadik régi, szintén roppant erős hittel is szakított: hogy a tér- és időszerű történések csak egy koordinátarendszer, és csak egy vonatkoztatási rendszer szemszögéből lennének leírhatóak. Ez a hit részben megszokáson, részben pedig tekintélyvel alapulhatott: egyrészt mindenki ezt gondolta az egyetlen lehetőségnek, senki nem tudott kidolgozni más megközelítést, másrészt ha GALILEI és a többi nagy előd is így gondolkozott — nem is beszélve NEWTON abszolút teréről —, akkor a közfelfogás ezt szentesítette.¹⁰ Még EINSTEIN is, aki pedig igazán öntörvényű bátorsággal lazított fel felfogásokat, ha azok a tapasztalatoknak vagy a következetes gondolkodásnak ellentmondtak, élete végéig inerciális koordinátarendszereken át szemlélte a speciális relativitáselméletet (és az általános relativitáselméletet is koordinátarendszereken keresztül).

WEYL tárgyalásmódja az, ahol a matematikai forma végre pontosan a fizikai tartalmat fejezi ki, nem mást, nem többet és nem kevesebbet. A téridőről a fizika története során kialakult összes tapasztalatunk és konzisztens elképzelésünk helyet kap benne, az így-úgy kialakult inkonzisztens beidegződések pedig nem. A leírásmód összes matematikai szereplője fizikai tartalommal bír, nincsenek pusztán technikai vagy kényelmi szempontból bevezetett segéd-elemek. A WEYL-látásmóddal a téridő¹¹ pontosan annak látszik, amit a fizika valójában kiderített róla.

WEYL téridő-leírását például JAGLOM vizsgálta a geométer matematikus szemszögéből [4], ARNOLD ismertette a mechanika művelőivel [1], a fizikus számára szükséges elvi és gyakorlati részletekig menő kidolgozását MATOLCSI adta meg [5, 7], az egyes fizikai területeken való alkalmazásokról pedig MATOLCSI, VÁN és mások értek el eredményeket [6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 2].

Mint az a Bevezetésben már elhangzott, a WEYL kezdeményezte leírás bizonyos matematikai hozzávalókat igényel. Ezért ebben az írásban a téridő egy formailag-technikailag egyszerűbb megközelítésben kerül ismertetésre, hogy ne kelljen megkövetelni az Olvasótól ezeket a matematikai ismereteket. Egy választott segéd-inerciarendszer szemszögéből, választott idő- és térorigó, valamint DESCARTES-koordináták révén a téridővektorokat koordinátákkal, a téridőpontokat pedig az idő- és térorigó alkotta téridő-origóból hozzájuk húzott téridő-vektorokkal (tehát szintén koordinátákkal) jellemezzük.¹² Így ez a leírás nem fog rendelkezni a WEYL-féle meg-

¹⁰ Természetes, hogy a maga korában DESCARTES koordinátarendszere nagy fejlődést jelentett. A térvektorok és tenzorok koordinátafüggetlen felfogása azonban nagy elvi értékű, rálátást nyújtó fejlemény volt. Hasonlóan nagyértékű vívmány a WEYL-i vonatkoztatásirendszermentes felfogás is.

¹¹ mind a nemrelativisztikus, mind a speciális relativisztikus, ugyanis mindkettő koordináta- és vonatkoztatásirendszermentes leírását megadta

¹² Tárgyalásunk olyan szempontból is leegyszerűsítő lesz, hogy nem teszünk különbséget hármas vektor és koordinátázott alakja között.

közelítés bizonyos elvi–lényegi értékeivel, de közvetett eszközeivel azért képes lesz a nemrelativisztikus téridő összes tulajdonságának bemutatására.

4. TOVÁBBI ISMERKEDÉS A TÉRIDŐVEKTOROKKAL

A 2. szakaszban formailag leolvasott állítást — miszerint a tér nem abszolút, — az előző szakasz fizikai magyarázatait felhasználva képlet nélkül is felismerhetjük, például a most következő gondolatmenet útján. A 14. oldalon bemutatott módon, egy viszonyítási alap (vonatkoztatási rendszer)¹³ a gyakorlatban mindig valamilyen anyagi objektumok által van kijelölve. Ilyenek egy szoba falai, padlója és mennyezete. A szoba mint vonatkoztatási rendszer térpontjai azok a pontok, melyek a szobához képest nyugszanak. Ez a szoba lehet egy kikötőparti épületben, de lehet egy a vízen haladó hajóban is. Eszerint ha például egy hajó belsejében levő szobában az asztalon egy kis piros rubinkő nyugszik, akkor ez a rubinkő (ha elegendően kicsi), akkor a hajóbeli szoba mint vonatkoztatási rendszer egy térpontját jelöli ki. Legyen ennek a szobának a falán egy ablak, és haladjon el a hajó mellett egy másik hajó, amelynek szintén van egy belső szobája, és azon szintén van egy ablak. Legyen olyan szerencsés az elrendezés, hogy a másik hajóban az ablakon kikukucskálva pont belátunk az első hajó szobájába annak ablakán át, és láthatjuk az asztalon a rubinkövet. A másik hajó mozogni látja ezt a rubinkövet — hiszen az együtt mozog a hajójával együtt —, tehát a másik hajó számára a rubinkő nem egy térpontot jelöl, hanem egy mozgást, egy időfüggő helyű folyamatot ír le. Eközben az első hajó továbbra is joggal ragaszkodik hozzá, hogy őneki pedig ez a rubinkő egy térpontot jelöl ki. Ami tehát térpont egy vonatkoztatási rendszer számára, az egy hozzá képest mozgó másik számára nem térpont. A tér nem abszolút.

Ezután folytassuk az ismerkedést a téridővektorokkal, melyeket a továbbiakban négyesvektoroknak is fogunk hívni. Ez ügyben illő először is magyarázatot adni a 2. szakaszban bevezetett két konvencióra. Az egyik, hogy az időt nem mint negyedik, hanem mint nulladik koordinátát ragasztottuk hozzá a helyvektorhoz. Ennek két oka van: egyrészt kerülni akarjuk a rossz emlékű, MINKOWSKI-féle $x^4 = ict$ konvencióhoz való hasonlatosságot. Másrészt így jobban kifejezzük, hogy nem egy további euklideszi típusú koordinátát vezettünk be, hanem egy más fizikai természetűt, melynek még a fizikai dimenziója (durván szólva: a mértékegysége¹⁴) is más, mint a helykoordinátáké.

A másik konvenció, amely magyarázatot érdemel, az, hogy a koordináták miért felső indexet kaptak. Ennek oka az, hogy a téridővektorok mellett hamarosan fel fognak bukkanni az ún. téridő-kovektorok is (a kovektor fogalmának értelmezését ld. majd ott). A hármas vektorok esetén vektor és kovektor között természetes azonosítás van,¹⁵ az euklideszi skalárszorzat révén, ezért a hármas mennyiségek körében nem is szoktak szóba kerülni a hármas kovektorok. A négyesvektorok és a négyes

¹³ A szakirodalomban előfordulnak a „megfigyelő”, és a „megfigyelő-mező” elnevezések is.

¹⁴ Hasonlóan a téridő vonatkoztatási rendszer-mentes tárgyalásához, a fizikai dimenzióval rendelkező mennyiségeknek — távolságoknak, időtartamoknak, tömegértékeknek, stb. — is létezik mértékegységmentes tárgyalása. Ezt MATOLCSI adta meg (ld. [7]).

¹⁵ Ezt az azonosítást a 18. lábjegyzet fogja majd elmagyarázni.

kovektorok között azonban nincs, és a relativitáselméletben kialakult hagyományt követve mi is itt úgy fogjuk megkülönböztetni a négyesvektort és a négyes kovektort, hogy előbbi felső, utóbbi alsó indexeket kap.

Ízlelgessük akkor most tovább a téridőn való életet és a négyesvektorokat.

Annak megfelelően, hogy hely és idő a $\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$ módon olvad össze, egy pontszerű test $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ mozgásának négyes megfelelője a

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r}(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

négyesvektor értékű függvény lesz. Ez írja le a pontszerű test téridőbeli sorsát, ez a függvénygörbe a test világvonala (a relativitáselmélet szóhasználatával élve).

Ha idő szerint deriváljuk ezt a függvényt, a

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v}(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

eredményt kapjuk. Mivel egy négyesvektort deriváltunk egy négyes-skalár (a GALILEI-invariáns abszolút idő) szerint, ez az eredmény minden időpillanatban egy négyesvektor kell legyen (amint az egyszerűen belátható). Ha, ezt ellenőrizendő, direktben végrehajtjuk rajta a $\mathcal{K}$ inerciarendszerről a $\mathcal{K}$ -hoz képest $\mathbf{V}$ sebességgel mozgó $\mathcal{K}'$ -re áttérés GALILEI-transzformációját, azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v}(t) - \mathbf{V} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

ami tényleg a várt eredmény (a nemrelativisztikus sebesség-összetevési formula). Leszűrhetjük ebből, hogy a hármas $\mathbf{v}$ sebességekhez az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

négyessebesség rendelődik hozzá.¹⁶ Ebből az is következik, hogy az $m\mathbf{v}$ hármas lendület négyes megfelelője az $\begin{pmatrix} m \\ m\mathbf{v} \end{pmatrix}$ négyesvektor.

Deriváljuk (6)-ot még egyszer: ekkor a

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}(t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

¹⁶ A relativitáselméletben általában nem r , hanem x betűt használnak a négyesvektorok jelölésére, és v helyett u -t a négyessebességekre. A kontinuumfizikában azonban $\mathbf{u}$ a hármas elmozdulásvektor-mezőt szokta jelölni, mely szintén kinematikai jellegű mennyiség, így a relativisztikusan megszokott jelölésből a kontinuumfizikában nagy zavar keletkezne. Ezenkívül fogalmilag szerencsésebbnek tűnik, ha ugyanolyan betűt használunk a hármas vektorkoordinátákra és négyesre kiegészítettjükre. (Ez ráadásul jelöléstechnikailag is gazdaságosabb.)

négyesvektor-függvényt kapjuk. Ez tehát a négyesgyorsulás vektor. Ez a GALILEI-transzformációra nézve invariánsnak bizonyul:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}(t) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Következmény, hogy a tömegpont mechanikai NEWTON-egyenletének, $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ -nek a négyes megfelelője az

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (11)$$

négyesvektor-egyenlet, a hármass erő négyes megfelelője pedig a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (12)$$

tulajdonságú négyeserő-vektor. (Maga az, hogy az $\mathbf{a}$ hármassgyorsulás és az $\mathbf{F}$ hármasserő invariánsak a GALILEI-transzformációra, természetesen régről ismert. Itt most csak négyes aspektusukkal ismerkedünk meg.)

5. NÉGYES KOVEKTOROK, NÉGYESTENZOROK

Ettől a ponttól kezdve a képletek zömét indexes alakban lesz kényelmes megadni. Ezért most vegyük sorra az indexes képletekben alkalmazott konvenciókat.

1. Az i, j, k indexek hármass indexeket fognak jelölni, azaz 1-től 3-ig vehetnek föl értékeket.
2. Az a, b, c indexek négyes indexeket fognak jelölni, azaz 0-tól 3-ig vehetnek föl értékeket.
3. Az indexekre való összegzéskor alkalmazni fogjuk az EINSTEIN-konvenciót: a kétszer előforduló indexek esetén nem írjuk ki az összegzést, tehát a kétszer előforduló indexek esetén automatikusan összegzés értendő — az i, j, k indexekre 1-től 3-ig, az a, b, c indexekre pedig 0-tól 3-ig, azaz például

$$f^i g^i \equiv \sum_{i=1}^3 f^i g^i, \quad (13)$$

és

$$p_a Q^{ab} \equiv \sum_{a=0}^3 p_a Q^{ab}. \quad (14)$$

Indulásként írjuk föl a négyesvektorok GALILEI-transzformációját, és a transzformáció inverzét indexes alakban:

$$r^{0'} = r^0, \quad r^{i'} = r^i - V^i r^0, \quad (15)$$

$$r^0 = r^{0'}, \quad r^i = r^{i'} + V^i r^{0'}. \quad (16)$$

Az alább következő további mennyiségfajták transzformációs szabályaira is érvényes lesz az az egyszerű szabály, hogy az inverz transzformáció képletét úgy kaphatjuk meg az eredetiből, hogy abban minden vesszőtlen koordinátát vesszősre cserélünk és fordítva, $\mathbf{V}$ helyére pedig $-\mathbf{V}$ -t helyettesítünk.

Következő lépésként vezessük be a négyes kovektor fogalmát. Mint kovektor alatt általában, itt egy olyan lineáris leképezést értünk, mely minden vektorhoz — esetünkben: minden négyesvektorhoz — egy valós számot rendel. Annak megfelelően, hogy a vektorokat egyoszlopos $\begin{pmatrix} r^0 \\ r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix}$ mátrixba írjuk, a kovektorokat egysoros $(k_0 \ k_1 \ k_2 \ k_3)$ mátrixszal, a hatásukat pedig a szokásos mátrixszorzással reprezentálhatjuk:

$$k_a r^a = (k_0 \ k_1 \ k_2 \ k_3) \begin{pmatrix} r^0 \\ r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Ahogy az már említésre került, ezeknek a k_a négyeskovektor-koordinátáknak alulra írjuk az indexét, megkülönböztetve a négyesvektoroktól. A megkülönböztetés fontos, mint azt mindjárt látni fogjuk: vezessük ugyanis le a kovektor-koordináták inerciarendszer-váltásra való transzformálódását. A követelmény az, hogy a kovektor hatása egy invariáns GALILEI-skalár legyen. (Ekkor fogjuk GALILEI-kovektornak tekinteni.)

$$\begin{aligned} (k_a r^a)' &\equiv k_a' r^{a'} = k_0' r^{0'} + k_1' r^{1'} + k_2' r^{2'} + k_3' r^{3'}, \quad \text{továbbá} \\ &= k_a r^a = k_0 r^0 + k_1 r^1 + k_2 r^2 + k_3 r^3 = \\ &= k_0 r^{0'} + k_1 (r^{1'} + V^1 r^{0'}) + k_2 (r^{2'} + V^2 r^{0'}) + k_3 (r^{3'} + V^3 r^{0'}) = \\ &= (k_0 + V^1 k_1 + V^2 k_2 + V^3 k_3) r^{0'} + k_1 r^{1'} + k_2 r^{2'} + k_3 r^{3'}, \end{aligned} \quad (18)$$

ahol a második sorban a követelményünket használtuk fel, a harmadik sor pedig (16) révén adódott. Követelményünknek minden r^a -ra, így minden $r^{a'}$ -re teljesülnie kell. Ezért az első és az utolsó sor egyenlőségének minden $r^{0'}$, $r^{1'}$, $r^{2'}$, $r^{3'}$ esetén fenn kell állnia. Következésképp $r^{0'}$, $r^{1'}$, $r^{2'}$, $r^{3'}$ első sorbeli együtthatóinak rendre meg kell egyezniük az utolsó sorbeli együtthatókkal. Innen leolvashatjuk, hogy

$$k_0' = k_0 + V^i k_i, \quad k_i' = k_i, \quad (19)$$

vagy hármasektor-jelöléssel

$$k_0' = k_0 + \mathbf{V} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k}. \quad (20)$$

Láthatjuk tehát, hogy a négyeskovektor-koordináták máshogy transzformálódnak, mint a négyesvektor-koordináták. A négyes kovektorok lényegileg másfajta mennyiségek, mint a négyesvektorok. Erre a megkülönböztetésre utal az a néhol

alkalmazott szóhasználat is, amely a vektorkoordinátákat kontravariáns, a kovektor-koordinátákat kovariáns koordinátáknak nevezi.¹⁷

A fizikából ismert nevezetes példa négyes kovektorra az $f(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ alakú síkhullámokban szereplő ω körfrekvencia és $\mathbf{k}$ hullámszámvektor által alkotott $(-\omega \quad \mathbf{k})$ négyes mennyiség. Valóban, az f függvény hasáiban szereplő

$$\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t = (-\omega)t + \mathbf{k}\mathbf{r} \quad (21)$$

kombináció inerciarendszer-független, azaz GALILEI-skalár kell legyen. Ezért $(-\omega \quad \mathbf{k})$ egy négyes kovektort kell alkosson. Ezért transzformációs képlete (20)-nak megfelelő kell legyen. Eszerint a hármas hullámszámvektor invariáns marad, a körfrekvencia pedig egy, a $\mathbf{V}$ áttérési sebességgel arányos eltolódást szenved. Ez az eltolódás pedig nem más, mint pontosan a jól ismert DOPPLER-effektus.

Térjünk át ezután a négyestenzorokra. Egy euklideszi vektortér — mint a megszokott hármas térvektoroké — esetén a tenzorok egyszerűen a vektorokat vektorokba vivő lineáris leképezések, illetve, az euklideszi szerkezet révén ezzel ekvivalens módon, a bármely két vektorhoz valós számot rendelő bilineáris (mindkét változóban lineáris) leképezések. A négyesvektorok esetén nincs sem euklideszi, sem más kitüntetett szerkezet, mely a négyesvektorokat a négyes kovektorokkal azonosítja¹⁸ (eltérő transzformációs tulajdonságuk miatt ilyen megfeleltetés egyszerűen nem lehetséges), és ahogy vektorból kétfajta adódik, ennek megfelelően tenzorokból négyfajta változat létezik. Ha a tenzorokra mint vektor-féleségből vektor-féleséget készítő leképezésre gondolunk, akkor két lehetőség az, hogy vektorra vagy kovektorra hat-e, az ettől független másik két lehetőség pedig az, hogy a leképezés eredménye vektor-e avagy kovektor. Ha pedig a tenzorokat bilineáris, szám értékű leképezésként fogjuk föl, akkor az egyik változó is kétféle lehet: vektor vagy kovektor, és ettől független módon a másik változó szintén lehet vektor vagy kovektor. Az indexes írásmódban a négyféle lehetőséget a tenzor két indexének alsó ill. felső helyzetével tudjuk megkülönböztetni.

Vegyük sorra egyesével a négy lehetőséget. Annak megfelelően, hogy a felülindeksen jelölt r^a négyes vektorokat egyszerűen vektornak hívhatjuk (mely egyszerűbb, mint a kontravariáns típusú vektor elnevezés), a T^{ab} mindkét indexében kontra-

¹⁷ Az inerciarendszer-váltó GALILEI-transzformáció mellett megvizsgálhatjuk az egy inerciarendszeren belüli térbeli forgatásra való transzformációt is. Az derül ki, hogy ilyenkor a négyeskovektor-koordináták a négyesvektor-koordinátákkal azonos képlet szerint transzformálódnak: a nulladik komponens invariáns marad, a térszerű koordináták pedig a hármasvektorokkal azonos módon transzformálódnak. Ez fog öröklődni a hamarosan bevezetésre kerülő tenzorokra, kotenzorokra és vegyes tenzorokra is. Ezért a továbbiakban a forgatásokkal nem foglalkozunk, csak az inerciarendszer-váltás nemtriviálisabb aspektusával. Megemlíthető emellett az is, hogy a tértükrözés- és időtükrözés-transzformációk behozzák a pszeudoskalár, négyes pszeudovektor, stb. mennyiségeket is. Ezeknek azonban kevés szerep jut a nemrelativisztikus fizikában, ezért e helyütt ezek ismertetésére nem kerül sor.

¹⁸ A vektor és kovektor közti azonosítás, koordinátás nyelven elmagyarázva azon alapszik, hogy egy kovektornak vektorra való hatását és két vektor euklideszi (vagy pseudo-euklideszi) skalárszorzatát egyaránt lehet egy sormátrix és egy oszlopmátrix mátrixszorzataként reprezentálni. Ezt az azonosítást műveljük ösztönösen, amikor két vektor euklideszi skalárszorzatát úgy számítjuk ki mátrixszorzatként, hogy az egyik vektor komponenseit oszlopmátrixból sormátrix alakba rendezzük át. Ezzel ugyanis vektorból kovektorba alakítjuk át.

variáns (mindkét változójában kovektorra ható bilineáris) mennyiséget egyszerűen tenzornak, négyestenzornak hívhatjuk. Amikor bilineáris mennyiségként tekintünk rá, két négyes kovektorra hat, és azt követeljük meg, hogy a $T^{ab}k_a l_b$ alakú eredmény GALILEI-skalár legyen. Amikor pedig egyváltozós, lineáris leképezésként szemléljük, akkor egy négyes kovektorhoz egy négyesvektort kell rendeljen, $T^{ab}k_b = r^a$ formában. (Belátható, hogy a két követelmény ekvivalens.)

A négyestenzorok komponenseinek GALILEI-transzformációs képletét megkaphatjuk a kovektoroknál használt (18) eljárással. Akár úgy, hogy $T^{ab}k_a l_b$ invarianciája, $(T^{ab}k_a l_b)' = T^{ab}k_a l_b$ a követelmény — tetszőleges k_a, l_b négyes kovektorokra —, akár úgy, hogy $T^{ab}k_b$ négyesvektorként való transzformálódását írjuk elő, tetszőleges k_b négyes kovektorra. A kissé hosszadalmas, de automatikusan végrehajtható számolást mellőzve, az eredmény:

$$\begin{aligned} T^{00}' &= T^{00}, & T^{i0}' &= T^{i0} - V^i T^{00}, & T^{0j}' &= T^{0j} - V^j T^{00}, \\ T^{ij}' &= T^{ij} - V^i T^{0j} - V^j T^{i0} + V^i V^j T^{00}. \end{aligned} \quad (22)$$

A fizikában ismert nevezetesebb négyestenzorok egyike a tömegpontok $r^a(mv^b) - r^b(mv^a)$ négyes perdület¹⁹ mennyisége. Ennek tér-térszerű része (a tenzorok részeinek elnevezését lásd később) a megszokott hármass perdület, megfordítva pedig: a hármass perdület GALILEI-konzisztens négyes kiterjesztése ez a négyestenzor. A másik nevezetes négyestenzor az elektrodinamika $\mathbf{D}$ elektromos gerjesztéséből és $\mathbf{H}$ mágneses gerjesztéséből²⁰ GALILEI-konzisztensen megalkotható $\mathcal{G}$ négyestenzor. Erre a mennyiségre az ezután sorra kerülő négyes kotenzorok kapcsán hamarosan visszatérünk.

Következzenek a sorban tehát most a négyes kotenzorok. Bilineáris mennyiségként ezek két négyesvektorhoz rendelnek GALILEI-skalárt, $C_{ab}r^a s^b$ módon. Lineáris mennyiségként pedig egy négyesvektort egy négyes kovektorba képeznek, $C_{ab}r^b = k_a$ formában.

A kotenzor (avagy ko-kovariáns típusú tenzor) komponenseinek GALILEI-transzformálódása szintén az előzőekhez hasonlóan határozható meg. Ismét csak az eredményt közölve:

$$\begin{aligned} C_{00}' &= C_{00} + V^i C_{i0} + V^j C_{0j} + V^i V^j C_{ij} = \\ &= C_{00} + V^i (C_{i0} + C_{0i}) + V^i V^j C_{ij}, \\ C_{i0}' &= C_{i0} + V^j C_{ij}, & C_{0j}' &= C_{0j} + V^i C_{ij}, & C_{ij}' &= C_{ij}. \end{aligned} \quad (23)$$

Mint a fizikából ismert nevezetes példa, az $\mathcal{F}$ elektrodinamikai térerősségtenzor említhető meg, mely az $\mathbf{E}$ elektromos térerősségből és a $\mathbf{B}$ mágneses térerősségből²¹ alkotható GALILEI-konzisztens mennyiség. Belátható, hogy az $\mathcal{F}$ négyes kotenzor és

¹⁹ kétszer olyan hosszú, nehezebb, sokkal kevésbé kifejező és nehezebben megjegyezhető névén: impulzuszómomentum

²⁰ történeti, mai megértésünk szintjén már meghaladott nevükön: elektromos eltolás és mágneses térerősség

²¹ történeti, mára meghaladott névén: mágneses indukció

a $\mathcal{G}$ négyestenzor révén az elektrodinamika MAXWELL-egyenletei, és a ponttöltésre ható LORENTZ-féle erőtvény egyaránt megfogalmazhatóak GALILEI-konzisztens módon. Inkonzisztencia csak a $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$ ún. anyagi egyenletek kapcsán lép föl: ezeket az anyagi egyenleteket nem lehet GALILEI-konzisztens módon kiróni, hiszen $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ nem azonos típusú négyestenzorok. Csak egyetlen kiválasztott inerciarendszerben lehet kiróni, és akkor ez az inerciarendszer az elektrodinamikai jelenségkör szempontjából egy kitüntetett vonatkoztatási rendszer lenne.²² Ez a kitüntetett inerciarendszer az éter, vagy annak legalábbis egy minimális, de elkerülhetetlen formája (nem baj, ha nincs köze az elektromágneses hatások továbbításához, mint azt történetileg az éterről, mint egy bizonyos közegről gondolták, de legalábbis egy kitüntetett inerciarendszerre szükség van). Mint azt tudjuk, a GALILEI-féle relativitási elv eme sérülését kísérletileg nem sikerült kimutatni. Ezért úgymond az a feladat adódott az elméleti fizika számára, hogy a GALILEI-transzformáció helyett keressen egy olyan másikat, amely szintén kifejezi az inerciarendszerek egyenértékűségét, viszont lehetővé tesz egy természetes, kitüntetett megfeleltetést négyestenzor és négyes kotenzor között. A LORENTZ-transzformáció ilyenek adódott, ugyanis az általa invariánsan hagyott négyes pszeudoeuklideszi szerkezet természetes azonosítást nyújt négyesvektor és négyes kovektor között, és következésképp a négyfajta tenzor mindegyike között is.²³

Térjünk most át a két hátralevő, úgynevezett vegyes tenzor típusának ismertetésére. Ezek egyike az $L^a_b r^b = s^a$ módon négyesvektort négyesvektorba képező lineáris leképezés, avagy az egy kovektorhoz és egy vektorhoz $L^a_b k_a r^b$ módon skalárt rendelő bilineáris leképezés. Az ilyen kontra-kovariáns tenzorkomponensek GALILEI-transzformálódási szabálya (a levezetést ismét nem közölve)

$$\begin{aligned} L^{0'}_0 &= L^0_0 + V^j L^0_j, & L^{0'}_j &= L^0_j, & L^{i'}_j &= L^i_j - V^i L^0_j, \\ L^{i'}_0 &= L^i_0 - V^i L^0_0 + V^j L^i_j - V^i V^j L^0_0. \end{aligned} \quad (24)$$

A másik vegyes tenzortípus pedig a négyes kovektorokat négyes kovektorokba képező lineáris, avagy egy vektort és egy kovektort skalárba képező bilieáris leképezések, $N_a^b k_b = l_a$, illetve $N_a^b r^a k_b$ módon. Az ilyen ko-kontravariáns tenzorkomponensek transzformációs szabálya pedig a következőnek bizonyul:

$$\begin{aligned} N^{0'}_0 &= N^0_0 + V^i N^0_i, & N^{0'}_i &= N^0_i, & N^{j'}_i &= N^j_i - V^j N^0_i, \\ N^{j'}_0 &= N^j_0 + V^i N^j_i - V^j N^0_0 - V^i V^j N^0_i. \end{aligned} \quad (25)$$

A két vegyes típusú tenzorra nehezebb közismert fizikai példát mutatni.

A négyestenzor-komponensek mindegyikét reprezentálhatjuk mátrix formában. A mátrixalak azonban nem fogja jelezni, hogy a szóbanforgó tenzor a négy típus melyikéhez tartozik. Az a konvenció, hogy a kovektorokat sormátrix, a vektorokat

²² Amikor jelen van egy folytonos, elektromágnesesen aktív közeg, akkor természetes és jogos az e közeghez rögzített, fizikailag kitüntetett vonatkoztatási rendszerben róni ki. Vákuumban azonban nincs jelen elektromágnesesen kitüntetett vonatkoztatási rendszer, tehát bajban vagyunk.

²³ Természetesen a fizika tudománytörténetileg nem így élte meg ezeket a történeteket, ez már csak a kellő távolságból rálátni tudó utókor elemzése.

oszlopmátrix alakban reprezentáltuk, a tenzorokra már nem terjeszthető ki. Egy másik érvágás pedig az, hogy ha a tenzorok vektorokra való hatását mátrixszorzásokkal szeretnénk reprezentálni, akkor már azt sem tudjuk tartani, hogy a kovektorok sormátrixként legyenek megjelenítve, a vektorok pedig oszlopmátrixként. (Gondolkodjunk el például a $T^{ab}k_a l_b$ kombináció mátrixszorzatként való reprezentálásán.) Lehetséges olyan konvenciót kialakítani, amellyel a mátrixszorzással való reprezentálás fenntartható, és a mátrixok mögötti négyféle tenzorfajta típusa is kiderül, erre a technikai részletre azonban ez a bevezető írás nem tér ki. Mindenesetre, függetlenül attól, hogy használhatjuk-e a mátrixszorzást a lineáris műveletek reprezentálására, célszerű mindegyik tenzortípust egyformán úgy reprezentálni mátrixalakban, hogy első indexe a sorindex, második indexe az oszlopindex. Például tehát,

$$\{T^{ab}\} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{0j} \\ T^{i0} & T^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Mivel a mátrix-reprezentáció nem tesz különbséget a négyfajta tenzor között, ezért további csapdákat is rejt azok számára, akik hozzászórtak az euklideszi környezethez, ahol a vektor és kovektor közötti különbséggel nem kellett törődni. Az egyik ilyen az, hogy a transzponálás általánosan azt csinálja, hogy a tenzor mint bilineáris leképezés két változóját felcseréli. Namármost, egy vegyes tenzor esetén ez azt jelenti, hogy a tenzor típusa is felcserélődik, egy ko-kontra-tenzorból kontrakotenzort csinál, és fordítva: $L^a_b \mapsto (L^T)_b^a$, és $N_a^b \mapsto (N^T)^b_a$ (ahol T a transzponálást jelöli). Ezért a vegyes tenzoroknak nincs GALILEI-konzisztens szimmetrikus és antiszimmetrikus része. Egy adott inerciarendszerben a mátrixnak persze képezhetők lennének ezek a hagyományos mátrix-értelemben, de az eredmények a négy GALILEI-konzisztens tenzorfajta egyikébe se tartoznának. Másképp megfogalmazva, tulajdonképpen arról van itt szó, hogy egy kétváltozós, első változójában kovektorra, a másodikban vektorra ható függvény nem adható össze egy első változójában vektorra, a másodikban kovektorra ható függvénnyel.

Egy másik hasonló buktató az, hogy nyoma (spurja, trace-e) viszont csak a két vegyes tenzorfajtnak van (GALILEI-konzisztens módon): L^a_a illetve N_a^a ; a tenzoroknak és a kotenzoroknak nincs. Egy adott inerciarendszerben, mint mátrixnak ugyan képezhető lenne, de az eredmény nem lenne GALILEI-skalár.

Zárjuk ezt a szakaszt azzal a megjegyzéssel, hogy a magasabbrendű, „három- és többindexes” tenzorok transzformációs szabályai egyre bonyolultabbak, viszont a fenti képletekben megfigyelhető mintázatok alapján levezetés nélkül is kikövetkeztethetők.

6. A TÉRIDŐ SZERKEZETE

Elhangzott már többször, hogy a nemrelativisztikus téridő vektorain nem egy euklideszi, vagy akár pszeudo-euklideszi szerkezet van, hanem bizonyos más szerkezetek. Ismerkedjünk most meg végre ezekkel közelebbről. Vegyük magunk elé e célból a

négyesvektorok és a négyes kovektorok korábban már megismert GALILEI-transzformációs képleteit:

$$r^{0'} = r^0, \quad r^{i'} = r^i - V^i r^0 \quad \text{azaz} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V} r^0; \quad (27)$$

$$k_0' = k_0 + V^i k_i = k_0 + \mathbf{V} \mathbf{k}, \quad k_i' = k_i \quad \text{azaz} \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k}. \quad (28)$$

A négyesvektorok nulladik komponense, melyet a négyesvektor időszerű részének nevezünk, invariáns (az idő abszolút). Ezért bevezethető a mátrixalakban

$$\{\tau_a\} := (1 \quad \mathbf{0}) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (29)$$

módon megadható τ_a kovektor. Hogy valóban kovektort vezettünk be, az a kovektor (28) transzformációs képletéből rögtön ellenőrizhető: τ_a alakja minden inerciarendszerben ugyanaz, tehát definíciója nem függött az inerciarendszertől, amelyben a (29) alakkal definiáltuk. τ_a hatása egy négyesvektorra

$$\tau_a r^a = r^0, \quad (30)$$

vagyis τ_a a négyesvektorok abszolút időszerű részét olvassa le. Ezért időkiértékelésnek (pontosabb szóhasználattal: időtartam-kiértékelésnek) nevezhetjük.

A négyesvektorok ún. térszerű része, azaz az $\mathbf{r}$ hármas része viszont nem abszolút. Kivételt képeznek a

$$\tau_a q^a = 0 \quad (31)$$

tulajdonságú, tehát $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ alakú téridővektorok, amelyek térszerű része GALILEI-invariánsnak bizonyul. Az ilyen alakú négyesvektorokat térszerű négyesvektoroknak nevezzük (hiszen időszerű részük nincs). A térszerűség fogalma abszolút. Ügyeljünk arra, hogy az időszerűség fogalma viszont nem: ha egy négyesvektornak csak az időszerű része nemnulla, akkor egy másik inerciarendszerre áttérve már nemnulla lesz a térszerű része is.

A térszerű vektorok invariánsak, ezért a hármas skalárszorzatuk, a $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$ négyesvektorok

$$\mathbf{q} \hat{\mathbf{q}} = q^i \hat{q}^i \quad (32)$$

kombinációja is invariáns. A négyesvektorok két abszolút szerkezetének pontosan ez a két most megismert leképezést találjuk: az időkiértékelést és a térszerű vektorok háromdimenziós euklideszi szerkezetét.²⁴

Nézzünk most rá a 4. szakaszban megismert $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ négyessebesség-vektorra. Ennek időkiértékeltje 1, tehát a négyessebességek nem térszerű vektorok. Ráadásul nem is alkotnak vektorteret: az összeadás is és a számmal szorzás is kivezet közülük (az általános négyesvektorok halmazába): mindkettő elrontja az időszerű komponens 1 voltát. A négyessebességek ún. affin teret alkotnak: ők maguk nem alkotnak

²⁴ Mármost a vektortér-tulajdonságokon, a vektorok összegén és számszorosán felül.

vektorteret, de különbségeik igen. Mi több, különbségeik időszerű része nulla, így a különbségeik térszerű vektorok. A négyessebességek halmaza tehát egy háromdimenziós euklideszi affin teret alkot (ui. alulfekvő vektorterük, azaz különbségeik halmaza a térszerű vektorok háromdimenziós euklideszi vektortere).²⁵

A szintén a 4. szakaszban megismert $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$ négyesgyorsulás-vektorról már rutinosan állapíthatjuk meg, hogy térszerű vektor. Ugyanígy térszerű vektor a $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}$ négyeserő vektor is.

Most elővehetjük a NEWTONnak gondot okozó tömegvonzási erőtvény kérdését. Ha egy m tömegű tömegpont a $\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$ -el kijelölt téridőpontban, egy M tömegű pedig a $\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$ -vel kijelölt téridőpontban jár, akkor utóbbi az előbbire pillanatszerűen, tehát egyidejű módon hat a

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{Mm}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \quad (33)$$

hármass, azaz

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} = -\gamma \frac{Mm}{\left| \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \right|^3} \left[\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \right] \quad (34)$$

négyes erővel, ahol $|\cdot|$ a térszerű vektorok euklideszi hosszát jelöli, γ pedig a gravitációs állandó. Láthatjuk tehát, hogy a pillanatszerű távolhatáshoz nincs szükség egy abszolút térhez, csak egy olyan téridőhöz, melyen van abszolút egyidejűség, és (a távolságfüggéshez) az egyidejű téridőpontokat összekötő téridővektorokon egy euklideszi szerkezet.

Ezzel a nemrelativisztikus téridő alapvető ismertetése befejeződött. Az alább következő két szakasz bizonyos további, technikaibb jellegű ismereteket foglal össze. Az e részletek iránt most nem érdeklődő Olvasó nyugodtan eltekinthet átolvasásuktól, és áttérhet az Utószóra.

7. A NÉGYES MENNYISÉGEK FŐ JELLEGZETESSÉGEI

A nemrelativisztikus téridő időkiértékelése és térszerű euklideszi szerkezete a négyesvektorok alaptulajdonságait fejezik ki. A négyes kovektorok, négyestenzorok és magasabb mennyiségek alapvető jellemzői a négyesvektorok tulajdonságaiból következnek, azokból származtathatóak.

²⁵ Ez az írás az egyszerűség kedvéért a négyes téridővektorokat és a négyessebességeket egy kalap alá veszi, és ugyanúgy a térszerű téridővektorokat a négyessebességek különbségeinek vektorterével, pedig mindkét esetben fizikailag különböző dimenziójú mennyiségekről van szó. A fizikai dimenziók (a mértékegységek témaköre), és a négyesvektorok (-tenzorok, stb.) fizikai dimenziójának nyilvántartása MATOLCSI könyvében [7] van tisztességesen ismertetve. Jelen írás ebből a szempontból is leegyszerűsítő, de megnyugtatóan elmondható, hogy mindaddig, amíg különböző dimenziójú négyesvektorokat nem akarunk összeadni, nem követünk el hibát. Különböző dimenziójú térszerű négyesvektorok skalárszorzatát például szabad venni — természetesen annak tudatában, hogy az eredmény annak megfelelő dimenziójú lesz.

A négyes kovektorokra e módon öröklődő speciális szerkezet az a lineáris leképezés, mely egy kovektorhoz hozzárendeli a róla leolvasható, GALILEI-invariáns térszerű részét, mely egy térszerű vektorként értelmezhető. A négyes kovektorok térszerű része [mely alatt a $(k_0 \ \mathbf{k})$ négyes mennyiség $\mathbf{k}$ hármas részét értjük] ugyanis (28) szerint nem transzformálódik inerciarendszer-váltáskor. Ez az invariáns hármas mennyiség négyes szemmel egy térszerű négyesvektor abszolút térszerű részeként fogható föl. Ez a térszerű négyesvektor a négyes kovektorból azzal a σ^{ab} négyestenzorral készíthető el, melyre $\sigma^{a0} = 0$, $\sigma^{0b} = 0$, $\sigma^{ij} = \delta^{ij}$,²⁶ vagyis mátrixalakban

$$\{\sigma^{ab}\} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Hogy valóban négyestenzorról van szó, az (22) alapján ellenőrizhető. A k_a kovektor abszolút térszerű részét tehát $\sigma^{ab}k_b$ alakban olvashatjuk le, az eredmény térszerű négyesvektorként van értelmezve [azaz nem mint $\mathbf{k}$, hanem mint a négyes szemszöghöz és kívánalmakhoz igazított $(0 \ \mathbf{k})$].²⁷

A négyes kovektorokra mint négyesvektorokon ható lineáris leképezésekre, azaz függvényekre gondolva, σ^{ab} valójában nem más, mint e függvények megszorítása értelmezési tartományuk egy részére: megszorításuk az általános négyesvektorok halmazáról a térszerű négyesvektorok halmazára. E megszorítások tehát a térszerű vektorok kovektoraivá teszi négyes kovektorainkat. A térszerű vektorok kovektorai pedig a hármas euklideszi szerkezet révén azonosítódnak a térszerű vektorokkal. A megszorítás tehát négyes szemmel nézve térszerű négyesvektorokat készít a négyes kovektorokból.

Későbbi felhasználások számára érdemes a $\sigma^{a0} = 0$, $\sigma^{0b} = 0$ tulajdonságokat a

$$\tau_a \sigma^{ab} = 0, \quad \tau_b \sigma^{ab} = 0 \quad (36)$$

tulajdonságok formájában is megfogalmazni.

A négyes kovektorok időszerű része ellenben nem abszolút. Kivétel ez alól csak az időszerű négyes kovektoroknál lép föl: azoknál a speciális kovektoroknál, melyek térszerű része nulla [vagyis a $(k_0 \ \mathbf{0})$ alakú kovektoroknál]. Az időszerű kovektorok időszerű része GALILEI-invariáns, azaz abszolút, és így az időszerű kovektorok abszolút mennyiségek. Időszerű kovektorra láttunk is az imént egy nevezetes példát: a τ_a időkiértékelést. Mi több, felismerhetjük, hogy az időszerű kovektorok mind τ_a skalárszorosai (k_0 -szorosai).

²⁶ itt δ^{ij} az ún. KRONECKER-delta mennyiség, mely $i = j$ esetén 1, $i \neq j$ esetén 0 értéket vesz fel, azaz tulajdonképpen az egységmátrix komponenseit jelöli. Az i, j hármas indexek esetén nincs jelentősége, hogy felső vagy alsó indexként (vektor- vagy kovektor-indexként) vannak-e írva, mert a hármas vektorok és kovektorok a hármas euklideszi szerkezet révén azonosítva vannak (v.ö. 18. lábjegyzet).

²⁷ Természetesen tekinthetjük az eredményt egyszerűen $\mathbf{k}$ -nak is. Csak mivel érdemes elsajátítanunk a négyes szemléletet, és tartanunk a négyes képletek logikáját, ezért ajánlott a vele ekvivalens, és a négyes felfogáshoz illeszkedő $(0 \ \mathbf{k})$ alakot tekinteni. Ez egy kis absztrakciót jelent, de hát gondoljunk az autóvezető-tanfolyam példájára: busásan meg fog térülni a négyes szemléletmód.

Az az érdekes tény derült ki tehát, hogy egy GALILEI-skalár mindig egyben egy GALILEI-kovektor is, mármint abban az értelemben, hogy ha f GALILEI-skalár, akkor $f\tau_a$ GALILEI-kovektor, melynek abszolút időszerű része maga az f skalár. Ha tehát találkozunk egy mennyiséggel, amely GALILEI-skalárnak bizonyul, ettől még nemcsak skalárként, hanem egy speciális kovektorként is reprezentálhatjuk. Ilyen határozatlansággal a többi négyes mennyiségek kapcsán is találkozni fogunk: skalár és kotenzor között, vektor és kotenzor között, stb.

Ezeknek a határozatlanságoknak az oka az, hogy a négyes GALILEI-mennyiségek transzformációs szabályai a V^i áttérési sebességkomponenseket azok polinomjai formájában tartalmazzák — ld. (22)–(28). Egy mennyiség transzformációs képlete magasabb és alacsonyabb fokú polinomokat is tartalmaz, és olyan speciális esetben, amikor a magasabbfokú polinomok együtthatója nulla, a magasabbrendű mennyiség egy alacsonyabb rendűvel kerülhet ekvivalenciába. Speciális relativisztikusan a transzformációs képletek $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ hatványait is tartalmazzák, és e gyökös kifejezés hatványkitevőjéből egyértelműen kiderül, hogy skalárról, vektorról vagy hanyadrendű tenzorról van szó. (Kovektor és vektor között ott nincs megkülönböztetés, mert a relativisztikus pszeudoeuklideszi szerkezet azonosítást ad közöttük.)

Memorizálás céljából érdemes megállapítani tehát, hogy négyes kovektorokra a tér- és időszerűség tulajdonságai pont fordítva vannak, mint a négyesvektoroknál: a négyesvektoroknál az időszerű rész abszolút és a térszerű rész nem, abszolút viszont a térszerű vektor fogalma — a kovektoroknál ellenben a térszerű rész abszolút és az időszerű nem, viszont abszolút az időszerű kovektor fogalma. Ez az átellenes helyzet a tenzorokra-kotenzorokra is öröklődik, mint azt hamarosan látni fogjuk.

Áttérve a másodrendű tenzorokfajtákra, a (26)-ban már látott

$$\{T^{ab}\} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{0j} \\ T^{i0} & T^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \quad (37)$$

típusú mátrixreprezentációval is szemléltetve, például a T^{ab} tenzor idő-időszerű részének T^{00} -t, tér-időszerű részének a T^{i0} hármast, idő-térszerű részének a T^{0j} hármast, tér-térszerű részének pedig a T^{ij} blokkot nevezzük:

$$\begin{pmatrix} \text{idő-idősz.} & \text{idő-térsz.} \\ \text{tér-idősz.} & \text{tér-térsz.} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Konkrétan a T^{ab} tenzorok (a kontra-kontravariáns típus) esetén (22) alapján az derül ki, hogy idő-időszerű részük abszolút. Az idő-időszerű rész a $\tau_a\tau_b T^{ab} = T^{00}$ módon olvasható le abszolút eszközökkel. A három másik rész nem abszolút, és így abszolút eszközökkel nem olvasható le.²⁸

Abszolútak viszont a tér-térszerű tenzorok, azaz azok a speciális esetek, amelyeknek idő-időszerű, tér-időszerű, és idő-térszerű részei mind nullák, vagyis

$$\tau_a T^{ab} = 0, \quad \tau_b T^{ab} = 0. \quad (39)$$

²⁸Leolvasható a választott inerciarendszerünk négyessebességének segítségével, ez a technikai részlet azonban itt nem kerül bemutatásra.

A C_{ab} kotenzoroknál pont fordítva áll a helyzet — ahogy az a vektorok és kovektorok között is történt. A tér-térszerű rész az abszolút, ez a $\sigma^{ca}\sigma^{db}C_{ab}$ módon olvasható le, mely az eredményt tér-térszerű négyestenzorként értelmezi. Ez láthatóan annak a tenzori (kotenzori) megfelelője, ahogyan a kovektorok abszolút térszerű részét olvastuk le.

A $\sigma^{ca}\sigma^{db}C_{ab}$ kombinációra τ_c -t hattatva nullát kapunk [ld. (36)], illetve τ_a -t hattatva rá szintén [ismét (36) révén]. Akkor pedig a (39) szituációval állunk szemben.

A kotenzorok három másik része viszont nem abszolút. Abszolútak ellenben az idő-időszerű kotenzorok, tehát amelyeknek C_{i0} , C_{0j} és C_{ij} részei nullák. Azaz, négyes leképezésekkel kifejezve, amelyekre

$$\sigma^{ca}C_{ab} = 0, \quad \sigma^{cb}C_{ab} = 0. \quad (40)$$

Az idő-időszerű kotenzorok skalárként transzformálódnak, tehát ahhoz hasonlóan, hogy az időszerű kovektorok ekvivalensek egy GALILEI-skalárral, az idő-időszerű kotenzorok is ilyenek. (És így egyben egy időszerű kovektorral is ekvivalensek.) Továbbá, szintén ahhoz hasonlóan, hogy az időszerű kotenzorok $f\tau_a$ alakúak, az idő-időszerű kotenzorok $f\tau_a\tau_b$ alakúnak bizonyulnak.

Az $L^a{}_b$ vegyes tenzorok esetén a (24) transzformációs képletek használhatók annak megállapítására, hogy ezeknek az idő-térszerű részük, $L^0{}_j$, négyes kifejezésmóddal $\tau_a\sigma^{bc}L^a{}_b$ abszolút. Viszont abszolútak a tér-időszerű [$\tau_a L^a{}_b = 0$ és $\sigma^{bc}L^a{}_b = 0$ tulajdonságú] speciális esetek.

Az $N_a{}^b$ másik fajta vegyes tenzoroknak a (25) transzformációs képletek alapján a $N_i{}^0$ tér-időszerű részük (azaz $\sigma^{ca}\tau_b N_a{}^b$) abszolút. Abszolútak ellenben az idő-térszerűek [$\sigma^{ca}N_a{}^b = 0$, $\tau_b N_a{}^b = 0$].

8. FÜGGVÉNYEK, DERIVÁLÁS, INTEGRÁLÁS

Ebben a szakaszban az állítások jó részét már nem fogjuk bizonyítani, csak „bizonygatni” (szemléltetni).

A csak időtől függő függvények abszolútak (mert az idő abszolút) — de persze csak ha függvényértékeik valamelyik szabványos négyes mennyiségtípusba tartoznak (négyes-skalár, négyesvektor, négyes kovektor, stb.). Egy $t \mapsto f(t)$ skalár²⁹ értékű függvény $\frac{d}{dt}f$ deriváltja abszolút, és egy skalár értékű függvény lesz. Egy $t \mapsto s^a(t)$ négyesvektor értékű függvény deriváltja négyesvektor értékű függvény lesz; és így tovább.

A csak térváltozótól függő függvények nem abszolútak: $\mathbf{r}$ változójuk egy $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ inerciarendszer-váltásra $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t'$ miatt $\mathcal{K}'$ -szemmel időfüggést is tartalmaz. Nincs tehát abszolút értelme például helyfüggő erőmezőnek, potenciálnak és ilyeneknek: ezek csak egyetlen bizonyos inerciarendszer szerint nézve lehetnek tisztán helyfüggőek.

A téridőfüggő függvények (más ismert neveiken: mezők, lokális mezők) abszolút-

²⁹ mármint négyes-skalár, GALILEI-skalár

tak — de természetesen szintén csak akkor, ha függvényértékeik valamelyik GALILEI-szabványos mennyiségtípusba tartoznak. Egy f skalár értékű függvény négyes deriváltja a $\partial_a f$ négyes kovektor értékű függvény. (A négyes deriváltat nevezhetnénk négyes gradiensnek is, de ez részben félrevezető, hiszen nulladik komponense időderivált jellegű, a gradiens szó pedig térderivált jelentést szokott felidézni.)

A $\sigma^{ba}\partial_a f$ kombináció mátrixalakban

$$\{\sigma^{ba}\partial_a f\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_i f \end{pmatrix} \quad (41)$$

alakú, azaz ez a kombináció egy abszolút térszerű négyesvektor értékű függvény.

Ez négyes számítással a (31) tulajdonság, $\tau_b\sigma^{ba}\partial_a f = 0$ ellenőrzésével mutatható meg, mely (36) miatt valóban teljesül.

Ezért egy skalármező hármas formalizmusban megszokott térderiváltja, azaz hármas gradiens négyes szemmel is egy abszolút mennyiség. Hasonlóan mutatható meg, hogy minden más négyes mennyiség (értékű függvény) számára is abszolút a hármas gradiens, mégpedig egy térszerű négyesvektorként jelentkezik.

A ∂_0 idő szerinti parciális derivált ellenben nem abszolút! Ez első pillantásra meglepőnek tűnhet, hiszen az idő abszolút, és a csak időtől függő függvények időderiváltja is abszolút. Azonban téridőfüggő függvények esetén $\partial_0 f$ ugyebár $\partial_0 f|_{\mathbf{r}}$ -et jelent, azaz állandó $\mathbf{r}$ mellett vett deriváltat, és $\mathbf{r}$ nem abszolút. Ami az egyik inerciarendszernek egy állandó $\mathbf{r}$ (egy állandó térpont), az egy másiknak egy időfüggő valami (egy folyamat), nem abszolút tehát az „állandó hely mellett vett derivált”.

Egy s^a négyesvektor értékű téridő-függvény négyes deriváltja $\partial_b s^a$, a fordított indexsorrend azt tükrözi, hogy lineáris leképezésként szemlélve a deriváltat, igazából a $s^a \overleftarrow{\partial}_b$, azaz $s^a \circ \overleftarrow{\partial}_b$ sorrend adódik, ahol $\circ$ a diadikus vagy tenzorszorzat jele, a felső balranyíllal pedig azt jelöltük, hogy a deriválás a tőle balra eső függvényre hat.³⁰

Mint azt az imént említettük, egy — téridőn értelmezett — q^a térszerű négyesvektor értékű függvény hármas gradiensé [a $\sigma^{cb}\partial_b q^a$ négyes értelemben] négyesen abszolút, és a deriváláshoz kötődő (c) indexében térszerű. q^a térszerű volta révén pedig a másik (a) indexében is térszerű, tehát egy tér-térszerű négyestenzormező. Mátrixalakban

$$\{\sigma^{cb}(q^a \overleftarrow{\partial}_b)\} = \{\sigma^{cb}\partial_b q^a\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial_j q^i \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Térszerű vektormezőkre tehát a megszokott hármas térderivált négyes szemmel abszolút mennyiség. Ezért a hármas divergencia és a rotáció is az. Hangsúlyozandó azonban, hogy ez csak térszerű négyesvektor esetén teljesül — ha találkozunk egy hagyományos hármasvektor értékű mezővel, nem feltétlenül lesz a térderiváltja (és divergenciája, rotációja) abszolút: transzformációs tulajdonságát megvizsgálva ellenőriznünk kell, hogy e hármas mennyiség négyes szempontból térszerű négyesvektor-e.

³⁰ Itt annak a levét isszuk, hogy matematikában kialakult hagyományos konvenció egy függvény deriválásának jelét a függvény bal oldalára írja, pedig a deriválás tartalmi lényegét a függvény jobb oldalára írás ábrázolná jobban.

Egy kontinuum áramlását leíró $\mathbf{v}$ sebességmező esetén speciális szerencsénk van. A hármassebesség négyes megfelelője ugyanis a (8) négyesvektor, mely nem térszerű. Olyan speciális négyesvektor azonban, hogy két ilyen különbsége már térszerű négyesvektor.³¹ A deriválás pedig definíció szerint a különbségekkel kapcsolatos. Ennek a szerencsének a folytán a négyessebességmező térderiváltja (és így divergenciája, rotációja) abszolútnak bizonyul.

Ha van egy sebességmezőnk, akkor értelmezhető egy tetszőleges mezőnek e sebességmező szerint vett szubsztanciális deriváltja. Egy f skalármezőre ez $v^a \partial_a f$, más tenzori mennyiségekre pedig az ennek megfelelő kombináció. A szubsztanciális derivált abszolút (egy négyes kovektornak mint lineáris leképezésnek egy négyesvektorra vett hatásáról van itt szó).

Pár szót ejtve végül az integrálásról: a pusztán időfüggő skalárfüggvények idő szerinti integrálja abszolút. A téridőn értelmezett skalárfüggvények téridő-integrálja szintén abszolút. Ez utóbbi a GALILEI-invariánsnak bizonyuló $dt dx dy dz = dr^0 dr^1 dr^2 dr^3$ négyes térfogatelem (téridőfogatelem) — precízebben fogalmazva: a téridőn természetes módon bevezethető integrálási mérték — miatt van így.

A téridőn értelmezett skalárfüggvények (skalármezők) egy adott időpillanatban vett térintegrálja is abszolút, a $dx dy dz = dr^1 dr^2 dr^3$ hármas térfogatelem (jobban mondva: a megfelelő integrálási mérték) GALILEI-invarianciája miatt.

Ha skalármező helyett négyesvektor, négyes kovektor, négyestenzor stb. értékű mezőt tekintünk, akkor azok téridő-, illetve adott időpontbeli térintegrálját a típusuknak megfelelő transzformációval kell inerciarendszer-váltáskor átváltani.

9. UTÓSZÓ

A nemrelativisztikus téridőnek számos további fizikailag fontos aspektusa van, amelyek ismertetésére itt nem került sor. Ezek közül talán a legfontosabb a vonatkoztatási rendszerek (más elnevezésekkel: megfigyelők, megfigyelő-mezők) tárgyalása: inerciális, egyenletesen gyorsuló, egyenletesen forgó, merevtestszerű/távolságtartó, és általános (amilyen az — általában deformálódó — kontinuumáramlásokhoz rendelhető hozzá). E további témák áttekintése azonban már meghaladja ennek az írásnak a kereteit. Az érdeklődő Olvasó MATOLCSI [7] könyvében találja meg ezek bemutatását — bár nem az itt alkalmazott, hanem a vonatkoztatási-rendszer-mentes leírásban. Ugyanott lehet utánanézni minden olyan aspektusnak is, amely az itt nyújtott tárgyalásmódból nem derült ki elegendően világosan.

KÖSZÖNETMONDÁS

A szerző köszönetet mond GOHÉR ATTILÁNAK és VÁN PÉTERNEK értékes észrevételeikért és javaslataikért.

³¹ Ld. a 27. oldalon elmondottakat is.

IRODALOM

- [1] ARNOLD, V.I. (1974): Matyematyicseszkije metódu klasszicseszkoy mehányiki, *Nauka*, Moszkva (oroszul).
Magyar fordítás: A mechanika matematikai módszerei, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, 1985.
- [2] FÜLÖP, T. (2008): Kontinuumok kinematikájának új értelmezése, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)
- [3] GALILEI, G. (1632): Dialogo, *Gio. Battista Londini*, Firenze (olaszul).
Magyar fordítás: Párbeszéddek, *Kriterion Könyvkiadó*, Bukarest, 1983; pp151–153.
- [4] JAGLOM, I.M. (1969): Princip atnaszíttyelosztyi Galileja i neevklídava geometrija, *Nauka*, Moszkva (oroszul).
Magyar fordítás: Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria, *Gondolat Könyvkiadó*, Budapest, 1985.
- [5] MATOLCSI, T. (1984): A concept of mathematical physics. Models for spacetime, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- [6] MATOLCSI, T. (1985): On material frame-indifference, *Archive of Rational Mechanics and Analysis* 91/2, 99–118.
- [7] MATOLCSI, T. (1993): Spacetime without reference frames, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- [8] MATOLCSI, T. – GRUBER, T. (1996): Spacetime without reference frames: An application to the kinetic theory. *International Journal of Theoretical Physics* 35(7), 1523–1539.
- [9] MATOLCSI, T. – KRISTÓF, J. – SZÉKELY, M. (1996): On the momentum distribution of molecules of an ideal gas, *Publications in Applied Analysis* 7, 1–14.
- [10] MATOLCSI, T. – GOHÉR, A. (1996): Spacetime without reference frames and its application to the Thomas rotation, *Publications in Applied Analysis* 5, 1–11.
- [11] MATOLCSI, T. – RODRIGUES, W. A. JR. (1997): The geometry of space-time with superluminal phenomena, *Algebras, Groups and Geometries* 14/1, 1–16.
- [12] MATOLCSI, T. (1998): Spacetime without reference frames: An application to synchronizations on a rotating disk, *Foundations of Physics* 28/11, 1685–1701.
- [13] MATOLCSI, T. – VÁN, P. (2006): Can material time derivative be objective? *Physics Letters A* 353, 109–112.
- [14] MATOLCSI, T. – VÁN, P. (2007): Absolute time derivatives, *Journal of Mathematical Physics* 48, 053507–19.

- [15] MATOLCSI, T. – VÁN, P. (2008): On the objectivity of time derivatives, *Atti del l'Accademia Peloritana dei Pericolanti, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Suppl. I.* 86, 1–13.
- [16] SIMONYI, K. (1978): A fizika kultúrtörténete, *Gondolat Kiadó*, Budapest.
- [17] VÁN, P. (2007): Objektív anyagfüggvények felé a reológiában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007 ISRM Konferencia. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **4**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- [18] VÁN, P. (2008): Anyagi sokaságok a nemrelativisztikus téridőben, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)
- [19] WEYL, H. (1919): Raum. Zeit. Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie, *Springer*, Berlin (németül).
Angol fordítás: Space-time-matter, *Methuen & Co. Ltd.*, London, 1922.

ANYAGI SOKASÁGOK A NEMRELATIVISZTIKUS TÉRIDŐBEN

Ván Péter

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST
KFKI RÉSZECSCKE- ÉS MAGFIZIKAI KUTATÓ INTÉZET, ELMÉLETI FŐOSZTÁLY, BUDAPEST
BME ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BUDAPEST

Anyagi időderiváltak és anyagi sokaságok a kontinuummechanikai anyagelméletek alapfogalmai. Anyagtörvényeink csak az anyagra vonatkozhatnak, a használt vonatkoztatási rendszertől nem függhetnek. Ezt a követelményt legtisztábban egy vonatkoztatási rendszer-től független tárgyalással érhetjük el. Ebben az írásban kifejtjük az anyagi sokaságokra vonatkozó számítási módszereket egy nemrelativisztikus téridőmodell keretein belül.

1. BEVEZETÉS

A valóság független vallásunktól, nemüinktől, független attól, hogyan képzeljük el, általában a rajtunk kívül álló valóság saját törvényeinek engedelmeskedik – azaz objektív. Ezeket a törvényeket igyekszünk minél hűebben reprezentálni a valóságról alkotott modelljeinkben. Ez a hozzáállás minden természettudomány alapja. Ha megfigyelünk egy jelenséget — mondjuk az asztalon bögrében párolgó teát — azt gondoljuk, hogy az nem változik meg attól, hogy melyik oldaláról szemléljük, sőt attól sem, hogy körbejárjuk, vagy elhaladunk mellette éppen. Az előbbi általános elv speciális következményeként azt gondoljuk, hogy a jelenség független a megfigyelőtől, és a megfigyelő megadására szolgáló vonatkoztatási rendszertől. Mivel a jelenség független tőlünk, ezért a leírását, a rá vonatkozó fizika törvényeket is célszerű ennek tudatában keresni. A vonatkoztatási rendszertől független törvények követelménye egyike a kontinuumfizika (és általában a fizika) alapelveinek.

Szétválasztani az elképzeléseinket a valóságtól azonban a fizikában sem egyszerű. Amilyen kézenfekvő követelmény, úgy tűnik, olyan nehéz megfelelő matematikai formába önteni. Ne feledjük, hogy ez a kérdéskör vezetett a speciális relativitás elméletének kialakulásához. Még a legegyszerűbb formája is — speciálisan nemrelativisztikus téridőben létező termomechanikai kontinuumokra vonatkoztatva — máig

vitatott, számos egymásnak ellentmondó megfogalmazása létezik a szakirodalomban [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Ezt a kérdéskört mi is több szempontból elemeztük az elmúlt évek folyamán [11, 12, 13, 14, 15]. Itt most az eddigi eredményeinkre alapozva megadjuk egy objektív, csak az anyagtól függő és külső vonatkoztatási rendszertől független leírás alapelemeit, amely a későbbiekben egy termodinamikai–kontinuumfizikai elmélet kereteit szolgáltatathatja.

A mozgás leírásához függvénykapcsolatokat kell létesítenünk az anyag és a téridő között. A téridőről és az anyagról is feltételezzük, hogy négydimenziós affin térrel reprezentálhatóak. A téridő pontos, vonatkoztatási rendszertől független modelljét Matolcsi Tamás adta meg [16, 17], ennek a modellnek előnyeit és szükségességét [18] indokolja szemléletesen. Ebben az írásban nem aknázzuk ki teljesen a vonatkoztatási rendszer mentes tárgyalás előnyeit, széthasított téridőn, egy külső inerciális megfigyelő segítségével megadott kinematikai alapfogalmakra építünk. Ezért a tárgyalásmód még nem teljesen objektív, mert a hagyományos relatív (vonatkoztatási rendszer függő) fogalmaknak csak egy részét küszöböli ki. A legfontosabb előnye az, hogy itt már szigorúan megkülönböztetjük a vektortereket a duálisuktól, és a nemrelativisztikus abszolút időt a nem a téridő részeként kezeljük. Paradox módon ez a 4 dimenziós téridő következetes használatával érhető el, mert csak így tudjuk matematikailag helyesen megadni az abszolút időre vonatkozó elemi elképzelésünket: az idő nem ágyazható be a téridőbe, az a 4-dimenziós téridő fóliázását jelenti. Tehát az idő a három dimenzióban zajló események egymás után történő bekövetkezése. Vagyis a teret és az időt első lépésként nemrelativisztikusan is össze kell illeszteni, hogy aztán majd egy pontosabb, valóban objektív tárgyalás keretei között rendesen szétválaszthassuk. A vonatkoztatási rendszer mentesség még ebben a nem teljesen objektív formájában is egységesítő és magyarázó erejű, mélyebb összefüggésre vezet, mint egy formális négyesvektorokon, vagy transzformációs szabályokon alapuló tárgyalásmód (például [19]), a téridőn alapuló, négy dimenziós leírás pedig túlmutat a három dimenziós geometriai leírásokon (mint például [20]), ugyanakkor egyszerűbb is. Reményeink szerint a bevezetett indexes formalizmus hasznos segédeszközt jelenthet hasonló konkrét számítások elvégzéséhez, illetve a hármas és négyes vektorok és kovektorok következetes használatával egy lépés a teljesen vonatkoztatási rendszer mentes leírás felé.

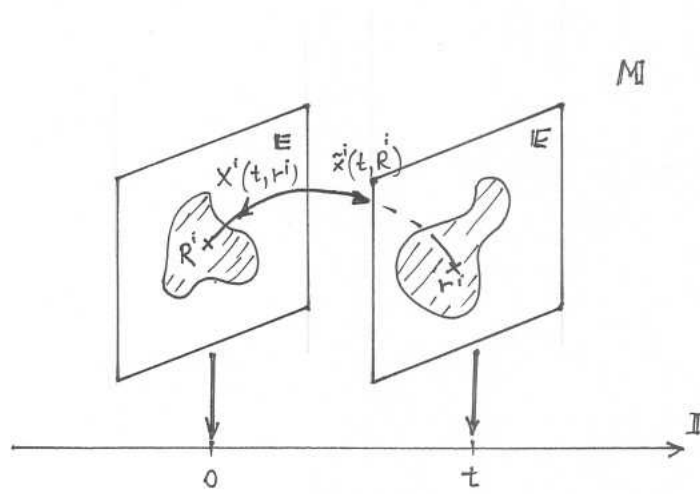
A második fejezet a kinematikai alapmennyiségeket vezeti be, a harmadik fejezet pedig a további kérdésekkel kapcsolatban fellépő problémákat tárgyalja, röviden felvázolva az egységes elmélet hiányzó darabjait.

2. KINEMATIKA

A téridőt a továbbiakban vektortérrel reprezentáljuk, pontjait $x^a \in \mathbb{M}$ -el jelöljük. Téridő időre és térre történő széthasítását és a széthasított formát — egy inerciális megfigyelőre vonatkoztatottan — $x^a \prec (t, \mathbf{r}) \in \mathbb{I} \times \mathbb{E}$ módon adjuk meg, ahol $\mathbb{I}$ az abszolút időtartamok egy dimenziós vektortere, $\mathbb{E}$ pedig az inerciális vonatkoztatási rendszer három dimenziós terét jelöli. Itt és a továbbiakban az $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$ a téridő vektorok négyes indexei. A négyes vektorok függetlenek a vonatkoztatási rendszerek mozgásától, a széthasított forma nem az. Az anyag pontjait $X^a = (t, \mathbf{R}) \in \mathbb{M}_A = \mathbb{I} \times \mathbb{A}$ -val jelöljük, ahol $\mathbb{A}$ a kontinuum pontjait reprezentáló három dimenziós vektortér. Ebben az írásban a pontokat a szokásos módon egy alkalmasan választott t_0 időpontban a térben elfoglalt helyzetükkel reprezentáljuk. Ennek a reprezentációnak a problémáival és ezeknek a problémáknak megoldásával, azaz az anyag alakváltozásának fizikai reprezentációjával [21] foglalkozik részletesen. Az itt leírtakban azokat az eredményeket még nem vettük figyelembe.

A kontinuumot a téridőbeli viselkedését jellemző *létezésfüggvénye* adja meg:

$$\tilde{x}^a : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M} : (t, \mathbf{R}) \mapsto \tilde{x}^a(t, \mathbf{R}) \prec \begin{pmatrix} t \\ \tilde{x}^i(t, \mathbf{R}) \end{pmatrix}, \quad (1)$$



1. ÁBRA. A létezésfüggvény és inverze

ahol $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ a térvektorok hármass indexei. A vektorok és tenzorok széthasításának jelölésére is használjuk a fent bevezetett $\prec$ jelölést. A széthasítás feltételez egy megfigyelőt, de ezt a szempontot az olvasó ebben az írásban akár figyelmen kívül is hagyhatja, hiszen elsősorban a számolási szabályok kifejtéséről lesz szó. Az időszéri komponenseket, deriváltakat 0 vagy t indexszel jelölöm. $\tilde{x}^i(t, \mathbf{R})$ a jól ismert mozgásfüggvény, $\mathbf{r}$ és $\mathbf{R}$ pedig az inerciális megfigyelő terének, illetve az anyagi sokaság

relatív helyzetvektorait jelölik. Természetesen itt is használjuk az négyes indexeket, tehát $r^a = (t, r^i)$ és $R^a = (t, R^i)$. A mozgásfüggvény fenti egyszerű négy dimenziós általánosításának következményeit tárgyaljuk a továbbiakban. Az $\tilde{x}^a(t, \mathbf{R})$ létezés-függvény inverzét $X^a(t, \mathbf{r})$ -el jelöljük. Az invertálhatóság maga fizikai követelmény, nem mindig teljesül: azt a feltevést fejezi ki, hogy a kontinuum pontonként megmarad létezése során. Alapvetően az indexes jelölésmódot fogjuk használni, az előbbi függvényeket például a következő formában is írhatjuk:

$$\tilde{x}^a(t, R^i) \prec \begin{pmatrix} t \\ \tilde{x}^i(t, R^i) \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad X^a(t, r^i) \prec \begin{pmatrix} t \\ X^i(t, r^i) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

A kovektorokat sorban, a vektorokat oszlopban jelöljük, lehetőleg összhangban a mátrixszorzás szabályaival. Azonban a mátrixos jelölést csak négyes-hármas viszonylatban, azaz a széthasított esetben tér és időkomponensek megkülönböztetésekor használjuk. A vektorok felső, a kovektorok alsó indexet kapnak és csak alsó és felső indexekre megengedett az összegzés, mert a téridő nem euklidészi vektortér és skaláris szorzat sincs rajta: nemrelativisztikusan nincs téridő-távolság. Az Einstein-konvenciónak megfelelően az az azonos indexek összegzést jelölnek. Az $\mathbb{M}_A$ -an értelmezett, azaz a *szubsztanciális mennyiségeket* hullámmal jelöljük, az $\mathbb{M}$ -en értelmezett, azaz *lokális mennyiségekre*, másképpen *mezőkre* bevezetett jelöléshez képest. Azaz például az $A(t, \mathbf{r})$ skalármező szubsztanciális formája $\tilde{A}(t, \mathbf{R}) = A(t, \tilde{x}^i(t, \mathbf{R}))$, vagyis $\tilde{A} = A \circ \tilde{x}^a$ és $A = \tilde{A} \circ X^a$.

2.1. ALAPINVERZEK

$\tilde{x}^a$ és X^a inverzei egymásnak, ezért

$$\tilde{x}^a \circ X^b = \delta^a_b, \quad X^a \circ \tilde{x}^b = \tilde{\delta}^a_b, \quad \tilde{x}^i \circ X^j = \delta^i_j, \quad X^i \circ \tilde{x}^j = \tilde{\delta}^i_j. \quad (3)$$

Itt a megfelelő vektorterek identitás leképezése $id_{\mathbb{M}}$, $id_{\mathbb{M}_A}$, $id_{\mathbb{E}}$ és $id_{\mathbb{A}}$ az indexes jelöléssel δ^a_b , $\tilde{\delta}^a_b$, δ^i_j , illetve $\tilde{\delta}^i_j$ lesznek. Vigyázzunk, mert speciálisan a fenti formuláknál a bal oldalon álló függvényeket nem a helyettesítési értékükkel tekintjük (vesd össze (6)-tal) és általában is jelölésmódunkat igyekezzünk éppen csak annyira pontosá tenni, hogy kis odafigyeléssel kényelmes és áttekinthető számolási szabályokat tegyen lehetővé. Ugyanis a nagyszámú különféle, de hasonló függvény közül célszerű mindazokat lehetőleg azonosítani, amelyek fizikai szerepe megegyezik. Ennek megfelelően a létezésfüggvénynek és inverzének a deriváltjai a *létezésgradiens* $\tilde{Y}^a_b \in \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}^*_A$ és inverze $Z^a_b \in \mathbb{M}_A \otimes \mathbb{M}^*$, ahol

$$\tilde{Y}^a_b = \tilde{\partial}_b \tilde{x}^a \prec (\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_j) \begin{pmatrix} t \\ \tilde{x}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ \tilde{\partial}_t \tilde{x}^i & \tilde{\partial}_j \tilde{x}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{0}_j \\ \tilde{v}^i & \tilde{H}^i_j \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$Z^a_b = \partial_b X^a \prec (\partial_t, \partial_j) \begin{pmatrix} t \\ X^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ \partial_t X^i & \partial_j X^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ V^i & G^i_j \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Itt $\tilde{v}^i = \tilde{\partial}_t \tilde{x}^i$ a szubsztanciális *sebesség*, $V^i = \partial_t X^i$ az *anyagi sebességmező*, $\tilde{H}^i{}_j = \tilde{\partial}_j \tilde{x}^i$ a szubsztanciális *mozgásgradiens*, $G^i{}_j = (H^{-1})^i{}_j = \partial_j X^i$ pedig a mozgásgradiens mezőnek, az előbbi mennyiség lokális formájának az inverze. Bevezethetjük még az $\tilde{u}^a = \tilde{\partial}_t \tilde{x}^a$ (szubsztanciális) *négyes sebességet* és az $V^a = \partial_t X^a$ *négyes anyagi sebességmezőt*. Természetesen bármelyik szubsztanciális mennyiségnek képezhetjük a lokális formáját is, így például $v^i(t, r^i) = (\tilde{\partial}_t \tilde{x}^i \circ X^a)(t, r^i) = \tilde{\partial}_t \tilde{x}^i(t, X^j(t, r^i))$, amit indexek nélkül $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{r}))$ alakban írhatunk. Ne feledjük, hogy a $\tilde{\partial}_t$ jelölés arra utal, hogy szubsztanciális függvényt deriválunk idő szerint, $\mathbf{R}$ -et állandóan tartva. Általában $\tilde{\partial}_b(\dots) = \tilde{\partial}_b(\dots)|_{\{R^c\}, c \neq b}$ illetve $\partial_b(\dots) = \partial_b(\dots)|_{\{r^c\}, c \neq b}$. Az előbbi példát ezek után rövidebben és egyszerűbben is kifejezhetjük, $v^i = \tilde{\partial}_t x^i$, illetve indexek nélkül $\mathbf{v} = \tilde{\partial}_t \mathbf{x}$ formában, azaz a deriválás a szubsztanciális mennyiségre vonatkozik, de a deriváltat mezőként tekintjük, tehát az értelmezési tartomány a téridő. Általában a deriválás fölötti jel (vagy hiánya) a deriválandó függvény értelmezési tartományát, míg a függvény feletti jel (vagy hiánya) a derivált értelmezési tartományát jelöli. (3) második formulájának deriválásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_b(X^a \circ \tilde{x}^c) &= (\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_j) \left(X^i(t, \tilde{x}^k(t, \mathbf{R})) = R^i \right) = \tilde{\delta}^a{}_b = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{0}_j \\ \tilde{0}^i & \tilde{\delta}^i{}_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ \partial_t \tilde{X}^i + \partial_k \tilde{X}^i \tilde{\partial}_t \tilde{x}^k & \partial_k \tilde{X}^i \tilde{\partial}_j \tilde{x}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V}^i + \tilde{G}^i{}_k \tilde{v}^k & \tilde{G}^i{}_k \tilde{H}^k{}_j \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Innen leolvasható, hogy

$$\tilde{G}^i{}_k \tilde{H}^k{}_j = \tilde{\delta}^i{}_j, \quad (7)$$

$$\tilde{V}^i = -\tilde{G}^i{}_k \tilde{v}^k. \quad (8)$$

Természetesen ez a megfelelő mezőkre is igaz, azaz $G^i{}_k H^k{}_j = \delta^i{}_j$ és $V^i = -G^i{}_k v^k$, hiszen a mátrixok közötti összefüggéseket az értelmezési tartomány megváltoztatása nem befolyásolja.

2.2. DERIVÁLTAK

A különféle deriváltak közötti kapcsolatokat leolvashatjuk egy skalár függvényre történő hatásukból. Szubsztanciális mennyiségekre

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_a \tilde{f} &= \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t \tilde{f} & \tilde{\partial}_i \tilde{f} \end{pmatrix} = \partial_c \tilde{f} \tilde{\partial}_a \tilde{x}^c = \partial_c \tilde{f} \tilde{Y}^c{}_a = \begin{pmatrix} \partial_t \tilde{f} & \partial_k \tilde{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_i \\ \tilde{v}^k & \tilde{H}^k{}_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_t \tilde{f} + \tilde{v}^k \partial_k \tilde{f} & \partial_k \tilde{f} \tilde{H}^k{}_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Másrészt mezőkre

$$\begin{aligned} \partial_a f &\prec \begin{pmatrix} \partial_t f & \partial_i f \end{pmatrix} = \tilde{\partial}_c f \partial_a X^c = \tilde{\partial}_c f Z^c{}_a \prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t f & \tilde{\partial}_k f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_i \\ V^k & G^k{}_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t f + V^k \tilde{\partial}_k f & \tilde{\partial}_k f G^k{}_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Azaz

$$\boxed{\tilde{\partial}_a(\dots) = \partial_c(\dots)\tilde{Y}^c_a}, \quad \boxed{\partial_a(\dots) = \tilde{\partial}_c(\dots)Z^c_a}. \quad (11)$$

Ebből következően az idő és térderiváltakra külön is felírva

$$\boxed{\tilde{\partial}_t(\dots) := \frac{d}{dt}(\dots) = \partial_t(\dots) + v^k\partial_k(\dots)}, \quad \boxed{\tilde{\partial}_i(\dots) = \partial_k(\dots)\tilde{H}^k_i}, \quad (12)$$

$$\boxed{\partial_t(\dots) = \tilde{\partial}_t(\dots) + V^k\tilde{\partial}_k(\dots)}, \quad \boxed{\partial_i(\dots) = \tilde{\partial}_k(\dots)G^k_i}. \quad (13)$$

Itt a szubsztanciális időderiváltra bevezettük a szokásos $\frac{d}{dt}$ jelölést, amit néha ponttal rövidítünk.

2.3. VEGYES DERIVÁLTAK

Igen fontos szerepet játszanak a második vegyes parciális deriváltak egyenlősége alapján felírható összefüggések. Két négyes deriválásra ez triviális, de részben szét-hasítva felhasználjuk a mozgásgradiens és a sebességek definícióit és a deriváltakra fent kapott bekeretezett összefüggéseket.

2.3.1. IDŐDERIVÁLTAKKAL

Először a négyes mennyiségekre (11) alapján kapjuk, hogy

$$\tilde{\partial}_t\tilde{Y}^a_b = \tilde{\partial}_t\tilde{\partial}_b\tilde{x}^a = \tilde{\partial}_b\tilde{\partial}_t\tilde{x}^a = \tilde{\partial}_b\tilde{v}^a, \quad \longrightarrow \quad \tilde{\partial}_t\tilde{Y}^a_b = \partial_c\tilde{v}^a\tilde{Y}^c_b, \quad (14)$$

$$\partial_t Z^a_b = \partial_t\partial_b X^a = \partial_b\partial_t X^a = \partial_b V^a, \quad \longrightarrow \quad \partial_t Z^a_b = \tilde{\partial}_c V^a Z^c_b. \quad (15)$$

Kicsit átalakítva az utóbbi formulákat kapjuk a gyakorlatban használhatóbb azonosságokat, ugyanis (14)–(15)-ből a sebességderiváltakat kifejezve, (4)–(5) és (7)–(8) felhasználásával és (14)-nél is mezőkre áttérve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}Y^a_c\right)Z^c_b &= \partial_b v^a \prec \begin{pmatrix} 0 & 0_k \\ \dot{v}^i & \dot{H}^i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ -G^k_l v^l & G^k_j \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0_j \\ \dot{v}^i - \dot{H}^i_k G^k_l v^l & \dot{H}^i_k G^k_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0_j \\ \partial_t v^i & \partial_j v^i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t Z^a_c Y^c_b &= \tilde{\partial}_b V^a \prec \begin{pmatrix} 0 & 0_k \\ \partial_t V^i & \partial_t G^i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ v^k & H^k_j \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0_j \\ \partial_t V^i + \partial_t G^i_k v^k & \partial_t G^i_k H^k_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0_j \\ \dot{V}^i & \tilde{\partial}_j V^i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Itt a tér-térszerű és idő-térszerű komponensek részben ismerős formulákat eredményeznek.

$$\dot{v}^i = \partial_t v^i - \dot{H}^i_k V^k, \quad \text{azaz} \quad \dot{\mathbf{v}} = \partial_t \mathbf{v} - \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{V} = \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \circ \mathbf{v}, \quad (16)$$

$$\partial_j v^i = \dot{H}^i_k G^k_j, \quad \text{azaz} \quad \nabla \mathbf{v} = \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{-1} \quad (17)$$

$$\dot{V}^i = \partial_t V^i + \partial_t G^i_k v^k, \quad \text{azaz} \quad \dot{\mathbf{V}} = \partial_t \mathbf{V} + \partial_t \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}, \quad (18)$$

$$\tilde{\partial}_j V^i = \partial_t G^i_k H^k_j, \quad \text{azaz} \quad \tilde{\nabla} \mathbf{V} = \partial_t \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H}. \quad (19)$$

A legutolsó összefüggésnél az inverzfüggvény deriváltjára vonatkozó szabályt használtuk fel.

2.3.2. TÉRDERIVÁLTAKKAL

Ekkor kicsit keverve a különböző széthasított alakokat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_i \tilde{Y}^b_c &\prec \begin{pmatrix} 0_i & 0_{ik} \\ \tilde{\partial}_i \tilde{v}^j & \tilde{\partial}_i \tilde{H}^j_k \end{pmatrix} = \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_c \tilde{x}^b = \\ &= \tilde{\partial}_c \tilde{\partial}_i \tilde{x}^b \prec \tilde{\partial}_c \begin{pmatrix} 0_i \\ \tilde{H}^j_i \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} 0_i & 0_{ik} \\ \tilde{\partial}_t \tilde{H}^j_i & \tilde{\partial}_k \tilde{H}^j_i \end{pmatrix}, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_i Z^b_c &\prec \begin{pmatrix} 0_i & 0_{ik} \\ \partial_i V^j & \partial_i G^j_k \end{pmatrix} = \partial_i \partial_c X^b = \\ &= \partial_c \partial_i X^b \prec \partial_c \begin{pmatrix} 0_i \\ G^j_i \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} 0_i & 0_{ik} \\ \partial_t G^j_i & \partial_k G^j_i \end{pmatrix}. \quad (21) \end{aligned}$$

A széthasítás jele fölötti index parciális széthasítást jelöl. A tér-térszerű és idő-térszerű komponenseket ismét érdemes kiemelni. A tér-térszerű komponensnek nincs jó index nélküli felírása, mert harmadrendű tenzor részleges szimmetriájára vonatkozik.

$$\tilde{\partial}_i v^j = \dot{H}^j_i, \quad \text{azaz} \quad \tilde{\nabla} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{H}}, \quad (22)$$

$$\tilde{\partial}_i H^j_k = \tilde{\partial}_k H^j_i, \quad \text{azaz} \quad -, \quad (23)$$

$$\partial_i V^j = \partial_t G^j_i, \quad \text{azaz} \quad \nabla \mathbf{V} = \partial_t \mathbf{G}, \quad (24)$$

$$\partial_i G^j_k = \partial_k G^j_i, \quad \text{azaz} \quad -. \quad (25)$$

3. ANYAGI MENNYISÉGEK ÉS ANYAGI DERIVÁLTAK

A szubsztanciális alak keveri a téridőre és az anyagra vonatkozó mennyiségeket. Az anyagi mennyiségeknek figyelembe kell venni a kontinuum mozgásának következményeit, de azt az anyagra magára vonatkoztatva megadni. Ezt a feltételt egyszerű figyelembe venni, ha megkülönböztetjük a függvényeket az alábbiak szerint

- lokális: $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^n$ - téridőn értelmezett téridő jellegű függvény ,
- szubsztanciális: $\mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}^n$ anyagon értelmezett téridő jellegű függvény,
- anyagi: $\mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}_A^n$ az anyagon értelmezett anyag jellegű függvény.

Itt az n egész szám a fizikai mennyiség tenzori rendjét adja. Mivel az anyag valahol és valamikor van a téridőben, azaz az anyag és a téridő között — feltételezésünk szerint — egyértelmű kapcsolat van, ezért ezek a formák ugyanannak a fizikai mennyiségnek egyenértékű kifejezési módjai. Az értelmezési tartományokat a létezésfüggvény, az értékészleteket pedig a létezésgradiens segítségével változtathatjuk meg. A fizikai mennyiségek szubsztanciális alakját az eddigiek szerint a mezőkre (lokális alakra) bevezetett jelölés fölött kígyóval, az anyagi alakot kalappal jelöljük.

A különböző tenzori rendű négyes mennyiségekről, Galilei-transzformációra való viselkedésükről, idő- és térszerű részükről, stb. hasznos bevezető és ismertető található a [18] munkában.

3.1. SKALÁR

Egy skalár mező az egy $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}, (t, \mathbf{r}) \mapsto f(t, \mathbf{r})$ függvény. Ennek szubsztanciális formája megegyezik az anyagi formával, tehát

$$\tilde{f} = \hat{f} = f \circ \tilde{x}^a, \quad \text{azaz} \quad \tilde{f}(t, \mathbf{R}) = f(t, \tilde{x}^i(t, \mathbf{R})).$$

Ennek megfelelően anyagi deriváltja megegyezik a szubsztanciális deriválttal:

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_a \hat{f} &= \tilde{\partial}_a \tilde{f} = \partial_c \tilde{f} \tilde{\partial}_a \tilde{x}^c = \partial_c \tilde{f} \tilde{Y}_a^c = \\ &= (\tilde{\partial}_t \tilde{f}, \tilde{\partial}_i \tilde{f}) = (\dot{f}, \tilde{\nabla} f) = (\partial_t \tilde{f}, \partial_k \tilde{f}) \begin{pmatrix} 1 & \tilde{0}_i \\ \tilde{v}^k & \tilde{H}^k_i \end{pmatrix} = (\partial_t \tilde{f} + \tilde{v}^k \partial_k \tilde{f}, \partial_k \tilde{f} \tilde{H}^k_i). \end{aligned} \quad (26)$$

Ebből látható, hogy a skalár mennyiség anyagi idő- és térderiváltjai a következők:

$$\hat{\dot{f}} = \dot{f} = \partial_t f + v^k \partial_k f, \quad \text{azaz} \quad \hat{\dot{f}} = \dot{f} = \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla f, \quad (27)$$

$$\hat{\partial}_i f = \tilde{\partial}_i f = \partial_k f H^k_i \quad \text{azaz} \quad \hat{\nabla} f = \tilde{\nabla} f = \nabla f \cdot \mathbf{H}. \quad (28)$$

Az anyagi időderiváltra külön jelölést vezettünk be és a formulákat lokális alakban, mezőként adtuk meg. Az anyagi időderivált geometriailag az anyag sebességmezője szerinti Lie-derivált.

3.2. VEKTOR

Egy vektormező lokálisan egy

$$c^a : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}, (t, \mathbf{r}) \mapsto c^a(t, \mathbf{r})$$

függvény. Ennek szubsztanciális és anyagi formái:

$$\begin{aligned}\tilde{c}^a &: \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}, & \tilde{c}^a &= c^a \circ \tilde{x}, \\ \hat{c}^a &: \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}_A, & \hat{c}^a &= \tilde{Z}^a_c \tilde{c}^c.\end{aligned}$$

Vektorok anyagi formáját úgy kapjuk, hogy nemcsak az értelmezési tartományt, hanem az értékkészletet is visszahúzzuk az anyagi sokaságra. A négyes vektori mennyiségek nem függenek a vonatkoztatási rendszer mozgásától — viszont felbontásuk idő és térszerű komponensekre már függ. A megfigyelőt a sebességmezője adja meg [17]. Az anyag maga is meghatároz egy sebességmezőt, ennek megfelelően legalább két célszerű és gyakran használatos felbontása van egy akármilyen vektori mennyiségnek: egy inerciális megfigyelő és az anyag szerint. Ha az anyag relatív sebességmezője az inerciális megfigyelő szerint $\mathbf{v}$ (azaz széthasított négyessebessége $v^a \prec (1, v^i)$), akkor a kétféle felbontást vektorok esetén Galilei-transzformáció köti össze a következő módon:

$$c^a \prec \begin{pmatrix} c^0 \\ c^i \end{pmatrix}, \quad c^a \succ \begin{pmatrix} c^0 \\ \bar{c}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^0 \\ c^i - v^i c^0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Itt felülvonással az *anyag szerinti felbontást* jelöltük és az utolsó egyenlőség megadja annak inerciális mennyiségekkel kifejezett alakját. Figyeljük meg, hogy vektornak az időszzerű része ugyanaz a különböző megfigyelők számára. A fenti összefüggés megjelenik a vektor anyagi formájának idő és térszerű komponensekre történő felbontásában is:

$$\hat{c}^a = \begin{pmatrix} \hat{c}^0 \\ \hat{c}^i \end{pmatrix} = \tilde{Z}^a_b \tilde{c}^b \prec \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ -G^i_k v^k & G^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^0 \\ c^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^0 \\ G^i_j (c^j - v^j c^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^0 \\ G^i_j \bar{c}^j \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Az anyagi forma deriváltja a *teljes anyagi derivált*

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_a \hat{c}^b &\prec \begin{pmatrix} \dot{c}^0 \\ \tilde{G}^j_k \bar{c}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t & \tilde{\partial}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{c}^0 & \tilde{\partial}_i c^0 \\ (G^j_k \bar{c}^k) & \tilde{\partial}_i (G^j_k \bar{c}^k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{c}^0 & \tilde{\partial}_i c^0 \\ G^j_k (\dot{c}^k - \dot{c}^l \partial_l v^k) & G^j_k (\tilde{\partial}_i \bar{c}^k - \dot{c}^l \partial_l H^k_i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{c}^0 & \tilde{\nabla} c^0 \\ \mathbf{G}(\dot{\bar{\mathbf{c}}} - \nabla \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{c}}) & \mathbf{G}(\tilde{\nabla} \bar{\mathbf{c}} - \nabla \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{c}}) \end{pmatrix}. \quad (31)\end{aligned}$$

Itt az első sor széthasításánál a diadikus szorzat miatt a deriváltak az előttük levő formulára hatnak, ahogy a következő mátrixból látszik. Az átalakításoknál felhasználtuk az inverz mátrix deriváltjára vonatkozó összefüggést, illetve (17) és (23) összefüggéseket. A deriválások kijelölése után elhagytuk a szubsztanciális forma jelölését. Az első oszlopból olvasható ki az anyagi időderivált, amit még egy picit érdemes

alakítanunk:

$$\begin{aligned}\overset{\diamond}{\dot{\mathbf{c}}}^a & \prec \left(G^i{}_l (\overset{\diamond}{\dot{\mathbf{c}}}^l - \overset{\diamond}{\mathbf{c}}^k \partial_k v^l) \right) = \left(G^i{}_l \left((c^l - c^0 v^l) - (c^k - c^0 v^k) \partial_k v^l \right) \right), \\ \overset{\diamond}{\mathbf{C}} & := \frac{d}{dt} \left(\overset{\diamond}{\mathbf{c}} \right) = \left(\mathbf{G} \cdot \left((\mathbf{c} - c^0 \mathbf{v}) - \nabla \mathbf{v} \cdot (\mathbf{c} - c^0 \mathbf{v}) \right) \right).\end{aligned}\quad (32)$$

Ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg, vagyis feltételezzük, hogy maga az anyagi sokaság — másnéven a referencia konfiguráció — a pillanatnyi konfiguráció, akkor térszerű vektorra — amelynek null indexű, azaz időszzerű komponense nulla — érdemes külön is felírunk az anyagi időderiváltat. Ekkor formálisan $G^i{}_j$ identitás (de a deriváltja nem az):

$$\boxed{\overset{\diamond}{\dot{c}}^i = \dot{c}^i - c^j \partial_j v^i}, \quad \text{azaz} \quad \boxed{\overset{\diamond}{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{c}} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{c}}. \quad (33)$$

Ezt szokás a vektor *felsőáramlásos időderiváltjának* nevezni és $\overset{\nabla}{\mathbf{c}}$ -val jelölni.

3.3. KOVEKTOR

Egy kovektormező lokális, szubsztanciális és anyagi alakjai a következők:

$$k_a : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto k_a(t, \mathbf{r}) \quad (34)$$

$$\tilde{k}_a : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}^*, \quad \tilde{k}_a = k_a \circ \tilde{x}, \quad (35)$$

$$\hat{k}_a : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}^*_A, \quad \hat{k}_a = \tilde{Y}_a{}^c \tilde{k}_c. \quad (36)$$

Hasonlóan a vektorokhoz, ha az anyag relatív sebességmezője az inerciális megfigyelő szerint $\mathbf{v}$, akkor megadhatjuk egy inerciális és anyagi megfigyelő szempontjából is. A kovektorok azonban másképp transzformálódnak, mint a vektorok:

$$k_a \prec (k_0 \ k_i), \quad k_a \bar{\prec} (\bar{k}_0 \ \bar{k}_i) = (k_0 + v^k k_k \ k_i). \quad (37)$$

Ez a felbontás természetesen ismét tükröződik a kovektor anyagi formájának idő és térszerű komponenseiben:

$$\hat{k}_a = (\hat{k}_0 \ \hat{k}_i) = \tilde{Y}_a{}^c \tilde{k}_c \prec \begin{pmatrix} 1 & \tilde{v}^k \\ 0_i & \tilde{H}_i{}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{k}_0 \\ \tilde{k}_k \end{pmatrix} = (\tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k \ \tilde{H}_i{}^k \tilde{k}_k). \quad (38)$$

Figyeljük meg, hogy kovektoroknak a térszerű része ugyanaz a különböző megfigyelők számára. Megjegyzendő, hogy a derivált maga is egy kovektor, a szubsztanciális időderivált pedig időszzerű komponensének anyagi alakja. A teljes anyagi derivált

pedig a következő:

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_a \hat{k}_b &\prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t \\ \tilde{\partial}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k & \tilde{H}_j{}^k \tilde{k}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k) & (\tilde{H}_j{}^k \tilde{k}_k) \\ \tilde{\partial}_i(\tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k) & \tilde{\partial}_i(\tilde{H}_j{}^k \tilde{k}_k) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\tilde{k}}_0 & \tilde{H}_j{}^k (\dot{\tilde{k}}_k + (\partial_k v^l) k_l) \\ \tilde{\partial}_i \tilde{k}_0 & \tilde{H}_j{}^k (\tilde{\partial}_i \tilde{k}_k + \partial_k H_i{}^m \tilde{k}_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{k}}_0 & \mathbf{H}(\dot{\mathbf{k}} + (\nabla \mathbf{v})^* \cdot \mathbf{k}) \\ \tilde{\nabla} \tilde{k}_0 & \mathbf{H}(\tilde{\nabla} \mathbf{k} + \nabla \mathbf{H} \cdot \mathbf{k}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Itt a csillag a transzponálást jelöli. Az utolsó egyenlőségnél itt is áttértünk lokális mennyiségekre. Az utolsó mátrixok első sorából olvasható ki az anyagi időderivált:

$$\overset{\diamond}{k}_a = \begin{pmatrix} (k_0 + k_k v^k) & H_i{}^k (\dot{k}_k + k_l \partial_k v^l) \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Ebből kaphatjuk meg a térszerű kovektorra vonatkozó jól ismert alsóáramlásos időderiváltat, ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg ($H_i{}^j$ az identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfiguráció-val):

$$\boxed{\overset{\diamond}{k}_i = \begin{pmatrix} (k_k v^k) & \dot{k}_i + k_k \partial_i v^k \end{pmatrix}} \quad \text{azaz} \quad \boxed{\overset{\diamond}{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) & \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{v} \end{pmatrix}}. \quad (40)$$

Vagyis térszerű kovektor anyagi időderiváltja általában *nem* térszerű. Nem szorítkozhatunk csak a három dimenzióra. Az anyagi időderivált térszerű részét nevezik *alsóáramlásos deriváltnak*.

3.4. TENZOR

Egy tenzormező lokális, szubsztanciális és anyagi formái a következőek:

$$T^{ab} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto T^{ab}(t, \mathbf{r}), \quad (41)$$

$$\tilde{T}^{ab} : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}, \quad \tilde{T}^{ab} = T^{ab} \circ \tilde{x}, \quad (42)$$

$$\hat{T}^{ab} : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}_A \otimes \mathbb{M}_A, \quad \hat{T}^{ab} = \tilde{Z}^a{}_c \tilde{Z}^b{}_d \tilde{T}^{cd}. \quad (43)$$

Egy tenzor inerciális megfigyelők által széthasított formáját most nem adjuk meg, helyette majd a referencia konfigurációra visszahúzott, anyagi formából olvasuk ki. Ezt (30)-(38)-ból láthatóan megtehetjük. A közvetlen érveléshez viszont a téridő modellek transzformációs formulái szükségesek [17]. Tehát

$$\begin{aligned}\hat{T}^{ab} &= \begin{pmatrix} \hat{t}^0 & \hat{t}^j \\ \hat{t}^i & \hat{t}^{ij} \end{pmatrix} = \tilde{Z}^a{}_c \tilde{Z}^b{}_d \tilde{T}^{cd} = \begin{pmatrix} 1 & 0_l \\ -G^i{}_k v^k & G^i{}_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 & t^m \\ t^l & t^{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -G^j{}_k v^k \\ 0_m & G^i{}_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^0 & G^j{}_m (t^m - t^0 v^m) \\ G^i{}_l (t^l - v^l t^0) & G^i{}_l G^j{}_m (t^{lm} - t^m v^l - t^l v^m + t^0 v^l v^m) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{t}^0 & G^j{}_m \bar{t}^m \\ G^i{}_l \bar{t}^l & G^i{}_l G^j{}_m \bar{t}^{lm} \end{pmatrix}. \quad (44)\end{aligned}$$

A széthasított forma komponenseit az eddigiekhez hasonlóan felülvonással jelöltük. Figyeljük meg, hogy egy tenzormező idő-időszerű része nem változik a különböző megfigyelők szempontjából. A teljes anyagi derivált a következő:

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}_a(\tilde{Z}^b{}_d \tilde{Z}^c{}_e \tilde{T}^{de}) &\prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t & \tilde{\partial}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t}^0 & \tilde{G}^k{}_m \bar{t}^m \\ \tilde{G}^j{}_l \bar{t}^l & \tilde{G}^j{}_l \tilde{G}^k{}_m \bar{t}^{lm} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t}^0 & (\tilde{G}^k{}_m \bar{t}^m)^\cdot \\ (\tilde{G}^j{}_l \bar{t}^l)^\cdot & (\tilde{G}^j{}_l \tilde{G}^k{}_m \bar{t}^{lm})^\cdot \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i t^0 & \tilde{\partial}_i(\tilde{G}^k{}_m \bar{t}^m) \\ \tilde{\partial}_i(\tilde{G}^j{}_l \bar{t}^l) & \tilde{\partial}_i(\tilde{G}^j{}_l \tilde{G}^k{}_m \bar{t}^{lm}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t}^0 & \tilde{G}^k{}_m(\dot{\bar{t}}^m - \partial_r v^m \bar{t}^r) \\ \tilde{G}^j{}_l(\dot{\bar{t}}^l - \partial_r v^l \bar{t}^r) & \tilde{G}^j{}_l \tilde{G}^k{}_m(\dot{\bar{t}}^{lm} - \partial_r v^l \bar{t}^{rm} - \partial_r v^m \bar{t}^{lr}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i t^0 & \tilde{G}^k{}_m(\tilde{\partial}_i \bar{t}^m - \partial_r H^m{}_i \bar{t}^r) \\ \tilde{G}^j{}_l(\tilde{\partial}_i \bar{t}^l - \partial_r H^l{}_i \bar{t}^r) & \tilde{G}^j{}_l \tilde{G}^k{}_m(\tilde{\partial}_i \bar{t}^{lm} - \partial_r H^l{}_i \bar{t}^{rm} - \partial_r H^m{}_i \bar{t}^{lr}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (45)
\end{aligned}$$

Az utolsó hipermátrix első komponense az anyagi időderivált. Ezt részletesebben kifejtve kapjuk, hogy

$$\overset{\diamond}{T}^{ab} = \begin{pmatrix} \dot{t}^0 & G^j{}_m((t^m - t^0 v^m)^\cdot - \partial_r v^m(t^r - t_0 v^r)) \\ G^i{}_l \begin{pmatrix} (t^l - t^0 v^l)^\cdot - \\ \partial_r v^l(t^r - t_0 v^r) \end{pmatrix} & G^i{}_l G^j{}_m \begin{pmatrix} (t^{lm} - t^m v^l - t^l v^m + t^0 v^l v^m)^\cdot - \\ \partial_r v^l(t^{rm} - t^m v^r - t^r v^m + t^0 v^r v^m) - \\ \partial_r v^m(t^{lr} - t^l v^r - t^r v^l + t^0 v^r v^l) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Ebből kaphatjuk meg a térszerű tenzorra vonatkozó jól ismert felsőáramlásos időderiváltat, ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg ($G_i{}^j$ az identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfigurációval):

$$\overset{\diamond}{T}^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0^k \\ 0^j & \dot{t}^{ij} - \partial_r v^i t^{rj} - \partial_r v^j t^{ir} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Vagyis térszerű tenzor anyagi időderiváltja térszerű.

3.5. KOTENZOR

Egy kotenzormező lokális, szubsztanciális és anyagi formái a következők:

$$B_{ab} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^* \otimes \mathbb{M}^*, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto B_{ab}(t, \mathbf{r}), \quad (47)$$

$$\tilde{B}_{ab} : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}^* \otimes \mathbb{M}^*, \quad \tilde{B}_{ab} = B_{ab} \circ \tilde{x}, \quad (48)$$

$$\hat{B}_{ab} : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}_A^* \otimes \mathbb{M}_A^*, \quad \hat{B}_{ab} = \tilde{Y}_a{}^c \tilde{Y}_b{}^d \tilde{B}_{cd}. \quad (49)$$

A tenzorok esetéhez hasonlóan most is csak az anyagi formát írjuk fel. Tehát

$$\begin{aligned}\hat{B}_{ab} &= \begin{pmatrix} \hat{b}_0 & \hat{b}_j \\ \hat{b}_i & \hat{b}_{ij} \end{pmatrix} = \tilde{Y}_a {}^c \tilde{Y}_b {}^d \tilde{B}_{cd} = \begin{pmatrix} 1 & v^k \\ 0_i & H_i{}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & b_m \\ b_k & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ v^m & H_j^m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_0 + v^k b_k + b_m v^m + v^k b_{km} v^m & H_j^m (b_m + v^k b_{km}) \\ H_i{}^k (b_k + v^m b_{km}) & H_i{}^k H_j^m b_{km} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{b}_0 & H_j^m \bar{b}_m \\ H_i{}^k \bar{b}_k & H_i{}^k H_j^m b_{km} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (50)$$

A széthasított forma komponenseit az eddigiekhez hasonlóan felülvonással je-löltük. Figyeljük meg, hogy egy tenzormező tér-térszerű része az, ami nem változik a különböző megfigyelők szempontjából. A teljes anyagi derivált a következő:

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_a (\tilde{Y}_b {}^d \tilde{Y}_c {}^e \tilde{B}_{de}) &\prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t & \tilde{\partial}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_0 & \tilde{H}_k{}^m \bar{b}_m \\ \tilde{H}_j{}^n \bar{b}_n & \tilde{H}_j{}^n \tilde{H}_k{}^m \bar{b}_{nm} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{b}}_0 & (\tilde{H}_k{}^m \bar{b}_m)^\cdot \\ (\tilde{H}_j{}^n \bar{b}_n)^\cdot & (\tilde{H}_j{}^n \tilde{H}_k{}^m \bar{b}_{nm})^\cdot \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i \bar{b}_0 & \tilde{\partial}_i (\tilde{H}_k{}^m \bar{b}_m) \\ \tilde{\partial}_i (\tilde{H}_j{}^n \bar{b}_n) & \tilde{\partial}_i (\tilde{H}_j{}^n \tilde{H}_k{}^m \bar{b}_{nm}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{b}}_0 & \tilde{H}_k{}^m (\dot{\bar{b}}_m + \bar{b}_r \partial_m v^r) \\ \tilde{H}_j{}^n (\dot{\bar{b}}_n + \bar{b}_r \partial_n v^r) & \tilde{H}_j{}^n \tilde{H}_k{}^m (\dot{\bar{b}}_{nm} + \bar{b}_{nr} \partial_m v^r + \partial_n v^s \bar{b}_{sm}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i \bar{b}_0 & \tilde{H}_k{}^m (\tilde{\partial}_i \bar{b}_m + \partial_m H^r{}_i \bar{b}_r) \\ \tilde{H}_j{}^n (\tilde{\partial}_i \bar{b}_n + \partial_n H^r{}_i \bar{b}_r) & \tilde{H}_j{}^n \tilde{H}_k{}^m (\tilde{\partial}_i \bar{b}_{nm} + \partial_m H^r{}_i \bar{b}_{nr} + \partial_n H^r{}_i \bar{b}_{rm}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{pmatrix} \quad (51)$$

Az utolsó hipermátrix első komponense az anyagi időderivált. Ezt részletesebben kifejtve kapjuk, hogy

$$\overset{\diamond}{B}_{ab} = \begin{pmatrix} (b_0 + v^k b_k + b_m v^m + v^k b_{km} v^m)^\cdot & \tilde{H}_j^m ((b_m + v^k b_{km})^\cdot + (b_r + v^k b_{kr}) \partial_m v^r) \\ \tilde{H}_i^n ((b_n + v^k b_{kn})^\cdot + (b_r + v^k b_{kr}) \partial_n v^r) & \tilde{H}_i^n \tilde{H}_j^m (\dot{b}_{nm} + b_{nr} \partial_m v^r + \partial_n v^s b_{sm}) \end{pmatrix} \quad (52)$$

A térszerű kotenzor anyagi időderiváltja abban az esetben sem térszerű, ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg ($G_i{}^j$ az identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfigurációval), mert:

$$\overset{\diamond}{B}_{ij} = \begin{pmatrix} (v^k v^m b_{km})^\cdot & (v^k b_{kj})^\cdot + v^k b_{km} \partial_j v^m \\ (v^k b_{ki})^\cdot + v^k b_{km} \partial_i v^m & \dot{b}_{ij} + b_{ik} \partial_j v^k + \partial_i v^k b_{kj} \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Ennek tér-térszerű komponense a jól ismert háromdimenziós *alsóáramlásos deri-vált*.

3.6. VEGYES TENZOR

Egy vegyes tenzormező lokális, szubsztanciális és anyagi formái a következők:

$$A^a_b : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}^*, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto A^a_b(t, \mathbf{r}), \quad (54)$$

$$\tilde{A}^a_b : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}^*, \quad \tilde{A}^a_b = A^a_b \circ \tilde{x}, \quad (55)$$

$$\hat{A}^a_b : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}_A \otimes \mathbb{M}_A^*, \quad \hat{A}^a_b = \tilde{Z}^a_c \tilde{Y}_b^d \tilde{A}^c_d. \quad (56)$$

Az eddigiekhez hasonlóan most is csak az anyagi formát írjuk fel. Tehát

$$\begin{aligned} \hat{A}^a_b &= \begin{pmatrix} \hat{a}^0 & \hat{a}_j \\ \hat{a}^i & \hat{a}^i_j \end{pmatrix} = \tilde{Z}^a_c \tilde{Y}_b^d \tilde{A}^c_d = \begin{pmatrix} 1 & 0_k \\ -G^i_l v^l & G^i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & b_m \\ b_k & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ v^m & H^m_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^0 + a_m v^m & H^m_j a_m \\ G^i_l (a^l - a^0 v^l + a^l_m v^m - a_m v^m v^l) & G^i_l H^m_j (a^l_m - a_m v^l) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{a}^0 & H^m_j \bar{a}_m \\ G^i_l \bar{a}^l & G^i_l H^m_j \bar{a}^l_m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (57)$$

A széthasított alak komponenseit az eddigiekhez hasonlóan felülvonással jelöltük. Figyeljük meg, hogy egy vegyes tenzormező idő-térszerű része az, ami nem változik a különböző megfigyelők szempontjából. A teljes anyagi derivált a következő:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_a \hat{A}^d_e &= \tilde{\partial}_a (\tilde{Z}^b_d \tilde{Y}_c^e \tilde{A}^d_e) \prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t & \tilde{\partial}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}^0 & \tilde{H}^m_k \bar{a}_m \\ \tilde{G}^j_l \bar{a}^l & \tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k \bar{a}^l_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{a}}^0 & (\tilde{H}^m_k \bar{a}_m)^\cdot \\ (\tilde{G}^j_l \bar{a}^l)^\cdot & (\tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k \bar{a}^l_m)^\cdot \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i \bar{a}_0 & \tilde{\partial}_i (\tilde{H}^m_k \bar{a}_m) \\ \tilde{\partial}_i (\tilde{G}^j_l \bar{a}^l) & \tilde{\partial}_i (\tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k \bar{a}^l_m) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a}^0 & \tilde{H}^m_k (\dot{\bar{a}}_m + \bar{a}_r \partial_m v^r) \\ \tilde{G}^j_l (\dot{\bar{a}}^n - \bar{a}^r \partial_r v^l) & \tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k (\dot{\bar{a}}^l_m - \partial_n v^l \bar{a}^n_m + \partial_m v^n \bar{a}^l_n) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i \bar{a}^0 & \tilde{H}^m_k (\tilde{\partial}_i \bar{a}_m + \partial_m H^n_i \bar{a}_n) \\ \tilde{G}^j_l (\tilde{\partial}_i \bar{a}^l - \partial_m H^l_i \bar{a}^m) & \tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k (\tilde{\partial}_i \bar{a}^l_m - \partial_n H^l_i \bar{a}^n_m + \partial_m H^r_i \bar{a}^l_r) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{pmatrix} \quad (58)$$

Az utolsó hipermátrix első komponense a vegyes tenzor anyagi időderiváltja. Ezt részletesebben kifejtve kapjuk, hogy

$$\hat{A}^a_b = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (a^0 + a_m v^m)^\cdot & \tilde{H}^m_j (\dot{a}_m + a_l \partial_m v^l) \\ \tilde{G}^i_l \begin{pmatrix} (a^l - a^0 v^l + a^l_m v^m - a_m v^m v^l)^\cdot - \\ (a^m - a^0 v^m + a^m_k v^k - a_k v^k v^m) \partial_m v^l \end{pmatrix} & \tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k \begin{pmatrix} (a^l_m - a_m v^l)^\cdot - \\ \partial_n v^l (a^n_m - a_m v^n) + \\ \partial_m v^n (a^l_n - a_n v^l) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (59)$$

A térszerű vegyes tenzor anyagi időderiváltja sem térszerű, akkor sem, ha az anyagot az előbbiekhöz hasonlóan az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk

meg G_i^j, H_i^j az identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfigurációval), mert:

$$\overset{\diamond}{A}_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0_j \\ \tilde{G}_l^i ((a_m^l v^m) - a_k^m v^k \partial_m v^l) & \tilde{G}_l^j \tilde{H}_k^m (\dot{a}_m^l - \partial_n v^l a_m^n + \partial_m v^n a_n^l) \end{pmatrix} \quad (60)$$

Ez sem marad térszerű.

3.6.1. LÉTEZÉSGRADIENS ÉS SEBESSÉG

A kinematikai alapmennyiségünk, a létezés-gradiens vegyes tenzor. Anyagi formája viszont megegyezik a szubsztanciális formával, mert $\hat{Y}_b^a = \tilde{Z}_c^a \tilde{Y}_b^c \tilde{Y}_d^c = \tilde{Y}_b^a$. Ennek megfelelően az anyagi formájának deriváltja a szubsztanciális derivált lesz:

$$\tilde{\partial}_a \hat{Y}_c^b = \tilde{\partial}_a \tilde{Y}_c^b \prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t & \tilde{\partial}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_k \\ \tilde{v}^j & \tilde{H}_k^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0_k \\ \dot{\tilde{v}}^j & \dot{\tilde{H}}_k^j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0_i & 0_{ik} \\ \tilde{\partial}_i \tilde{v}^j & \tilde{\partial}_i \tilde{H}_k^j \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Innen kiolvashatjuk a négyessebesség anyagi deriváltját is. Ebből következik továbbá, hogy a sebesség és a mozgásgradiens anyagi időderiváltja a szubsztanciális derivált.

4. EGYSÉGES KONTINUUMFIZIKA

Habár az előző fejezet kinematikai megfontolásai valamilyen értelemben részét kell képezzék egy vonatkoztatási rendszertől független nemrelativisztikus kontinuumfizikának, a további lépések nem nyilvánvalók. Ugyanis az anyagi derivált és az anyagi időderivált csak az entrópia mérlegén keresztül lépnek fel, az anyagfüggvények megfelelő formájának meghatározásában segítenek.

Két kérdést kell megválaszolnunk egy kontinuummechanikai elméletben. Egyrészt el kell döntenünk, mi az *alakváltozás jó fogalma*. Kis deformációkra ez természetesen mindegy, de véges deformációk esetén a különféle választások nem egyenértékűek. A probléma első pillantásra tisztán mechanikainak tűnik. Valójában viszont arról kell döntenünk, hogy a kontinuum mozgásának melyik része disszipatív és melyik nem, beleértve természetesen a forgást is. Ez a szétválasztás viszont nehezen elképzelhető a második főtétel nélkül. Mi eddig a mozgásgradienst választottuk az alakváltozás mértékéül, mivel ez a geometriailag kitüntetett mennyiség [22, 15]. Választása a bal Cauchy-Green tenzor volt [23], elsősorban talán azért, mert az anyagi deriváltja az együttforgó (Jaumann) derivált. Fülöp érvelése alapján egy új alakváltozási mérték bevezetésére van szükség. Figyelembe véve az összes mechanikai elvárásunkat, meg is konstruálja ezt [18], legalábbis a három dimenziós részét,

ami az itt bevezetett $\mathbf{H}$ kétpontfüggvénynek felel meg. Ezek után van szükségünk az entrópiamérlegre, a végső válaszhoz tisztán a kinematika, sőt a mechanika sem elég, egy teljes elméleti megértéshez világosan el kell különíteni a disszipatív mozgásokat a nem disszipatív mozgásoktól.

A második fontos kérdés látszólag egyszerűbb, fel kell írunk *az alapmérlegek* — a tömeg, az impulzus és az energia mérlegének helyes és *objektív formáját*. Itt egyrészt az a probléma, hogy komponensű — téridőben értelmezett — mennyiség többféle is kiépíthető a szokásos relatív, három komponensű impulzummérlegből. Kérdés, az, hogy tömeg-impulzus tenzor reprezentálja-e az energiát, vagy valamilyen energia-impulzus tenzor. Az előbbi álláspontot képviseli például Kienzler és Herrmann [24] vagy Matolcsi [11]. Az energia-impulzus tenzor is többféle lehet. Az energia impulzus mérleg időszerű része a belső energiamérleggel analóg, ha az energia-impulzus vegyes tenzor, a teljes energia mérlegével, ha tenzor (csak kontravariáns komponense van). Ez utóbbi analóg a relativisztikus esettel. Mindhárom választásnál ügyelnünk kell arra, hogy a tenzor szimmetrikus belső impulzusmomentummal nem rendelkező közegekre. (Ez a követelmény látszólag azonnal kizárja a vegyes tenzor lehetőséget.) Fontos továbbá, hogy megfontolásainkban nem élhetünk mindig az impulzusra szokásos tömegszer sebesség feltételezésével, mert az egyedül a tömegpontok mechanikájából és elsősorban variációs megfontolásokból következne. Az egész kérdés tulajdonképpen arra vonatkozik, hogy mi a belső energia és a teljes energia viszonya. A belső energiáról mindenesetre tudjuk, hogy az csak a közegtől függ. Ami azt jelenti, hogy a szokásos belső energia sűrűség egyenlő teljes energia mínusz kinetikus energia sűrűség $e_b = e - \rho v^2/2$ módosítandó, mert a kinetikus energia ebben a formában mindig relatív mennyiség.

Mindezekre a problémákra valahogy egyszerre kellene választ adjon egy megfelelő négy dimenziós alapmérlegrendszer felírása. Ráadásul egy valóban egységes elmélet világos relativisztikus analógiákat is jelent — a $c \rightarrow \infty$ határátmeneten túlmenően. Ebből a szempontból elgondolkoztató a speciális relativisztikus folyadékok stabilitási tulajdonságait és a a relativisztikus hőmérséklet paradoxonjait egyszerre kezelni tudó termodinamikai elmélet, ahol az egy komponensű, hővezető folyadékokra vonatkozó entrópiaprodukció a következő alakban írható [25]:

$$\sigma_s = -\frac{1}{T} (P^{ab} - p\delta^{ab}) \partial_a v_b + q^a \partial_a \frac{1}{T} + \frac{q_a}{T} \left(\frac{\dot{q}^a}{e} - \dot{v}^a \right)$$

Itt T a hőmérséklet, p a nyomás, P^{ab} a nyomástenzor, azaz az energia impulzus tenzor tér-térszerű része, v^a a közeg négyessebesség mezője, ∂_a a gradiens, és q^a az energiafluxus, illetve az impulzussűrűség (az energia-impulzus tenzor tér-idő és idő-térszerű része a közeggel együttmozgó megfigyelőre nézve), e pedig a nyugalmi energiasűrűség. Az energia-fluxus és az impulzussűrűség belső impulzus hiányában egyenlőek. Különösen figyelemre méltó a fenti kifejezés utolsó tagja, amit az előtte

állótól elkülönítve írtunk, hogy rámutassunk az impulzus és a sebesség viszonyára vonatkozó jelentésére. A hővezetésre vonatkozó anyagtörvény relativisztikus felírásához az utolsó két kifejezés összevonandó és együtt adja az entrópiaprodukció termikus kölcsönhatásra vonatkozó részét.

5. KÖSZÖNETEK

A kutatást az OTKA T48489 sz. pályázata támogatta.

IRODALOM

- [1] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965. Handbuch der Physik, III/3.
- [2] W. Muschik. Objectivity and frame indifference, revisited. *Archive of Mechanics*, 50:541–547, 1998.
- [3] W. Muschik and L. Restuccia. Changing the observer and moving materials in continuum physics: Objectivity and frame-indifference. *Technische Mechanik*, 22(3):152–160, 2002.
- [4] C. G. Speziale. A review of material frame-indifference in mechanics. *Applied Mechanical Reviews*, 51(8):489–504, 1998.
- [5] I-S. Liu. On Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 16:177–183, 2003.
- [6] A. I. Murdoch. Objectivity in classical continuum physics: a rationale for discarding the 'principle of invariance under superposed rigid body motions' in favour of purely objective considerations. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 15:309–320, 2003.
- [7] A. I. Murdoch. On criticism of the nature of objectivity in classical continuum physics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:135–148, 2005.
- [8] I-S. Liu. Further remarks on Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:125–133, 2005.
- [9] A. Bertram and B. Svendsen. On material objectivity and reduced constitutive equations. *Archive of Mechanics*, 53:653–675, 2001.
- [10] B. Svendsen and A. Bertram. On frame-indifference and form-invariance in constitutive theory. *Acta Mechanica*, 132:195–207, 1999.
- [11] T. Matolcsi. On material frame-indifference. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 91(2):99–118, 1986.

- [12] T. Matolcsi and P. Ván. Can material time derivative be objective? *Physics Letters A*, 353:109–112, 2006. math-ph/0510037.
- [13] T. Matolcsi and P. Ván. On the objectivity of time derivatives. 2007. under publication in Atti dell’Accademia Peloritana dei Pericolanti.
- [14] T. Matolcsi and P. Ván. Absolute time derivatives. *Journal of Mathematical Physics*, 48:053507–19, 2007. math-ph/0608065.
- [15] Ván P. és Szarka Z. Asszonyi Cs. *Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota*, volume 5 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007. ISBN 978-963-420-932-4.
- [16] T. Matolcsi. *A Concept of Mathematical Physics: Models in Mechanics*. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1986.
- [17] T. Matolcsi. *Spacetime Without Reference Frames*. Akadémiai Kiadó Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1993.
- [18] Fülöp T. A tér nem abszolút — a téridő, mint a Galilei-féle relativitási elv következménye. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* 8. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008. (Jelen kötetben.)
- [19] C. Truesdell and R. Toupin. *The classical field theories*, in *Handbuch der Physik, Vol III/1*. Springer, Berlin, 1960.
- [20] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [21] Fülöp T. Kontinuumok kinematikájának új értelmezése. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* 8. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008. (Jelen kötetben.)
- [22] Ván P. és Asszonyi Cs. Az általános törvényszerűségek. In Asszonyi Cs., editor, *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye*, volume 3 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 2, pages 25–87. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [23] Verhás J. *Termodinamika és reológia*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [24] R. Kienzler and G. Herrmann. On the four-dimensional formalism in continuum mechanics. *Acta Mechanica*, 161:103–125, 2003.
- [25] P. Ván and T. S. Bíró. Relativistic hydrodynamics - causality and stability. *The European Physical Journal - Special Topics*, 155:201–212, 2008. arXiv:0704.2039v2.

KONTINUUMOK KINEMATIKÁJÁNAK ÚJ ÉRTELMEZÉSE

Fülöp Tamás

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Ez az írás a deformációtenzor eddig ismert értelmezéseinek néhány közös komoly hiányosságára mutat rá, majd egy olyan új deformáció-fogalmat vezet be, amely mentes ezektől a problémáktól. Az itt javasolt értelmezés képletilag is, tulajdonságaiban is, és fizikai tartalmát tekintve is újdonságokat hordoz. A kontinuumok kinematikájának leírása egyéb vonatkozásokban is új megközelítést nyer.

1. BEVEZETÉS

A kontinuumok fizikai leírása a kontinuum mozgásának leírásával kezdődik. Ennek megfelelően a terület régi nagyjai szinte mindnyájan foglalkoztak ezzel a tárgykörrel. Első közelítésben nehéz elképzelni, hogy lehetne-e manapság bármi újat mondani ebben a tekintetben...

Közelebbről megnézve azt is tudjuk (lásd bármelyik jelenkori kontinuummechanika tankönyvet), hogy a terület régi nagyjai szinte mindnyájan be is vezettek egy új, saját deformációtenzor-definíciót. Ez viszont zavarba ejtő és elbizonytalanító hatású, annak is, aki tanulja, annak is, aki oktatja, és annak is, aki használja. Hogy-hogy nincs egyetlen igazi mennyiség? És akkor például egy lineárisan rugalmasnak várt anyag melyik fajta deformációban mérve a leglineárisabb rugalmasságú? Tudható, hogy kis alakváltozások esetén az összes általánosan ismert definíció vezető rendben megegyezik. De azt is tudjuk, hogy számos gyakorlati szituációban ennél nagyobb deformációk lépnek föl, és ezeknek a helyzeteknek az elméleti tárgyalására is képesnek kell lennünk. Olyankor melyik deformáció-változat használandó?

Ezenkívül azt is tudjuk, hogy még egy kis mennyiség időbeli változási gyorsasága (változási sebessége) sem feltétlenül kicsi mennyiség, tehát a deformációsebességben még komolyabb eltérések léphetnek föl. Márpedig az anyagok belső súrlódásának, és általában a feszültséghatásokra pillanatszerű gyorsasággal választ adó rugalmasságon túli jelenségek (ld. reológia: kúszás, relaxáció, stb.) leírása igényelné az egyértelműséget a deformációsebesség értelmezésében is.

És ha már a kontinuum-kinematika értelmezésében nem egyértelmű a helyzet, mi lehet ott, mik rejthetnek ott, amikor a kinematika helyett már a dinamikát tekintjük? (És a termodinamikát.) A rengeteg bevezetett deformáció-értelmezés létét

a kontinuumfizika területén eltöltött számos év alatt is, megszokni talán meg lehet, de belenyugodni sokkal nehezebb.

Még közelebbről megszemlélve az eddig javasolt deformáció-fogalmakat, hiányosságokat is fedezhetünk fel bennük. Ezek között vannak olyanok, amik csak néhány definíciót érintenek, de vannak olyanok is, amelyek az összes változatban egyaránt jelen vannak. Köztük néhány pedig olyan komoly gondnak mutatkozik, ami szükségessé teszi a kontinuumok kinematikájának szisztematikus felülvizsgálatát.

Jelen munka megszületését ezek a bizonyos problémák motiválták. Az írás először az eddigi deformáció-értelmezések hiányosságait tekinti át. Ezután a kezdetektől indulva építi fel a kontinuumok kinematikájának leírását és vezeti be a deformáció-tenzor egy új definícióját, csupa olyan elemekből építkezve, amelyek mentesek a felsorolt problémáktól. Megállapítja a javasolt definíció bizonyos fontos általános tulajdonságait, majd néhány konkrét folyamat (köztük az egytengelyű terhelésre jellemző alakváltozás és az egyszerű nyírás) példáján szemlélteti a feltárt új tulajdonságokat, és az eddigi deformáció-értelmezésekhez való viszonyt (mikor térnek el és hogyan, mikor esnek egybe közelítőleg és milyen rendig, és mikor esnek egybe egzaktul és melyikkel).

Az eddigi deformáció-fogalmakkal kapcsolatos problémák különösen jól domborodnak ki, ha a nemrelativisztikus tér- és időfogalom koordináta- és vonatkoztatásirendszer-mentes leírásának szemszögéből nézünk rá. Ezt a tárgyalásmódot—mely a speciális relativisztikus téridőhöz hasonlóan a nemrelativisztikus téridőnek az affin teres geometriai jellegét ragadja meg—WEYL vezette be [13], többek között ARNOLD méltatta [1] és JAGLOM vizsgálta [7]; legteljesebb és leg-részletesebb felépítését pedig MATOLCSI dolgozta ki [9, 10]. Fizikai szempontból ez a leírás nem tesz mást, mint következetesen végigviszi a GALILEI-féle relativitási elv és a GALILEI-transzformáció következményeit [6]. Elvi érényei mellett számos gyakorlati haszna is megmutatkozik, a kontinuumfizikában [14, 15] például elsősorban az anyagi objektivitás elve ügyében különösen hatékony.

Az itt következő észrevételek és eredmények megszületésében is az e tárgyalásmód nyújtotta rálátás nyújtott nagy segítséget. A deformáció-értelmezések problémái azonban e nélkül a vonatkoztatásirendszer-mentes megközelítés nélkül is világosan felismerhetők. Ezt alátámasztandó, jelen írás a hagyományos formalizmust használja a képletek ismertetésekor, amikor is választunk egy inerciális vonatkoztatási rendszert, benne egy tér- és egy időorigót, és a vonatkoztatási rendszer terében egy DESCARTES-koordinátarendszert. Mindenesetre fontos tudnivaló, hogy az itt következő új megközelítés valójában nem követeli meg sem koordináták, sem origók, sem vonatkoztatási rendszer választását. Az is megemlítendő, hogy az itt javasolt kinematika- és deformációfelfogás, az eddigiekkel ellentétben, természetes, téridő-barát módon implementálhatónak mutatkozik speciális és általános relativisztikus téridőkre is. Ennek bemutatása azonban egy következő dolgozat feladata kell legyen.

2. AZ EDDIGI DEFORMÁCIÓTENZOR-FOGALMAK

A kontinuumok kinematikájának szokásos megközelítése¹ azzal kezdődik, hogy — miután választottunk egy, a közegtől független, külső inerciarendszert, benne egy tér- és egy időorigót, és szükség esetén az inerciarendszer terében egy DESCARTES-koordinátarendszert, — feltételezzük, hogy létezik egy olyan t_0 időpillanat, amikor a közeg mindenhol egy deformáltságmentes, „torzítatlan”, „nyomorítatlan” állapotban van. Ezt az időpillanatot referencia-időpontnak jelöljük ki, és minden közegpontot, anyagi pontot az e pillanatbeli $\mathbf{R}$ helyvektorával jellemzünk, indexelünk, rá ezzel hivatkozunk a továbbiakban. Egy $\mathbf{R}$ -el kijelölt közegpont a t időpillanatban az $\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{R})$ helyvektorú helyen jár külső inerciális vonatkoztatási rendszerünk terében,

$$\tilde{\mathbf{s}}(t, \mathbf{R}) := \tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{R}) - \mathbf{R} \quad (1)$$

elmozdulásnyira² kiinduló helyétől. Itt és a továbbiakban, jelen kötet [15] fejezetével összhangban, felülhullám jelöli, amikor egy mennyiség az anyagi változóknak, azaz $(t, \mathbf{R})$ függvényében van megadva, és $\tilde{\partial}$, $\tilde{\nabla}$ az anyagi változók szerinti deriválásokat, míg a hullámtalan mennyiségek a lokális változók, a külső inerciarendszer szerinti $(t, \mathbf{r})$ idő- és térváltozók függvényei, és a hullámtalan deriváltak a lokális változók szerintiek.

A definíció alapján speciálisan

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_0, \mathbf{R}) = \mathbf{R}, \quad \tilde{\mathbf{s}}(t_0, \mathbf{R}) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

A közegpont sebessége ezekkel a mennyiségekkel a

$$\tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{R}) = \tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{R}) = \tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{s}}(t, \mathbf{R}) \quad (3)$$

kapcsolatban áll.³ A közeg lokális változóknak megadott $\mathbf{v}$ sebességmezeje és az anyagi változóknak megadott $\tilde{\mathbf{v}}$ sebesség egymással a

$$\tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{R}) = \mathbf{v}(t, \tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{R})) \quad (4)$$

kapcsolatban áll.

Ezek után képezzük a

$$\tilde{\mathbf{H}} := \tilde{\mathbf{x}} \circ \overset{\leftarrow}{\tilde{\nabla}} = \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{s}} \circ \overset{\leftarrow}{\tilde{\nabla}} \quad (5)$$

mozgásgradienst, ahol $\tilde{\mathbf{I}}$ az egységtenzor, $\circ$ a diadikus vagy tenzorszorzat, a $\overset{\leftarrow}{\tilde{\nabla}}$ pedig a tőle balra eső függvény $\tilde{\partial}_{\mathbf{R}}$ deriváltját jelöli, a sorrend az indexes írásmód esetén adódó indexsorrendre utal:

$$(\tilde{\mathbf{x}} \circ \overset{\leftarrow}{\tilde{\nabla}})_{ij} = \tilde{\partial}_{R_j} \tilde{x}_i. \quad (6)$$

¹ Hazai forrásként például a [3, 4, 12] könyveket és a [11, 2] könyvfejezeteket érdemes megemlíteni. A nemzetközi szakirodalom például a [16] műveket ajánlja tanulmányozni.

² Az elmozdulás másik szokásos jelölése, $\mathbf{u}$ e kötet [15] fejezetében más, szintén szokásos szerepet játszik, ezért az egységes jelölés érdekében itt sem jelöl elmozdulást.

³ Feltételezzük minden felmerülő függvény folytonosságát és kellő rendig deriválhatóságát.

A továbbiakban az egyértelmű, vagy zárójelezéssel egyértelművé tett esetekben a $\tilde{\nabla}$ feletti nyilakat elhagyjuk. A mozgásgradiensre, definíciója alapján,

$$\tilde{\mathbf{H}}(t_0, \mathbf{R}) = \tilde{\mathbf{I}}. \quad (7)$$

A fenti képletekből, a vegyes deriváltak YOUNG-tételét és az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\tilde{\partial}_t(\tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\nabla}) = (\tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{x}}) \circ \tilde{\nabla} : \quad \dot{\tilde{\mathbf{H}}} = \tilde{\mathbf{v}} \circ \tilde{\nabla} = (\widetilde{\mathbf{v} \circ \nabla})(\tilde{\mathbf{x}} \circ \tilde{\nabla}) = (\widetilde{\mathbf{v} \circ \nabla})\tilde{\mathbf{H}}, \quad (8)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{H}}}\tilde{\mathbf{H}}^{-1} = \widetilde{\mathbf{v} \circ \nabla}, \quad (9)$$

ahol a felülpont a $\tilde{\partial}_t$ időderivált (együttmozgó vagy szubsztanciális derivált), $\widetilde{\mathbf{v} \circ \nabla}$ pedig természetesen azt jelenti, hogy a lokális $\mathbf{v} \circ \nabla$ függvény lokális változóról áttérünk az anyagi változókra.

$\tilde{\mathbf{H}}$ nem más, mint az $\tilde{\mathbf{x}}$ leképezés (geometriai transzformáció) JACOBI-mátrixa (-tenzora), és így $\det \tilde{\mathbf{H}}$ a megfelelő JACOBI-determináns, mely helyileg egy „infinitézimális” közegetartomány leképezés utáni (a t -kori) és előtti (a t_0 -kori) térfogatának a hányadosát fejezi ki. Eszerint a t -kori pillanatnyi helyi relatív térfogatváltozási sebesség $(\det \dot{\tilde{\mathbf{H}}})/\det \tilde{\mathbf{H}}$. A

$$(\det \dot{\tilde{\mathbf{H}}}) = (\det \tilde{\mathbf{H}}) \operatorname{Tr}(\dot{\tilde{\mathbf{H}}}\tilde{\mathbf{H}}^{-1}) \quad (10)$$

azonosság alapján — melynek bizonyítását ld. alább —, és (9) ismeretében a helyi relatív térfogatváltozási sebesség úgy is megadható, mint

$$\operatorname{Tr}[\widetilde{\mathbf{v} \circ \nabla}] = \operatorname{Tr}[(\widetilde{\mathbf{v} \circ \nabla})^S], \quad (11)$$

illetve lokális változóiban $\operatorname{Tr}(\mathbf{v} \circ \nabla)^S$, ugyanis a Tr -ben csak a $(\mathbf{v} \circ \nabla)^S$ szimmetrikus rész ad járulékot, a $(\mathbf{v} \circ \nabla)^A$ antiszimmetrikus rész nem. $\operatorname{Tr}[\mathbf{v} \circ \nabla]$ egy közismertebb alakja egyébként $\operatorname{div} \mathbf{v}$.

A (10) azonosság bizonyításához a legegyszerűbb DESCARTES-helykoordinátákat vezetni be, hogy $\tilde{\mathbf{H}}$ -ra mátrixként hivatkozhatunk. Ekkor az inverz mátrixra ismert formula, illetve a determináns kifejtési tétele szerint

$$(\tilde{\mathbf{H}}^{-1})_{ji} = \frac{1}{\det \tilde{\mathbf{H}}} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}, \quad (12)$$

$$\det \tilde{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+k} \Delta_{ik} \tilde{H}_{ik}, \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial \det \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \tilde{H}_{ij}} \right|_{\tilde{H}_{11}, \dots, \tilde{H}_{ij}, \dots, \tilde{H}_{33}} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} = \det \tilde{\mathbf{H}} (\tilde{\mathbf{H}}^{-1})_{ji},$$

ahol k egy tetszőleges rögzített index 1 és 3 között, Δ_{ij} pedig a $\tilde{\mathbf{H}}$ mátrix i -edik sora és j -edik oszlopa elhagyásával kapott aldetermináns (mely ugye nem tartalmazza $\tilde{H}_{ij}$ -t). Ezért

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_t(\det \tilde{\mathbf{H}}) &= \sum_{i,j=1}^3 \left. \frac{\partial \det \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \tilde{H}_{ij}} \right|_{\tilde{H}_{11}, \dots, \tilde{H}_{ij}, \dots, \tilde{H}_{33}} \cdot \tilde{\partial}_t \tilde{H}_{ij} = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \det \tilde{\mathbf{H}} (\tilde{\mathbf{H}}^{-1})_{ji} \dot{\tilde{H}}_{ij} = (\det \tilde{\mathbf{H}}) \operatorname{Tr}(\dot{\tilde{\mathbf{H}}}\tilde{\mathbf{H}}^{-1}), \end{aligned} \quad (13)$$

amit bizonyítani akartunk. Érdemes megjegyezni, hogy más úton is célt érhetünk, a [11] mű (1F4) képlete (74. o.) révén.

A (10) és (11) formulák együtt, a (7) következményeként adódó $\det \tilde{\mathbf{H}}(t_0, \mathbf{R}) = 1$, $\ln|\det \tilde{\mathbf{H}}(t_2, \mathbf{R})| = 0$ ismeretében a

$$\tilde{\partial}_t(\ln|\det \tilde{\mathbf{H}}|) = \text{Tr}[(\mathbf{v} \circ \nabla)^S], \quad (14)$$

$$\ln|\det \tilde{\mathbf{H}}(t, \mathbf{R})| = \int_{t_0}^t \text{Tr}[(\mathbf{v} \circ \nabla)^S](t', \tilde{\mathbf{x}}(t', \mathbf{R})) dt' \quad (15)$$

eredményt is szolgáltatják, ahol tehát az időintegrál is „szubsztanciális”, azaz az adott rögzített közegpontot követve készül.

Ezek után vezessük be az

$$\tilde{\mathbf{A}} := \sqrt{\tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}}}, \quad \tilde{\mathbf{B}} := \sqrt{\tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{H}}^T} \quad (16)$$

szimmetrikus, pozitív definit tenzorokat.⁴ Egyszerűen belátható rájuk, hogy

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = \det \tilde{\mathbf{B}} = |\det \tilde{\mathbf{H}}| = |\det \tilde{\mathbf{H}}^T|. \quad (17)$$

Ha ez a közös determinánsuk nemnulla, akkor $\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ mindnyájan invertálhatóak, és ekkor

$$\tilde{\mathbf{Q}} := \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \quad (18)$$

egy ortogonális tenzor, hiszen egyrésztől

$$\det \tilde{\mathbf{Q}} = \det \tilde{\mathbf{H}} / \det \tilde{\mathbf{A}} = 1, \quad (19)$$

másrésztől

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} &= \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{H}}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{H}}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{H}}^{-1} = \\ &= (\tilde{\mathbf{A}}^{-1})^T \tilde{\mathbf{H}}^T = (\tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{A}}^{-1})^T = \tilde{\mathbf{Q}}^T. \end{aligned} \quad (20)$$

A (18) definíció következményeként

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1}) \tilde{\mathbf{Q}}. \quad (21)$$

$\tilde{\mathbf{A}}$ szimmetrikus és pozitív definit volta miatt az itt felbukkanó $\tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1}$ is szimmetrikus és pozitív definit, a négyzete pedig

$$(\tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1})^2 = \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} = \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{Q}}^T = \tilde{\mathbf{H}} (\tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{A}})^T = \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{H}}^T, \quad (22)$$

vagyis

$$\tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} = \tilde{\mathbf{B}}. \quad (23)$$

⁴ Egy $\mathbf{W}$ szimmetrikus, pozitív definit tenzor négyzetgyöke az az egyértelműen meghatározott szimmetrikus, pozitív definit tenzor, amelynek sajátvektorai azonosak $\mathbf{W}$ -éival, sajátértékei pedig $\mathbf{W}$ megfelelő sajátértékeinek négyzetgyökei. A (16)-ban a gyökök alatt szimmetrikus, pozitív definit tenzorok állnak.

Ezzel $\tilde{\mathbf{H}}$ egy ortogonális és egy szimmetrikus tenzor szorzatára való egyértelmű, ún. CAUCHY-féle poláris felbontását nyertük mindkét lehetséges sorrendben, mivel

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{Q}}. \quad (24)$$

E sorrendek alapján $\tilde{\mathbf{A}}$ és $\tilde{\mathbf{B}}$ nevezhetőek a $\tilde{\mathbf{H}}$ -hoz tartozó *jobb* és *bal* oldali szimmetrikus tenzoroknak.

Amikor $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{I}}$, akkor a $\tilde{\mathbf{H}}$ mozgásgradiens egy tiszta $\tilde{\mathbf{Q}}$ elfordulás, ilyenkor a közeg egy merevtestszerűen elfordult állapotba jutott (legalábbis helyileg, egy-egy közegpont egy kis környezetét nézve). A deformációtenzorral a közeg mozgásának (helyi) merevtestmozgástól való eltérését kívánjuk jellemezni, ezért definiálhatjuk például az $\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{I}}$, vagy a $\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{I}}$ eltéréssel. Kissé általánosabban, bevezethetők a

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}}^{(m)} := \frac{1}{m} \left(\tilde{\mathbf{A}}^m - \tilde{\mathbf{I}} \right), \quad \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{B}}^{(n)} := \frac{1}{n} \left(\tilde{\mathbf{B}}^n - \tilde{\mathbf{I}} \right) \quad (25)$$

deformációtenzorok, ahol az m, n értékek tetszőleges valós értéket felvehetnek, az $m = 0$ ill. $n = 0$ eset határátmenettel értelmezhető:⁵

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}}^{(0)} := \ln \tilde{\mathbf{A}}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{B}}^{(0)} := \ln \tilde{\mathbf{B}}. \quad (26)$$

Csak néhány elnevezést sorolva fel példának, nevezik az $m = 2$ esetet GREEN-ST-VENANT-féle, az $m = 1$ esetet BIOT-féle, az $m = 0$ esetet HENCKY-féle (vagy „logaritmikus”, „természetes”, „valódi”), az $n = -1$ esetet pedig ALMANSI-féle deformációtenzornak (többek között). A különböző m -ű $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}}^{(m)}$ -ek kis $\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{I}}$ szerinti sorfejtései első rendben megegyeznek, és hasonló mondható el a különböző n -ű $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{B}}^{(n)}$ -ekről. Amikor $\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{I}}$ és $\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{I}}$ mellett még a $\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{I}}$ különbség is kicsi—azaz alig történt elfordulás a referenciahelyzethez képest—, akkor $\tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\mathbf{I}}$ is kicsi, mert

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{A}} = \left[\tilde{\mathbf{I}} + \left(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{I}} \right) \right] \left[\tilde{\mathbf{I}} + \left(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{I}} \right) \right] \approx \tilde{\mathbf{I}} + \left(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{I}} \right) + \left(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{I}} \right), \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{Q}} = \left[\tilde{\mathbf{I}} + \left(\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{I}} \right) \right] \left[\tilde{\mathbf{I}} + \left(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{I}} \right) \right] \approx \tilde{\mathbf{I}} + \left(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{I}} \right) + \left(\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{I}} \right). \quad (28)$$

Ilyenkor $\tilde{\mathbf{s}} \circ \tilde{\nabla} = \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\mathbf{I}}$ [ld. (5)] kicsi, következésképp

$$\tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} \approx \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{s}} \circ \tilde{\nabla} + \tilde{\nabla} \circ \tilde{\mathbf{s}} \approx \left[\tilde{\mathbf{I}} + \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{s}} \circ \tilde{\nabla} + \tilde{\nabla} \circ \tilde{\mathbf{s}} \right) \right]^2 \approx \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^T, \quad (29)$$

így

$$\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{I}} \approx \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{I}} \approx \frac{1}{2} \left(\tilde{\nabla} \circ \tilde{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{s}} \circ \tilde{\nabla} \right) = \tilde{\mathbf{D}}^{\text{CAUCHY}}, \quad (30)$$

azaz ebben a közelítésben az összes $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}}^{(m)}$ -ek és $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{B}}^{(n)}$ -ek egymással is megegyeznek, továbbá egyenlőek az ún. CAUCHY-féle deformációtenzorral is.

Természetesen, ha [pl. (4) mintájára] az anyagi változójú $\tilde{\mathbf{H}}$ függvényről áttérünk lokális változójú $\mathbf{H}$ alakjára, akkor mindezek a fenti definíciók és eredmények a

⁵ Szimmetrikus, pozitív definit tenzoroknak a négyzetgyökhöz, azaz az $\frac{1}{2}$ -ik hatványhoz hasonló módon vezethető be a tetszőleges valós hatványuk, és a logaritmusuk is.

megfelelő lokális $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ stb. függvényekre vihetők át ill. lesznek érvényesek. A további tárgyalás a lokális alakokat fogja használni (egyelőre egyszerűen csak azért, hogy a képletek kinézete egy kicsit egyszerűbb legyen).

A későbbiek fényében két szempontból is érdekes lesz az a—most még ártatlannak tűnő—megállapítás, hogy mindegyik deformációtenzor-változat úgynevezett kétpont-mennyiség vagy kétpont-függvény, mely tulajdonság lényege az, hogy két időponthoz tartozik: a t_0 referencia-időponthoz és a t pillanatnyi időponthoz.⁶ Az egyik megjegyzendő jellemzője ennek a tulajdonságnak az, hogy ezek szerint a deformáció nem egyedül a pillanatnyi időponthoz rendelődik hozzá (nem egy pont-mennyiség), hanem egy másikhoz is: amely időpontbeli állapothoz viszonyít. A másik pedig az, hogy ezek szerint nem függ a két időpont közti időpontokbeli állapottól, mennyiségektől, nem függ a két időpont között lezajlott folyamattól (nem intervallum-mennyiség, nem folyamatfüggő, hanem csak kezdeti- és végállapotfüggő). Úgymond, elég egy pillanatfelvételt készíteni a közegről a t_0 időpontban, egy másikat a t pillanatban, és ezek alapján meghatározható a köztük elszenvedett deformálódás.

Megjegyzendő az is, hogy a kontinuumok kinematikájában a deformációtenzor mellett ismeretes az alakváltozási tenzor fogalma is.⁷ A szakirodalomban ez utóbbi is több változatban vezetődik be, a különböző alakváltozási tenzorokat $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ illetve $\mathbf{H} \mathbf{H}^T$ különböző hatványaiként definiálják. Az alakváltozási tenzorokkal nem lesz szükséges külön foglalkoznunk, az alább következő megállapítások analóg módon lesznek érvényesek rájuk is.

3. AZ EDDIGI DEFORMÁCIÓ-ÉRTELMEZÉSEK HIÁNYOSSÁGAI

Öt kritikai észrevétel következik most a fent ismertetett deformáció-definíciókkal kapcsolatban.

AZ ELSŐ AZ A HATÁROZATLANSÁG, hogy a rengeteg (végtelen sok) $\mathbf{D}_\mathbf{A}^{(m)}$ és $\mathbf{D}_\mathbf{B}^{(n)}$ melyikét tekintsük a használandó (például a HOOKE-törvényben alkalmazandó) deformációtenzornak.⁸ Ráadásul a $\mathbf{H}$ tenzor mindkétféle sorrendű poláris felbontása

⁶ Eredetileg nem a két időpont miatt, hanem két térpont miatt hívják így: hogy valahonnan valahova ment a közeg egy pontja, és hogy az ottani helyi állapothoz mérjük az itteni helyi állapotot. Az időbeli aspektus azonban hasonlóan lényegi dolgot ragad meg, mint a térbeli: hogy az akkori állapothoz viszonyítjuk a mostanit. Tulajdonképpen kétfajta sorrendről van szó. Az első, hogy először közegpontonként hasonlítgatunk össze akkori és mostani helyi állapotok között, és utána rakjuk ezeket egymás mellé, mint az egész közeg változása. A másik, hogy először mind az akkori, mind a mostani időpontban külön-külön elkészítjük a közeg állapotát a közeg összes pontját felkeresve, és ezután az akkori összközegi állapothoz hasonlítjuk a mostani összközegi állapotot, ez lesz az összközegi változás. Hogy az időbeli lefolyás milyen fontos aspektus a deformáció során, az az írás végére világossá válik.

⁷ Ezek a magyar elnevezések nem a külföldi terminológia tükörfordításai. Angolul például az alakváltozás „deformation”, a deformáció pedig „strain”.

⁸ Eredendően a HOOKE-törvényt csak kis deformációk esetére véljük alkalmazhatónak. Nagyon nagy gyakorlati értéke van azonban annak, ha egy olyan deformáció-fogalmunk van, amellyel a HOOKE-törvény (egyrészt nemcsak kis, hanem nagy elfordulások esetén is, másrészt) valamennyivel nagyobb mértékű deformáltságokra is még jó közelítésnek bizonyul. Ez részben persze dinamikai, részben azonban kinematikai kérdés.

[ld. (24)], melyeket a következők érdekében most írjunk $\mathbf{H} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_2$ alakban, „természetellenesen féloldalas”, ezért egy „igazságosabb” középút lehetne egy $\mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_3 \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_3 \mathbf{A}_3)$ felbontás, amennyiben sikerülne belátni azt a plauzibilis sejtést, hogy egy ilyen egyértelmű felbontás is lehetséges, egy ortogonális $\mathbf{Q}_3$ és egy szimmetrikus $\mathbf{A}_3$ részvételével. Ezenkívül nemcsak additíve, hanem multiplikatíve is kereshetnénk „igazságosabb” középutakat, $\mathbf{Q}_4^{1/2} \mathbf{A}_4 \mathbf{Q}_4^{1/2}$ és $\mathbf{A}_5^{1/2} \mathbf{Q}_5 \mathbf{A}_5^{1/2}$ módokon. Miután pedig ennyi megfontolandó alternatíva vázolható fel, ez akár arra is utalhat, hogy valójában egyik sem elegendően kitüntetett, egyik sem alapvetőbb a többinél.

Egy dolog máris bizonyos: mindegyikük nem lehet legitim. Láttuk ugyanis, hogy a $\mathbf{D}_\mathbf{A}^{(m)}$ -ek és a $\mathbf{D}_\mathbf{B}^{(n)}$ -ek csak akkor egyenlőek a kis alakváltozások vezető rendjében, ha $\mathbf{Q} \approx \mathbf{I}$. Márpedig deformációtenzorok közötti viszony nem függhet attól, hogy mennyi az elfordulás foka, hiszen az elfordulás egy tőlük függetlennek várt mozgásforma.

Hogy deformáció és elfordulás független kell legyen egymástól, ez az elgondolás eredetileg onnan ered, hogy kis alakváltozások esetén az elmozdulásmező gradiense egy deformálódást leíró és egy elfordulást leíró tag összege. Nagyobb alakváltozások esetén is ésszerű azonban fenntartani ezt az elvárást, hogy például nagy elfordulások — de esetleg továbbra is kicsi deformálódások: tágulások és torzulások — esetén is legyen egy mennyiség, ami csak a deformálódást jellemzi (és így például a vele felírt HOOKE-törvényt alkalmazhatóvá teszi). Ugyanígy az elfordulásfüggőnek várt jelenségek modellezéséhez is egy olyan elfordulás-fogalom a hasznos, mely lehetőleg minél függetlenebb a tágulásszerű és torzulásszerű változásoktól. Deformálódás és elfordulás tökéletes szeparálása nagy alakváltozások esetén nem lehetséges, de alkalmas kinematikai definíciókkal nagymértékben megközelíthető.

Van egyébként, aki a bal oldali $\mathbf{H} = \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_2 \equiv \mathbf{B} \mathbf{Q}$ alak mellett érvel, hogy ha egy megszerzett deformáció után merevtestszerű elfordulás következik, ez utóbbi folyamatszakaszon a közeghez viszonyítva ne regisztráljunk további deformációváltozást. Sajnos, látni fogjuk, hogy $\mathbf{Q}$ általában nem hiteles leírója a közeg elfordulásának. Ezenfelül egy ilyen érv még mindig rengeteg lehetőséget hagyna nyitva.

A MÁSODIK ÉSZREVÉTEL éppen az, hogy a sebességgradiens

$$\mathbf{v} \circ \nabla = \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} = (\mathbf{Q} \dot{\mathbf{A}}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \quad (31)$$

felbontását szívesen interpretálnánk egy elfordulási sebesség (szögsebesség) és egy deformációsebesség összegeként, és ehhez a jobb oldalon az első tag valóban antiszimmetrikus is, amilyennek egy szögsebességtenzornak lennie kell:⁹

$$\mathbf{Q} \text{ ortogonális} \implies \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \implies \quad (32)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{-1} + (\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{-1})^T = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{-1} + (\mathbf{Q}^{-1})^T \dot{\mathbf{Q}}^T = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{Q}}^{-1} = (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1})^\cdot = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}.$$

A második tag azonban általában nem szimmetrikus. Amikor ugyanis az, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} &= (\mathbf{Q} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^{-1})^T = \mathbf{Q} (\mathbf{A}^T)^{-1} \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{Q}^{-1} \implies \\ \implies \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{A}}. \end{aligned} \quad (33)$$

⁹ mint azt később részletesen is látni fogjuk

Ez viszont általában nem teljesül, mint az a következő példa mutatja (legyen $a \neq 1$, $c \neq 0$):

$$\mathbf{A}(t) := \begin{pmatrix} a & ct & 0 \\ ct & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\dot{\mathbf{A}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{A}}(0), \quad \dot{\mathbf{A}}(0)\mathbf{A}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & c/a & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}(0)\dot{\mathbf{A}}(0).$$

Így tehát általában (31) jobb oldalának második tagja is tartalmaz forgást (antiszimmetrikus részt). Ráadásul még ha le is választanánk róla az antiszimmetrikus részét, a maradék szimmetrikus részben is maradna $\mathbf{Q}$, pedig egy deformációsebességnek függetlennek illene lennie az elfordulástól. További következmény, hogy mivel $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1}$ nem a szögsebesség (mely a sebességgradiens antiszimmetrikus része, mint azt később részletesen látni fogjuk), eszerint $\mathbf{Q}$ nem írja le helyesen a közeg elfordulását. Jelentősebb mennyiségű elfordulást tartalmazó folyamatok esetén—amilyen például a tiszta nyírás is, lásd 10.2. alszakasz,—ez komoly hibát okozhat, akár nemcsak mennyiségi, hanem minőségi eltérést is (például a leírás esetleg tévesen stabilitásvesztést jósol, vagy épp ellenkezőleg: nem vesz észre stabilitásvesztést).

HARMADIK PROBLÉMAKÉNT a következőre figyelhetünk fel. Egy közegnek térfogatváltozás (tágulás-összehúzódás) szempontjából kétfajta szinguláris határeset-állapota lehet: amikor végtelenül kitégűl, és amikor végtelenül kicsire, pontszerűre vagy végtelenül laposra összehúzódik. Elvárható lenne, hogy a deformáltságot egy olyan mennyiség mérje, amely divergál mind a végtelen kitégűlés, mind a végtelenül kicsire összehúzódás határesetjeiben. A $\mathbf{H}$ nyelvén ez az elvárás $\det \mathbf{H} \rightarrow \infty$ -nel, illetve $\det \mathbf{H} \rightarrow 0$ -val fogalmazható meg, mely (17) révén $\det \mathbf{A}$ -ra és $\det \mathbf{B}$ -re ugyanezeket jelenti.

Nos, a pozitív m -ű ill. n -ű $\mathbf{D}_{\mathbf{A}}^{(m)}$ -ek és $\mathbf{D}_{\mathbf{B}}^{(n)}$ -ek $\det \mathbf{H} \rightarrow \infty$ -re valóban szingulárisan viselkednek.¹⁰ $\det \mathbf{H} \rightarrow 0$ esetén azonban maradhatnak regulárisak. Például egy izotróp összehúzódás, egy

$$\mathbf{H}(t) := f(t)\mathbf{I}, \quad f(t_0) = 1, \quad t \rightarrow t^* \text{ esetén } f(t) \rightarrow 0 \quad (35)$$

folyamat esetén

$$\mathbf{D}_{\mathbf{A}}^{(m)}(t) = \frac{1}{m} [f(t)^m - 1] \mathbf{I} \rightarrow -\frac{1}{m} \mathbf{I}, \quad \text{ahogy } t \rightarrow t^*, \quad (36)$$

és ugyanígy $\mathbf{D}_{\mathbf{B}}^{(n)} \rightarrow -\frac{1}{n} \mathbf{I}$. Ezek tehát egy békés, véges értékhez (tenzorhoz) tartanak. Hasonlóan, a negatív m -ű ill. n -ű $\mathbf{D}_{\mathbf{A}}^{(m)}$ -ek és $\mathbf{D}_{\mathbf{B}}^{(n)}$ -ek a végtelen összehúzódáskor divergálnak, a végtelen kitégűléskor viszont általában nem.

Ez a nemszinguláris viselkedés ráadásul nemcsak geometriai szempontból tűnik nem elég kielégítőnek, hanem fizikai és praktikus szempontból sem. Ugyanis

¹⁰ Pl. $\mathbf{A}$ determinánsa a sajátértékeinek a szorzata, tehát lesz divergáló sajátértéke, így $\mathbf{D}_{\mathbf{A}}^{(m)}$ -nek is.

amikor például egy HOOKE-törvénnyel—miszerint a feszültség a deformáció lineáris függvénye—modellezzük egy közeg viselkedését, összenyomás esetén valószínűleg gyorsan (már kis deformációk esetén is) el fog romlani a modellünk érvényessége, hiszen fizikailag várhatóan egy anyag szingulárisan kicsire összenyomásához végtelen erőhatások kellenek, míg a HOOKE-törvény egy véges deformációtenzor-értékhez véges feszültségértéket rendel. Olyan deformációfogalomra lenne szükség, amely a lehetséges deformációértékek minél nagyobb tartományán követi híven a közeg állapotát, például egy várhatóan meglehetősen lineárisan rugalmas anyagra minél nagyobb tartományon teszi jó közelítéssé a lineáris rugalmassági törvényt.

Ebből a szempontból $\mathbf{D}_\mathbf{A}^{(0)}$ és $\mathbf{D}_\mathbf{B}^{(0)}$ kielégítően viselkedik, mert mindkét fajta szinguláris határesetben divergál, ez a kritérium tehát nagymértékben szűkíti a deformációtenzor-lehetőségeken. Sajnos nem eléggé, hiszen még mindig két jelölt maradt. Továbbá a (25) konstrukciók mintájára bevezethetjük a

$$\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{A}^{(m)} := \frac{1}{2m} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{-m}) , \quad \hat{\mathbf{D}}_\mathbf{B}^{(n)} := \frac{1}{2n} (\mathbf{B}^n - \mathbf{B}^{-n}) \quad (37)$$

definíciókat is, amelyek kis alakváltozásokra ugyanazzal a vezető renddel rendelkeznek (a 60. oldalon már említett kifejtéseket tekintve), mint a $\mathbf{D}_\mathbf{A}^{(m)}$ -ek és $\mathbf{D}_\mathbf{B}^{(n)}$ -ek, és melyek szintén divergálnak mindkét szinguláris határesetben. Ráadásul ezeken felül bevezethetnénk még $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló hatványszerű, és/vagy logaritmikus, „igazságos” kombinációit is, mint például $\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{A}^{(m)} + \hat{\mathbf{D}}_\mathbf{B}^{(m)})$.

MENJÜNK AZONBAN TOVÁBB A NEGYEDIK ÉSZREVÉTELRE. A hagyományos megközelítés ugyanis feltételezi egy olyan t_0 időpont létét, amikor a közeg minden egyes pontban deformálatlan. Fizikailag ezzel azt tételezzük fel, hogy t_0 -kor a közeg mindenhol egy „sanyargatatlan”, „lehető legrelaxáltabb”, „legbékénahagyottabb” alapállapotban van (mely állapotól való eltérést hivatott mérni a deformációtenzor a „sanyargatottabb” helyzetekben). Ha belegondolunk, ez a feltételezés nem túl realisztikus.¹¹

Megpróbálhatjuk a dolgot úgy kimagyarázni, hogy t_0 -t valami jó régi, békés végtelen múltbeli értéknek gondoljuk. Sajnos, „egzaktul végtelennek” nem vehetjük, mert akkor a véges időkben a $\tilde{\mathbf{x}}$ elmozdulásmérő mennyiség végtelen lenne (általában). Véges t_0 esetén pedig valami irreálisan jó szerencsénkben kellene bízunk, hogy volt olyan t_0 , amikor például a lábunk alatti, az állandóan ható gravitáció által összehúzott, és a kőzetlemezek vándorlása által taszigált talaj valaha a földtörténeti múltban bármikor is mindenhol teljesen „kirúgott, relaxált, torzulásmentes” állapotban volt. Már az se fizikailag megalapozott, ha azt várjuk, hogy akár csak egyetlen közegpont számára volt valaha olyan időpont, amikor ott a közeg az alapállapotában volt. Ez bizonyos folyamatok esetén lehetett így, másoknál nem: általánosan még ennyit sem jogs elvárunk.

Bízhatunk benne, hogy majd az „igazából fontos”, dinamikai formuláink (mérlegegyenletek, HOOKE-törvény, stb.) lesznek olyan jók, annyira realitás-tükrözőek, hogy nem igazán fognak függeni ettől a kinematika érdekében tett, t_0 -kori teljes

¹¹ Ennek a referencia-időpontnak a léte illetve feltételezése, és az akkori konfiguráció referencia-konfigurációként kezelése a szakirodalomban régóta vitatott és sokak által vizsgált kérdés, ám úgy tűnik, mindmáig eredménytelenül.

háborítatlanságot feltevő feltételezéstől. Viszont éppen azért, mert a realitás nem igényli ezt a feltételezést, egy olyan deformáció-fogalom lenne szerencsés, — mi több: hiteles, — ami szintén nem alapoz rá.¹²

A referencia-időpont és -konfiguráció elestével az anyagi változókban való dolgozás is elesik. Hiszen olyan konfigurációhoz mégsem akarnánk viszonyítani, amely nem mindenhol a legrelaxáltabb alapállapot...

Az anyagi sokaságon dolgozó formalizmus elvetése azonban nyugtalanító érzéseket kelthet. Hiszen az anyagi változóban dolgozás annak a garanciájának tűnik, hogy az anyaggal együtt haladunk, hűen követjük annak minden rezdülését. Az anyag belső kölcsönhatásait az anyaghoz tapadó módon leíró formalizmus e kölcsönhatások hiteles leírásának biztosítékának tűnik. Fel kell azonban ismernünk, hogy az anyagi sokasággal épp egy rossz úton járhatunk: nemcsak az anyag sorsának pillanatnyi alakulása jelenik meg a leírásunkban, hanem egy általunk önkényesen behozott referencia-szituációjáé is. Egy olyan szituációé, melyről nem garantálhatjuk, hogy minden anyagi pontnál a kitüntetett, hiteles referencia-állapottal rendelkezik. Az anyagi sokaságon dolgozás éppenhogy műtermékeket hozhat be a leírásunkba, ahelyett, hogy a közeg sorsának hiteles krónikása lenne.

Természetesen azt az igényt és követelményt nem szabad feladnunk, hogy az anyag belső kölcsönhatásainak és dinamikai folyamatainak jellemzéséhez a közeggel együtt kell haladnunk, a pillanatnyi állapotokat és kinematikai folyamatokat az anyaghoz illeszkedve, a közeget a lehető leghűebben követve. Ez azonban valójában nem a függvények változóira jelent követelményt (hogy anyagi-e vagy nem anyagi), hanem a függvények értékeire és azok változásaira (deriváltjaira). Kellően a közeghez illeszkedő értékű mennyiségek, mezők, függvények, és azok kellően a közeg áramlásához illeszkedő derivált-típusai biztosíthatják az anyag sorsának műtermékektől mentes, hiteles jellemzését. Az anyagi sokaságról és az anyagi változókról le kell mondanunk, de az anyagi *mennyiségekről* (az anyag viszonyairól tudósító, az anyag létezéséhez idomuló mennyiségekről, függvényértékekről) nem kell, és nem is szabad lemondani.

Speciális és általános relativisztikus téridőkön egyébként már nem is lehetséges általában az anyagi változók bevezetése. Az egyes közegpontokban érvényes egyidejűség általában nem terjeszthető ki, nem kötogethető össze egy az egész közeg mentén érvényes egyidejűséggé — már speciális relativisztikus téridőn sem! Ezért a közeg számára általában nem definiálhatóak az egyes időpillanatok. Azokban a speciális esetekben pedig, amikor mégis, olyankor még mindig általában az a furcsaság lép fel, hogy az idő a közeg különböző pontjaiban különbözőképpen, azaz helyfüggően telik. (A közelebbi részletekről lásd [10].) Emiatt az anyagi változók

¹² Például a rugalmasságtanban szokásosan ismertetett monokromatikus, $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{kr} - \omega t)$ alakú elmozdulásmezőjű síkhullámmegoldások esetében máris nagyvonalúan elfeledkeztünk a referencia-konfigurációról: nincs olyan t időpont, ami elláthatná t_0 szerepét, azaz amikor ez az elmozdulásmező minden $\mathbf{r}$ helyen nulla. (Sem egy véges időpontban, sem egy aszimptotikusan távoli múltban.) Szigorúan véve, a formalizmusunk nem enged meg egy ilyen megoldást. Fizikailag mégis egy hasznos modellnek, egy értékes közelítésnek tartjuk az ilyen megoldásokat is, és joggal. Ez a példa is utal rá, hogy magunk se tartjuk fizikailag indokoltnak megkövetelni a referencia-konfiguráció és -időpont létét.

relativisztikus implementálása lehetetlen. Ez a tény egy független intő jel arra, hogy nemrelativisztikusan is kerüljük az anyagi változók használatát a közegfolyamatok *elvi* leírásában.¹³

SZINTÉN A REFERENCIA-IDŐPONT LÉTÉHEZ KAPCSOLÓDIK AZ ÖTÖDIK KRITIKAI ÉSZREVÉTEL. Ez pedig az, hogy—mint azt már említettük,—a mozgásgradiens, és a belőle származtatott deformáció-változatok mindegyike ún. kétpont-függvény, két időpont függvénye: a most-ot jellemző t -é és a referencia-időpont t_0 -é. Mint valamilyen kinematikai elmozdulásfajták, joggal lehetnek is kétpont-függvények. Gondoljunk azonban csak bele, mi a célunk azzal, hogy legyen egy deformáció-fogalmunk: az, hogy ez a mennyiség a *pillanatnyi* helyi geometriai viszonyokat, a közeg *pillanatnyi* „geometriailag gerjesztett állapotát”, a legrelaxáltabb alapállapottól való eltérését fejezze ki. Az anyag mikroszerkezetére gondolva például a kristályszerkezet nyugalmi elrendeződéstől való eltérését, vagy egymáshoz érintkező szemcsék egymásba benyomódásának mértékét gondolhatjuk mögé, a háttérbe. Továbbá, a célunk a deformációtenzorral nem geometriai-kinematikai,¹⁴ hanem dinamikai: az, hogy az anyagi rugalmasság konstitutív függvényének¹⁵ változójaként lehessen használni. Ez az az elvi szerep, amelyre az eddig ismert deformáció-definíciók, az itt megfogalmazott kritikák miatt nem alkalmasok. Eme dinamikai szerepe miatt *fizikailag azt várjuk a deformációtenzortól, hogy egy egy pont-függvény legyen.* (Gondoljunk csak bele: a feszültségtenzor, mely például egy rugalmas anyagmodellben a deformációtenzorral áll egyértelmű kapcsolatban, szintén egy egy pont-függvény.) A deformációtenzor egy mező kellene legyen.

Természetesen a deformáció egy viszonyt kell kifejezzon. De nem egy más időpillanatbeli megtörtént szituációhoz való viszonyát, hanem egy elvileg létező, ideális állapothoz való viszonyát, mely ideális állapot vagy fennállt valaha is a közeg adott folyamata során, vagy nem.

A deformáció az anyag állapotának egyik mezőszerű jellemzője legyen. Továbbra is úgy gondoljuk tehát, hogy lenne egy olyan lehetséges kitüntetett állapot, amihez viszonyíthatjuk a pillanatnyi, általában nem-kitüntetett állapotot. Viszont ne tételezzük fel, hogy abban a közegpontban valaha is fennállt vagy fenn fog állni az a kitüntetett állapot. Ne erőltessük rá a közeg folyamatára, hogy létezzen benne egy ilyen időpillanat, pláne hogy ebben az időpillanatban minden közegpont számára egy ilyen kitüntetett nyugalmi állapot teljesült volna.

Tovább gondolkodva a fizikai elvárásainkon, a deformációtenzornak csak szilárdtest közegek esetén lenne létjogosultsága. Folyadékoknak és gázoknak (óvatosabb megfogalmazással: izotróp helyi szerkezetűnek tekinthető közegeknek) nincsenek irányfüggő, tenzort igénylő geometriájú helyi alakformációi. Ez utóbbi anyag-

¹³ Más kérdés természetesen, hogy egy *konkrét* folyamatot milyen változókat, milyen segéd-mennyiségeket bevezetve lehetséges egyszerű és célszerű alakban megadni, és segítségükkel egy *konkrét* feladatot megoldani, úgy, hogy velük az esetlegesen szükséges közelítések is kényelmesen legyenek megfogalmazhatóak. Lásd erről még a 4. szakaszt is.

¹⁴ A kontinuumok mozgásának *elvi* leírásához nincs szükség deformáció- és alakváltozási tenzorokra, mint azt látni is fogjuk.

¹⁵ konstitutív egyenletének, konstitúciós relációjának, anyagfüggvényének, anyagegyenletének, anyagtörvényének – ki melyik szóhasználatot szereti

típusoknak csak térfogati szempontból van egy kitüntetett geometriai helyzete, és egy ettől általában eltérő tágultsági foka. Számukra csak egy skalár tágultságmérő mező bevezetése indokolt. Ha pedig gazdaságosságra törekszünk a leírásunkban, ezt a tágultságot nem is kötelező bevezetnünk, hiszen a (tömeg-)sűrűséggel ezt is kifejezhetjük, a sűrűség alakulása áttételesen erről is számot ad.

A deformációtenzort, közelebbről a szubsztanciális időderiváltját szokásos még a közeg belső sűrűlódásának konstitutív jellemzéséhez is használni. Erre a célra azonban a közeg sebességmezeje, illetve egy belőle származtatott alkalmas térderiválttípus is meg kell feleljen. A deformációtenzor egyéb kinematikai célú felhasználásai pedig megvalósíthatók kell legyenek a sebességmezővel és annak integrálgörbéivel, az egyes anyagi pontok (téridőbeli) pályájával, világvonalával (lásd a következő szakaszt). A kinematika *elvi* megadásához nem kellhetnek kétpont-függvények.¹⁶

ÖSSZEFOGLALVA az eddigi deformáció-fogalmakra tett kritikai megállapításokat:

1. Van végtelen sok bal oldali és jobb oldali lehetőség, ezenfelül a poláris felbontásoknak lehetnek bizonyos természetes (akár: természetesebb) általánosításai: ezek melyikét, vagy ezek melyik kombinációját válasszuk?
2. A közeg elfordulása nincs hitelesen leírva.
3. A szingulárisan nagy tágultság és összenyomottság határeseteit divergáló mennyiséggel kellene reprezentálni. (E feltétel szűkíti az 1. pontban említett határozatlanságot, de közel sem kielégítő fokig.)
4. A referencia-időpont és referencia-konfiguráció mint nyugalmi kezdőállapot és a közeg reprezentatív jellemzője általában fizikailag nem indokolható feltételezés.
5. A deformáció fizikailag egy egypont-függvény kellene legyen, egy, a közeg pillanatnyi állapotát jellemző mennyiség.

Az a szép feladat áll előttünk, hogy egy olyan kinematika- és deformációfelfogást fogalmazzunk meg, amely mentes mindezekről a hiányosságokról, de egyúttal olyat, amely képes mindent kifejezni, ami megkövetelhető tőle.

4. A KONTINUUMOK KINEMATIKÁJA, AZ ALAPOKTÓL KEZDVE

A kontinuumok úgynevezett EULER-leírása kapcsán tudjuk, hogy egy közeg áramlása (úgymond: téridőbeli kinematikai sorsa) megadható a sebességmező, mint egy választott külső inerciarendszer idő- és térváltozói függvényében megadott mennyiség $[\mathbf{v}(t, \mathbf{r})]$ révén. A sebességmező egypont-függvény, és EULER-leírásban, azaz lokális változóiban tekintve mentes a referencia-időpont és -konfiguráció problémájától. A nemrelativisztikus téridő vonatkoztatásrendszer-mentes tárgyalásából [10] arról is meggyőződhetünk, hogy a hozzá tartozó négyessebesség-mező (v.ö. [6])

¹⁶ Lásd a 13. sz. lábjegyzetet.

kiállja a vonatkoztatásirendszer-mentesség kritériumát is, tehát a sebességmező (ill. négyes megfelelője) nyugodtan lehet kinematika-megfogalmazásunk alappillére.

Egy t_1 időpontban $\mathbf{r}_1$ helyvektorral kijelölt közegpont egy t_2 időpontban azon a $\mathbf{r}_2$ helyen jár, amely a

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{q}(t)) \quad (38)$$

differenciálegyenlet

$$\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{r}_1 \quad (39)$$

kezdeti feltételhez tartozó egyértelmű megoldásának segítségével az

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{q}(t_2) \quad (40)$$

módon adható meg. Egy közegpontot tehát egy $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ függvény követ, melyre a

$$\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t, \mathbf{q}(t)) dt \quad (41)$$

tulajdonság teljesül, bármely t_1, t_2 időpontokra. Ha egy bármely, a közeget jellemző fizikai mennyiség alakulását egy rögzített közegpontnál, annak sorsa mentén kívánjuk nyomon követni, ez úgy tehető meg, hogy az adott fizikai mennyiség mint lokális mező $(t, \mathbf{r})$ változóinak helyére $(t, \mathbf{q}(t))$ -t helyettesítünk, ahol a $\mathbf{q}$ függvény követi az adott közegpontot.

Tudjuk, hogy ez az EULER-leírás *konkrét* folyamatok leírásához *technikailag* általában nem kényelmes (összevetve az anyagi változóknál történő LAGRANGE-leírás nyújtotta egyszerűséggel), viszont, ellentétben a fent említett problémákkal rendelkező LAGRANGE-leírással, ez a megközelítés *elvi, lényegi* szinten teljes mértékben kielégítő. Most pedig az *elvi* aspektusokat kívánjuk szem előtt tartani.

Érdemes itt kitérnünk a, már a 13. lábjegyzetben felbukkant megkülönböztetésre *elvi* és *konkrét* szempontok között. Egy bármely fizikai jelenségkörre bevezetett elméleti formalizmusnak két-fajta feladatot kell ellátnia. Az egyik az általános, elvi megértésünk formai kifejezése, a másik a gyakorlat számára fontos speciális szituációk konkrét, a számszerűségig lebontott jellemzése. Mindkettőnek megvan a maga fontossága. Az elvi lényeg kifejezése a fizikai megértésünket biztosítja, számos általános érvényű tulajdonság, jellemző levezetését teszi lehetővé, és rálátást ad a szóbanforgó jelenségkörre, és annak más jelenségkörökhöz való kapcsolataira. A gyakorlat számára fontos konkrét esetek számszerűségig vitt speciális jellemzése pedig ezen esetek közeli megismerését, és fizikai és műszaki alkalmazások megszületését segíti elő. Továbbá, amikor egy bonyolultabb konkrét esetet csak közelítőleg tudunk tárgyalni, az alkalmas konkrét változók és mennyiségek segítenek a közelítés megfogalmazásában és végigvitelében.

Mindkét aspektus teljes értékű figyelmet igényel, nem szabad egyiket sem a másik rovására előnyben részesíteni—ami tudománytörténetileg sajnos gyakran megtörténik, hol az egyik, hol a másik szempont rovására.

Egy elektrodinamikai példával illusztrálva az elmondottakat: hasonlítsuk össze az egyik MAXWELL-egyenlet vektoros alakját:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (42)$$

a DESCARTES-koordinátás alakjával:

$$\begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix} = -\partial_t \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Könnyen látható, hogy az első alak sokkal alkalmasabb általános következtetések levezetésére, és sokkal nagyobb lényeglátást biztosít. Konkrétan tudható is, hogy mekkora fejlődést jelentett az elektrodinamika területén a koordinátamentes tárgyalás megjelenése. A relativitáselmélet kapcsán megszületett négyes elektromágneses térerősségtenzoros, vonatkoztatási-rendszermentesen is megfogalmazható elektrodinamika-leírás pedig további nagyléptékű fejlődést hozott.

Eközben a második alakhoz nyúlunk, amikor egy konkrét elrendezést kívánunk végigszámolni. Közelebbről, amikor például egy áramjárta hosszú, vékony, egyenes elektromos vezető körüli elektromágneses mezőt kívánjuk meghatározni, kétség nem fér hozzá, hogy a koordinátás egyenlettel, annak hengerkoordinátás változatával célszerű dolgozni.

Ennek megfelelően a jelen írás elvi szempontból választja az EULER-leírást (avagy a mögötte álló vonatkoztatási-rendszer-mentes téridő-leírást). A fenti kritikai megállapítások fényében az anyagi változókban és anyagi sokaságon dolgozó formalizmus nem elvi szempontból lenne értékes, hanem azokban az esetekben, amikor egy konkrét probléma konkrét megközelítéséhez hasznosan illeszkedik.

Következő lépésként tekintsük a sebességgradienst, és annak szimmetrikus és antiszimmetrikus részét:

$$\Sigma := (\mathbf{v} \circ \nabla)^S = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}), \quad \Sigma_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j), \quad (44)$$

$$\Omega := (\mathbf{v} \circ \nabla)^A = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \circ \nabla - \nabla \circ \mathbf{v}), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j v_i - \partial_i v_j), \quad (45)$$

$$\mathbf{v} \circ \nabla = \Sigma + \Omega. \quad (46)$$

Egyből gyorsan állapítsunk is meg róluk egy azonosságot, melyet az egyszerűbb jelölés érdekében indexesen írunk ki:

$$\begin{aligned} \partial_i (\partial_k \mathbf{v}_j - \partial_j \mathbf{v}_k) &= \partial_k \partial_i \mathbf{v}_j - \partial_j \partial_i \mathbf{v}_k = \partial_k \partial_i \mathbf{v}_j - \partial_j (\partial_i \mathbf{v}_k - \partial_k \mathbf{v}_i + \partial_k \mathbf{v}_i) = \\ &= \partial_k \partial_i \mathbf{v}_j + \partial_j \partial_k \mathbf{v}_i - \partial_j (\partial_i \mathbf{v}_k + \partial_k \mathbf{v}_i) = \partial_k (\partial_i \mathbf{v}_j + \partial_j \mathbf{v}_i) - \partial_j (\partial_i \mathbf{v}_k + \partial_k \mathbf{v}_i) \implies \\ \implies \partial_i \Omega_{jk} &= \partial_k \Sigma_{ij} - \partial_j \Sigma_{ik}. \end{aligned} \quad (47)$$

A bevezető kontinuumfizika könyvek tárgyalni szokták Σ és Ω interpretálását, de ezt hasznos lesz itt is áttekinteni, hogy utána nyugodt szívvel bízhatunk rájuk azt a szerepet, amire a következőkben fel fogjuk kérni őket.

4.1. MEREVTESTSZERŰ, TÁVOLSÁGTARTÓ KÖZEGÁRAMLÁSOK

A Σ -val és Ω -val való ismerkedés első célszerű lépése a távolságtartó közegáramlások speciális esete. Ez az eset egyébként a későbbiekben, a deformációtenzor bevezetése kapcsán is fontos szerepet fog játszani.

Tekintsünk tehát egy olyan közegáramlást, amely, ha dinamikailag nem is feltétlenül, de legalábbis kinematikailag merevtestszerűnek nevezhető,¹⁷ azaz amelyben bármely két közegpontjának távolsága nem változik az idő függvényében. Megjegyezzük, hogy mivel egy inerciarendszer tere egy euklideszi tér, ezért az összes távolság állandósága (távolságtartás) a bármely két vektor által bezárt szög állandóságát (szögtartás) is biztosítja. Gondoljunk csak az általános háromszögek koszinusztételére: az oldalak állandósága a tekintett szög koszinuszának állandóságát okozza (melyből a szög állandósága következik). Ehhez hasonlóan, az is bizonyítható, hogy a távolságtartás ekvivalens a skalárszorozattartással.

Most belátjuk, hogy a távolságtartó folyamatok során $\Sigma = \mathbf{0}$.¹⁸

Szemeljünk ki egy tetszőleges t időpillanatot és egy szintén tetszőleges $\mathbf{r}$ helyvektorú helyet. Jelölje $\mathbf{q}$ azt a függvényt, amely a t -kor $\mathbf{r}$ helyen járó közegpontot követi (a 68. oldalon látott értelemben). Ekkor tehát $\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}$. Válasszunk egy $\Delta\mathbf{r}$ vektort. Jelölje $\mathbf{q}'$ azt a függvényt, amelyik azt a másik tömegpontot követi, amelyik t -kor a $\mathbf{q}(t) + \Delta\mathbf{r}$ helyen jár. Eszerint $\mathbf{q}'(t) = \mathbf{q}(t) + \Delta\mathbf{r}$. Jelölje $\approx$ az olyan közelítő egyenlőséget, mely $\Delta\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$ esetén egyre pontosabban egyenlőség lesz, olyan erősen, hogy a hiba $|\Delta\mathbf{r}|$ -ben¹⁹ mérve gyorsabban tűnik el. Ekkor a távolságtartás miatt írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \{ [\mathbf{q}' - \mathbf{q}]^2 \}^\cdot(t) = 2 [\mathbf{q}'(t) - \mathbf{q}(t)] [\dot{\mathbf{q}}'(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)] = 2 \Delta\mathbf{r} [\mathbf{v}(t, \mathbf{q}'(t)) - \mathbf{v}(t, \mathbf{q}(t))] \approx \\ &\approx 2 \Delta\mathbf{r} (\mathbf{v} \circ \nabla)(t, \mathbf{q}(t)) [\mathbf{q}'(t) - \mathbf{q}(t)] = 2 \Delta\mathbf{r} (\mathbf{v} \circ \nabla)(t, \mathbf{r}) \Delta\mathbf{r} = 2 \Delta\mathbf{r} \Sigma(t, \mathbf{r}) \Delta\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (48)$$

Ha most $\mathbf{e}$ jelöli a $\Delta\mathbf{r}$ irányú egységvektort, akkor

$$0 = \frac{1}{2|\Delta\mathbf{r}|^2} \{ [\mathbf{q}'(t) - \mathbf{q}(t)]^2 \}^\cdot \approx \mathbf{e} \Sigma(t, \mathbf{r}) \mathbf{e}, \quad (49)$$

és mivel a közelítő egyenlőség $|\Delta\mathbf{r}| \rightarrow 0$ -ra fokozatosan egyenlőséggé válik, ezért a limeszt véve

$$\mathbf{e} \Sigma(t, \mathbf{r}) \mathbf{e} = 0. \quad (50)$$

Ez minden $\mathbf{e}$ egységvektorra igaz. Így például ha $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ egymásra merőleges egységvektorok, akkor például az $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ vektorra is, melyet (50)-be behelyettesítve, és Σ szimmetrikusságát is kihasználva

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \Sigma(t, \mathbf{r}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{e}_1 \Sigma(t, \mathbf{r}) \mathbf{e}_1}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{e}_2 \Sigma(t, \mathbf{r}) \mathbf{e}_2}_0 + \mathbf{e}_1 \Sigma(t, \mathbf{r}) \mathbf{e}_2, \quad (51)$$

tehát $\Sigma(t, \mathbf{r})$ -nek az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ bázisban vett mátrixának a vegyes mátrixelemei is nullák, azaz $\Sigma(t, \mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

Ebből (47) alapján az is következik, hogy $\Omega \circ \nabla = \mathbf{0}$, vagyis Ω minden időpillanatban helyfüggetlen, a közeg minden pontjában azonos. Így $\mathbf{v} \circ \nabla = \Sigma + \Omega$ is bármely időpillanatban helyfüggetlen, és antiszimmetrikus.

¹⁷ A „merev” szó eredendően olyan testre utal, melyet ha akarnánk, se tudnánk alakváltozásra rávenni (mondjuk mert olyan belső erők, olyan belső dinamikai viszonyok uralkodnak benne, melyek meggátolják). A merevtestszerűen mozgó közeg nem kell, hogy egy ilyen merev test legyen, elég, ha történetesen úgy alakult a sorsa, hogy olyan precízen távolságtartó az áramlása, akár egy merev testé.

¹⁸ „Azonosan” nulla, azaz minden időben és helyen, minden téridőpontban.

¹⁹ $|\dots|$ a vektorok hosszát jelöli

Az a megfordított állítás is igaz, hogy $\Sigma = \mathbf{0}$ esetén a közeg folyamata távolságtartó.

Tekintünk két tetszőleges közegpontot kísérő $\mathbf{q}_1$ és $\mathbf{q}_2$ függvényeket, egy tetszőleges t időpillanatot, és jelölje a $\Delta \mathbf{r} := \mathbf{q}_2(t) - \mathbf{q}_1(t)$ irányú egységvektort $\mathbf{e}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \{[\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1]^2\}^{\cdot}(t) &= 2[\mathbf{q}_2(t) - \mathbf{q}_1(t)][\dot{\mathbf{q}}_2(t) - \dot{\mathbf{q}}_1(t)] = 2\Delta \mathbf{r} [\mathbf{v}(t, \mathbf{q}_2(t)) - \mathbf{v}(t, \mathbf{q}_1(t))] = \\ &= 2|\Delta \mathbf{r}| \mathbf{e} \int_{\mathbf{q}_1(t)}^{\mathbf{q}_2(t)} (\mathbf{v} \circ \nabla)(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r} = 2|\Delta \mathbf{r}| \mathbf{e} \int_0^{|\Delta \mathbf{r}|} (\mathbf{v} \circ \nabla)(t, \mathbf{q}_1(t) + l\mathbf{e}) dl \mathbf{e} = \\ &= 2|\Delta \mathbf{r}| \int_0^{|\Delta \mathbf{r}|} \mathbf{e} (\mathbf{v} \circ \nabla)(t, \mathbf{q}_1(t) + l\mathbf{e}) \mathbf{e} dl = 2|\Delta \mathbf{r}| \int_0^{|\Delta \mathbf{r}|} \mathbf{e} \Sigma(t, \mathbf{q}_1(t) + l\mathbf{e}) \mathbf{e} dl = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Ez minden t időpillanatban igaz, ezért felintegrálva t -ben két tetszőleges t_1, t_2 időpont között, azt kapjuk, hogy

$$[\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1]^2(t_1) = [\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1]^2(t_2), \quad (53)$$

ami nem más, mint a távolságtartás.

Használhatjuk tehát a távolságtartás kritériumaként azt, hogy Σ nulla. Pontosan a nulla Σ -jú közegáramlások a távolságtartóak.

Ω pedig távolságtartó folyamatok esetén²⁰ a közeg szögsebességeként interpretálható.

Válasszunk egy t időpontban két helyvektort, $\mathbf{r}_1$ -et és $\mathbf{r}_2$ -t, és állítsuk elő a második által kijelölt közegpontnak az elsőhöz képesti relatív sebességét: ha $\Delta \mathbf{r} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, akkor

$$\Delta \mathbf{v} := \mathbf{v}(t, \mathbf{r}_2) - \mathbf{v}(t, \mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\mathbf{v} \circ \nabla)(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \Omega(t) d\mathbf{r} = \Omega(t) \Delta \mathbf{r}. \quad (54)$$

$\Delta \mathbf{v}$ merőleges $\Delta \mathbf{r}$ -re, mert a skalárszorzatuk, $\Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{r} \Omega \Delta \mathbf{r}$ az antiszimmetrikus Ω miatt nulla. $\Omega \Delta \mathbf{r}$ tehát egy $\Delta \mathbf{r}$ -re merőleges, $\Delta \mathbf{r}$ hosszával arányos relatív sebességet jelent a második közegpont számára az elsőhöz képest, ami nem más, mint egy ω szögsebességvektorú $\omega \times \Delta \mathbf{r}$ elfordulási sebesség. Az ω szögsebességvektor és az Ω szögsebességtenzor közötti kapcsolat, indexesén írva ki,

$$\Omega_{ij} = -\epsilon_{ijk} \omega_k, \quad \omega_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega_{jk}, \quad (55)$$

ahol ϵ_{ijk} a LEVI-CIVITA-tenzor.

Amikor valakinek szüksége van a közegnek egy t_1 időponttól t_2 időpontig tartó elfordulására (egy kétpont-függvényes jellemzésre), ehhez az $\mathbf{O}$ időfüggő ortogonális tenzorokra vonatkozó

$$\dot{\mathbf{O}}(t) \mathbf{O}^{-1}(t) = \Omega(t), \quad \text{azaz} \quad \dot{\mathbf{O}}(t) = \Omega(t) \mathbf{O}(t) \quad (56)$$

differenciálegyenlet megoldásai közül azt válassza, amelyik eleget tesz az $\mathbf{O}(t_1) = \mathbf{I}$ kezdeti feltételnek. [Azt már láttuk, a (32) számolás során, hogy egy ortogonális

²⁰ Majd általánosan is, de egyelőre még csak a távolságtartó esetről nyilatkozhatunk.

tenzornak a „deriváltja szorozva az inverzével” kombinációja szükségszerűen antiszimmetrikus. Ennek az a fordítottja is megmutatható, miszerint a (56) differenciálegyenlet egy ortogonális kezdőfeltételhez tartozó megoldása minden időpontban ortogonális marad.]

4.2. IRÁNYFÜGGETLENÜL TÁGULÓ KÖZEGEK

A nem feltétlenül távolságtartó folyamatok közül érdemes egy kicsi időt szentelni az irányfüggetlenül táguló (beleértve az összehúzódást is) folyamatoknak. Ezeket úgy definiálhatjuk, mint az olyan sebességgradiensű áramlások, ahol a szimmetrikus Σ tenzornak minden vektor sajátvektora. Ilyenkor Σ szükségképpen

$$\Sigma(t, \mathbf{r}) = \lambda(t, \mathbf{r})\mathbf{I} \quad (57)$$

alakú, azaz (egy adott időben és helyen) minden irányban ugyanannyi a sajátérték. Pozitív λ -k valódi tágulást jelentenek, negatívak összehúzódást, a nulla a (legalábbis helyileg) merevtestszerű mozgást. Ω -ról nem kötünk ki semmit. [A (47) feltételnek természetesen teljesülnie kell.]

Hogy miért interpretálhatóak ezek a folyamatok „irányfüggetlen tágulásként”, és hogy Ω ilyenkor is szögsebességet jelent, az a következőképpen látható.

Tekintsünk ismét egy t időpontot, és most két olyan $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ helyvektort, melyek $\Delta\mathbf{r} := \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ különbsége elegendően kicsi ahhoz, hogy $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}') - \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ jól közelíthető legyen $\mathbf{v}$ deriváltja segítségével. Azaz

$$\Delta\mathbf{v} := \mathbf{v}(t, \mathbf{r}') - \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \approx (\mathbf{v} \circ \nabla)(t, \mathbf{r}) \Delta\mathbf{r}, \quad (58)$$

ahol a $\approx$ jel ismét azt jelenti, hogy a közelítés hibája $\Delta\mathbf{r} \rightarrow 0$ esetén gyorsabban tűnik el. Képezzük $\Delta\mathbf{v}$ -nek a $\Delta\mathbf{r}$ -el párhuzamos és rá merőleges komponenseit: a $\Delta\mathbf{r}$ irányú $\mathbf{e} := \Delta\mathbf{r}/|\Delta\mathbf{r}|$ egységvektor segítségével

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{v}_{\parallel} &= (\mathbf{e} \Delta\mathbf{v}) \mathbf{e} \approx (\mathbf{e}(\mathbf{v} \circ \nabla)(t, \mathbf{r}) \Delta\mathbf{r}) \mathbf{e} = |\Delta\mathbf{r}| (\mathbf{e}(\mathbf{v} \circ \nabla)(t, \mathbf{r}) \mathbf{e}) \mathbf{e} = \\ &= |\Delta\mathbf{r}| (\mathbf{e} \Sigma(t, \mathbf{r}) \mathbf{e}) \mathbf{e} = |\Delta\mathbf{r}| (\mathbf{e} \lambda(t, \mathbf{r}) \mathbf{e}) \mathbf{e} = \lambda(t, \mathbf{r}) \Delta\mathbf{r} = \Sigma(t, \mathbf{r}) \Delta\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\Delta\mathbf{v}_{\perp} = \Delta\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}_{\parallel} \approx (\mathbf{v} \circ \nabla)(t, \mathbf{r}) \Delta\mathbf{r} - \Sigma(t, \mathbf{r}) \Delta\mathbf{r} = \Omega(t, \mathbf{r}) \Delta\mathbf{r}. \quad (60)$$

Innen leolvasható, hogy Σ helyileg nyújt, minden irányba azonos tágulási sebességet jelentve, Ω pedig ismét elforgat.

Fontos megállapítani, hogy az ilyen, irányfüggetlen tágulású mozgásoknál Σ csak nyújt, oldalirányú elmozdulást nem okoz, Ω pedig minden irányt ugyanazzal a szögsebességgel forgat el.

4.3. ÁLTALÁNOS KÖZEGÁRAMLÁSOK

Ilyenkor a (59)–(60) levezetés a szimmetrikus Σ főirányába (sajátvektorainak irányába) továbbra is érvényben marad, tehát ezekben az irányokban Σ csak nyújt,

az elfordulást pedig továbbra is Ω fejezi ki. A többi irányban Σ nemcsak nyújt, hanem valamennyi oldalirányú sebességet is jelent, hol erre, hol arra, és ennek megfelelően ezeknek az irányoknak az elfordulását nem tisztán Ω fejezi ki. Mindenesetre a legkitüntetettebb, lehető legtermészetesebb választás Σ és Ω interpretálására továbbra is az, ami Σ főirányaival történik: hogy Σ jelenti az alakváltozási sebességet, és Ω a közegmozgáshoz leginkább rendelhető szögsebességet, a legkitüntetettebb elfordulási tendenciát. Ez az interpretációnk olyan szempontból is konzisztens, hogy továbbra is *minden irányban* Σ jelenti a relatív megnyúlási sebességet [a fentebbi jelölésekkel $\lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}_{||}|}{|\Delta \mathbf{r}|} = \mathbf{e} \Sigma \mathbf{e}$], és szintén *minden irányban* $\Omega \mathbf{e}$ merőleges az adott $\mathbf{e}$ irányra.

Σ interpretációjához tegyük itt még hozzá azt a szerepét, amit már (11)-nél láttunk: hogy $\text{Tr } \Sigma$ adja meg a pillanatnyi térfogatváltozási sebességet.

Az általános interpretáció birtokában azt az észrevételt is megtehetjük, hogy olyan jelenségek esetén, amelyek az Ω szögsebességtől függő konstitutív függvényt látszanak igényelni, lehet, hogy leírhatóak pusztán Σ nyelvén is. Ugyanis magától Ω -tól feltételezhetően csak a térfogati, tehetetlenségi ál-erők függenek. A közeg belső kölcsönhatásai várhatóan csak Ω hely szerinti deriváltjától függenének (attól, hogy szomszédos közegetartományok egymáshoz képest mennyivel fordulnak el), mely pedig a (47) összefüggés szerint kifejezhető Σ hely szerinti deriváltjaival.²¹

Az általános esetben is bevezethető, (56) mintájára, a t_1 -től t_2 -ig való elfordulás egy közegpont környezetében. Ha a szóbanforgó közegpontot a $\mathbf{q}$ függvény követi, akkor az

$$\dot{\mathbf{O}}_{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t)) \mathbf{O}_{\mathbf{q}}^{-1}(t, \mathbf{q}(t)) = \Omega(t, \mathbf{q}(t)) \quad (61)$$

differenciálegyenlet $\mathbf{O}_{\mathbf{q}}$ megoldásai közül azt a $\mathbf{O}_{\mathbf{q}, t_1}$ megoldást választjuk, amely a $\mathbf{O}_{\mathbf{q}, t_1}(t_1, \mathbf{q}(t_1)) = \mathbf{I}$ kezdeti feltételnek tesz eleget.²² Ekkor a t_2 -ig történt helyi elfordulást $\mathbf{O}_{\mathbf{q}, t_1}(t_2, \mathbf{q}(t_2))$ adja meg.

A továbbiakban gyakran elegendő lesz egyetlen tetszőlegesen kiszemelt közegpontot követnünk [mely közegpontot egy $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ függvény kíséri], ilyenkor a mennyiségek helyváltozóját (az oda összetett függvényként beírandó $\mathbf{q}$ függvényt;

²¹ Felmerül viszont [8], hogy ha egy anyagi közeg mikro- vagy mezoszkopikus szinten szemcse-szerű szerkezetű, akkor ezek a szemcsék képesek helyben elfordulni, és ha két szomszédos szemcse ugyanolyan irányban fordul el helyben, akkor súrlódhatnak egymáson. Az ilyen mozgásforma kinematikailag nem modellezhető kontinuummodellel, mert a kontinuummodellbeli Ω helyileg egy pici közegetartományban a merevtestszerűen összeragadt elfordulását írja le, vagy legalábbis azt, hogy a közegetartomány mozgásformája milyen merevtestszerűen összeragadt elforduláshoz hasonlít a legjobban. Emiatt pedig a szemcsék ilyen súrlódása sem modellezhető Ω révén. Érdekes kérdés, hogy az ilyen szituáció beilleszthető-e mégis egy kontinuummodellbe.

²² A felülpont itt is a $\frac{d}{dt}$ *szubsztanciális* (közeppontkövető, együttáramló) deriváltat jelenti, mely lokális változójú mennyiségek esetén a $\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ alakban memorizálható (ahol a pontszorzás a skalárszorozást jelöli).

azaz szemléletesen szólva: a közegfüggését) nem fogjuk kiírni, csak az időváltozót. Így például az iménti differenciálegyenletet és $\mathbf{O}_{\mathbf{q}, t_1}(t, \mathbf{q}(t))$ speciális megoldását egyszerűen

$$\dot{\mathbf{O}}(t) \mathbf{O}^{-1}(t) = \mathbf{\Omega}(t) \quad \text{vagy} \quad \dot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^{-1} = \mathbf{\Omega} \quad (62)$$

alakúnak, illetve $\mathbf{O}_{t_1}(t)$ -nek ($\mathbf{O}_{t_1}$ -nek) fogjuk írni.

Nem elvi, de bizonyos gyakorlati alkalmazássegítő célok érdekében érdemes értelmezni a 2. szakaszban megismert $\mathbf{H}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ kétpont-függvények olyan megfelelőjét is, amelyek nem hordozzák magukon a referencia-időpont, a referencia-konfiguráció és az anyagi sokaság aggasztó bélyegét. Tekintsük a

$$\dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{v} \circ \nabla = \mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Omega} \quad (63)$$

differenciálegyenlet $\mathbf{J}$ megoldásait. Azt a $\mathbf{J}$ megoldást, amely egy t_1 időpontban $\mathbf{I}$ -vel egyenlő, $\mathbf{J}_{t_1}$ -ként fogjuk jelölni. A $\mathbf{J}$ megoldások úgymond $\mathbf{H}$ „szalonképes” általánosításai [v.ö. (9)].

A (63) egyenlet megoldásainak határozatlansága

$$\mathbf{J}_2(t) = \mathbf{J}_1(t) \mathbf{K} \quad (64)$$

alakú, ahol $\mathbf{K}$ egy tetszőleges invertálható tenzor.²³ Következménye ennek, hogy egy tetszőleges $\mathbf{J}$ megoldásból előállítható a bármely t_1 -hez tartozó $\mathbf{J}_{t_1}$ partikuláris megoldás:

$$\mathbf{J}_{t_1}(t) = \mathbf{J}(t) \mathbf{J}(t_1)^{-1}. \quad (65)$$

Jelölje $\mathbf{q}_{t_1}(t; \mathbf{r})$ azt a helyet, ahol a t_1 -kor $\mathbf{r}$ helyen járó közegpont a t pillanatban jár. $\mathbf{q}_{t_1}(t; \mathbf{r})$ tehát adott t_1 és $\mathbf{r}$ esetén az általuk kijelölt közegpontot követi t függvényében. Ezért [ld. (41)]

$$\mathbf{q}_{t_1}(t; \mathbf{r}) = \mathbf{q}_{t_1}(t_1; \mathbf{r}) + \int_{t_1}^t \mathbf{v}(t', \mathbf{q}_{t_1}(t'; \mathbf{r})) dt' = \mathbf{r} + \int_{t_1}^t \mathbf{v}(t', \mathbf{q}_{t_1}(t'; \mathbf{r})) dt'. \quad (66)$$

Deriválva először $\mathbf{r}$, utána t szerint,

$$(\mathbf{q}_{t_1} \circ \nabla)(t; \mathbf{r}) = \mathbf{I} + \int_{t_1}^t (\mathbf{v} \circ \nabla)(t', \mathbf{q}_{t_1}(t'; \mathbf{r})) (\mathbf{q}_{t_1} \circ \nabla)(t'; \mathbf{r}) dt', \quad (67)$$

$$\partial_t (\mathbf{q}_{t_1} \circ \nabla)(t; \mathbf{r}) = (\mathbf{v} \circ \nabla)(t, \mathbf{q}_{t_1}(t; \mathbf{r})) (\mathbf{q}_{t_1} \circ \nabla)(t; \mathbf{r}). \quad (68)$$

Innen azt olvashatjuk le, hogy $\mathbf{q}_{t_1} \circ \nabla$ a (63) egyenlet egy megoldása (amikor csak invertálható), mégpedig pontosan a $\mathbf{J}_{t_1}$ megoldása, tehát

$$\mathbf{q}_{t_1} \circ \nabla = \mathbf{J}_{t_1}. \quad (69)$$

²³ Bármely ilyen $\mathbf{K}$ -ra, ha $\mathbf{J}_1$ megoldás, akkor $\mathbf{J}_2$ is az. Továbbá $\mathbf{K}$ -val befutjuk az összes invertálható kezdeti feltételt (egy adott kezdeti időponthoz). Az egyenlet minden kezdeti feltételhez egyértelmű megoldást rendel.

$\mathbf{J}_{t_1}(t)$ tehát kétpont-függvény, csak attól függ, hogy a közegpontok a t_1 -kori helyükről melyik t -kori helyre kerültek, attól nem, hogy közben milyen sebességmező is szállította őket az egyik helyükről a másikra.

A következőképpen szemléltethető, hogy $\mathbf{J}_{t_1}(t)$ csak attól függ, hogy mi hova került, attól nem, hogy milyen úton-módon. A (63) egyenletet $\dot{\mathbf{J}} = (\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{J}$ alakba írva, egy $\Delta t \rightarrow 0$ -ra egyre pontosabb, gyorsabban eltűnő hibájú közelítéssel

$$\mathbf{J}(t + \Delta t) \approx \mathbf{J}(t) + \dot{\mathbf{J}}(t)\Delta t = \mathbf{J}(t) + (\mathbf{v} \circ \nabla)(t) \mathbf{J}(t) \Delta t = [\mathbf{I} + (\mathbf{v} \circ \nabla)(t) \Delta t] \mathbf{J}(t). \quad (70)$$

Ez úgy értelmezhető, hogy a $\mathbf{J}(t)$ tenzor, mint lineáris transzformáció után még következik egy másik lineáris transzformáció, $\mathbf{I} + (\mathbf{v} \circ \nabla)(t) \Delta t$, és így kapjuk meg a $t + \Delta t$ -hez tartozó transzformációt. Egy $\mathbf{J}_{t_1}$ -re ez azt jelenti, hogy t_1 -kor volt az identitás állapot, aztán t -ig a $\mathbf{J}_{t_1}(t)$ transzformáció, majd a további Δt alatt még egy kis további transzformáció. Az egyes időszakaszokon lezajlott transzformációk „egymásra rakódnak”. Ezért $\mathbf{J}_{t_1}(t)$ -t nem érdekli az, hogy ha a $[t_1, t]$ intervallumot részintervallumokra felosztjuk, mi történt az egyes részintervallumokban, csak az, hogy mi az összeszorzásuk végeredménye.

Ez ugyan csak egy heurisztikus magyarázat volt, de megadható a matematikailag pontos megfelelője (és egy egyparaméteres transzformációcsoport rajzolódik ki a háttérben). Észrevehetjük, hogy ugyanez a „transzformációk egymásra rakódása” történik a (62) egyenletnél az elfordulásokra.

A $\mathbf{H}$ -nál látottakhoz hasonló módon, $\mathbf{J}_{t_1}(t)$ a t_1 -től t -ig lezajlott elmozgatás JACOBI-mátrixa (-tenzora), és determinánsa egy „infinitezimális” közegtartomány t -kori és t_1 -kori térfogatának a hányadosa. Ezért egy közegpontnál a helyi pillanatnyi relatív térfogátváltozási sebesség is

$$(\det \mathbf{J}_{t_1})' / \det \mathbf{J}_{t_1} = \text{Tr } \Sigma, \quad (71)$$

melyből a (15) egyenlethez hasonló

$$\ln |\det \mathbf{J}_{t_1}(t)| = \int_{t_1}^t \text{Tr } \Sigma(t') \, d_{\text{szubsztanciális}} t' \quad (72)$$

következik (a $d_{\text{szubsztanciális}} t'$ jelölés azt jelenti, hogy az időintegrál a szóbanforgó közegpontot követve készül). Az integrál értéke tehát valójában szintén nem függ a sebességmező t_1 és t közötti alakulásától, csak attól, hogy eme időintervallum során mi hova került.

Bármelyik $\mathbf{J}$ megoldást felbonthatjuk polárisan

$$\mathbf{J} = \mathbf{C} \mathbf{M} = \mathbf{N} \mathbf{C} \quad (73)$$

módon, ahol $\mathbf{C}$ ortogonális, $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ pedig szimmetrikus tenzorok [v.ö. (24)]. A (31)-hez hasonló módon, $\mathbf{v} \circ \nabla$ antiszimmetrikus és szimmetrikus részre bontása $\mathbf{C}$ és $\mathbf{M}$ nyelvén a

$$\begin{aligned} \Omega + \Sigma = \mathbf{v} \circ \nabla = \dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1} &= \left[\dot{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{2} \mathbf{C} (\dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1} \dot{\mathbf{M}}) \mathbf{C}^{-1} \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{2} \mathbf{C} (\dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1} \dot{\mathbf{M}}) \mathbf{C}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (74)$$

módon tehető meg.²⁴ Csakis az $\dot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$ speciális esetben teljesül $\dot{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1} = \boldsymbol{\Omega}$; ilyenkor a $\mathbf{C}$ -k egybeesnek az $\mathbf{O}$ -kkal (ugyanannak a differenciálegyenletnek az ortogonális megoldásai), továbbá

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}(\ln \dot{\mathbf{M}})\mathbf{C}^{-1}. \quad (75)$$

Ilyenkor ugyanis $(\ln \dot{\mathbf{M}}) = \dot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$, mint majd a 86. oldalon látni fogjuk.

5. KÖZEG SZERINT IRÁNYTARTÓ MENNYISÉGEK, ÉS A KÖZEGGEL EGYÜTTFORGÓ IDŐDERIVÁLT

Az itt kifejtésre kerülő kinematika-felfogás—a már ismerttetett okok miatt—mellőzi az anyagi sokaságos, Lagrange-leírásos megközelítést. Ez azonban eddig csak abban jelentkezett, hogy lokális változójú mennyiségeket tekintettünk, és a minden szempontból legitimnek talált sebességmezőből építkeztünk. Eddig is láttunk azonban rá példát, hogy egyes közegpontok mozgását is tudjuk követni, ez tulajdonképpen egy egyszerű összetett függvény alkalmazásával megoldható. Emellett arról is esett már szó, hogy a közeg belső kölcsönhatásaihoz, konstitutív függvényeihez hűen kell követnünk a közeg belső viszonyait. A kontinuumhoz rendelhető mezőfüggvények *értékei* ezt a feladatot el tudják látni. Sarkalatos kérdés azonban a mezőmennyiségek deriváltjainak képzése: a függvényértékek kívülről, a külső inerciarendszer szerint mért változásait a közeg máshogy éli meg: lehet például állandó egy vektor iránya *a közeg elfordulásához képest*, vagy a nagysága *a közeg átlagos tágulási tendenciájához képest*. Márpedig a közeg belső kölcsönhatásait jellemző konstitutív függvények várhatóan a *közeg szerint megélt* változási gyorsaságoktól függenek.

Ez ügyben most a közeggel együttforgó irányviszonyok okozta hatással, az erre figyelemmel levő időderivált-típussal fogunk foglalkozni.²⁵

Egy $\mathbf{a}$ vektormezőt *közeg szerint iránytartónak* vagy *a közeggel együttforgónak* fogunk nevezni, ha a közeg $\boldsymbol{\Omega}$ szögsebességével fordul el, azaz bármely két t_1, t_2 időpillanatra

$$\mathbf{a}(t_2) = \mathbf{O}_{t_1}(t_2)\mathbf{a}(t_1), \quad (76)$$

²⁴ Az $\dot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$ egy szimmetrikus kombináció, ennek egy ortogonális tenzorral így „becsomagolt” változata szintén szimmetrikus; hasonló okból antiszimmetrikus a középső tag.

²⁵ Messzebbre vezet, de a jövőben megvizsgálandó lenne a közeg átlagos tágulási tendenciájához képest mért növekedést vizsgáló aspektus is, a „közeg szerint nagyságtartó” vektori és tenzori mennyiségek, és a „közeggel együttnövekvő” időderivált témaköre. Utána pedig a nagyság- és irányviszonyokat egyszerre követő, „közeggeometria szerint állandó” mennyiségek, és a „közeggeometria szerinti” derivált is.

ahol $\mathbf{O}_{t_1}(t_2)$ az előbb, (62)-nél tárgyalt elfordulási kétpont-függvény. Egyszerűen belátható, hogy egy ezzel ekvivalens megfogalmazás az, hogy minden időpillanatban

$$\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{a}. \quad (77)$$

Megjegyzendő, hogy $\mathbf{a}$ itt egy hármasektor, mely négyes, téridő-szempontról egy térszerű négyesvektornak felel meg [6]. Általános négyesvektorok, és más négyes mennyiségek közeg szerinti iránytartásával, és közeggel együttforgó deriváltjával most nem fogunk foglalkozni, de szükség esetén majd ezekre is kiterjesztendőek lesznek az itt csak hármasektorokra megadott definíciók. Azt is itt érdemes megemlíteni, hogy a hármaseuklideszi vektortéren a vektor és a kovektor (kontravariáns vektor és kovariáns vektor) fogalma az euklideszi skalárszorzaton keresztül azonosítható—és ugyanígy azonosíthatóak be a tenzor, a kotenzor és a kétféle vegyes tenzor fogalma. Ezért nem szükséges a „ko”-változatokra kitérnünk. Általános négyesvektorok és -tenzorok esetén ki kell majd, mert a négyes vektortéren nincs skalárszorzat, és más kitüntetett szerkezet sem, amellyel a vektor és a kovektor fogalma azonosítható lenne.²⁶

Tenzorokra az együttforgóság fogalma úgy vezethető be, amit két, közeggel együttforgó $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ tenzorszorzata nyújt. (Ne feledjük, minden hármaseuklideszi tenzor előáll $\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \circ \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \circ \mathbf{b}_3$ alakban.) Ilyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorokra

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})^\cdot = \dot{\mathbf{a}} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ \dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{a} \circ \mathbf{b} + \mathbf{a} \circ (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{b}) = \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \boldsymbol{\Omega}, \quad (78)$$

indexesen

$$(a_i b_j)^\cdot = \dot{a}_i b_j + a_i \dot{b}_j = \Omega_{ik} a_k b_j + a_i \Omega_{jl} b_l = \Omega_{ik} (a_k b_j) - (a_i b_l) \Omega_{lj}. \quad (79)$$

Ebből leszűrve, a közeggel együttforgó tenzor definíciója:

$$\dot{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{T} - \mathbf{T} \boldsymbol{\Omega}. \quad (80)$$

Mit várunk el a közeggel általában nem együttforgó mennyiségek együttforgó deriváltjától? Az egyik természetes elvárás, először vektorokra megfogalmazva, az, hogy ha van három, egymásra merőleges, a közeggel együttforgó egységvektorom— $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ —, akkor egy $\mathbf{a}$ vektor együttforgó deriváltjának $\mathbf{e}$ bázison vett komponensei egyezzenek meg $\mathbf{a}$ $\mathbf{e}$ bázison vett komponenseinek a deriváltjaival: ha bármely t időpontban

$$\mathbf{a}(t) = a_1(t) \mathbf{e}_1(t) + a_2(t) \mathbf{e}_2(t) + a_3(t) \mathbf{e}_3(t), \quad (81)$$

²⁶ Relativisztikusan létezik egy nem pozitív definit, de mindenesetre nemdegenerált négyes belső szorzat, amellyel ismét végrehajtható az azonosítás a „ko”- és a „kontra”-változatok között. A relativisztikus indexes írásmódban ezt fejezi ki az indexek fel- és lehúzogatója.

akkor az együttforgó deriváltra, melyet felülkörrel jelölünk,

$$\overset{\circ}{\mathbf{a}}(t) = \dot{a}_1(t)\mathbf{e}_1(t) + \dot{a}_2(t)\mathbf{e}_2(t) + \dot{a}_3(t)\mathbf{e}_3(t). \quad (82)$$

Eszerint

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{a}} &= (\dot{a}_1\mathbf{e}_1) + (\dot{a}_2\mathbf{e}_2) + (\dot{a}_3\mathbf{e}_3) - a_1\dot{\mathbf{e}}_1 - a_2\dot{\mathbf{e}}_2 - a_3\dot{\mathbf{e}}_3 = \\ &= \dot{\mathbf{a}} - a_1\boldsymbol{\Omega}\mathbf{e}_1 - a_2\boldsymbol{\Omega}\mathbf{e}_2 - a_3\boldsymbol{\Omega}\mathbf{e}_3 = \dot{\mathbf{a}} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (83)$$

Hasonló módon vezethető le, egy $\mathbf{T}$ tenzor $T_{ji}\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j$ felbontásából,²⁷ hogy a tenzorokra hasonlóan kirótt kíváncsi eredménye

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{T} + \mathbf{T}\boldsymbol{\Omega}. \quad (84)$$

(Magasabbrendű tenzorokra is ugyanígy járhatunk el.) Láthatjuk, hogy megnyugtató módon az így definiált együttforgó derivált nulla volta pontosan azzal esik egybe, hogy az adott vektor ill. tenzor közeggel együttforgó [lásd (77) ill. (80)].

Egy másik lehetséges értelmezése az együttforgó deriváltnak az, hogy pl. egy vektor változásából csak az érdekel bennünket, hogy a vektor a közeggel való együttforgásán túlmenően változott-e valamennyit. Azaz a változásából (mely a külső inerciarendszerhez, illetve a vonatkoztatási rendszer-mentes formalizmusban a téridőhöz képest mérődik,) levonjuk az együttforgás okozta részt. A

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{a}(t_2) - \mathbf{O}_{t_1}(t_2)\mathbf{a}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (85)$$

határérték eredménye szintén a (83) nyújtotta képletre vezet, azaz ez a második értelmezés az elsővel megegyező definíciót adja az együttforgó deriváltra.

Az együttforgó derivált itt kapott formulája a szakirodalomban régóta ismeretes, JAUMANN-deriváltnak is hívják. Azt a megjegyzést azonban fontos itt megtenni, hogy ezt a formulát gyakran anyagi változójú, LAGRANGE-leírású mennyiségekre szokták alkalmazni, míg mi itt lokális, EULER-leírású mennyiségekre tekintjük. Amíg ez csak a függvények változóinak megválasztását jelenti, addig ez nem jelent problémát. Az anyagi változók azonban csábítólag hathatnak arra, hogy valaki az anyagi $(\tilde{\mathbf{v}} \circ \tilde{\nabla})^A$ deriváltat használja $\boldsymbol{\Omega}$ -célra, ami nem korrekt, mert a ∇ és a $\tilde{\nabla}$ deriváltak értékei nem azonosak, egy $\mathbf{H}$ átszámítás érvényes közöttük. A másik veszély pedig az, hogyha valaki a $\mathbf{H}$ -ből számolt $\mathbf{Q}$ ortogonális tenzor $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{-1}$ kombinációját tekinti szögsebességnek, mikor pedig általában $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{-1} \neq \boldsymbol{\Omega}$ (ld. 63. oldal).

Megemlítendő még a tenzorok együttforgó deriváltjának az a kellemes tulajdonsága, hogy nem keveri egymásba a tenzorok szimmetrikus és antiszimmetrikus

²⁷ vagy pedig abból, ha már ellenőriztük, hogy az együttforgó derivált is eleget tesz a szorzat deriválására ismert LEIBNIZ-szabálynak

részét:

$$\left(\overset{\circ}{\mathbf{T}}\right)^S = \left(\mathbf{T}^S\right)^\circ, \quad \left(\overset{\circ}{\mathbf{T}}\right)^A = \left(\mathbf{T}^A\right)^\circ. \quad (86)$$

(Ennek bizonyítása olyan egyszerű és értelemszerű, hogy itt mellőzhető.) Ezenkívül ugyanilyen barátságos (és egyszerűen belátható) az a másik tulajdonság is, hogy

$$\text{Tr } \overset{\circ}{\mathbf{T}} = \text{Tr } \dot{\mathbf{T}} = \left(\text{Tr } \mathbf{T}\right)^\cdot. \quad (87)$$

Amikor az együttforgó deriváltnak nemcsak az elvi megalapozottságában és elvi szépségében kívánunk gyönyörködni, hanem valamilyen konkrét számolásban használni is akarjuk, kissé elkomorulhatunk, ugyanis az együttforgó derivált bonyolultabb szerkezetű a sima deriválnál, bár szerencsére legalábbis továbbra is lineáris a deriválandó mennyiségben. A gyakorlati számolások megkönnyítésére származtathatunk olyan formulát az együttforgó időderiváltra, mely azt szorzatok összege helyett egyetlen szorzatként adja meg. E formulákat tulajdonképpen a legegyszerűbb úgy vezetni föl, hogy „vegyük észre”, hogy

$$\overset{\circ}{\mathbf{a}} = \mathbf{O}(\mathbf{O}^{-1}\dot{\mathbf{a}}), \quad (88)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{O}(\mathbf{O}^{-1}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{O})\mathbf{O}^{-1}, \quad (89)$$

ahol $\mathbf{O}$ az $\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1} = \boldsymbol{\Omega}$ differenciálegyenlet egy tetszőleges ortogonális megoldása [melyről már volt szó, (61)-ben].

E két képlet ellenőrzése:

$$\mathbf{O}(\mathbf{O}^{-1}\dot{\mathbf{a}}) = \mathbf{O}(-\mathbf{O}^{-1}\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{O}^{-1}\dot{\mathbf{a}}) = -\boldsymbol{\Omega}\mathbf{a} + \dot{\mathbf{a}}; \quad (90)$$

$$\mathbf{O}(\mathbf{O}^{-1}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{O})\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}(-\mathbf{O}^{-1}\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{O} + \mathbf{O}^{-1}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{O} + \mathbf{O}^{-1}\mathbf{T}\dot{\mathbf{O}})\mathbf{O}^{-1} = -\boldsymbol{\Omega}\mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\boldsymbol{\Omega}.$$

6. A DEFORMÁCIÓ ÉRTELMEZÉSE

A közegkinematika eme általános tárgyalása után forduljunk a deformáció értelmezése felé.

Először a deformálódásnak célszerű értelmet adnunk. Ez pedig a következő egyszerű módon tehető meg: deformálódás akkor van, amikor a közegáramlás nem távolságtartó, nem merevtestszerű.

A fentiekben (71. oldal) láttuk, hogy a távolságtartás $\boldsymbol{\Sigma}$ nullaságával ekvivalens. Ezért deformálódás $\boldsymbol{\Sigma}$ nemnullaságával is értelmezhető.

Ez természetesen még mindig csak egy kvalitatív jellemzése a deformálódásnak. Mivel azonban tudjuk (73. oldal), hogy $\boldsymbol{\Sigma}$ mennyiségileg is relatív hosszváltozási

sebességként interpretálódik, ezért mennyiségileg is célszerű Σ -t tekinteni a deformálódási sebesség mértékének.

Lenne tehát egy $\mathbf{D}$ deformációmezőnk, egy pont-függvényünk (melyről nem tételezzük föl, hogy létezne olyan referencia-időpont, amikor nulla lenne, pláne ugyanakkor minden egyes közegpontban). Ennek a változási gyorsasága, sebessége lenne Σ . Döntenünk kell azonban még abban a kérdésben, hogy a Σ a $\mathbf{D}$ -nek melyik fajta időderiváltja legyen. Emlékezzünk arra, hogy $\mathbf{D}$ dinamikai célú haszna az lesz, amikor konstitutív függvény (pl. egy rugalmasságtani HOOKE-törvény) változója lesz, mellyel a közeg bizonyos belső kölcsönhatását kívánjuk jellemezni. Ezért célszerűnek tűnik $\mathbf{D}$ *együttforgó* deriváltjának tekinteni Σ -t. Mivel azonban az itt ismertetett kinematika-felfogáshoz, és a vonatkoztatásirendszer-mentes négyes téridő-leíráshoz illeszkedő kontinuum-dinamika (és -termodinamika) kidolgozása még a jövő feladata, ezért a biztonság kedvéért a

$$\dot{\mathbf{D}} = \Sigma, \quad \text{avagy} \quad \dot{\mathbf{D}} = \Sigma + \Omega \mathbf{D} - \mathbf{D} \Omega \quad (91)$$

módon kvantitatíve is definiált deformációtenzort az *együttforgó deformáció* névvel érdemes ellátni. Az mindenesetre valószínű, hogy egy, a 25. sz. lábjegyzetben említett „közeg szerint nagyságtartó” deriváltfajta itt nem lenne alkalmas. A deformáció éppen hogy a tényleges, téridő nyújtotta távolságfogalomhoz viszonyított változásokat kívánja mérni, ezt nem viszonyíthatjuk egy pl. szétcsúszó közeghez. Egy roppant egyszerűsítő, de a célnak azért megfelelő illusztrációval élve: ha van két tömegpont, amelyek közti potenciális energia a távolság függvénye, akkor ez a valódi, téridő szerinti távolság függvénye. És ugye idézzük fel a deformáció dinamikai hasznát (ld. 66. oldal), miszerint a deformációtenzort a közegben ébredő belső rugalmas erőket leíró konstitutív függvény változójaként kívánjuk használni. De többet is mondhatunk: bár még nincs kidolgozva a „közeg szerint nagyságtartó” derivált fogalma, valószínű, hogy a deformáció ilyenfajta deriváltja nulla lenne: hiszen önmagához képest nem nyúlik és torzul a közeg...

Megfontolandó még a $\dot{\mathbf{D}}_{\text{inerciális}} = \Sigma$ alapján bevezethető *inerciális deformáció* alternatívája is. Itt majd megint a dinamikához kell nyúlnunk: hogy például egy rugalmassági konstitutív függvény melyik fajta deformációt kösse a feszültségtenzorhoz. Addig azonban, amíg a feszültségtenzor négyes, téridő-kompatibilis definíciója [6] nincsen tisztázva, ezt a döntést nem tudjuk meghozni. Mindenesetre eddigi tudásunk és intuíciónk az anyaggal együttforgó deformáció-fogalmat részesíti előnyben, és ezért itt a továbbiakban mi is ennek vizsgálatával foglalkozunk, „deformáció” alatt ezt a deformáció-változatot fogjuk érteni.

A (91) képlet önmagában nem biztosítja, hogy $\mathbf{D}$ szimmetrikus tenzor legyen. Arra utaló jel viszont még nem mutatkozott, hogy egy nemszimmetrikus tenzort kellene bevezetnünk a deformáltság mértékeként. Ezenkívül láttuk már [(86) képlet], hogy egy tenzor szimmetrikus és antiszimmetrikus része az együttforgó derivált

szerint is egymástól függetlenül időfejlődik. Ezért a szimmetrikus Σ csak $\mathbf{D}$ szimmetrikus részét időfejleszténé, $\mathbf{D}$ antiszimmetrikus részével csak annyi passzív időfejlődés történne, amennyit az együttforgása jelent. Így konzisztensen és ésszerűen járunk el, ha $\mathbf{D}$ -t szimmetrikusnak tekintjük, mely teljes értékű önálló életet él, és ő gyűjti magába a deformálódásokat. És csakis akkor ragasztunk majd hozzá valami antiszimmetrikus részt, ha arra egyszer valami elegendően erős fizikai motiváció kerül elő.

Deformációtenzorunk tehát olyan szimmetrikus tenzormező, melyre a (91) differenciálegyenlet teljesül. Ez természetesen nem határozza meg egyértelműre $\mathbf{D}$ -t: valami fizikai mérési eljárás vagy ésszerű feltételezés kellhet hozzá, ha például egy kezdeti feltételét kell megadnunk. Ne feledjük el, hogy ezzel az aspektussal nem állunk rosszabbul, mint az eddig ismert deformáció-definícióknál álltunk: ott is ugyanúgy feltételezéseket kellett tenni a deformáció egy bizonyos időpontbeli értékére. Az ott alkalmazott módszerek itt is használhatóak a határozatlanság rögzítésére.

Térjünk ki arra a 66. oldalon említett esetre is, amikor olyan közeggel—általában folyadékokkal, gázokkal—van dolgunk, melyre anyagszerkezeti ismereteink ill. feltételezéseink szerint irány-szempontról nincsenek helyi kitüntetett geometriai viszonyai, csak térfogati szempontból. Az ilyen esetekben csak egy *tágultság* skalár mező bevezetése indokolt fizikailag. Azzal analóg módon, ahogy a deformációtenzort a pillanatnyi relatív deformálódási sebességeket összegyűjtőgető mennyiségként definiáltuk, a tágultságot a relatív tágulási sebességet, (11)-t összegyűjtőgető mennyiségként vezessük be:

$$\dot{\Theta} = \text{Tr } \Sigma = \text{div } \mathbf{v} . \quad (92)$$

A határozatlanság rögzítéséről ugyanazt mondhatjuk el, amit a deformációtenzor kapcsán.

A tágultság természetesen olyankor is bevezethető, amikor a $\mathbf{D}$ deformációtenzort is indokolt értelmezni. Ilyenkor az

$$\Theta = \text{Tr } \mathbf{D} \quad (93)$$

választással érdemes élni. A (91) definíciós képletre alkalmazott (87) azonosság fényében ugyanis

$$(\text{Tr } \mathbf{D})^\cdot = \text{Tr } (\dot{\mathbf{D}}) = \text{Tr } \Sigma , \quad (94)$$

azaz Θ és $\text{Tr } \mathbf{D}$ ugyanazt a differenciálegyenletet elégítik ki, és egyelőre nem látszik rá ok, hogy az értékeik ne legyenek összehangolva (tehát például hogy ha van időpillanat, amikor $\text{Tr } \mathbf{D} = 0$, Θ ugyanakkor nem lenne nulla).

Egy technikai megjegyzés erejéig visszatérve még a deformációtenzorhoz: a (91) értelmezés láttán idézzük fel a nemrég említett (89) formulát, amely az ilyen együttforgó időderiváltakkal való gyakorlati számolást könnyíti meg. Ezért a (91) képletet

átírhatjuk a

$$(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{O})^{\cdot} = \mathbf{O}^{-1}\mathbf{\Sigma}\mathbf{O} \quad (95)$$

praktikusabb alakba, ahol a $\mathbf{O}$ segédmenyiség az $\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{\Omega}$ differenciálegyenlet egy tetszőleges ortogonális megoldása.

7. AZ ÚJ DEFORMÁCIÓTENZOR ÜTKÖZTETÉSE AZ ÖT KRITIKAI ÉSZREVÉTELLEL

Most vegyük sorra a hagyományos deformáció-fogalmak 3. szakaszban megfogalmazott öt hiányosságát, hogy az itt javasolt deformáció-verzió hogyan teljesít ezekből a szempontokból.²⁸ Ismételjük meg tömören az ott felsorolt problémákat:

1. Végtelen sok bal és jobb oldali deformáció-lehetőség ismeretes, és további végtelen sok vezethető be hasonlóan természetes jelöltként. Melyiket válasszuk?
2. A közeg elfordulása nincs hitelesen leírva.
3. A szingulárisan nagy tágultság és összenyomottság határeseteit divergáló mennyiséggel kellene reprezentálni.
4. Általában nem választható referencia-időpont és referencia-konfiguráció, mint nyugalmi kezdőállapot és a közeg reprezentatív jellemzője.
5. A deformáció fizikailag egy egy pont-függvény kellene legyen, egy, a közeg pillanatnyi állapotát jellemző mennyiség.

Az első kritikai megjegyzés kapcsán azt mondhatjuk el, hogy az itt bevezetett deformáció egyetlen, kitüntetett változat. Bevezetése során sehol sem látszott hasonlóan természetes alternatíva. Az összes eddigi—és, mint látni fogjuk, az összes alább következő—vizsgálat szempontjából is hibátlanul teljesít, és nem látszik semmi, ami gyanút ébreszt. Természetesen nem szabad, hogy éberségünk elaludjon, a jövőben is kíméletlenül következetesen kell megítélni a megismert tulajdonságait.

A második követelményre a kinematika-megalapozás során adtunk választ: az ott megadott elfordulás-értelmezés minden felmerülő szempontból a lehető legkielégítőbbnek mutatkozott. A deformáció pedig ezzel kompatibilis módon lett bevezetve.

A 3. számú elvárás is teljesül. Egy reguláris állapotot jelentő t_1 , és egy szinguláris állapotú időponthoz közelítő t_2 esetén (72) bal oldala a szinguláris tágultság és a szinguláris összenyomódottság esetén egyaránt divergál. Mindkét esetben tehát a (72) jobb oldalán szereplő integrál divergál. Márpedig a Θ tágultság is, és $\text{Tr}\mathbf{D}$ révén a $\mathbf{D}$ deformáció is pontosan ilyenkor divergálnak.

²⁸ Végére is „nem korrekt vizet prédikálni és bort inni, de lehetőleg még almalevet sem”.

A negyedik kritikai szempont mind a kinematika-megfogalmazás, mind a deformáció-definíció során végig kínosan be lett tartva. Talán kissé mániákusan is, de fontos hangsúlyozni, hogy itt mi semmit nem tételezünk fel a közeg bármikori állapotáról se, még egyetlen közegpont sorsa mentén se.

Az ötödik kritérium is implementálást nyert. Mint hamarosan látni fogjuk, olyan sikeresen, hogy egy t_1 és t_2 időpontok közti deformációváltozás nemcsak a közeg ez idő alatt történt elmozdulásától függ, hanem attól is, hogy közben milyen sebességmezővel mozgott a közeg. *A deformációváltozás tehát—ellentétben az összes említett eddig ismert deformációtípussal—nem kétpont-függvény, hanem úgymond intervallumfüggvény, azaz folyamatfüggvény.* Az itt bevezetett deformációnál nem elég egy pillanatfelvételt készíteni a közegről az egyik, és egy másikat a másik időpontban: e kettőből nem mondható meg az elszenvedett deformációváltozás mértéke. (A tárgultságváltozás mértéke viszont igen: a tárgultságváltozás kétpont-függvény, amint az (72) segítségével látható.)

Itt kínálkozik megtenni azt a megjegyzést, hogy másrésről viszont, az itt definiált deformáció időben additív, tehát egy adott sebességmező esetén a különböző időintervallumokban bekövetkezett deformációváltozások összeadódnak. Ez azért előnyös tulajdonság, mert a hagyományosan használt $\mathbf{H}$ időben egymás utáni szakaszokra szorozódik, a belőle származtatott deformációk pedig még zűrösebben viselkednek, nem pedig egyszerűen összeadódnak. Igaz viszont, hogy ez inkább fogalmilag, mint technikailag kellemes tulajdonság, ugyanis az új deformáció az együttforgó értelemben additív, a közeget követően változó irányviszonyok szerint adogatódik össze. A külső, inerciális szemszögből nézve a (95) képlet mutatta módon kell vissza- és odatekergetni a változásait.

Teljesül ezenkívül az a fajta additivitás is, hogy a deformálódás és az elfordulás összeadódnak. Ez azonban nem a véges időtartam alatt lezajlott deformálódásra és elfordulásra teljesül, hanem a pillanatnyi deformálódási sebességre és a pillanatnyi elfordulási sebességre. Mivel a deformációsebességet együttforgó értelemben értjük, ezért a deformációsebességnek és az elfordulási sebességnek egy időszakaszra vett felintegráltjai már nem adódnak össze.

8. A DEFORMÁCIÓTENZOR VISZONYA AZ EDDIG ISMERT DEFORMÁCIÓ-VÁLTOZATOKHOZ

Természetesen érdekes kérdés, hogy hogyan viszonylik az újonnan bevezetett deformáció-fogalom az eddig ismertekhez. Egy szempontot már említettünk: a deformációváltozás intervallumfüggvény mivolta gyökeresen más, mint a hagyományos deformációváltozások kétpont-függvény volta. Jó lenne azonban tudni, hogy ez a különbség mennyiségileg mekkora eltéréseket okoz, és vannak-e olyan esetek, amikor

ezek az eltérések elhanyagolhatóak.

Ez ügyben érdemes lesz megvizsgálni a *deformációfőirány-tartó folyamatok* esetét. Ez alatt olyan közegáramlások értendők, melyek során a deformációtenzor főirányai a közeghez képest nem változnak, együttforognak a közeggel. Gondoljunk csak bele ugye, hogy vannak valamilyen főirányai a szimmetrikus pillanatnyi $\mathbf{D}$ deformációtenzornak, és vannak valamilyen—általában más—főirányai a szimmetrikus pillanatnyi Σ tenzornak, mely utóbbi most a $\overset{\circ}{\mathbf{D}}$ együttforgó deformációsebesség szerepét játssza. Tekintsük most azokat a speciális közegfolyamatokat, amikor e két fajta főirányok egybeesnek.²⁹

E feltétellel ekvivalens a

$$\mathbf{D}\Sigma = \Sigma\mathbf{D}, \quad \text{avagy} \quad \mathbf{D}\Sigma - \Sigma\mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (96)$$

egyenlet, amint azt egy matematikai tétel biztosítja számunkra.³⁰ A (95) egyenletre támaszkodva (és így persze az ott emlegetett tetszőleges segéd- $\mathbf{O}$ felhasználásával) írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\Sigma - \Sigma\mathbf{D} &= \mathbf{O} \left[\mathbf{O}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{O}(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{O})^\cdot - (\mathbf{O}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{O})^\cdot \mathbf{O}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{O} \right] \mathbf{O}^{-1} = \\ &= \mathbf{O} \left[\mathbf{L}_\mathbf{O}\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} - \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O}\mathbf{L}_\mathbf{O} \right] \mathbf{O}^{-1}, \end{aligned} \quad (97)$$

ahol $\mathbf{L}_\mathbf{O} := \mathbf{O}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{O}$. Eszerint (96) pontosan akkor áll fenn, amikor

$$\mathbf{L}_\mathbf{O}\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O}\mathbf{L}_\mathbf{O}. \quad (98)$$

$\mathbf{L}_\mathbf{O}$ és $\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O}$ főirányai is egybeesnek tehát. $\mathbf{L}_\mathbf{O}$ főirányai egybeesnek továbbá $e^{\mathbf{L}_\mathbf{O}}$ főirányaival, tehát $e^{\mathbf{L}_\mathbf{O}}$ és $\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O}$ főirányai is egyeznek. Ilyenkor az is igaz, hogy

$$(e^{\mathbf{L}_\mathbf{O}})^\cdot = e^{\mathbf{L}_\mathbf{O}} \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} e^{\mathbf{L}_\mathbf{O}}. \quad (99)$$

(Ez az exponenciális mint hatványsorként értelmezett függvény tagonkénti deriváltjainak átrendeztetésével és újra felösszegezésével kapható; a végtelen összeg ellenére minden lépés matematikailag engedélyezve van.) Továbbá,

$$\begin{aligned} (\mathbf{O}e^{\mathbf{L}_\mathbf{O}})^\cdot e^{-\mathbf{L}_\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1} &= \dot{\mathbf{O}}e^{\mathbf{L}_\mathbf{O}}e^{-\mathbf{L}_\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1} + \mathbf{O}\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O}e^{\mathbf{L}_\mathbf{O}}e^{-\mathbf{L}_\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1} = \\ &= \dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1} + \mathbf{O}\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{\Omega} + \Sigma, \end{aligned} \quad (100)$$

²⁹ Degenerált sajátértékek esetén a főirányok (a sajátvektorok) több módon is megválaszthatóak, ezért itt és a továbbiakban a rövid és pongyola „egybeesnek” alatt a precíz „választhatók úgy, hogy egybeessenek” értendő.

³⁰ Nem nehéz belátni, hogy két szimmetrikus tenzor pontosan akkor fölcserélhető, ha van közös sajátvektorrendszerük.

ahol az utolsó lépésben (95)-öt is felidézttük, vagyis $\mathbf{O}e^{\mathbf{L}\mathbf{O}}$ a (63) differenciálegyenlet egy $\mathbf{J}$ megoldása, mely ráadásul egyből a jobb oldali poláris felbontása alakjában [v.ö. (73)] áll előttünk. Érvényes tehát a következő szereposztás:

$$\mathbf{J} = \mathbf{O}e^{\mathbf{L}\mathbf{O}}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{M} = e^{\mathbf{L}\mathbf{O}}, \quad \text{továbbá} \quad \mathbf{N} = \mathbf{J}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{O}e^{\mathbf{L}\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1}. \quad (101)$$

Mivel pedig ekkor

$$\mathbf{N} = \mathbf{O}e^{\mathbf{O}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}(\mathbf{O}^{-1}e^{\mathbf{D}}\mathbf{O})\mathbf{O}^{-1} = e^{\mathbf{D}}, \quad (102)$$

ezért a deformációfőirány-tartó folyamatok esetén

$$\mathbf{D} = \ln \mathbf{N}. \quad (103)$$

Hogy a számos $\mathbf{J}$, tehát a számos $\mathbf{N}$ közül melyikről van szó, azt persze $\mathbf{D}$ ismerete nélkül nem tudhatjuk. Ha viszont például van rá okunk feltételezni, hogy egy t_1 időpillanatban (az adott közegpontban) $\mathbf{D}(t_1) = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{J}_{t_1}$ -ről, és az ahhoz tartozó $\mathbf{N}_{t_1}$ -ről lesz szó.

Azt találtuk tehát, hogy deformációfőirány-tartó folyamatok esetén az új deformációtenzor a (26)-ban emlegetett $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{B}}^{(0)}$ bal oldali HENCKY-féle („logaritmikus”, „természetes”, „valódi”) deformáció-változattal egyezik meg — helyesebben, annak referencia-időpont nélküli értelmezésével.

A deformációfőirány-tartó esetben egyébként

$$\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{-1} \quad (104)$$

is teljesül:

$$e^{-\mathbf{L}\mathbf{O}}(\dot{e^{\mathbf{L}\mathbf{O}}}) = e^{-\mathbf{L}\mathbf{O}}e^{\mathbf{L}\mathbf{O}}\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}}e^{\mathbf{L}\mathbf{O}}e^{-\mathbf{L}\mathbf{O}} = (\dot{e^{\mathbf{L}\mathbf{O}}})e^{-\mathbf{L}\mathbf{O}}. \quad (105)$$

Ennek jelentőségét először a 62. oldalon láttuk.

Az a fordított irány is igaz, hogy ha egy $\mathbf{J}$ -re (ill. a hozzá tartozó $\mathbf{M}$ -re) igaz (104), akkor a folyamat deformációfőirány-tartó—ha még egy bizonyos feltétel teljesül. Lássuk, miről van itt szó: a 76. oldalon láttuk, hogy (104) esetén $\mathbf{C}$ az $\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{\Omega}$ egyenlet egy megoldása — erre emlékeztetésül fogjuk is az alábbiakban $\mathbf{O}$ -val is jelölni, ahol ez előnyös lesz. $\mathbf{M}^{-1}$ főirányai megegyeznek $\mathbf{M}$ -éival, azok pedig $\ln \mathbf{M}$ -éival. Ebből belátható, hogy $\ln \mathbf{M}$ és $(\ln \mathbf{M})^\cdot$ főirányai is egyeznek.

Például úgy: bevezetve az $\mathbf{L} := \ln \mathbf{M}$ jelölést, $\mathbf{M}^{-1}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{L}$ főirányai mind megegyeznek, így $\mathbf{L}$ -éi és $\dot{\mathbf{M}} = (\dot{e^{\mathbf{L}}})$ -éi is. Ebből

$$0 = \mathbf{L}(\dot{e^{\mathbf{L}}}) - (\dot{e^{\mathbf{L}}})\mathbf{L} = \dots = e^{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{L}} - \dot{\mathbf{L}}e^{\mathbf{L}}, \quad (106)$$

ahol a $\dots$ részben kifejtjük és tagonként deriváljuk az exponenciálisok hatványsorát. Rengeteg tag ki fog esni, ami pedig marad, azt értelemszerűen felösszegezve ezt az eredményt kapjuk.

Nos, eszerint $e^{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$ főirányai is megegyeznek $\dot{\mathbf{L}} = (\ln \mathbf{M})^\cdot$ -ével, így $\mathbf{L} = \ln \mathbf{M}$ -éi is.

Ezután, a (99)-hez használt lépésekkel,

$$(\ln \mathbf{M})^\cdot = \dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{L}} \mathbf{e}^{\mathbf{L}} \mathbf{e}^{-\mathbf{L}} = (\mathbf{e}^{\mathbf{L}})^\cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}^{-1}, \quad \underset{\text{hasonlóan}}{=} \mathbf{M}^{-1} \dot{\mathbf{M}}. \quad (107)$$

Ez az eredmény az utolsó hiányzó láncszem (75)-höz, így onnan haladva tovább,

$$(\ln \mathbf{M})^\cdot = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{C} = \mathbf{O}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{O}. \quad (108)$$

(95)-re tekintve azt látjuk, hogy $\ln \mathbf{M}$ egy $\mathbf{O}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{O} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{C}$ -jelölt. Itt kell most az az említett bizonyos feltétel még: hogy a (95) felintegrálásakor szükséges, és a (108) felintegrálásakor szükséges integrációs konstansok úgy legyenek összegeztve, hogy

$$\ln \mathbf{M} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{C}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{D} = \mathbf{C} (\ln \mathbf{M}) \mathbf{C}^{-1} = \ln (\mathbf{C} \mathbf{M} \mathbf{C}^{-1}) = \ln \mathbf{N} \quad (109)$$

teljesülhessen. Ha például mondhatjuk, hogy egy t_1 -kor $\mathbf{N}(t_1) = \mathbf{I}$ és $\mathbf{D}(t_1) = \mathbf{0}$, akkor így lettek összegeztve, és $\ln \mathbf{N}$ használható $\mathbf{D}$ -célra.

Összegezés nélkül a helyzet a következő:

$$(\ln \mathbf{M})^\cdot = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{C} = \mathbf{O}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{O} = (\mathbf{O}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{O})^\cdot \implies \ln \mathbf{M} = \mathbf{O}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{O} + \boldsymbol{\Delta}, \quad (110)$$

ahol a $\boldsymbol{\Delta}$ integrációs állandó egy időfüggetlen, szükségképpen szimmetrikus tenzor. Innen (nem feledve $\mathbf{O} = \mathbf{C} \cdot t$),

$$\mathbf{D} = \mathbf{C} \ln \mathbf{M} \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{C}^{-1} = \ln \mathbf{N} - \mathbf{C} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{C}^{-1}. \quad (111)$$

Az érdeklődő Olvasó kidolgozhatja az e határozatlanságnak megfelelő általánosítást az „oda” irányban, azaz a (96)–(103) képletekben. A „vissza” irányban is elképzelhető még további általánosítás, a (104) feltétel valamilyen alkalmas általánosítása révén — melyet pedig várhatóan az „oda” iránybeli levezetés valamilyen általánosítása révén lehet meghatározni. Ilyen jelölt például a (64) határozatlanság kiaknázása, a (101) szereposztás általánosítására. [Az $\mathbf{O}$ -beli határozatlanság nem hoz általánosítást, mert a (103) eredmény $\mathbf{O}$ -független.]

A deformációfőirány-tartó folyamatok speciális esetében tehát a deformációváltozás egy kétpontfüggvény, nem intervallumfüggvény: ilyenkor nem függ a sebességmező két időpont közötti alakulásától, csak attól, hogy a közégpontokat akkori ottani helyükről mostanra hova szállította. Ilyenkor két pillanatfelvételtől meg lehet mondani a köztük történt deformációváltozást.

9. ÁLTALÁNOS KÖZEGÁRAMLÁSOK DEFORMÁCIÓJA : A DEFORMÁCIÓFŐIRÁNY-TARTÓ KÖZELÍTÉS

Az általános szinten nem remélhetjük a bal oldali HENCKY-deformáció érvényességét (ezt hamarosan példák fogják alátámasztani), de jogos a kíváncsiság: amikor nem érvényes, mennyire jó vagy rossz közelítést jelent?

A hagyományos deformáció-változatok kis deformáció (plusz kis elfordulás) esetén szoktak csak megegyezni, vezető rendben. Ezért most is azt sejtethetjük, hogy ez a közelítés elsősorban kis deformációk esetén esélyes arra, hogy jó közelítés legyen.

Tegyük fel, hogy van egy t_1 időpont, amikor a deformációt nullának tekinthetjük. Ezzel egyrészt biztosítjuk, hogy $\mathbf{J}_{t_1}$ a deformációhoz van igazítva, legalábbis t_1 -kor, de speciálisan deformációfőirány-tartó esetben később is. Másrészt azt reméljük, hogy legalábbis a t_1 környéki időkre az általános esetben sem leszünk messze a bal-HENCKY-deformációval az igazítól.

Vegyük tehát $\mathbf{J}_{t_1}$ -t, az ő $\mathbf{J}_{t_1} = \mathbf{C}_{t_1} \mathbf{M}_{t_1} = \mathbf{N}_{t_1} \mathbf{C}_{t_1}$ felbontásával, mely révén Σ és Ω a (74)-ben látott módon adható meg: (figyelem, a szakasz további részében az átláthatóbb képletek érdekében a t_1 indexet elhagyjuk)

$$\Sigma = \frac{1}{2} \mathbf{C} (\dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1} \dot{\mathbf{M}}) \mathbf{C}^{-1}, \quad (112)$$

$$\Omega = \dot{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{2} \mathbf{C} (\dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1} \dot{\mathbf{M}}) \mathbf{C}^{-1}. \quad (113)$$

A kérdést, amit megvizsgálni szeretnénk, nem egyszerű olyan formában fogalmazni meg kvantitatíve, ami technikailag is végigszámolható. A következő verzió sikerre vezet: nézzük meg azt, hogy az igazi együttforgó deformációsebességhez, $\overset{\circ}{\mathbf{D}} = \Sigma$ -hoz mennyire esik közel a bal-HENCKY-deformáció együttforgó sebessége,

$$(\ln \mathbf{N})^\circ = (\ln \mathbf{N})^\cdot - \Omega \ln \mathbf{N} + (\ln \mathbf{N}) \Omega. \quad (114)$$

Ehhez Σ és Ω vehetők a (112)–(113) adta alakjukban, és így a kérdés már csak $\mathbf{C}$, $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ nyelvén van feltéve ($\mathbf{D}$ már nem is szerepel benne), de még ez is zavarba ejtően sok. A következő módon átfogalmazhatjuk úgy, hogy egyedül $\mathbf{M}$ -t tartalmazza. $\mathbf{N}$ helyére helyettesítsünk be $\mathbf{C} \mathbf{M} \mathbf{C}^{-1}$ -t, $\ln \mathbf{N}$ helyére pedig $\ln (\mathbf{C} \mathbf{M} \mathbf{C}^{-1}) = \mathbf{C} (\ln \mathbf{M}) \mathbf{C}^{-1}$ -t (szimmetrikus tenzor függvénye a sajátértékekre hat, a sajátbázisban). Ezenfelül ne $\overset{\circ}{\mathbf{D}}$ -t és $(\ln \mathbf{N})^\circ$ -et hasonlítsuk össze, hanem $\mathbf{C}^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{D}} \mathbf{C}$ -t és $\mathbf{C}^{-1} (\ln \mathbf{N})^\circ \mathbf{C}$ -t. Azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{C}^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{D}} \mathbf{C} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1} \dot{\mathbf{M}}) \quad (115)$$

$$\mathbf{C}^{-1} (\ln \mathbf{N})^\circ \mathbf{C} = (\ln \mathbf{M})^\cdot - \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1} \dot{\mathbf{M}}) \ln \mathbf{M} + \frac{1}{2} (\ln \mathbf{M}) (\dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1} \dot{\mathbf{M}}). \quad (116)$$

Látszik, hogy amikor $\mathbf{M}^{-1}$ és $\dot{\mathbf{M}}$ főirányai nem egyeznek meg (deformációfőirány-változtató a folyamat), e két mennyiség nem egzaktul egyenlő. Az általános esetben tényleg csak kis deformációra remélhetünk egyezést, valahányadik rendig. Hogy hanyadik rendig is, e célból képezzük mindkét mennyiség sorfejtettjét $\boldsymbol{\mu} := \mathbf{M} - \mathbf{I}$ -ben kifejtve. A háromtényezős szorzatok rendjéig kifejtve,

$$\mathbf{C}^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{D}} \mathbf{C} \approx \dot{\boldsymbol{\mu}} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} \dot{\boldsymbol{\mu}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\mu}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^2 \dot{\boldsymbol{\mu}}, \quad (117)$$

$$\mathbf{C}^{-1} (\ln \mathbf{N})^\circ \mathbf{C} \approx \dot{\boldsymbol{\mu}} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} \dot{\boldsymbol{\mu}} + \frac{5}{6} \dot{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\mu}^2 - \frac{2}{3} \boldsymbol{\mu} \dot{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\mu} + \frac{5}{6} \boldsymbol{\mu}^2 \dot{\boldsymbol{\mu}}. \quad (118)$$

amikor tehát $\boldsymbol{\mu}$ és $\dot{\boldsymbol{\mu}}$ főirányai nem azonosak, akkor a vezető és a következő rendig egyezés van, az azután következő rendben nem (leszámítva bizonyos egészen speciális egybeesések esetét). Ha egy tenzor normáját (mely szimmetrikus tenzorokra egyenlő a legnagyobb abszolút értékű sajátértékével) $\|\cdot\|$ jelöli, akkor az eltérés $\|\boldsymbol{\mu}\|^2 \cdot \|\dot{\boldsymbol{\mu}}\|$ rendű, mely a vezető $\|\dot{\boldsymbol{\mu}}\|$ rendhez képest $\|\boldsymbol{\mu}\|^2$ rendű *relatív hibát* jelent a deformációsebességben. Mivel $\boldsymbol{\nu} := \mathbf{N} - \mathbf{I}$ normája ugyanannyi, mint $\boldsymbol{\mu}$ -é — mely

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{N} - \mathbf{I} = \mathbf{C} \mathbf{M} \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{I} = \mathbf{C} (\mathbf{I} + \boldsymbol{\mu}) \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{I} = \mathbf{C} \boldsymbol{\mu} \mathbf{C}^{-1} \quad (119)$$

következménye —, ezért a közelítő deformációsebesség relatív hibája a deformáció négyzetének rendjében van. Ezért durván szólva azt várjuk, hogy a közelítő deformáció relatív hibája is a deformáció négyzetének rendjébe esik. Abszolút hibaként ez harmadrendet jelent. Összegzésül tehát azt a durva ökölszabályt szűrhetjük le, hogy *a bal oldali HENCKY-deformáció deformációfőirány-változtató közegfolyamatok esetén kis deformációra a deformáció köbének rendjébe eső hibával közelíti az itt bevezetett deformációtenzort.*

Megjegyzendő, hogy e közelítés jósága nem függ a közeg elfordulásától. Ez rokonszenves, értékes tulajdonság, nagymértékben növelheti az alkalmazások körét.

A közelítés pontosságán és alkalmazhatósági körén felbátorodva azt a praktikus tanácsot lehet adni, hogy amikor úgymond csak két pillanatfelvétellel rendelkezünk egy közegáramlásról, azaz csak azt tudjuk, hogy a közegpontok hová kerültek egy t_1 -kori helyről egy t_2 időpillanatra, az eközben lezajlott mozgásfolyamatról pedig nem tudunk semmi többet, akkor vészmegoldásként érdemes feltételezni, hogy hátha deformációfőirány-tartó volt a közeg mozgása. Abban reménykedhetünk ilyenkor, hogy hátha *valóban* deformációfőirány-tartó volt a folyamat — amilyenek például az egytengelyű mozgások (ld. 10.1. alszakasz) —, vagy pedig legalábbis benne maradt a főiránytartó közelítés használhatóságának tartományában.

Ilyenkor tehát a teendő az, hogy vesszük a pillanatfelvételekből leszűrhető $\mathbf{J}_{t_1}(t_2)$ -t, és a hozzá tartozó $\mathbf{C}_{t_1}(t_2)$, $\mathbf{M}_{t_1}(t_2)$, $\mathbf{N}_{t_1}(t_2)$ tenzorokat. Választunk egy tetszőleges olyan (deriválható, stb.) $\mathbf{C}_{t_1}(t)$ függvényt, mely $t = t_1$ -re $\mathbf{I}$ -t adja, $t = t_2$ -re pedig $\mathbf{C}_{t_1}(t_2)$ -t. Választunk továbbá egy tetszőleges olyan $\mathbf{M}_{t_1}(t)$ függvényt, mely főiránytartó, és $\mathbf{I}$ és $\mathbf{M}_{t_1}(t_2)$ között interpolál — például az

$$\mathbf{M}_{t_1}(t) := e^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \ln \mathbf{M}_{t_1}(t_2)} \quad (120)$$

ilyen lesz. Ez ha az egész sebességmezőt nem is, de a sebességgradienst egyértelműen meghatározza, és deformációfőirány-tartó folyamatot tett a pillanatfelvételek közé. Ekkor a deformációváltozást $\mathbf{N}_{t_1}(t_2)$ logaritmusaival becsülhetjük.³¹

³¹ Ehhez azonban biztosítani kell a 85. oldalon említett extra feltételt is, vagy pedig a (111) általánosabb képletet kell használni.

A közelítéssel kapott deformáció nagysága utólag is segíthet megítélni, hogy vajon joggal reméltük-e a főiránytartó közelítés alkalmazható voltát.

Ez persze nem szabad, hogy felbátorítson minket arra, hogy ne is figyeljük egy folyamat közben a közeg áramlását. Sose feledjük: a deformáció folyamatfüggő, és lehet, hogy a közelítésben bízva lemaradunk valami fontosról.

10. KONKRÉT PÉLDÁK

A sok elhangzott általános tárgyalás után lássunk most három konkrét példát, az elmondottak illusztrálására.

A második és a harmadik példában a lényeges effektusok egy kétdimenziós vetületben fognak zajlani. Ezért a számítások technikai kivitelezését nagymértékben megkönnyítik a

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (121)$$

Pauli-mátrixokra ismeretes egyszerű összefüggések (itt i a képzetes egység, de felbukkanásától nem kell meghökkenni, σ_2 mindig csak a valós $i\sigma_2$ kombinációban fog jelentkezni). E célból következzen itt egy kis képletgyűjtemény tenzorok függvényeire vonatkozóan, melyet az alábbi példák is használni fognak.

JELÖLÉSEK:

- $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ tetszőleges (akár két-, akár háromdimenziós) tenzorok;
- az $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ alakú mátrixokban a nullák nem lesznek kiírva: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e \end{pmatrix}$, és a bal felső blokkmátrix egyetlen vastag betűs jelölést kap (pl. α);
- $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a kétdimenziós egységmátrix;
- f bármely olyan függvény, amely tenzorokon értelmezhető;
- $|c| := \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$;
- δ_{jk} a KRONECKER-szimbólum.

A KÉPLETGYŰJTEMÉNY:

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \implies e^{\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2} = e^{\mathbf{T}_1} e^{\mathbf{T}_2} = e^{\mathbf{T}_2} e^{\mathbf{T}_1}, \quad (122)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 & \\ & \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix}, \quad (123)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & \\ & f(\beta) \end{pmatrix}, \quad (124)$$

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \sigma_0 + i \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \sigma_l, \quad (125)$$

$$\begin{aligned} e^{\psi i \sigma_2} (c_1 \sigma_1 + c_3 \sigma_3) e^{-\psi i \sigma_2} = \\ = (\cos 2\psi c_1 - \sin 2\psi c_3) \sigma_1 + (\sin 2\psi c_1 + \cos 2\psi c_3) \sigma_3, \end{aligned} \quad (126)$$

$$(c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + c_3 \sigma_3)^{-1} = \frac{1}{c_0^2 - |c|^2} (c_0 \sigma_0 - c_1 \sigma_1 - c_3 \sigma_3), \quad (127)$$

$$e^{c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3} = e^{c_0} \left[\operatorname{ch} |c| \sigma_0 + \frac{\operatorname{sh} |c|}{|c|} (c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3) \right], \quad (128)$$

$$\ln(c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + c_3 \sigma_3) = \ln \sqrt{c_0^2 - |c|^2} \sigma_0 + \frac{1}{2|c|} \ln \frac{c_0 + |c|}{c_0 - |c|} (c_1 \sigma_1 + c_3 \sigma_3), \quad (129)$$

$$\sqrt{c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + c_3 \sigma_3} = e^{\frac{1}{2} \ln(c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + c_3 \sigma_3)}. \quad (130)$$

A második és harmadik példában a magyarázat nélkül közölt formulák mind ezeknek a szabályoknak az értelemszerű alkalmazásával adódnak.

10.1. AZ EGYTENGELYŰ TERHELÉSRE JELLEMZŐ ALAKVÁLTOZÁS

Az első példa az egytengelyű terheléskori deformációt kívánja tárgyalni. Tekintsünk egy $l(t)$ időfüggő hosszúságú, $d(t) = 2r(t)$ időfüggő átmérőjű henger alakú közeget,³² melynek közegpontjai egy inerciarendszer DESCARTES-koordinátákkal el látott terében az

$$x \in [0, l(t)], \quad y^2 + z^2 \leq r(t)^2 \quad (131)$$

tartományt töltik ki. A fizikai elrendezés az szokott lenni, hogy a hengerre a két sík határoló lapja mentén x illetve $-x$ irányú erő hat (nyomóerő, vagy egy valójában hosszabb, a széleinél szorosan befogott henger esetén húzóerő), a henger palástjára nem hat erő/nyomás/feszültség.

Ahhoz, hogy e közeg kinematikájáról beszélhessünk, tudnunk kell a sebességmezjét, azaz a mindenkor pillanatnyi sebességet a közeg minden pontjában. Ehhez feltételezéssel kell élnünk. A gyakorlat céljára sokszor megtehető a következő feltételezés: minden t időpontban, a közeg minden x, y, z koordinátájú helyen járó pontjában

- a v_x sebességkomponens minden időpillanatban csak az adott közegpont x koordinátájától függ, és annyiadrésze a mozgó határoló lap $\dot{l}(t)$ sebességének, ahogyan a közegpont x koordinátája aránylik a $l(t)$ teljes hosszhoz:

$$v_x(t, x, y, z) = v_x(t, x) = \frac{x}{l(t)} \dot{l}(t); \quad (132)$$

³² A keresztmetszet kör alakja nem fog szerepet játszani, lehet bármilyen más fizikailag észzerű síkidom is.

- hasonlóan, a v_y sebességkomponens a keresztirányú méretváltozási sebességgel arányos, és azzal, hogy y hogyan aránylik az $\dot{r}(t)$ sebességhez tartozó $r(t)$ mérethez:

$$v_y(t, x, y, z) = v_y(t, y) = \frac{y}{r(t)} \dot{r}(t) = \frac{y}{d(t)} \dot{d}(t); \quad (133)$$

- ugyanígy,

$$v_z(t, x, y, z) = v_z(t, z) = \frac{z}{r(t)} \dot{r}(t) = \frac{z}{d(t)} \dot{d}(t). \quad (134)$$

Ekkor a *helyfüggetlenné bizonyuló* sebességgradiens (pontosabban: annak e koordinátázásbeli mátrixa), és felbontása szimmetrikus és antiszimmetrikus részre a következők:

$$\mathbf{v} \circ \nabla = \begin{pmatrix} \dot{l}/l & 0 & 0 \\ 0 & \dot{d}/d & 0 \\ 0 & 0 & \dot{d}/d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \dot{l}/l & 0 & 0 \\ 0 & \dot{d}/d & 0 \\ 0 & 0 & \dot{d}/d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = 0. \quad (135)$$

Forgásmentes esetben $\dot{\mathbf{D}} = \mathring{\mathbf{D}} = \mathbf{\Sigma}$ [v.ö. (91)], így

$$\mathbf{D}(t_2) - \mathbf{D}(t_1) = \begin{pmatrix} \ln \frac{l_2}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ln \frac{d_2}{d_1} & 0 \\ 0 & 0 & \ln \frac{d_2}{d_1} \end{pmatrix}, \quad (136)$$

ahol l_1, l_2, d_1 és d_2 a két, tetszőlegesen választott t_1 és t_2 időponthoz tartozó hossz- és keresztirányú méretek. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban tegyük fel, hogy $t = 0$ -kor $\mathbf{D}(0) = 0$, ekkor egy tetszőleges t -kor

$$\mathbf{D}(t) = \begin{pmatrix} \ln \frac{l}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \ln \frac{d}{d_0} & 0 \\ 0 & 0 & \ln \frac{d}{d_0} \end{pmatrix}. \quad (137)$$

A logaritmusok felbukkanása nem meglepő: az „egytengelyű” közegmozgás deformációfőirány-tartó. Megfelel továbbá annak a természetes intuíciónknak, ami HENCKY-t is vezethette: hogy a pillanatnyi deformálódás a pillanatnyi állapothoz lenne viszonyítandó, egy hossz méretre nézve dl/l , így egy deformációváltozás $\int_{l_0}^l dl'/l' = \ln(l/l_0)$ kellene legyen.

Érdemes felhívni a figyelmet, hogy a mérnöki gyakorlatban könnyen beidegződéssé váló eljárás az, amikor az egytengelyű folyamathoz tartozó deformációt (deformáció-megváltozást) automatikusan a kezdeti értékekhez viszonyított

$$\delta_x := (l - l_0)/l_0, \quad \delta_y = \delta_z := (d - d_0)/d_0 \quad (138)$$

relatív megnyúlások alkotta

$$\begin{pmatrix} \delta_x & 0 & 0 \\ 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 0 & \delta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l-l_0}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d-d_0}{d_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d-d_0}{d_0} \end{pmatrix} \quad (139)$$

mátrixnak tekintik. (137) fényében ez csak kis deformáció esetén tehető meg, ahogy az a másik szokásos gyakorlat is, hogy egytengelyű nyomásnál a mért nyomóerőt nem a pillanatnyi, időfüggő felületnagysággal, hanem a kezdeti felületnagysággal osztják el a nyomófeszültség kiszámítására (ami aztán például egy HOOKE-törvénybe, vagy egy reológiai elemzésbe kerül bele, mint „mért feszültségérték”). A két közelítéskor elkövetett hiba egymást erősíti, ezért fokozott óvatossággal ajánlott élni velük. Szemléltetésül, egy egzaktul HOOKE-szerűen rugalmas rúdra mérhető húzóerő a relatív megnyúlás függvényében nem a két említett gyakori közelítés eredményezte

$$F_{\text{közelítő}} = EA_0 \delta_x \quad (140)$$

(ahol E a YOUNG-modulus³³ és A_0 a kezdeti felületnagyság), hanem a logaritmikus deformációtenzor és a változó felületnagyság együttes hatásaként

$$F_{\text{egzakt}} = EA_0 \frac{\ln(1 + \delta_x)}{(1 + \delta_x)^{2\nu}} = EA_0 \left[\delta_x - \left(\frac{1}{2} + 2\nu \right) \delta_x^2 + \dots \right], \quad (141)$$

ahol ν a POISSON-tényező,³⁴ melynek értéke lehet például 1/2 (bár tipikusan ennél valamennyivel kisebb).³⁵ Ugyanakkor a POISSON-tényező sem olvasható le, mint egyszerűen $-\delta_y/\delta_x$, ugyanis

$$-\frac{\delta_y}{\delta_x} = \frac{1 - (1 + \delta_x)^{-\nu}}{\delta_x} = \nu - \frac{\nu(\nu + 1)}{2} \delta_x + \dots \quad (142)$$

A közelítések okozta hibákat mutatja be az 1. ábra.

10.2. AZ EGYSZERŰ NYÍRÁS

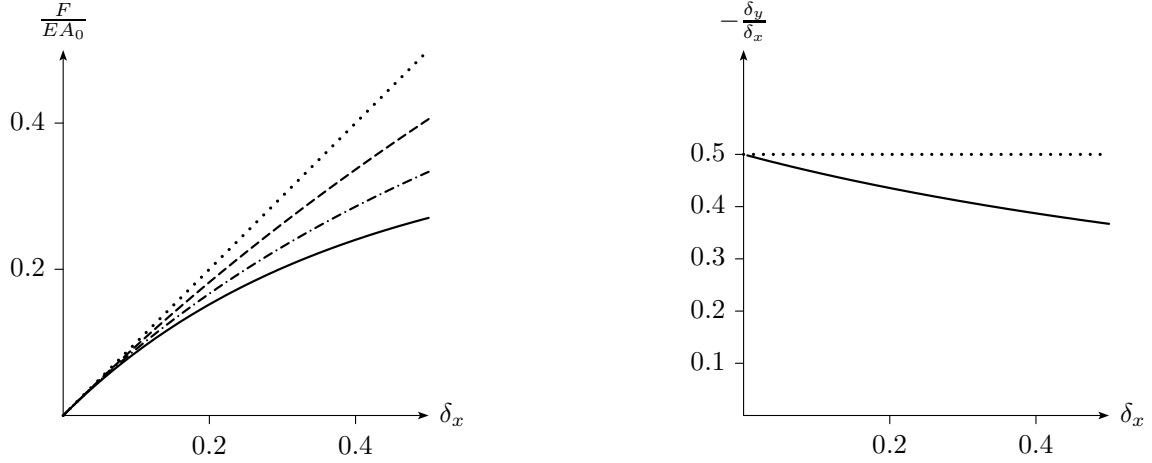
Az egyszerű nyírás olyan közegáramlás, ahol a sebességprofil a külső inerciarendszer szerint, alkalmas DESCARTES-koordinátákban

$$\mathbf{v}(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} \kappa y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (143)$$

³³ A YOUNG-modulus és a—mindjárt szintén említésre kerülő—POISSON-tényező nem tekintendők rugalmasságtani alapállandóknak, csak azok két olyan kombinációjának, melyeket az egytengelyű szituáció speciális esetében célszerű bevezetni, a rövidebb és átláthatóbb képletek céljából. A rugalmasságtani alapállandókról, e két kombinációjuk történetéről, és a reológiai aspektusokról ld. [5].

³⁴ Ld. az előző, 33. számú lábjegyzetet.

³⁵ (141) és (142) levezetése itt nincs közölve, de értelemszerűen reprodukálható.



1. ÁBRA. Balra: a (140) közelítés (pontosított vonal), javítása a logaritmus használatával (szaggatott vonal), javítása a változó felületnagysággal (pont-szaggatott vonal), és javítása mindkettővel, azaz a (141) képlet (folytonos vonal). Jobbra: a Poisson-tényező értéke (pontosított vonal), és a (142) képlet (folytonos vonal). Mindkét ábránál $\nu = 1/2$, kisebb ν -re a görbék menete hasonló.

alakú (κ egy 1/idő dimenziójú állandó). A sebességgradiens mátrixa, és annak szimmetrikus és antiszimmetrikus része

$$\mathbf{v} \circ \nabla = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2} \boldsymbol{\sigma}_1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2} i \boldsymbol{\sigma}_2 & \\ & 0 \end{pmatrix}. \quad (144)$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $t = 0$ -kor nulla deformációjú a közegünk. Az azóta mért $\mathbf{O}$ elfordulást az

$$\dot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^{-1} = \mathbf{\Omega} \quad (145)$$

differenciálegyenlet $\mathbf{O}(0) = \mathbf{I}$ kezdeti feltételű megoldása szolgáltatja, mely

$$\mathbf{O}(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\kappa}{2} i \boldsymbol{\sigma}_2 t} & \\ & 1 \end{pmatrix}. \quad (146)$$

A (95) egyenletet célszerű alkalmazni, melyhez

$$(\mathbf{O}^{-1} \mathbf{\Sigma} \mathbf{O})(t) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2} (\cos \kappa t \boldsymbol{\sigma}_1 - \sin \kappa t \boldsymbol{\sigma}_3) & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad (147)$$

kell, és melyet felintegrálva, és $\mathbf{D}(0) = 0$ -t figyelembe véve

$$(\mathbf{O}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{O})(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [\sin \kappa t \boldsymbol{\sigma}_1 - (1 - \cos \kappa t) \boldsymbol{\sigma}_3] & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad (148)$$

$$\mathbf{D}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [\sin \kappa t \boldsymbol{\sigma}_1 + (1 - \cos \kappa t) \boldsymbol{\sigma}_3] & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \cos \kappa t) & \frac{1}{2} \sin \kappa t & 0 \\ \frac{1}{2} \sin \kappa t & -\frac{1}{2}(1 - \cos \kappa t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (149)$$

Az egyszerű nyírás nem deformációfőirány-tartó folyamat:

$$\mathbf{D}\Sigma - \Sigma\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2}(1 - \cos \kappa t) i\sigma_2 & \\ & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}. \quad (150)$$

Hogy a főiránytartó közelítés a $t = 0$ -tól kezdve mennyi ideig alkalmazható, ez ügyben az ökölszabályunk $\mathbf{D}$ normáját kérdi tőlünk az idő függvényében. $\mathbf{D}$ sajátértékei egyszerűen meghatározható módon a $\{\sin \kappa t, 0, -\sin \kappa t\}$ értékeknek bizonyulnak. Innen azt látjuk, hogy durván szólva $\kappa t \ll 1$ esetén lesz jó várhatóan a főiránytartó közelítés — ahol az már szubjektív megítélés tárgya, hogy a $\ll$ mennyire „jóval kisebb”-et jelentsen.

Nézzük is meg konkrétan, hogy mi is a bal oldali HENCKY-deformáció az egyszerű nyírás esetén. (63) szerint a megoldandó differenciálegyenlet, és annak számunkra most érdekes megoldása:

$$\dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{v} \circ \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) & \\ & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{J}(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\kappa}{2}t(\sigma_1 + i\sigma_2)} & \\ & 1 \end{pmatrix}. \quad (151)$$

Innen

$$\mathbf{N}^2(t) = (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)(t) = \begin{pmatrix} \left[1 + 2\left(\frac{\kappa}{2}t\right)^2\right]\sigma_0 + \kappa t\sigma_1 + 2\left(\frac{\kappa}{2}t\right)^2\sigma_3 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad (152)$$

$$\mathbf{N}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{2}t\right)^2}\sigma_0 + \frac{\frac{\kappa}{2}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{2}t\right)^2}}\sigma_1 + \frac{\left(\frac{\kappa}{2}t\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{2}t\right)^2}}\sigma_3 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad (153)$$

$$\ln \mathbf{N}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\text{Ar sh } \frac{\kappa}{2}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{2}t\right)^2}}\sigma_1 + \frac{\frac{\kappa}{2}t \text{ Ar sh } \frac{\kappa}{2}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{2}t\right)^2}}\sigma_3 & \\ & 0 \end{pmatrix}. \quad (154)$$

Ez az eredmény láthatóan más, mint (149). Kis κt -re sorbafejtve azt is meglátjuk, hogy mennyire: érdekes módon azt találjuk, hogy σ_1 együtthatójában $(\kappa t)^5$ rendben, σ_3 együtthatójában pedig $(\kappa t)^4$ rendben kezdődik az eltérés közöttük. Az egész közelítés egészen $\kappa t \leq 1$ -ig meglepően jól együtthalad az igazival, és csak utána válnak menthetetlenül szét.

Az egyszerű nyírásra kapott deformáció eme oszcilláló viselkedése meglepőnek tűnhet. Gondoljunk azonban bele, hogy deformációnk együttforgó, a nyírás pedig egy olyan közegfolyamat, ahol Ω csakis mint egy átlagos elfordulási tendencia tekinthető. Egy olyan $\mathbf{e}$ irányra nézve, amely Σ -nak nem főiránya, a Σ okozta oldalirányú elmozdulás összemérhető lehet az Ω jelentette elfordulással, bizonyos irányok esetén ki is oltják egymást, más irányokban pedig egymást erősítik. Itt tehát maga az együttforgás fogalma inog, és erről az ingó platformról nézzük mi a deformációt, ehhez képest mérjük változását. Megtettünk mindent, amit lehetett, de ez nem garantálja, hogy minden esetre minden intuíciónkat teljesíti akár a legjobb deformáció-definíció is. Ami azért nem is feltétlenül baj, ugyanis nem biztos, hogy minden intuíciónk helyes.

Nem egyszer fordult már elő a fizikában, hogy egy szisztematikus definíció rávilágított bizonyos beidegződött intuícióink téves mivoltára. Ne siessünk tehát a szituáció megítélésével: adjunk időt magunknak szép nyugodtan emészteni a látottakat.

10.3. PÉLDA A DEFORMÁCIÓ FOLYAMATFÜGGÉSÉRE

Ez a példa azt fogja bemutatni, hogy a deformáció folyamatfüggő, ugyanolyan konfigurációváltozáshoz különböző sebességmezőkkel jutva különböző lesz a deformáció változása.

Három különböző $\mathbf{J}(t)$ -t választunk, mindháromban $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ az egész folyamat során, elfordulást csak az okoz, amennyire $\mathbf{M} = \mathbf{N}$ főirányváltozása generál. Mindhárom az $\mathbf{N}(0) = \begin{pmatrix} e^{R\sigma_1} & \\ & 1 \end{pmatrix}$ kezdeti feltételből indul — azt képzeljük, hogy odáig egy főiránytartó folyamattal jutott a nulla deformációjú állapotból a közeg (itt R egy tetszőleges választott pozitív állandó), és így $\mathbf{D}(0) = \begin{pmatrix} R\sigma_1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$. Hasonlóan, mindhárom ugyanabban a $t = \tau$ pillanatban ugyanabba a $\mathbf{N}(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-R\sigma_1} & \\ & 1 \end{pmatrix}$ állapotba érkezik. Eltérés abban van, hogy az induló és a végállapot hogyan van összekötve. Az első esetben történjen ez az

$$\mathbf{N}_1(t) := \begin{pmatrix} e^{(1-2t/\tau)R\sigma_1} & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad (155)$$

kijelölte folyamat mentén. Ez egy deformációfőirány-tartó folyamat, mint az egyszerűen látható. Ezért ennek mentén a deformációváltozás számítható a

$$\mathbf{D}_1(\tau) = \ln \mathbf{N}(\tau) = \begin{pmatrix} -R\sigma_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad (156)$$

módon.

A második folyamat legyen az

$$\mathbf{N}_2(t) := \begin{pmatrix} e^{R(\cos \omega t \sigma_1 + \sin \omega t \sigma_3)} & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad (157)$$

által kijelölt áramlás, ahol $\omega = \pi/\tau$. Ez a sebességmezőt nem rögzíti egyértelműen, de a számunkra szükséges sebességgradiens szimmetrikus és antiszimmetrikus részét igen, (74) alapján:

$$\Sigma_2(t) = \begin{pmatrix} \omega \operatorname{sh} R \operatorname{ch} R (-\sin \omega t \sigma_1 + \cos \omega t \sigma_3) & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad (158)$$

$$\Omega_2(t) = \begin{pmatrix} -\omega \operatorname{sh}^2 R i \sigma_2 & \\ & 0 \end{pmatrix}. \quad (159)$$

Utóbbiból

$$\mathbf{O}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-\omega \operatorname{sh}^2 R t i \sigma_2} & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad (160)$$

így

$$(\mathbf{O}_2^{-1} \mathbf{\Sigma}_2 \mathbf{O}_2)(t) = \begin{pmatrix} \omega \operatorname{sh} R \operatorname{ch} R \{ -\sin [\omega (\operatorname{ch} 2R)t] \boldsymbol{\sigma}_1 + \cos [\omega (\operatorname{ch} 2R)t] \boldsymbol{\sigma}_3 \} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (161)$$

Felintegrálva [v.ö. (95)],

$$\begin{aligned} (\mathbf{O}_2^{-1} \mathbf{D}_2 \mathbf{O}_2)(\tau) - \mathbf{D}_2(0) &= \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{th} 2R}{2} \left(\{ \cos [\omega (\operatorname{ch} 2R)\tau] - 1 \} \boldsymbol{\sigma}_1 + \sin [\omega (\operatorname{ch} 2R)\tau] \boldsymbol{\sigma}_3 \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (162)$$

Tudva, hogy $\mathbf{D}_2(0) = \mathbf{D}(0) = \begin{pmatrix} R\boldsymbol{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix}$, innen

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2(\tau) &= \\ &= \begin{pmatrix} -R\boldsymbol{\sigma}_1 + \left(R - \frac{\operatorname{th} 2R}{2} \right) \left(\{ \cos [2\pi (\operatorname{sh}^2 R)] + 1 \} \boldsymbol{\sigma}_1 - \sin [2\pi (\operatorname{sh}^2 R)] \boldsymbol{\sigma}_3 \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (163)$$

Ugyanígy,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_3(\tau) &= \\ &= \begin{pmatrix} -R\boldsymbol{\sigma}_1 + \left(R - \frac{\operatorname{th} 2R}{2} \right) \left(\{ \cos [2\pi (\operatorname{sh}^2 R)] + 1 \} \boldsymbol{\sigma}_1 + \sin [2\pi (\operatorname{sh}^2 R)] \boldsymbol{\sigma}_3 \right) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (164)$$

arra a folyamatra, amely a másodiktól csak annyiban tér el, hogy benne ω ellentett előjelű, azaz a (157) kitevőjében lévő körmozgás alsó félköre helyett a felső félköre mentén megyünk el a kiindulópontból a kör átellenes pontjába.

A folyamatfüggés szembeszökő. A második és harmadik esetekben a deformáció az elsőtől kis R esetén R harmadik rendjében tér el, azaz a kis deformáció harmadik rendjében. Ez a példa tehát illusztrálja a deformációfőirány-tartó közelítés általában harmadrendű hibáját.

A deformáció folyamatfüggő volta szintén borzolhatja bizonyos intuíciónkat. Ez ügyben ismét csak az a javasolt stratégia, hogy először hagyjuk ülepedni ezt az információt is. Aztán később ellenőrizzük, és gondoljuk végig újra ezt az aspektust. És ha megérett az idő, akkor dönthetünk, hogy egy ilyen, folyamatfüggő deformációt akarunk-e használni a továbbiakban, vagy pedig tovább kell gondolkodni egy folyamatfüggetlen deformáció definíciójáról.

11. ÖSSZEGZÉS

Jelen írás

- megvizsgálta a sebességmező gradiense szimmetrikus és antiszimmetrikus részének tulajdonságait, és az ezekre alapozható interpretációjukat;

- ezek felhasználásával definiálta az *együttforgó deformációmező*³⁶ fogalmát;
- azt találta, hogy az együttforgó deformáció mentes azoktól a problémáktól, amik a szokásos deformációtípusoknál felvethetőek;
- feltárta az ismert deformáció-változatokhoz való viszonyát — hogy melyikkel és mikor van egzakt egyezés, és mikor közelítő (s az mekkora pontosságig);
- végül megállapította az új deformáció-fogalom bizonyos kellemes, továbbá bizonyos újszerű tulajdonságait, általános szinten és konkrét példák végigszámlálásával egyaránt.

A javasolt kinematika- és deformáció-megközelítés, és az ennek kapcsán talált eredmények meglehetősen újszerűek, velük kapcsolatban további türelmes elemzésre és alapos vizsgálatokra van szükség.

KÖSZÖNETMONDÁS

A szerző köszönetet mond GOHÉR ATTILÁNAK és VÁN PÉTERNEK értékes észrevételeikért és javaslataikért.

IRODALOM

- [1] ARNOLD, V. I. (1974): *Matyematyicseskijje metódü klasszicseszkoj mehányiki, Nauka, Moszkva*;
magyar fordítás: *A mechanika matematikai módszerei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.*
- [2] ASSZONYI, CS. – VÁN, P. – SZARKA, Z. (2007): *Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 5. Műegyetemi Kiadó, Budapest.*
- [3] BÉDA, GY. – KOZÁK, I. – VERHÁS, J. (1986): *Kontinuummechanika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.*
- [4] BÉDA, GY. – KOZÁK, I. (1987): *Rugalmas testek mechanikája, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.*
- [5] BOJTÁR, I. – VÁSÁRHELYI, B. – ASSZONYI, CS. (2008): *A Young-féle rugalmassági modulus és a Poisson-tényező, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8, Műegyetemi Kiadó, Budapest. (Jelen kötetben.)*

³⁶ és az itt közelebbről nem vizsgált *inerciális deformációmező*, továbbá a *tágultságmező*

- [6] FÜLÖP, T. (2008): A tér nem abszolút — a téridő, mint a Galilei-féle relativitási elv következménye, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)
- [7] JAGLOM, I. M. (1969): Princip atnaszítelosztyi Galileja i neevklídava geometrija, *Nauka*, Moszkva;
magyar fordítás: Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [8] LÁMER, G. (2007): Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének dinamikai kérdései, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007 ISRM Konferencia. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **4**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. pp. 301–314.
- [9] MATOLCSI, T. (1984): A concept of mathematical physics. Models for spacetime, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- [10] MATOLCSI, T. (1993): Spacetime without reference frames, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- [11] VÁN, P. – ASSZONYI, CS. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye. II. Az általános törvényszerűségek levezetése. In: ASSZONYI, CS. (szerk.), Izotróp kontinuumok anyagtörvénye, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **3**. *Műegyetemi Kiadó*, Budapest, pp. 25–88.
- [12] VERHÁS, J. (1985): Termodinamika és reológia, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.
- [13] WEYL, H. (1919): Raum. Zeit. Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie, *Springer*, Berlin; angol fordítás: Space-time-matter, *Methuen & Co. Ltd.*, London, 1922.
- [14] MATOLCSI, T. (1985): On material frame-indifference, *Archive of Rational Mechanics and Analysis* 91/2, 99–118.
MATOLCSI, T. – GRUBER, T. (1996): Spacetime without reference frames: An application to the kinetic theory. *International Journal of Theoretical Physics* 35(7), 1523–1539.
MATOLCSI, T. – KRISTÓF, J. – SZÉKELY, M. (1996): On the momentum distribution of molecules of an ideal gas, *Publications in Applied Analysis* 7, 1–14.
MATOLCSI, T. – VÁN, P. (2006): Can material time derivative be objective? *Physics Letters A* 353, 109–112. (math-ph/0510037)
MATOLCSI, T. – VÁN, P. (2007): Absolute time derivatives. *Journal of Mathematical Physics* 48, 053507–19. (math-ph/0608065)
MATOLCSI, T. – VÁN, P. (2008): On the objectivity of time derivatives, *Atti dell'Accademia Peloritana dei Pericolanti, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche*

e Naturali, Suppl. I. 86, 1–13.

VÁN, P. (2007): Objektív anyagfüggvények felé a reológiában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007 ISRM Konferencia. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **4**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

- [15] VÁN, P. (2008): Anyagi sokaságok a nemrelativisztikus téridőben, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)
- [16] DILL, E. H. (2006): Continuum mechanics: elasticity, plasticity, viscoelasticity. *CRC Press*, Germany.
- HUTTER, K. – JÖHNK, K. (2004): Continuum Methods of Physical Modeling, *Springer*, Germany.
- LUBARDA, V. A. (2001): Elastoplasticity Theory, *CRC Press*, Germany.
- LUBLINER, J. (2008): Plasticity Theory (Revised Edition), *Dover Publications*.
- MACOSKO, C. W. (1994): Rheology: principles, measurement and applications, *VCH Publishers*.
- MASE, G. E. (1970): Continuum Mechanics, *McGraw-Hill Professional*.
- MASE, G. T. – MASE, G. E. (1999): Continuum Mechanics for Engineers, Second Edition, *CRC Press*, Germany.
- NEMAT-NASSER, S. (2006): Plasticity: A Treatise on Finite Deformation of Heterogeneous Inelastic Materials, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- REES, D. (2006): Basic Engineering Plasticity - An Introduction with Engineering and Manufacturing Applications, *Butterworth-Heinemann*.
- TRUESDELL, C. – NOLL, W. (1965): The non-linear field theories of mechanics, (Handbuch der Physik, III/3.) *Springer Verlag*.
- WIKIPEDIA: http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_strain_theory .

A YOUNG-FÉLE RUGALMASSÁGI MODULUS ÉS A POISSON-TÉNYEZŐ

Bojtár Imre

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM, ÉPÍTŐMÉRNÖKI KAR,
TARTÓSZERKEZETEK MECHANIKÁJA TANSZÉK, BUDAPEST

Vásárhelyi Balázs

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Asszonyi Csaba

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A legfrissebb kontinuummechanikai kutatási eredmények módosították az anyagtulajdonságokról, anyagállandókról vallott több évszázados felfogásunkat. A konvencionális tervezési gyakorlatban fontos anyagállandóként tartják számon az E rugalmassági modulust és a ν Poisson-tényezőt, pedig mindkettőnél megkérdőjelezhető az „anyagjellemző”, s főképp az „állandó” jelző. Előadásunk rámutat a fogalmak történeti kialakulására és pontosítja értelmezésüket.

1. BEVEZETÉS

KONTINUUMOK MECHANIKAI ANYAGMODELLJE általánosan

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1)$$

formában írható fel, ha feltételezzük, hogy csak mechanikai kölcsönhatás lép fel, s a többi anyagi kölcsönhatás (termikus, elektromágneses, kémiai) az adott esetben kizárható. Ez a termikus kölcsönhatás kivételével természetes, mert általában nem lépnek kölcsönhatásba a mechanikaival, de a termikus paraméter esetében izotermikus ($T = \text{állandó}$) feltételezéssel kell élni. Az (1)-ben felsorolt változók jelentése a következő:

σ_{ij} – másodrendű feszültségtenzor (az *impulzus konduktív áramsűrűsége*: vagyis felületegységen időegység alatt átfolyó impulzus mennyisége),

ε_{kl} – másodrendű deformációtensor, amely a mechanikai impulzus hatására létrejövő változást (deformálódást) tükrözi,

L_{ijkl} – negyedrendű *impulzusvezetési* tenzor, mely a mechanikai impulzus hatására létrejövő inhomogenitás megszüntetésére vonatkozó anyagi hatást fejezi ki, vagyis a termodinamika II. főtétele szerint azt a tényt, hogy minden rendszer a kiegyenlítődés irányába változik.

Köztudott, hogy az L_{ijkl} 81 komponensű tenzor, *tökéletesen anizotrop* esetben 21, míg *tökéletesen izotrop* esetben 2 független komponenssel rendelkezik. Ezek hívjuk a termodinamikában *vezetési függvényeknek*.

IZOTROP KONTINUUMOK ANYAGMODELLJE ennek megfelelően, ha a vezetési függvényeket μ és λ szimbólumokkal jelöljük, és bevezetjük

$$\sigma_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_o = \frac{1}{3} \sum \sigma_{ii}, \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3} \sum \varepsilon_{ii}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_o, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_o,$$

alakú deviatorikus és gömbi felbontást, akkor

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad \sigma_o = \lambda \varepsilon_o \quad (2)$$

formában írható fel, ahol μ és λ a termodinamikai változók függvénye. Formailag hasonlóak a lineárisan rugalmas anyagoknál szereplő *Lamé*-állandókhoz, azonban ezek itt nem állandók.

Az *E lineáris rugalmassági modulus* és a *ν Poisson-tényező* a lineárisan rugalmas, izotrop testek mechanikájából származó fogalmak, ezért szűkítsük tovább a kört.

A HOOKE-MODELL: A (2) alatti összefüggés, ha a vezetési függvényeket állandóaknak tekintjük, vagyis a vezetési függvények nulladrendű sorfejtését vesszük – ebben az esetben a μ és λ ténylegesen a *Lamé*-állandók –, a megszokott *Hooke*-modellt kapjuk. Ez az egyenlet a mérnöki gyakorlatban használt *G nyírási* rugalmassági modulussal, illetve *K kompresszibilitási* (vagy *térfogati*) modulussal

$$s_{ij} = \underbrace{2G}_{2\mu} e_{ij}, \quad \sigma_o = \underbrace{3K}_{\lambda} \varepsilon_o, \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + (3K - 2G) \varepsilon_o \quad (3)$$

formában is felírható, vagyis két egymástól független rugalmassági anyagállandónk van.

A HOOKE-MODELL EGYTENGELYŰ FESZÜLTÉGÁLLAPOT ESETÉN: Ekkor az alapváltozóink a σ – tengelyirányú feszültség, ε – tengelyirányú fajlagos nyúlás és ε_k – tengelyre merőleges síkban jelentkező keresztirányú fajlagos nyúlás. Feltételezve az összetartozó ε , ε_k értékek arányosságát, bevezették a $\nu = -\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon}$ *Poisson-tényező*, illetve

ennek reciprokára az $m = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_k} = \frac{1}{\nu}$ *Poisson-szám* fogalmát. Ezzel az új feltevessel az 1D anyagegyenlet

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4)$$

formájúra egyszerűsödik, ahol E a jól ismert lineáris rugalmassági (vagy *Young-féle*) modulus. Ezáltal újabb két anyagi jellemzőt kaptunk $[E, \nu]$, az $\varepsilon_k/\varepsilon$ arány konstans voltának feltételezése alapján. Az eddigiekben bemutatott összesen 4 anyagállandó közötti összefüggések a következők:

$$\begin{aligned} 2G &= \frac{6EK}{9K-E} = 3K \frac{1-2\nu}{1+\nu} = E \frac{1}{1+\nu}, \\ 3K &= \frac{6EG}{9G-3E} = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} = E \frac{1}{1-2\nu}, \\ E &= \frac{9KG}{3K+G} = 2G(1+\nu) = 3K(1-2\nu), \\ \nu &= \frac{3K-2G}{6K+2G} = \frac{E-2G}{6K} = \frac{3K-E}{6K}. \end{aligned}$$

Ezek közül természetesen csak 2 független van.

IZOTROP KONTINUUMOK ÁLTALÁNOS ANYAGMODELLJE: A (2) alatti összefüggés időfüggő alakja a legáltalánosabb reológiai modell:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} + \theta\dot{e}_{ij} + \tau\dot{s}_{ij}, \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o + \theta_o\ddot{\varepsilon}_o + \tau_o\dot{\sigma}_o, \end{aligned} \quad (5)$$

amelyet *tehetetlenségi standard modellnek* hívunk [VÁN P.- ASSZONYI, CS. (2006), (2008), ASSZONYI, CS. - VÁN P.- SZARKA, Z. (2006).]. Az (5)-öt *általánosított anyagmodellnek* nevezzük – míg az összes többi csak egyszerűen „modell”-nek – mert ismereteink szerint az egyetlen olyan modell (vagy test), amely nem spekulatív úton jött létre – arra vigyázva, hogy ne sértse a II. főtétele –, hanem a II. főtételeből deduktív következtetések végeredményeként adódott.

Az (5) alatti általános modell természetesen a vissza nem fordítható és a visszafordítható folyamatokra egyaránt érvényes összefüggés, sajátos határesetek pedig a reverzibilis *Hooke*-modell, vagyis az általa leírt folyamat az *egyensúlyhoz* közelítve a (3) összefüggéshez tart. Matematikailag azt mondhatjuk, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \begin{array}{l} 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} + \theta\dot{e}_{ij} + \tau\dot{s}_{ij} \\ 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o + \theta_o\ddot{\varepsilon}_o + \tau_o\dot{\sigma}_o \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2Ge_{ij} \\ 3K\varepsilon_o \end{array} \right\}.$$

Ez következik egyébként abból a formai hasonlóságból is, amely a (2) és az (5) között van, ha ez utóbbit differenciáloperátorokkal írjuk fel:

$$\begin{aligned}\hat{s}_{ij} &= 2G\hat{e}_{ij}, & \hat{s}_{ij} &= \left(1 + \tau \frac{d}{dt}\right) s_{ij}, & e_{ij} &= \left(1 + \frac{2\eta}{2G} \frac{d}{dt} + \frac{\theta}{2G} \frac{d^2}{dt^2}\right) e_{ij}, \\ \hat{\sigma}_o &= 3K\hat{\varepsilon}_o, & \hat{\sigma}_o &= \left(1 + \tau_o \frac{d}{dt}\right) \sigma_o, & \varepsilon_o &= \left(1 + \frac{3K_v}{3K} \frac{d}{dt} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{d^2}{dt^2}\right) \varepsilon_o.\end{aligned}$$

Látható, hogy a $2G$ és a $3K$ rugalmassági állandók mindkét modellben azonosak.

EGYTENGELYŰ FESZÜLTSGÁLLAPOT esetén az (5) nem írható fel egyetlen egyenletben, mint a (4), ugyanis a $\nu = -\varepsilon_k/\varepsilon \neq \text{constans}$ feltétel miatt a keresztirányú nyúlás nem küszöbölhető ki, s így

$$\begin{aligned}\sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) + 2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k) + \theta(\ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}_k), \\ \sigma + \tau_o \dot{\sigma} &= 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k) + 3K_v(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k) + \theta_o(\ddot{\varepsilon} + 2\ddot{\varepsilon}_k).\end{aligned}\tag{6}$$

Ez furcsa szituáció, ui. az ideálisan rugalmas *Hooke-törvény*, az irreverzibilis termodinamika II. főtétele szerint is reális közelítése az anyag reverzibilis viselkedésének. Definíció szerint

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma(\varepsilon, \varepsilon_k)}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma(\varepsilon(t), \varepsilon_k(t))}{d\varepsilon(t)} = E(t), \quad \nu = -\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon_k(t)}{\varepsilon(t)} = \nu(t).$$

Az E lineáris rugalmassági modulus és a ν Poisson-tényező időfüggése az ún. „öregedési” elméletek alapja is. Ezek konkrét alakjára a 4. pontban mutatunk fel példát.

2. YOUNG ÉS A RUGALMASSÁGI MODULUS

THOMAS YOUNG neve a mérnökök által legismertebbek közé tartozik, hiszen az általa bevezetett *Young-modulus*, vagy ahogy talán még többen ismerik, a *rugalmassági modulus*, a leggyakrabban használt paraméterek közé tartozik. Ennek a fontos ún. „anyagállandónak” az alkotója csodálatos, színes egyéniség volt, feltétlenül érdemes arra, hogy a mérnökök tisztelettel őrizték emlékét.

1773. június 13-án született az angliai Milvertonban. Édesapja nagykereskedő és bankár volt. Csodagyermeknek tartották (feljegyezték például róla, hogy kétéves korában már kiválóan olvasott, négyévesen pedig már a teljes Bibliát is többször elolvasta és elég jól ismerte annak szövegét). Nyelvtudása már fiatal korában egészen elképesztő volt: hatévesen beszélt *latinul* és még nem töltötte be a tizennegyedik életévét, amikor elsajátította a *görög*, a *francia*, az *olasz*, a *héber*, a *kaldeus*, a *szír*, a *szamáriai*, az *arab*, a *perzsa*, a *török* és az *etióp* nyelvet is...

Családja igen nagy szeretettel vette körül, különösen nagyapja¹ örült gyors szellemi fejlődésének és valósággal elhalmozta könyvekkel. Szinte minden fontos dolgot otthon sajátított el, mert a merev és gyenge színvonalú elemi iskolai rendszerbe soha nem tudott igazán beilleszkedni.

Bár már egészen kicsi korától kezdve szinte minden érdekelte², kezdetben elsősorban a régészet és a történelem kötötte le figyelmét. 1792-ben nagybátyja – a híres orvosként praktizáló *Richard Brocklesby* – hatására mégis a londoni orvosi egyetemre iratkozott be. Két év múlva a skóciai Edinburgh egyetemén folytatta tanulmányait, majd rá egy évre váltott, a kontinensre utazik és a híres göttingeni egyetemet keresi fel. Közben megírja első publikációit, melyek olyan sikeresek, hogy YOUNGOT 1794 júliusában (21 éves ekkor, és még egyetemi hallgató) tagjává választja a *Royal Society*. Bár visszaemlékezései szerint Göttingenben nem érezte túlságosan jól magát – az egyetem merev szabályai sokszor nem voltak kedvére – 1796-ban mégis itt szerzi meg a doktorátust³.



Rövid európai körutat követően – főleg különböző német tartományokban időzik, majd egy hónapot tölt például Drezdában a képtár tanulmányozójaként – 1797-ben a cambridge-i Emmanuel College hallgatója lesz, folytatja orvosi tanulmányait. Ennek az évnek decemberében halt meg orvos nagybátyja, akitől jelentős vagyont örökölt, így ettől kezdve soha többé nem voltak komoly anyagi gondjai. 1799-ben a híres londoni *Welbeck Street*-en nyit magánrendelést és ezzel párhuzamosan egyre nagyobb szenvedéllyel veti bele magát a tudományos tevékenységbe is, először többnyire névtelen⁴ cikkekkel és egyéb publikációkkal, de hamarosan már a *Royal Society* előadótermeinek közismert alakja lesz. A természettudományok szinte minden ágában gyorsan halad, 1801-ben az angol tudományos kutatásért-képzésért felelős *Royal Institute* természettudományi professzorává nevezik ki (a cím tulajdonosaként fizikát, mechanikát, hidrodinamikát és matematikát oktatott). YOUNG nagy szorgalommal fog hozzá az aktív kutatásokhoz szorosan kapcsolódó tanításhoz, két év alatt több mint 90 előadást tart. 1802-ben a *Royal Society* kéri fel egy újabb posztra, a Társaság külkapcsolatokért felelős titkára lesz.

¹ Anyai nagyapja hamar magához vette a kisfiút, tulajdonképpen gyermekkorá nagy részét vele töltötte.

² Tizenkét éves korában kedvenc olvasmányai közé tartoztak Newton fizikai-matematikai munkái illetve Euklidész geometriai értekezése.

³ Disszertációja anatómiai, hangtani és nyelvészeti kérdésekkel foglalkozott.

⁴ Saját bevallása szerint első tudományos publikációival nem kívánta „rossz hírbe keverni” az orvosi hivatást...

1803-ban újabb váltás következett be az életében: orvosi teendőire hivatkozva lemondott a *Royal Institute*-ban betöltött professzori állásáról⁵, bár ugyanakkor más hivatalos megbízásokat még elvállalt. 1814-ben például a londoni városi gáz bevezetéséről döntő bizottság tagjaként dolgozik hosszú ideig, 1816-ban egy időméréssel foglalkozó állami bizottság titkára, 1818-ban pedig egyidejűleg nevezik ki a *Board of Longitude*, az angol *Mérésügyi Hivatal* titkárává és a *HM Nautical Almanac Office*, a *Tengerészeti Almanach Hivatal*⁶ vezetőjévé. Közben 1811-be feladta orvosi magánpraxisát, a Szent György-kórházban vállalt munkát és itt is marad „főállásban” egészen 1829. május 10-én, 56 éves korában bekövetkezett haláláig⁷.

Nem biztos, hogy mindenki egyet tud érteni gyakran emlegetett jelmondatával („*Minden ember képes arra, amire mások képesek*”), de az abból áradó magabiztosság és erő a késő nemzedékek számára is tiszteletreméltóak...

YOUNG TUDOMÁNYOS MUNKÁSSÁGA. YOUNG által vizsgált tudományterületek száma legalább olyan változatos, mint élete. Témák szerint csoportosítva említjük a legfontosabbakat, kihagyva ebből a sorból a kifejezetten mechanikai tárgyú eredményeit, mert azokat – a rugalmassági modulussal együtt – majd külön pontban tárgyaljuk.

(A) FIZIKAI KUTATÁSOK. Az egyik legismertebb és legjelentősebb eredménye a *fény hullámtermészetének* bizonyítása egy 1801-ben bemutatott szellemes és egyszerű kísérlettel⁸. *Gábor Dénes*, a Nobel- díjas magyar tudós a következőképpen írt erről a *Fizikai Szemle* 2000/6-os számában:

„Napsugarat bocsátott egy sötét szobába, útjába egy sötét ernyőt helyezett, rajta két tűszúrásnyi lyukkal, és ettől bizonyos távolságban egy fehér ernyőt. Két sötét vonalat látott egy fényes vonal két oldalán, ami annyira felbátorította, hogy megismételte a kísérletet. Fényforrásként ezúttal alkohollángot használt, benne egy kis sóval, hogy nátrium fényt tudjon előállítani. Most számos, szabályosan elhelyezkedő sötét vonalat látott. Ez volt az első világos bizonyíték arra, hogy ha fényhez fényt adunk, sötétséget kaphatunk. A jelenség neve interferencia. Thomas Young számított erre, mert hitt a fény hullámelméletében. Christian

⁵ Nem kizárt, hogy ebben szerepet játszott az is, hogy az előadásait hallgatók állandóan arra panaszkodnak, hogy túl bonyolultnak és túl magas szintűnek tartják órái. Egyik diákja panaszzalében azt írta, hogy „a professzor úr úgy tartja az előadásait, hogy eleve feltételezi, hogy a diákok már mindent tudnak...”

⁶ Tengerészeti és csillagászati helymeghatározással és az ehhez kapcsolódó egyéb kérdésekkel valamint kiadványok – tengerészeti évkönyvek - készítésével foglalkozó hivatal. Young volt az első vezetője.

⁷ 1829 februárjának elején hirtelen légzési nehézségei támadtak és ezek a következő hónapokban állandóan erősödtek. Sajnos legjobb kollégái sem tudtak rajta segíteni.

⁸ Néhány évvel ezelőtt amerikai fizikusok között szavazást tartottak, hogy a fizika egész történetében mely kísérleteket tartják a „legszebbeknek” (lásd a szavazás részleteiről a <http://www.origo.hu/tudomany/technika/20060124atiz.html> honlapot). Youngnak a fény hullámtermészetét demonstráló kísérlete a tízes rangsorban az ötödik helyen végzett.

Huygens⁹ eredeti ötletéhez az volt a fő hozzájárulása, hogy a monokromatikus fény szabályos szinuszos rezgést jelent egy közegben, amelyet abban az időben éternek hívtak.”

Ez a megállapítás elméleti jelentőségén kívül számtalan gyakorlati feladat megoldását is lehetővé tette a későbbiekben, példaként említjük a röntgen-krisztallográfiát, az anyagok belső felépítését vizsgáló tudományágat, mely jelentős mértékben épít YOUNG felfedezésére.

A folyadékok *felületi határfeszültségeinek* elemzéséhez kapcsolódik YOUNG 1804-ben publikált¹⁰ másik fizikai felfedezése, a folyadékok felületi feszültségeit illetve a szilárd testtel érintkező folyadék viselkedését magyarázó jelenségek leírása. Ezzel a modellel sikerült a kapillaritás jelenségét fizikailag helyesen magyarázni. YOUNG erre vonatkozó egyenletét egy évvel később tőle függetlenül PIERRE-SIMON MARQUIS DE LAPLACE¹¹ is felfedezte, ezért ma sokszor *Young-Laplace-egyenletként* is találkozhatunk vele (tipikus mai alkalmazása ennek a kérdéskörnek például a különböző mosószeres hatásmechanizmusának elemzése).

Megjegyezzük, hogy YOUNG a szilárd testen lévő folyadékcsepp felületének *geometriai adatait* is meg tudta adni modelljével¹².

Elméleti vizsgálatokat végzett a különböző molekulák méretének meghatározására is. Az általa megadott értékek pontosságát jó ötven múlva igazolták a fizikusok.

Fontos technikatörténeti érdekességként említjük, hogy különböző tudományos írásaiban YOUNG használta először¹³ a mai értelemben az „*energia*” kifejezést, felváltva ezzel a korábbi korok „*vis viva*”¹⁴ klasszikus elnevezését.

(B) ORVOSTUDOMÁNY. YOUNG az *élettani optika* tudományának megalapítója. 1793-ban publikálta híres munkáját a *szem akkomodációs* képességéről, a szemlencse alakját befolyásoló izmok hatásáról. Ebben megmagyarázta, hogy hogyan fókuszálja a szemlencse a fénysugarakat, azaz hogyan változik a szemlencse alakja a szükséges mértékben az éles látás során.

Néhány évvel később újból visszatért a látás problémájához. 1801-ben a szem szaruhártyájának egyenetlen görbületével elsőként adott helyes magyarázatot a *szemtengelyferdülés*, az úgynevezett asztigmatizmus néven ismert látáshibára. 1802-ben elsőként jött rá, hogy a *színlátás* a három alapszín (a kék, a vörös és a zöld)

⁹ 1629 – 1695. Holland matematikus, csillagász és fizikus. Többek között kiváló óraszerkezetek készítéséről ismert.

¹⁰ „Cohesion of Fluids” *Phil. Trans.*, pp. 65. 1805.

¹¹ 1749 – 1827. Kiváló francia matematikus és csillagász, híres a csillagászatban alkalmazott matematikai módszereiről.

¹² Ennek a modellnek a helyességét Dupré francia fizikus igazolta 60 évvel később termodinamikai elvek felhasználásával, így ma ezt sokszor *Young-Dupré-modellnek* is nevezik.

¹³ Először egy 1807-es cikkében található meg új névként.

¹⁴ A latin kifejezés „*élő erő*”-t jelent. *Leibnitz* nevéhez kapcsolják ebben a formában, bár már az ókori tudósoknál is előfordult hasonló utalással.

*kombinációjának*¹⁵ eredményeképpen jön létre, mégpedig úgy, hogy az egyes alapszíneket a szemben a retinahártyán lévő különböző idegi receptorok¹⁶ érzékelik.

YOUNG értékes művet¹⁷ publikált a *hemodinamika* tárgykörében is, és más orvosi könyvei¹⁸ is jelentősek voltak. Érdekességként jegyezzük meg, hogy a gyógyításban sokáig alkalmazták az általa kidolgozott szabályt, amely a gyermekeknek adható gyógyszer mennyiségek értékét határozta meg a felnőttek adagjainak és a gyermek élettani adatainak figyelembevételével¹⁹...

(C) RÉGÉSZET. YOUNG egész életében komolyan érdeklődött a régészet iránt, fiatal-korában is elsősorban ezért tanult idegen nyelveket. Elsősorban 1815-től kezdődően azonban különösen sok energiát fordított erre a területre, igen intenzíven tanulmányozta például az egyiptomi hieroglifák megfejtésének kérdését. SILVESTRE DE SACY²⁰ és JOHAN DAVID AKERBLAD²¹ korábbi munkáira támaszkodva 1823-ban publikált²² munkájában az írás megfejtésének alapvetően helyes gondolatát fogalmazta meg (sok részletet már az 1818-ban megjelent *Encyclopaedia Britannica* „Egyiptom” szócikkében közölte). Az volt a hipotézise, hogy az egyiptomi szövegben szereplő nem-egyiptomi neveket úgy írták le, hogy bennük a hieroglifák nem fogalmakat, hanem hangokat jelölnek. Két uralkodó, *Ptolemaiosz* és *Berenike* nevének elemzése *hat hieroglifa* helyes értelmezéséhez vezetett, három másik esetben a megfejtése részben helyes és négy másik esetben pedig téves volt.

JEAN-FRANCOIS CHAMPOLLION²³ francia tudósnak 1822-ben pontosabb megoldást sikerült elérnie, Young nevét azonban nem említette. YOUNG elismeréssel szólt CHAMPOILLON munkájáról, azonban kifogásolta, hogy nem történt hivatkozás 1818-as lexikonbeli írására. Úgy vélte, hogy a francia tudós alapvetően az ő cikkét használta²⁴. Sokáig tartott a vita kettőjük között, csak 1826-os párizsi találkozójukon borítottak fátlyat a múltra, és a továbbiakban nem vitatták ezt a kérdést.

¹⁵ A publikációiban közölt elmélet részleteit később a nagy német orvos és fizikus, a biomechanika megalapítója, *Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz* (1821 – 1894) dolgozta ki részletesen, ezért szokás *Young-Helmoltz-féle trikromatikus modellnek* is nevezni a szakirodalomban.

¹⁶ A színeslátás Young-féle élettani modelljének kísérleti igazolására egészen 1959-ig kellett várni.

¹⁷ „*Functions of the Heart and Arteries*”, 1808.

¹⁸ „*An Introduction to Medical Literature*” és „*System of Practical Nosology*”, mindkettő 1813-ban jelent meg, továbbá „*A Practical and Historical Treatise on Consumptive Diseases*”, ezt 1815-ben adták ki.

¹⁹ Az igazsághoz az is hozzátartozik, hogy maga Young a gyakorlati gyógyítást jóval ritkábban művelte. Bár élete végéig ragaszkodott „orvosi főállásához”, pácienseinek száma mindig nagyon csekély volt.

²⁰ 1758 – 1838. Francia nyelvész és orientalista.

²¹ 1763 – 1819. Svéd diplomata és orientalista, *Sacy* tanítványa. Ők ketten 29 jelet fejtettek már meg az úgynevezett egyiptomi írásból.

²² „*Account of the Recent Discoveries in Hieroglyphic Literature and Egyptian Antiquities*”.

²³ 1790 – 1832. Francia nyelvész és orientalista. A rosette-i kőtábla háromnyelvű feliratára támaszkodva adta meg az egyiptomi írás megfejtését.

²⁴ Young állítása mai szemmel valószínűnek tűnik, mert a modern elemzések kimutatták, hogy még a Young által hibásan elemzett részeket is pontosan ugyanúgy használta *Champoillon*.

(D) NYELVÉSZET. YOUNG sokat foglalkozott összehasonlító nyelvészettel. Az *Encyclopaedia Britannica*-ba írt terjedelmes nyelvészeti szócikkében 400 különböző nyelv nyelvtanát és szókincsét hasonlította össze. 1813-ban külön művet is megjelentett erről a kérdésről. Ő újította fel és tette közismertté egy holland nyelvész – MARCUS ZUERIUS VAN BOXHORN²⁵ – 165 évvel azelőtt tett javaslatát az ún. „indoeurópai nyelvcsalád” elnevezés használatára.

YOUNG briliáns elméje játszi könnyedséggel mozgott a különböző tudományágak között. A mából nézve úgy tűnik, hogy utolsó képviselője volt a XVIII. századi felvilágosodás polihisztorságra törekvő elméinek és valószínűleg a francia enciklopédisták szalonjaiban érezte volna magát a legjobban.

A XIX. századtól kezdve az egyre jobban szakosodó, egyre inkább csak a saját területüket művelő tudósok sokáig kissé idegenkedve tekintettek rá és munkáira, azt kérve tőle számon, ami eleve idegen volt személyiségétől, az egyetlen – lehetőleg minél szűkebb – témában való nagyon alapos elmélyedésre törekvést és a „gyors váltások” elhagyását.

Ez az élete során egyre erősödő „szakmai távolságtartás” idézte például elő azt is, hogy korai és hirtelen halála tudományos körökben alig keltett visszhangot Angliában²⁶... Hiába tartották szellemi óriásnak olyan tudósok, mint JOHN HERSCHEL²⁷, LORD RAYLEIGH²⁸ vagy ALBERT EINSTEIN²⁹, a XXI. század elején mégis szükség van YOUNG „újrafelfedezésére”, hogy valóban méltó helyet foglaljon el a világ legnagyobb tudósai között.

A RUGALMASSÁGI MODULUS. YOUNG mechanikai kutatásai alapvetően azokhoz az évekhez kötődnek, amikor 1802-03 között a Royal Institute tanára volt. Először 1802-ben jelentetett meg egy vázlatgyűjtemény-szerű kis könyvecskét „*A Syllabus of a Course of Lectures on Natural and Experimental Philosophy*” címmel, majd egybegyűjtötte és átdolgozta összes mechanikai témájú előadását egy kétkötetes munkában³⁰.

Ennek a műnek az első kötetében adta meg először Young a rugalmassági modulus fogalmát az „*Of the equilibrium and the strength of elastic substances*” című fejezetben. Központosan nyomott oszlopok vizsgálata során jutott arra a következtetésre, hogy a létrejövő rugalmas elmozdulások meghatározásához mindenképpen szükség van egy

²⁵ 1612 – 1653. Kiváló holland nyelvész. Mesterséges nyelvet is kidolgozott a nemzetek közötti kommunikációra.

²⁶ Egyedül Párizsban – ahol 1827-ben az Akadémia tagjává választották – tartott gyászbeszédet Arago, a nagy matematikus.

²⁷ 1792 – 1871. Angol matematikus és csillagász, a Szaturnusz és Uranusz több holdjának felfedezője.

²⁸ 1842 – 1919. Nobel díjas angol fizikus, az argon felfedezője.

²⁹ 1879 – 1955. Német születésű elméleti fizikus, a modern fizika legnagyobb tudósainak egyike.

³⁰ „*A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*”. Először 1807-ben jelent meg Londonban, ezt később még több – kivonatos – kiadás követte.

anyagokként állandónak tekinthető paraméterre, amit ő „*rugalmassági modulus*” névvel jelölt. Az igazsághoz hozzátartozik, hogy YOUNG szövege alapján értelmező adat inkább a mai szóhasználatnál „normálmerevségnek” nevezett értéknek feleltethető meg, és nem tisztán az anyagállandónak.

Ezt az ellentmondást HENRI NAVIER³¹ is érzékelte, és 1819-es egyetemi előadási jegyzeteiben illetve 1826-ban megjelent nagy mechanika tankönyvében³² korrigálta is YOUNG modelljét, szétválasztva a tisztán anyagi tulajdonságokat megadó paramétert a geometriai jellemzőktől. Tulajdonképpen azóta is a NAVIER által használt definíciót használjuk, de hozzá kell tennünk, hogy NAVIER maga is megtartotta a „*Young-modulus*” nevet, nem vitatva YOUNG elsőségét az eredeti gondolat létrehozásában³³.

YOUNG az előbb említett művében számos más mechanikai kérdéssel is foglalkozott, olyanokkal, amelyek általa megadott *megoldása akkoriban teljesen újnak* (!) számított. Többek között vizsgálta:

- a gerendák *hajlításának* kérdését, pontos megoldását adva a később Navier (és mások) nevéhez kapcsolt hajlítási modellnek,
- a húzás közben keletkező *keresztirányú alakváltozás* jelenségét, amelyet Poisson³⁴ csak jóval később, 1829-ben publikált, és amit ma *Poisson-hatásként* ismer a világ,
- a *rugalmas és törési állapot* közötti átmenet mechanikai viszonyait, és Navier-t jóval megelőzve felhívta a figyelmet a rugalmassági határ figyelembevételének fontosságára,
- a szerkezetekre eső terhek *dinamikus* hatását a kinetikus energia értékének felhasználásával,
- a *külpontosan húzott/nyomott* oszlopok feszültségeloszlásának kérdéseit és elsőként adott helyes modellt erre a jelenségre,
- a nyomott oszlopok *kihajlásának* különleges eseteit (gúlákból összerakott oszlopok, kezdeti külpontossággal rendelkező teher, kezdeti görbülettel rendelkező oszlopok, stb.).
- *hidromechanikai feladatként* vizsgálta a hajók stabilitási kérdéseit, különös tekintettel a legkedvezőbb alak létrehozására.

YOUNG egyéb munkáit is ismerve egészen elképesztő ez a lista, különösen akkor, ha figyelembe vesszük, hogy viszonylag rövid időt fordított ezekre a kutatásokra és saját maga is inkább „játékos kitérőnek” tekintette ezeket a vizsgálatokat orvosi-fizikusirégészeti életművében.

³¹ 1785 – 1836. Kiváló francia mérnök. Munkáiban elsőként egyesítette a fizikai-matematikai alapokon nyugvó tudományos megközelítést a mérnöki gyakorlat igényelte eljárásokkal. Nagy szerepe volt a használható gerendaelmélet kidolgozásában.

³² *Résumé des Leçons de Mécanique*.

³³ Egyébként is igen nagyra értékelte Young munkáit.

³⁴ 1781 – 1840. Francia matematikus. Munkássága komoly hatással volt a mechanika fejlődésére is.

Érdekes kérdés, hogy ezek az új – és ráadásul nagyon fontos – mechanikai eredmények miért nem mentek át rögtön a köztudatba? Sajnos a mérnöki társadalom – *a rugalmassági modulust kivéve* – alig vett tudomást a fenti kutatásokról, az összes fent említett eredmény a következő évtizedekben más kutatók révén lett közismert.

LORD RAYLEIGH, aki 1892-ben vette át az elsőként YOUNG által vezetett *Royal Institute* irányítását, vette a fáradságot, és hosszasan elemezte ezt a kérdést. Részletesen átnézte YOUNG művei mellett előadási vázlatait és levezetéseit, majd arra a következtetésre jutott, hogy YOUNG egyszerűen „*túl gyors*” volt kortársaihoz képest, különösen akkor, amikor matematikai vagy mechanikai feladatokról tartott előadást az akkoriban matematikában még egyébként sem túl járatos hallgatóságnak. Nagyon sok dolgot közölt részletes levezetés vagy magyarázat nélkül, „*ez triviális*” megjegyzéssel intézve el egy bizonyítás hiányát és bizony ez nem tette őt könnyen elfogadhatóvá azok számára sem, akik egyébként tényleg érdeklődtek volna munkái iránt. Tisztelték, de lehetőleg távolról, és nem vették a fáradságot, hogy mélyebben elemezzék munkáit. Sajnos YOUNG személye sem tette egyszerűen megoldhatóvá ezt a helyzetet, hiszen ő maga már régen egy újfajta feladattal foglalkozott, amikor hallgatói vagy akár a szélesebb műszaki közvélemény még a régit sem tudta teljesen feldolgozni...

Nagy francia kortársaitól eltérően az ő neve halála után sokáig – teljesen érdemtelenül – a mérnökök között csak egyetlen dologról, a rugalmassági modulusról volt ismert, pedig mechanikai munkásságának színvonala méltó csodálatos életműve többi részéhez.

3. POISSON ÉS A POISSON-TÉNYEZŐ

POISSON ÉLETE. SIMÉON-DENIS POISSON 1781. június 21-én született Pithiviers-ben, egy Párizstól mintegy 80 km-re délre található kisvárosban. Szülei nagyon szegények voltak, apja korán nyugdíjazott, alacsony beosztású katonatiszt. Több idősebb testvére a nehéz körülmények miatt már kisgyermek korában meghalt, Poisson is csak édesanyja emberfeletti küzdelmének köszönhetette életben maradását. Nem tudták iskolába járatni, egészen tizenöt éves koráig éppen csak olvasni és írni tudott otthon megtanulni. Annál csodálatraméltóbb volt rendkívül gyors szellemi fejlődése az ezt követő években. 1796-ban – szerencsés változásként az életében – Fontainebleau-ban lakó nagybátyja magához vette, és lehetőséget adott neki a tanulásra.

Egészen lenyűgöző intenzitással kezdett matematikát tanulni, így két évvel később, 1798-ban sikerrel felvételizett az Ecole Polytechnique már akkor híres intézetébe. Olyan



kiváló tanárok keze alatt tanult, mint PIERRE-SIMON MARQUIS DE LAPLACE³⁵ és JOSEPH LOUIS LAGRANGE³⁶ (aki akkor például a függvénytant oktatta). Mindketten felfigyeltek a hatalmas tempóban haladó diákra (1800-ban – mindössze két év alatt – már sikerrel be is fejezte tanulmányait) és javaslatukra az egyetem először segédoktatói, majd 1806-tól rendes előadói állást ajánlott fel a Matematika Tanszéken (ő is függvénytant oktatott, éppen a – Napóleon utasítására Grenoble-ba távozó – JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER³⁷-t váltotta a katedrán).

LAGRANGE és LAPLACE is nagyon jó baráti kapcsolatban voltak POISSONnal, a 32 évvel idősebb LAPLACE szinte fiaként kezelte a tehetséges fiatalembert. POISSONnak már első publikációi olyan sikeresek voltak, hogy LAGRANGE javaslatára 1812-ben a Francia Akadémia felvette tagjai közé. 1808-ban a mérések szabványosításával és a tengeri navigáció kérdéseivel foglalkozó Bureau des Longitudes-ben kezdett el dolgozni csillagászként, 1809-ben pedig az Ecole Polytechnique-n a mechanika professzori állását is ellátta. 1815-től a Saint-Cyr-ben működő nagy francia katonai akadémia rendszeres vizsgáztatója lett, 1818-ban az angol Royal Society vette be tagjai közé, 1820-ban pedig az Ecole Polytechnique választotta be igazgatótanácsi tagjai közé. 1832-ben megkapta a Royal Society rangos kitüntetését, a Copley Érmét (AIRY³⁸ az előző évben, GAUSS³⁹ pedig néhány évre rá kapta meg ugyanezt a díjat).

Apjával ellentétben, aki aktívan részt vett a francia forradalom eseményeiben, és később is szenvedélyesen politizált, POISSON sokkal inkább visszahúzódó alkat volt. Bár minden forrás azt bizonyítja, hogy egész életében megőrizte a szüleitől kapott köztársasági szellemet és ateista gondolkodást, de a forradalom bukását követően, majd a császárság illetve később a Bourbon-restauráció alatt tartózkodott mindenféle politikai megnyilvánulástól. 1804-ben például mindent megtett, hogy fékezze az Ecole Polytechnique diákjainak Napóleon ellenes szervezkedését, nem éppen azért, mert különösen lelkesedett volna Napóleonért, egyszerűen csak az intézetben folyó munka nyugalma akarta biztosítani. A sors fintora, hogy Napóleon hivatalnokai később éppen őt zaklatták a legtöbbet ezért. Később – 1821-ben –, amikor a királytól bárói címet kapott, nemhogy a címet nem használta soha, de még a kinevezés okmányát sem vette át. Az 1830-as forradalom után *Lajos Fülöp* kormánya minden állásától és címétől meg

³⁵ 1749 – 1827. Kiváló francia matematikus és csillagász, híres a csillagászatban alkalmazott matematikai módszereiről.

³⁶ 1736 – 1813. Olasz-francia matematikus és csillagász. Főleg analízissel és égi mechanikával foglalkozott, a XVIII. század egyik legnagyobb matematikusának tartják.

³⁷ 1768 – 1830. Francia matematikus és fizikus. A matematikai sorok illetve speciális transzformációk tették híressé nevét.

³⁸ 1801 – 1892. Kiváló angol csillagász és fizikus. A feszültségfüggvényekről írt munkái tették ismertté a mérnökök között.

³⁹ 1777-1855. Német matematikus és fizikus, a világ legnagyobb tudósainak egyike.

akarta fosztani, de barátja, FRANCOIS JEAN DOMINIQUE ARAGO⁴⁰ királyi kegyelmet eszközölt ki számára, sőt, halála előtt néhány évvel tudományos életművére hivatkozva megkapta a „Franciaország peerje” címet is.

POISSON 1840. április 25-én halt meg Párizs közelében, Sceaux-ban. Mindössze 59 éves volt. Nevét – örökké élő tudományos hagyatékán kívül – egy róla elnevezett kráter is őrzi a Holdon.

Egész életének jellemzője az a mondat, amit gyakran hangoztatott kollégái és tanítványai között:

„Az élet csak két dologra jó: matematikát kutatni és matematikát tanítani...”

TUDOMÁNYOS MUNKÁSSÁGÁNAK FONTOSABB ADATAI. Nagyon fiatalon, még 19 éves egyetemista korában publikálta első dolgozatait. Az egyikre, egy véges differenciaegyenlet integrálszámítással történő megoldására azonnal felfigyelt a tudományos közvélemény. ADRIEN-MARIE LEGENDRE⁴¹ rögtön közlésre javasolta munkáját, és ezzel megkezdődött POISSON közel 400 cikket kitevő publikációs tevékenysége.

A matematika és a fizika számos területén használják ma is az általa megfogalmazott egyenleteket illetve változókat. Gondoljunk csak a *potenciálmélet* *Poisson-egyenletére* vagy ennek vektoralgebrai megfelelőjére, az áramlástan *Poisson-Boltzmann-egyenletére*, a különböző fizikai feladatoknál gyakran használt *Poisson-integrálra*, a *Poisson-eloszlásra*, stb.. Rengeteg olyan matematikai ötlete, elkezdett, de sajnos sokszor be nem fejezett, kellően ki nem munkált matematikai gondolata volt egyébként, amelyek évekkel-évtizedekkel később mások publikációinak eredményeként váltak nemzetközileg ismertté (többek között NAVIER-től teljesen függetlenül formálta meg például a ma *Navier-Stokes-egyenletekként* ismert áramlástan alapösszefüggést...)

A számunkra mechanikai szempontból fontosabb publikációi sorát az 1814-ben a *Mémoires* című kiadványban megjelent⁴² „*Mémoire sur le surfaces élastiques*” nyitotta meg. BERNOULLI és LAGRANGE korábbi munkáira építve vizsgálta különböző alakú membránok rezgéseit, és felírta a fizikai modellezéshez szükséges differenciál-egyenleteket.

Több kisebb cikk mellett 1829 és 1831 a dátuma a POISSON által publikált talán legfontosabb mechanikai munkáknak. Az első a „*Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*”⁴³, a másik pedig a „*Mémoire sur les équations*

⁴⁰ 1786 – 1853. Katalán származású francia matematikus, fizikus, csillagász. Időnként politikával is foglalkozott, főleg kollégái segítésére használva kapcsolatait és befolyását.

⁴¹ 1752 – 1833. Matematikus, matematikai statisztikával, számelmélettel, algebrával és analízissel foglalkozott.

⁴² Több kutatónál téves ennek a publikációnak a dátuma. A hibát az okozza, hogy a kiadvány az 1812-es dátumot viseli ugyan, de a hosszú nyomdai átfutási idő (már akkor is...) miatt csak 1814-ben jelent meg.

⁴³ *Mémoires of the Academy*, Vol. 8. 1829. pp. 357-570.

*générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques et des fluides*⁴⁴ címet viseli. Ezekben a dolgozatokban⁴⁵ kifejti azokat az alapelveket, amelyeket a mechanikai rendszerek vizsgálatánál fontosnak tart, és felírja a vizsgálatukra javasolt matematikai egyenleteket. Szerinte a világot szabályos rendben elhelyezkedő atomok (molekulák) építik fel, és azok közötti erők szabják meg az anyag és így a szerkezetek mechanikai viselkedését. A vizsgált test egy elemien kicsiny darabjára írt fel három egyensúlyi egyenletet, és ezekhez három peremfeltételt fogalmazott meg kiindulási bázisként (ezek nagyon hasonlóak CLAUDE-LOUIS NAVIER⁴⁶ és AUGUSTIN LOUIS CAUCHY⁴⁷ egyenleteihez), majd bebizonyította, hogy ezek szükséges és elégséges feltételei a test bármely részén a nyugalmi egyensúly meglétének. Felírta a testek belsejében keletkező elmozdulás-hullámokra vonatkozó egyenleteket is, és egyszerűbb esetekre megadta integrált változataikat, továbbá foglalkozott a hullámokban keletkező esetleges zavarok hatásaival. Hivatkozva OSZTROGRADSKIJ⁴⁸ publikációira, POISSON ekkor fogalmazta meg a húzott izotrop rúdelem tengelyirányú alakváltozásának a keresztirányú alakváltozásokra gyakorolt hatását, és vezette be azt a paramétert, amit ma a mérnökök szerte a világon *Poisson-tényezőként* ismernek.

Poisson egyszerű testek (például külső-belső nyomással terhelt körgyűrűk) szilárd-ságtani vizsgálatát (feszültségek, alakváltozások számítása, rezgések elemzése, stb.) is elvégezte ezekben a munkáiban. Egyenletesen terhelt vékony hajlított lemezekre – befogott peremfeltételekkel – felírta a biharmonikus függvények differenciálegyenletét, amit ma *Kirchhoff-Love*-modellként ismer a világ. Kör alakú lemez esetére átirta a feladatot polárkoordinátás változatra, és megadta a feladat megoldását is. Foglalkozott a lemez szabad rezgéseinek modellezésével, és többféle esetre – például kör alakú változatra – a megoldást is megadta.

1833-ban kiadott „*Traité de Mécanique*” című kétkötetes – alapvetően tankönyvnek szánt – művében a fentiek rendszerezett összefoglalása mellett nagyon sok egyéb rezgéstani és elmozdulás-számítási vizsgálatot is bemutat (rudakra, gerendákra, kétdimenziós testekre). Különösen sokat tett azért, hogy a mérnököket megtanítsa a trigonometrikus sorok használatára különböző mechanikai feladatok vizsgálatánál.

A mai kor tudománytörténészei úgy látják, hogy POISSON elsősorban matematikusként alkotott igazán jelentőset, mérnöki munkásságában nem volt olyan léptékű újító a mechanikában, mint például a kortárs CAUCHY vagy NAVIER. A mérnökök világa azonban – elsősorban a gyakorlati problémák kiváló megoldójaként – mindig tisztelettel őrzi emlékét.

⁴⁴ Journal de l'École Polytechnique, Vol. 20. 1831, pp. 1-174.

⁴⁵ Megjegyezzük, hogy egyetemi előadásaiban az itt leírtakat akkor már több éve tanította.

⁴⁶ 1785 – 1836. Kiváló francia mérnök és fizikus.

⁴⁷ 1789 – 1857. A legkiválóbb matematikusok egyike. Nagyon sokat tett a mechanika alapfogalmainak meghatározásáért.

⁴⁸ 1801 – 1862. Orosz matematikus és fizikus. Sokat foglalkozott mechanikai kérdésekkel is.

A POISSON-TÉNYEZŐ. Mint azt az előző pontban már leírtuk, POISSON először 1829-ben említette azt a paramétert, amit ma Poisson-tényezőként ismerünk. A dolog érdekessége, hogy először nem statikai, hanem rezgéstani példában találkozunk vele, csak utána jegyezte meg, hogy ez a paraméter statikai feladatoknál is használható (lásd az idézett mű 456. oldalán). Nem tartozott az általa túl gyakran említett vagy vizsgált kérdések közé, ezt követően már csak az 1833-as mechanika tankönyvében fordul elő az egyik oldalon (II. kötet 369. oldal). Fontos tudnunk, hogy ő *nem anyagjellemzőként, hanem* – kisebb részben néhány kísérletre, de főleg az atomok közötti erőkre felírt elméleti egyenleteire hivatkozva – *0,25 értékű, minden anyagra azonos konstansként* tartotta számon! A meghatározás azonban már egyezett a ma is használatos képlettel: $\nu = -\varepsilon/\varepsilon_k$.

A konstansnak feltételezett Poisson-tényező természetesen azt jelentette, hogy a homogén izotrop rugalmas testek viselkedését egyetlen anyagállandóval (praktikusan a Young-féle rugalmassági modulussal) lehet leírni. A XIX. század elején ténylegesen ez is volt a közzelfogás a mechanikában, NAVIER, CAUCHY⁴⁹, POISSON, GABRIEL LAMÉ⁵⁰ vagy BENOIT PAULE ÉMILE CLAPEYRON⁵¹ ebben tökéletesen egyetértett. Megjegyezzük, hogy abban is összhang volt e tudósok között, hogy az általános anizotrop viselkedést 15 paraméterrel tartották jellemezhetőnek.

A merev molekulaszervezetre épített anyagmodell-felfogást alapvetően GEORGE GREEN⁵² munkássága változtatta meg. Élete sok hasonlóságot mutat Poissonéval. Szegény nottinghami molnár fiaként született, gyerekkorában neki sem volt alkalma rendszeresen tanulni, csak lopva olvasott könyvekből képezte magát. Csak 1833-ban (negyven évesen) jutott be a cambridge-i egyetemre, 1837-ben védte meg BSc címét. 1839-ben végre Cambridge-ben kapott kutatói állást, de két év múlva már meghalt.

1828-ban (ekkor még semmilyen hivatalos végzettsége sem volt!) publikálta első, és talán legjelentősebb munkáját „*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*” címen, ahol – a LAPLACE-nál tulajdonképpen már sok részletében megtalálható, de gyakorlati feladatokra nem túl gyakran használt – potenciálfogalmat helyezte előtérbe, és ajánlotta mechanikai feladatok vizsgálatára. A rugalmas anyagok belső feszültségeinek és alakváltozásainak összekapcsolására GREEN ajánlott először olyan potenciálfüggvényeket⁵³, melyekből parciális deriválással megteremthetők a feszültség-alakváltozás vagy pedig az

⁴⁹ Nagyon érdekes, hogy maga Cauchy Green-nél jóval korábban már saját levezetéseiben is eljutott a két független anyagi paraméter szükségességéig, de nem vizsgálta mélyebben ezt a kérdést, és az egyiket csak konstansnak tekintette.

⁵⁰ 1795 – 1870. Francia matematikus. Híres a görbevonallú koordináta-rendszerek fejlesztése terén elért eredményeiről.

⁵¹ 1799 – 1864. Francia mérnök és fizikus, a termodinamika megalapítóinak egyike.

⁵² 1793- 1841.

⁵³ A szilárdságtannal kapcsolatos részletek elsősorban az “*On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light at the Common Surface of Two Noncrystallized Media*” című munkájában találhatók.

alakváltozás-feszültség kapcsolati egyenletek. Ezeket ma a mechanika hiperelasztikus, vagy más néven *Green-féle modelleknek* hívja. Bebizonyítható, hogy ezek a kapcsolati modellek olyan szimmetrikus negyedrendű tenzorok segítségével adhatók meg, ahol az anyagmodell általános esetben 21 darab konstans tartalmaz.⁵⁴ Homogén izotrop rugalmas anyag esetén e konstansok száma *kettőre* csökken, vagyis a Young-modulus *önmagában még nem elegendő* az anyag tulajdonságainak leírására!

A XIX. század közepén két táborra vált szét az anyag mechanikai tulajdonságaival foglalkozó kutatók csapata: az egyikbe NAVIER, CAUCHY és POISSON *követői* tartoztak, akik az *egy* (illetve 15) állandó mellett foglaltak állást, a másik csoportot pedig GREEN *elméletét elfogadók* alkották a *két* (illetve 21) paraméterrel. A kérdés megválaszolását az a paradigmaváltás tette lehetővé, ami akkoriban bontakozott ki a műszaki tudományok szinte valamennyi területén. Az ipari forradalom hatására ezekben az években vált igazán elfogadottá és hitelessé a nyomokban már korábban is létező, de alapvetően háttérbe szorított *laboratóriumi kísérletezés*. Míg a korábbi századok döntően az elméleti megközelítési módot tartották alapvetőnek, a XIX. század közepén az egyetemeken, az ipari cégeknél illetve független vállalatoknál létrejövő, anyagvizsgálattal foglalkozó laboratóriumok már a mechanikai elméletek minősítéséből is részt kértek.

GREEN elmélete az első gyakorlati bizonyítást az osztrák W. WERTHEIM⁵⁵ kísérleteiből kapta. WERTHEIM orvos volt, Bécsben született és ott szerzett orvosi diplomát 1839-ben. 1840-ben Párizsba költözött, ahol érdeklődése egyre inkább a mérnöki tudományok és azon belül is elsősorban a laboratóriumi kísérletezés felé fordult. 1855-től már az École Polytechnique laboratóriumában dolgozott. 1861-ben öngyilkos lett.

A Poisson-tényezővel kapcsolatos mérési eredményeit 1848-ban publikált⁵⁶ „*Mémoire sur L'équilibre des corps solides homogènes*” összefoglaló cikkében közli, bár már korábbi munkáiban is megjelentetett kisebb cikkeket anyagvizsgálatokról. Fémekkel (acél, bronz) és különböző kerámiákkal illetve fával végzett statikus és dinamikus kísérleteket. Részletesen elemezte a hőmérséklet illetve a gyártási technológiák (például a tömörítés) hatását ugyanannál az anyagnál mind a rugalmassági modulusra, mind a keresztirányú alakváltozásra. Tulajdonképpen ő volt az *első* a világon, aki anyagfüggő paraméternek, *anyagi változónak* tekintette Poisson paraméterét, bár az igazsághoz hozzátartozik, hogy – talán a nagy francia tudósok iránti tiszteletből – ezt nyíltan nem írta le, hanem inkább feltételes módot használva kerülte meg az állásfoglalást a kétféle elmélet között...

⁵⁴ Mai felfogásunkban: 21 *impulzusvezetési függvényt*, amelyek nulladrendű közelítései állandók.

⁵⁵ 1815 – 1861.

⁵⁶ *Annales de Chimie et de Physique*, Vol. 23, pp. 52-95, 1848.

Néhány évvel később egy másik kiváló kutató, a német származású ADOLPH-THEODOR KUPFFER⁵⁷ végzett igen nagyszámú kísérletet az anyagállandók vizsgálatára. KUPFFER 1849-ben lett az orosz Mérésügyi Hivatal igazgatója, így stabil anyagi háttérrel rendelkezett munkájához. Méréseit Európában a legkiválóbbak között emlegették, TODHUNTER például azt írja róla, hogy az egész XIX. században senki nem végzett gondosabb és részletesebb anyagtani elemzéseket szilárdságtani paraméterek meghatározására. Elsősorban geológiai anyagokat vizsgált, de hőhatásokkal kombinált statikus és dinamikus mérései másféle anyagokra is kiterjedtek. 1860-ban Pétervárott megjelentetett „*Recherches expérimentales sur l'élasticité des métaux faites à l'observatoire physique central de Russie*” című összefoglaló könyvében KUPFFER megerősítette WERTHEIM méréseinek eredményeit, és egyértelműen állást foglalt GREEN két illetve 21 paraméteres modelljei mellett.

A XIX. század második felében a Poisson-tényező valódi anyagjellemzőként való kezelése, vagyis a homogén rugalmas anyagok kétparaméteres állapotú jellemzése *mindenhol elfogadottá vált*. További kísérleteket végzett még például a német FRANZ ERNST NEUMANN⁵⁸, vagy az ő híres tanítványa, GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF⁵⁹. Ezek a mérések mindenki számára egyértelműen lezárták ezt a kérdést.

4. MILYEN ANYAGI PARAMÉTEREKET HASZNÁLJUNK?

Mai ismereteink birtokában a válasz igen egyszerű. Nem célszerű, és a jövőben – a kifejezetten egyszerű mechanikai feladatoktól eltekintve – lehetőség szerint kerülendő az E és a ν használata, mert félreértésekre ad alkalmat. A homogén rugalmas anyagok kétparaméteres állapotú jellemzésére definíció szerint két tényleges anyagállandónk van, a fizikában szokásos λ és a μ Lamé állandó, vagy (a mechanikában szokásos néven) G és K nyírási rugalmassági- és kompresszibilitási (v. térfogati) modulus. Az átszámítás az E -ből és a ν -ból:

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}.$$

A ν POISSON-TÉNYEZŐ: [SZARKA, Z. - ASSZONYI, CS.- FÜLÖP, T. (2008)] tanulmányának 166-171. oldalán a kérdés egy bizonyos felvetése megtalálható, és a 28-31. ábrák bemutatják néhány egyszerűbb esetre vonatkozóan a ν alakulását.

Tekintsünk egy olyan egytengelyű nyomókísérletet, amelynél a próbatestre a σ tengelyirányú terhelést

⁵⁷ 1799 – 1865. Mivel élete nagy részét Oroszországban töltötte, orosz források gyakran Adolf Jakovlevics Kupfer-ként hivatkoznak rá.

⁵⁸ 1798 – 1895. Kiváló német mérnök. Neumann egyébként sokat levelezett Kupfferrel.

⁵⁹ 1827 – 1887. Német mérnök, egyike a mechanika legnagyobb alakjainak.

$$\frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma} = a = \text{constans}$$

egyenletes sebességgel visszük fel, s mérjük az ε tengelyirányú- és ε_k keresztirányú fajlagos nyúlást. Ezen feltételek mellett a (6) alatti

$$\begin{aligned}\sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) + 2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k) + \theta(\ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}_k), \\ \sigma + \tau_o \dot{\sigma} &= 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k) + 3K_v(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k) + \theta_o(\ddot{\varepsilon} + 2\ddot{\varepsilon}_k)\end{aligned}$$

differenciál-egyenletrendszer megoldása [SZARKA, Z. - ASSZONYI, CS.- FÜLÖP, T. (2008) (36) képlete] alapján:

$$\begin{aligned}\varepsilon - \varepsilon_k &= C_{d1}e^{\alpha t} + C_{d2}e^{-\beta t} + A_d t + B_d =: x, \\ \varepsilon + 2\varepsilon_k &= C_{o1}e^{\gamma t} + C_{o2}e^{-\delta t} + A_o t + B_o =: y,\end{aligned}\quad (7)$$

ahol

$$\begin{aligned}A_d &= \frac{a}{2G}, \quad B_d = -\frac{a}{2G}\left(\frac{\eta}{G} - \tau\right), \quad C_{d1} = \frac{-B_d\beta + A_d - \dot{\varepsilon}_0}{\beta - \alpha}, \quad C_{d2} = \frac{B_d\alpha - A_d + \dot{\varepsilon}_0}{\beta - \alpha}, \\ \alpha &= \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 2G\theta}}{\theta}, \quad \beta = \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 2G\theta}}{\theta}, \\ A_o &= \frac{a}{3K}, \quad B_o = -\frac{a}{3K}\left(\frac{K_v}{K} - \tau_o\right), \quad C_{o1} = \frac{-B_o\gamma + A_o - \dot{\varepsilon}_0}{\delta - \gamma}, \quad C_{o2} = \frac{B_o\gamma - A_o + \dot{\varepsilon}_0}{\delta - \gamma}, \\ \gamma &= \frac{-K_v + \sqrt{K_v^2 - 3K\theta_o}}{\theta_o}, \quad \delta = \frac{-K_v - \sqrt{K_v^2 - 3K\theta_o}}{\theta_o}.\end{aligned}$$

A (7)-ből az $\varepsilon = \frac{1}{3}(2x + y)$, $\varepsilon_k = \frac{1}{3}(y - x)$ összefüggések alapján a deformációk számíthatók, s a Poisson-tényező – értelemszerű egyszerűsítő jelölésekkel – a következő:

$$\nu(t) = -\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} = \frac{Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} - Ce^{\gamma t} - De^{\delta t} + Ht + J}{2Ae^{\alpha t} + 2Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t} + De^{\delta t} + Ft + G}.\quad (8)$$

Ez az összefüggés annyira bonyolult, hogy még közelítésként, esetleg aszimptotikus határértékként, sem tekinthető állandónak. A tényleges anyagállandók értékétől, azok egymáshoz viszonyított arányától függően számos *zérushelye*, *pólushelye* lehetséges:

Zérushely: $Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} - Ce^{\gamma t} - De^{\delta t} + Ht + J = 0$, ahol a nevező nem zérus

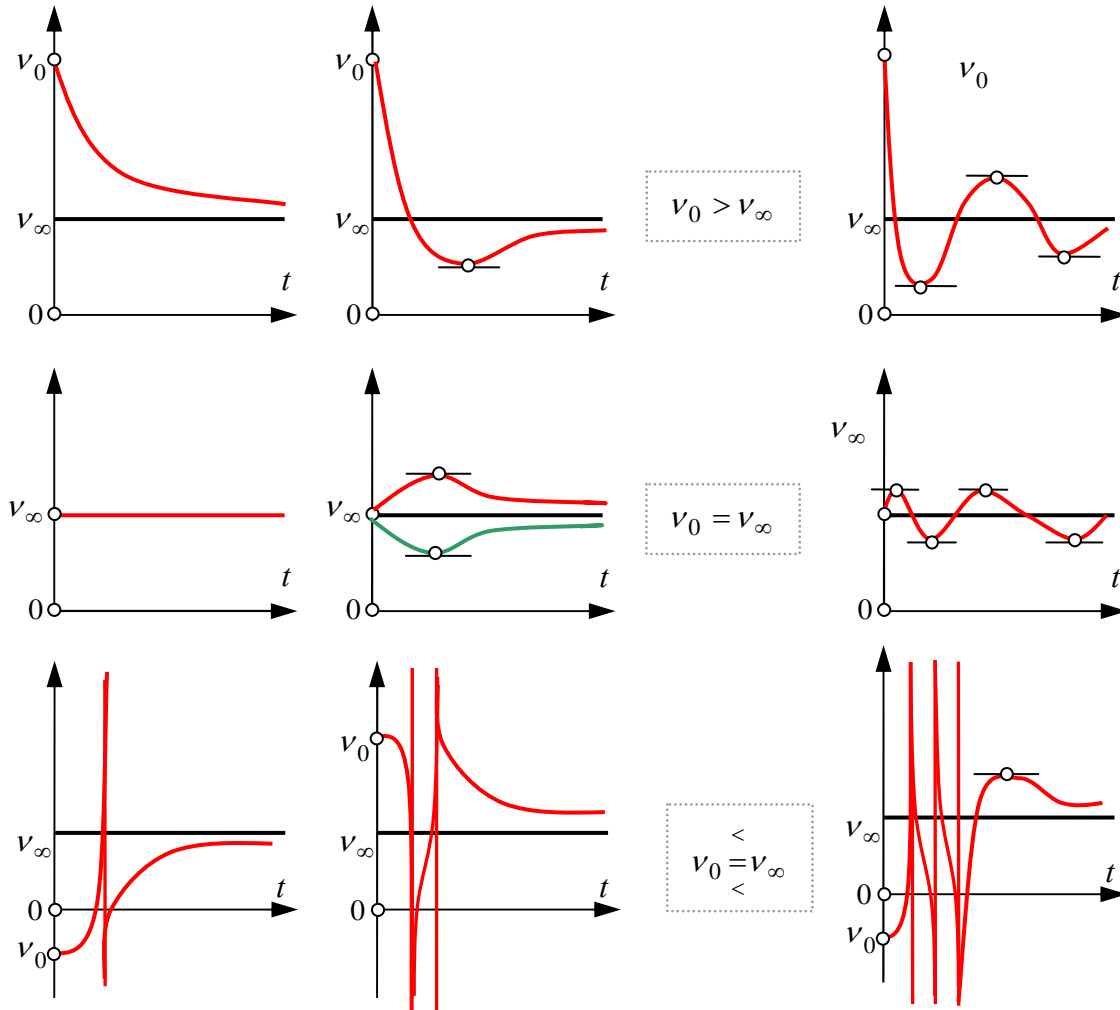
Pólushely: $2Ae^{\alpha t} + 2Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t} + De^{\delta t} + Ft + G = 0$, és a számláló nem zérus

Ennél az - egyenletes terhelésnek ($\dot{\sigma} = a = \text{constans}$) megfelelő – szituációnál

$$\nu(t=0) := \nu_0 = \lim_{t \rightarrow 0} m(t) = \frac{3K_v\tau - 2\eta\tau_o}{6K_v\tau + 2\eta\tau_o}, \quad \nu(t=\infty) := \nu_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu(t) = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}, \quad (9)$$

vagyis a ν értéke a $\nu_0 \Rightarrow \nu \Rightarrow \nu_\infty$ között változik, ahol ν_∞ a Hooke-törvénynek megfelelő érték.

Jelen tanulmányunkban az összes lehetséges esetet nem tüntetjük fel, csupán a szituációra kívánunk rávillantani.



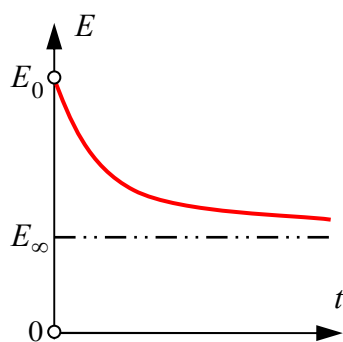
AZ E LINEÁRIS RUGALMASSÁGI MODULUS: Ha az E Young-féle rugalmassági modulust úgy értelmezzük, hogy egytengelyű feszültségállapot esetén a σ tengelyirányú feszültség és az ε tengelyirányú fajlagos nyúlás közötti kapcsolat kifejezője, akkor a $\sigma = E\varepsilon$ összefüggésből

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \text{ vagy } E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \text{ vagy } E = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\varepsilon}}.$$

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = \frac{at}{2Ae^{\alpha t} + 2Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t} + De^{\delta t} + Ft + G}.$$

Ennél az - egyenletes terhelésnek ($\dot{\sigma} = a = \text{constans}$) megfelelő - szituációnál

$$E(t=0) := E_0 = \lim_{t \rightarrow 0} E(t) = \frac{9K_v \eta}{3K_v \tau + \eta \tau_0}, \quad E(t=\infty) := E_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \frac{9KG}{3K + G},$$



vagyis az E értéke a $E_0 \Rightarrow E \Rightarrow E_\infty$ között változik, ahol E_∞ a Hooke-törvénynek megfelelő érték.

Az E_0 megfelel az ún. *dinamikai Young modulusnak* [$E_0 := E_{din}$], E_∞ pedig az ún. *statikai Young modulusnak* [$E_\infty := E_{stat}$]. A bal oldalt látható ábra a legegyszerűbb szituációt mutatja.

Természetesen az elmondottak az itt hivatkozott zseniális tudósaink – Poisson és Young – eredményeinek értékéből semmit sem vonnak le, mert egyikük sem állította, hogy ezek a jellemzők anyagállandók. Jelenlegi vizsgálataink viszont alátámasztják a *Poisson-tényező* és *Young-modulus* aszimptotikus helyességét!

IRODALOM

- ASSZONYI, CS.- VÁN P. - SZARKA, Z. (2007): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007 ISRM Konferencia*. MÉRNÖKGEOLOGIA-KÖZETMECHANIKA KISKÖNYVTÁR **3**, pp. 1-198.
- BOJTÁR, I. (2007): Mechanikai anyagmodellek, *BME jegyzet*, 2007.
- BOJTÁR, I. (2007): Törésmechanika építőmérnököknek, *BME jegyzet*, 2007.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young_%28scientist%29
- <http://www.kfki.hu/chemonet/hun/teazo/schiller/young.html>
- LOVE, A. E. H. (1982): A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, *Cambridge University Press*, 1982.
- TIMOSHENKO, S. P. (1953): History of Strength of Materials, *McGraw-Hill*, 1953.
- TODHUNTER, I. – PEARSON, K. (1886): A History of the Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time, Vol. I-II, *Cambridge University Press*, 1886.
- SZARKA, Z. - ASSZONYI, CS.- FÜLÖP, T. (2008): Anyagok mechanikai tulajdonságai az anyagtörvény alapján. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia*. MÉRNÖKGEOLOGIA-KÖZETMECHANIKA KISKÖNYVTÁR **6**, pp. 121-183.
- VÁN P. - ASSZONYI, CS. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye. 2. Az általános törvényszerűségek levezetése. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2006 ISRM Konferencia*. MÉRNÖKGEOLOGIA-KÖZETMECHANIKA KISKÖNYVTÁR **3**, pp. 25-88.
- VÁN P. - ASSZONYI, CS. (2008): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye és speciális esetei. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia*. MÉRNÖKGEOLOGIA-KÖZETMECHANIKA KISKÖNYVTÁR **6**, pp. 13-51.

HENGERSZIMMETRIKUS DEFORMÁCIÓ LABORATÓRIUMI PRÓBATESTEK MÉRETFÜGGÉSE

Matolcsi Tamás

ELTE ALKALMAZOTT ANALÍZIS TANSZÉK, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A laboratóriumi mérésekhez kialakított próbatetek méretviszonyai jelentősen befolyásolják a kapott eredmények helyességét. Az előadás megadja az ún. egytengelyű nyomókísérlet során a hengeres próbatest pontjainak térbeli elmozdulását arra az esetre, ha a nyomópofák és a minta érintkező pontjai nem mozdulnak el egymáshoz képest.

1. BEVEZETÉS

A kérdést részben már tárgyaltuk a [2] tanulmányunkban, azonban a közelítő megoldást nulladik közelítésként adtuk meg. Jelen esetben az első és második közelítést tárgyaljuk.

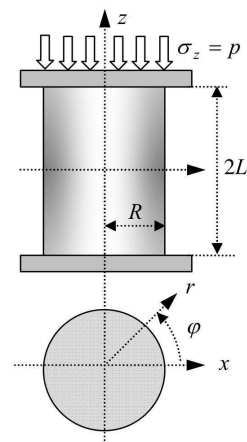
2. ALAP-ÖSSZEFÜGGÉSEK

Henger alakú testet a tengely irányában összenyomunk úgy, hogy az alakváltozás hengersizmetrikus legyen. A henger alját-tetejét a tengelyre merőleges síknak tételezzük fel.

Hengerkoordinátákat alkalmazunk, az azimutszögtől minden keresett függvény mindegyik hengerkoordinátarendszerbeli komponense független lesz. Az origót a henger középpontjában vesszük fel; a henger magassága $2L$, sugara R .

Az elmozdulásvektor hengerkoordinátákban

$$(z, r) \mapsto \begin{pmatrix} u(z, r) \\ v(z, r) \\ 0 \end{pmatrix}$$



alakú. A test szimmetrikus a vízszintes felezősíkjára, ezért a tengely irányú u elmozdulás z -nek páratlan függvénye, a sugár irányú v elmozdulás z -nek páros függvénye:

$$u(-z, r) = -u(z, r), \quad v(-z, r) = v(z, r). \quad (1)$$

Emiatt a továbbiakban elegendő csak a $z \geq 0$ értékeket venni figyelembe, azaz a $0 \leq z \leq L$ tartományra szorítkozni. Megjegyzendő, hogy a v függvény z -ben páros volta maga után vonja, hogy

$$\frac{\partial v}{\partial z}(0, r) = 0. \quad (2)$$

A deformációtenzor

$$\mathbf{D}(z, r) = \begin{pmatrix} \epsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{zr} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zr} & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_\varphi \end{pmatrix},$$

a kis alakváltozásokra érvényes CAUCHY-féle közelítésben

$$\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \epsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \gamma_{zr} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \epsilon_\varphi = \frac{v}{r}.$$

A feszültségtenzor pedig

$$\mathbf{F}(z, r) = \begin{pmatrix} \sigma_z & \tau_{zr} & 0 \\ \tau_{zr} & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{pmatrix}.$$

Abban a közelítésben, amely szerint a feszültségtenzor és a deformációtenzor között a HOOKE-féle lineáris összefüggés áll fenn,¹

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 2G \left(\epsilon_z + \frac{\epsilon_z + \epsilon_r + \epsilon_\varphi}{m-2} \right), & \sigma_r &= 2G \left(\epsilon_r + \frac{\epsilon_z + \epsilon_r + \epsilon_\varphi}{m-2} \right), \\ \sigma_\varphi &= 2G \left(\epsilon_\varphi + \frac{\epsilon_z + \epsilon_r + \epsilon_\varphi}{m-2} \right), & \tau_{zr} &= G\gamma_{zr}. \end{aligned} \quad (3)$$

Egyensúlyban a feszültségtenzor divergenciája nulla:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0.$$

Ebből a tekintett — CAUCHY-féle és HOOKE-féle — közelítésben

$$2\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{m}{m-2}\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + \frac{m}{m-2}\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} = 0. \quad (5)$$

Megjegyezzük, hogy — bár az itt ismertetett számítások nem támaszkodnak a szakirodalomra, — ennek az egyenletrendszernek a megoldásához több rugalmasságtani könyv ill. cikk is felhasználható (ld. pl. [3]).

¹ Az m POISSON-szám nem tekintendő rugalmasságtani alapállandónak, csak a két rugalmas alapegyüttható egy olyan kombinációjának, melyet az *egytengelyű szituáció speciális esetében* célszerű bevezetni, a rövidebb és átláthatóbb képletek céljából. A rugalmasságtani alapegyütthatókról, a YOUNG-modulus és a POISSON-szám néven ismert két kombinációjuk történetéről, és a reológiai aspektusokról ld. [1].

3. HATÁRFELTÉTELEK

3.1. ALAP-FELTÉTELEK

A henger vízszintes felezősíkjának pontjai a tengely irányába, a henger tengelyének pontjai pedig sugárirányba nem mozdulnak el:

$$u(0, r) = 0, \quad v(z, 0) = 0. \quad (6)$$

A test palástja terheletlen:

$$\sigma_r(z, R) = 0, \quad \tau_{zr}(z, R) = 0. \quad (7)$$

A henger alján-tetején kifejtett P nyomás állandó:

$$\sigma_z(L, r) = P. \quad (8)$$

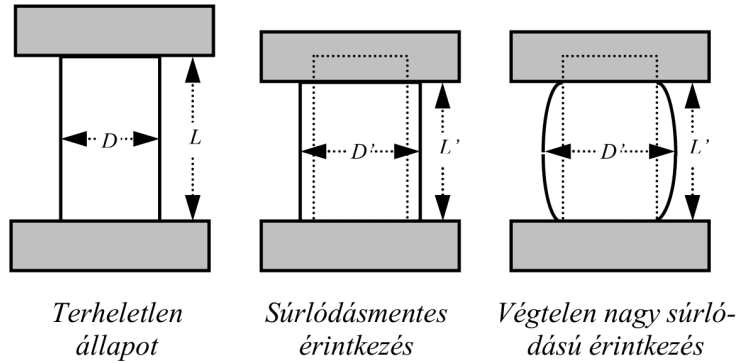
A henger alja-teteje „vízszintes” marad:

$$u(L, r) = -hL, \quad (9)$$

ahol h az összenyomódás aránya (tehát hogy a henger eredeti hosszának hanyadrésére lett összenyomva).

3.2. EGYÉB FELTÉTELEK

A hengert különféleképpen nyomhatjuk össze; az alábbi lehetőségeket tekintjük:



1) az alján-tetején a sugárirányú elmozdulást semmi sem akadályozza (nincs súrlódás a nyomópofák és a test között):

$$\sigma_r(L, r) = 0; \quad (10)$$

2) az alja-teteje sugárirányban nem mozdul el (a nyomópofák és a test érintkező pontjai nem mozdulnak el egymáshoz képest, „végtelen nagy” súrlódás esete):

$$v(L, r) = 0. \quad (11)$$

Megjegyezzük, hogy felvethető az a köztes, harmadik lehetőség is, amikor a nyomópofák és a test között nemnulla véges súrlódási együtthatójú súrlódás lép fel. E harmadik eset vizsgálatával itt nem foglalkozunk.

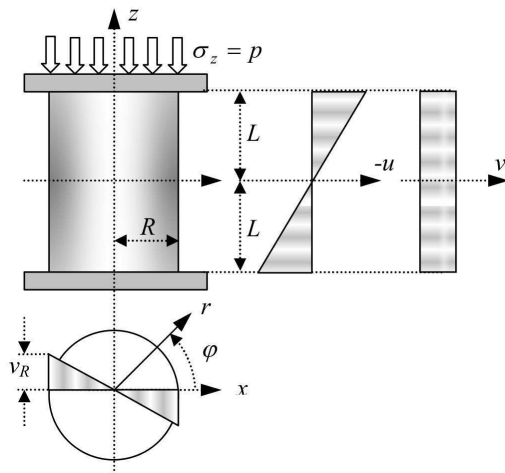
4. A KLASSZIKUS MEGOLDÁS

Tegyük fel, hogy az elmozdulások lineáris függvények, azaz

$$u(z, r) = \alpha_0 z, \quad v(z, r) = \beta_0 r. \quad (12)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \sigma_z(z, r) &= \frac{2G}{m-2}[(m-1)\alpha_0 + 2\beta_0], \\ \sigma_r(z, r) &= \frac{2G}{m-2}[\alpha_0 + m\beta_0], \\ \sigma_\varphi(z, r) &= \frac{2G}{m-2}[\alpha_0 + m\beta_0], \\ \tau_{zr}(z, r) &= 0. \end{aligned}$$



Látható, hogy a (7) második feltétele – sőt annál jóval több – automatikusan teljesül, az első feltétele szerint

$$\alpha_0 = -m\beta_0, \quad (13)$$

amiből szintén jóval több adódik:

$$\sigma_r(z, r) = 0.$$

Az „egyéb” határfeltételekből (11) nem teljesülhet, (10) automatikusan teljesül.

Természetesen az alja-teteje „vízszintes” marad, így

$$\alpha_0 = -h,$$

és az alján-tetején a nyomás állandó, ezért

$$\frac{2G}{m-2}((m-1)\alpha_0 + 2\beta_0) = P,$$

amiből (13) felhasználásával

$$\alpha_0 = \frac{m}{2G(m+1)}P.$$

Ha tehát (9)-et írjuk elő, azaz megadjuk h -t, a relatív összenyomódást, akkor a szükséges P nyomás számítható; ha (8)-at írjuk elő, azaz megadjuk a nyomást, akkor a keletkező h relatív összenyomódás számítható.

5. A KLASSZIKUS ESET VÁLTOZATAI

Most néhány általánosabb feltevést vizsgálunk meg, amelyek végül is visszaadják (12)-t.

5.1. ELSŐ MÓDOSÍTÁS

Tegyük fel, hogy a (12)-ben szereplő konstansok helyett az r függvényei vannak:

$$u(z, r) = a_0(r)z, \quad v(z, r) = b_0(r)r =: V(r).$$

Ekkor (4) azt eredményezi, hogy $a_0'' + \frac{a_0'}{r} = 0$, aminek $a_0(r) = \alpha_0 = \text{const}$ a nem-szinguláris megoldása, tehát

$$u(z, r) = \alpha_0 z. \quad (14)$$

Emiatt (5) pedig azt adja, hogy $V' + \frac{V}{r} = \beta_0 = \text{const}$, aminek $V(r) = \beta_0 r$ a nem-szinguláris megoldása, tehát

$$v(z, r) = \beta_0 r. \quad (15)$$

5.2. MÁSODIK MÓDOSÍTÁS

Vegyük az

$$u(z, r) = a_0(r)z, \quad v(z, r) = C(z)r$$

alakú elmozdulásokat. Ekkor (4) alapján $\left(a_0'' + \frac{a_0'}{r}\right)z + 2mC'(z) = 0$, amiből $a_0'' + \frac{a_0'}{r}$ konstans, aminek nem-szinguláris megoldása szerint a_0 is konstans, továbbá ekkor $C' = 0$, azaz C lineáris; végül (14) és (15) is adódik.

5.3. HARMADIK MÓDOSÍTÁS

Tegyük fel, hogy a tengely irányú elmozdulás nem függ a sugártól, a sugár irányú elmozdulás nem függ a magasságtól:

$$u(z, r) = U(z), \quad v(z, r) = V(r).$$

A (4)-ből $U'' = 0$ adódik, amiből (14) következik. Az (5)-ből pedig $V' + \frac{V}{r} = \text{const}$ adódik, aminek nem-szinguláris megoldása (15).

5.4. NYÍRÓ ERŐK HIÁNYA

Most megmutatjuk, hogy a klasszikus eset egy következménye szintén maga után vonja az elmozdulások linearitását. Tegyük fel, hogy nincs nyíróerő a testben, ekkor

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Ezzel (5)-ből

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 2C(z)$$

adódik valamely $C(z)$ függvénnyel; ennek nem-szinguláris megoldása

$$v(z, r) = C(z)r. \quad (16)$$

Következésképpen $\frac{\partial u}{\partial r} = -C'(z)r$, tehát valamely $A(z)$ függvénnyel $u(z, r) = -\frac{C'(z)r^2}{2} + A(z)$, amiből

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{C''(z)r^2}{2} + A'(z). \quad (17)$$

(16) és (4) együtt azt eredményezik, hogy

$$(m-1)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4C' = 0,$$

azaz

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{4}{m-1}C(z) + H(r).$$

Ezt összevetve (17)-tel azt találjuk, hogy C'' konstans, jelöljük ezt γ -val; továbbá valamely λ konstanssal $H(r) = -\frac{\gamma r^2}{2} + \lambda$ és $A'(z) = -\frac{4}{m-1}C(z) + \lambda$. Tehát

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{4}{m-1}C(z) - \frac{\gamma r^2}{2} + \lambda.$$

Ezekből, felhasználva (3) képletét és a (7) első határfeltételt:

$$\left(m - \frac{4}{m-1}\right)C(z) - \frac{\gamma R^2}{2} + \lambda = 0,$$

azaz C konstans, jelöljük ezt β_0 -lal. Következésképpen $\gamma = 0$, és így $\frac{\partial u}{\partial z} = mb_0 =: \alpha_0$. Végül, a (6) első feltétele, valamint (16) szerint (14) és (15) következik.

6. ÁLTALÁNOS FORMULÁK

6.1. SORFEJTÉSEK

Feltesszük, hogy az elmozdulások analitikus függvények, ezért – a (6) határfeltételek szerint –

$$u(z, r) = z \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) z^{k+1}, \quad v(z, r) = r \sum_{k=0}^{\infty} b_k(r) z^k \quad (18)$$

alakúak, ahol az együtthatófüggvények is analitikusak.

Az (1) tulajdonságok miatt a sorfejtésekben a z páratlan hatványú kitevői nem szerepelhetnek, azaz

$$a_k = b_k = 0, \quad \text{ha } k \text{ páratlan.}$$

Ekkor – megállapodás szerint a formailag negatív hatványú tagok legyenek nullák –

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k z^k, & \frac{\partial v}{\partial z} &= \sum_{k=0}^{\infty} k r b_k z^{k-1}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) k a_k z^{k-1}, & \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) r b_k z^{k-2}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^{k+1}, & \frac{\partial v}{\partial r} &= \sum_{k=0}^{\infty} (b_k + r b'_k) z^k, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} a''_k z^{k+1}, & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2b_k + r b'_k)' z^k, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a'_k z^k, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(2b_k + r b'_k) z^{k-1}. \end{aligned}$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} \sigma_z(z, r) &= \frac{2G}{m-2} \sum_{k=0}^{\infty} [(m-1)(k+1)a_k(r) + 2b_k(r) + r b'_k(r)] z^k, \\ \sigma_r(z, r) &= \frac{2G}{m-2} \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)a_k(r) + m b_k(r) + (m-1) r b'_k(r)] z^k, \\ \sigma_\varphi(z, r) &= \frac{2G}{m-2} \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)a_k(r) + m b_k(r) + r b'_k(r)] z^k, \\ \tau_{zr}(z, r) &= G z \sum_{k=0}^{\infty} [a'_k(r) + (k+2) r b_{k+2}(r)] z^k. \end{aligned}$$

6.2. ALAPFELTÉTELEK

A (7) határfeltétel szerint – a z^k együtthatójának nullának kell lennie minden k -ra –:

$$(k+1)a_k(R) + mb_k(R) + (m-1)Rb'_k(R) = 0, \quad (19)$$

$$a'_k(R) + (k+2)Rb_{k+2}(R) = 0. \quad (20)$$

6.3. REKURZÍÓ

Az elmozdulások parciális deriváltjaira fentebb kapott összefüggéseket a (4) és (5) egyenletekbe behelyettesítve

$$2\frac{m-1}{m-2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)ka_k z^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(a''_k + \frac{a'_k}{r} \right) z^{k+1} + \frac{m}{m-2} \sum_{k=0}^{\infty} k(2b_k + rb'_k) z^{k-1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)rb_k z^{k-2} + 2\frac{m-1}{m-2} \sum_{k=0}^{\infty} (2b'_k + rb'_k)' z^k + \frac{m}{m-2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a'_k z^k = 0.$$

Összegejtve az azonos hatványokat, az együtthatóknak hatványonként nullának kell lennie,

$$2(m-1)(k+3)(k+2)a_{k+2} + (m-2) \left(a''_k + \frac{a'_k}{r} \right) + m(k+2)(2b_{k+2} + rb'_{k+2}) = 0, \quad (21)$$

$$(m-2)(k+2)(k+1)rb_{k+2} + 2(m-1)(2b'_k + rb'_k)' + m(k+1)a'_k = 0, \quad (22)$$

ahol $k = 0, 2, 4, \dots$

Következmények:

1. (a_k, b_k) meghatározza b_{k+2} -t, (a_k, b_{k+2}) meghatározza a_{k+2} -t, azaz végül (a_k, b_k) meghatározza (a_{k+2}, b_{k+2}) -t, tehát

(a_0, b_0) meghatározza az összes együtthatófüggvényt.

2. Ha a_k és b_k konstans, akkor b_{k+2} és a_{k+2} nulla.

6.3.1. VÉGES SOROK

Megmutatjuk, hogy az elmozdulásokra felírt sorok pontosan akkor végesek, ha az együtthatófüggvények polinomok.

Ha $a_k = \{r^n\}$ és $b_k = \{r^m\}$ valamely $n > 0$, $m > 0$ esetén, akkor $b_{k+2} = \{r^{n-2}, r^{m-2}\}$ és $a_{k+2} = \{r^{n-2}, r^{m-2}\}$, ahol a kapcsos zárójel a benne foglaltak

lineáris kombinációját jelöli oly módon, hogy ha $n - 2 < 0$ illetve $m - 2 < 0$, akkor a megfelelő együttható nulla.

Az indexek növekedésével a hatványok csökkennek. Következésképpen, ha az együtthatók polinomok (elég persze, hogy ha a_0 és b_0 polinom, akkor már mind az), akkor a sorok végesek, azaz z -ben csak véges hatványok szerepelnek.

Viszont, ha a sorok végesek, azaz van olyan k , hogy $a_{k+2} = b_{k+2} = 0$, akkor $a_k'' + \frac{a_k'}{r} = 0$, aminek nem-szinguláris megoldása csak az $a_k = \text{const}$. Ekkor viszont $2b_k + rb_k' = \text{const}$, aminek szintén csak $b_k = \text{const}$ a nem-szinguláris megoldása (persze a_k és b_k bármelyike nulla is lehet). Ha pedig a_k és b_k konstans, akkor $a_{k-2}'' + \frac{a_{k-2}'}{r} = \text{const}$, aminek nem-szinguláris megoldása $a_{k-2} = \{r^2\}$. Ekkor viszont $2b_{k-2} + rb_{k-2}' = \{r\}$, tehát $b_{k-2} = \{r^2\}$ (persze a_{k-2} és b_{k-2} bármelyike nulla is lehet).

Az indexek csökkenésével a hatványok növekednek. Következésképpen: ha a sorok végesek, akkor az együtthatófüggvények polinomok.

6.3.2. EGY ÁLTALÁNOS ESET

Tekintsük most az általános esetet a (9) és (11) feltételek mellett. Tehát a (19) és (20) mellett még

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) L^k = -h, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(r) L^k = 0. \quad (23)$$

Ezek a feltételek kizárják, hogy a sorfejtés véges legyen: ugyanis ekkor a_k illetve b_k -k különböző fokú polinomok lennének, amelyek lineáris kombinációja nem lehet nulla.

Tekintsünk a henger felezősíkja körül egy kis szeletet: az elmozdulások kis z -kre – azaz z magasabb hatványait elhanyagolva – körülbelül olyanok, mint amilyeneket az 5.1 pontban tárgyaltunk. Tehát e kis szelet körülbelül a klasszikus mintára viselkedik, ezért még egy fontos feltételezéssel élhetünk: a felezősíkon a sugár irányú erő mindenütt nulla: $\sigma_r(0, r) = 0$, amiből

$$a_0 = -(mb_0 + (m-1)rb_0') = 0. \quad (24)$$

Megjegyezzük, hogy (6) első egyenlősége és (2) miatt $\tau_{zr}(0, r) = 0$ (amit szintén elvárunk a klasszikus eset alapján) automatikusan teljesül.

A fenti egyenlőség az előzőekkel együtt azt jelenti, hogy

b_0 meghatározza az összes többi együtthatófüggvényt.

Feladatunk tehát megtalálni b_0 -t (amely az r függvénye). Ehhez elegendő megtalálni az összes deriváltját egy adott helyen; ez a hely – a határfeltételek következtében – R lesz.

Differenciálva 24-et

$$a'_0 = -((2m-1)b'_0 + (m-1)rb''_0) = 0, \quad (25)$$

$$a''_0 = -((3m-2)b''_0 + (m-1)rb'''_0) = 0 \quad (26)$$

adódik, és így tovább a_0 magasabb deriváltjaira. Ezek az (22) egyenlőség $k = 0$ értékére igaz

$$2(m-2)rb_2 + 2(m-1)(3b'_0 + rb''_0) + ma'_0 = 0$$

alakjából azt adják, hogy

$$2b_2 = (2m-3)\frac{b'_0}{r} + (m-1)b''_0, \quad (27)$$

amiből

$$2b'_2 = (2m-3)\left(\frac{b''_0}{r} - \frac{b'_0}{r^2}\right) + (m-1)b'''_0, \quad (28)$$

$$2b''_2 = (2m-3)\left(\frac{b'''_0}{r} - \frac{2b''_0}{r^2} + \frac{2b'_0}{r^3}\right) + (m-1)rb_0^{(4)}, \quad (29)$$

$$2b'''_2 = (2m-3)\left(\frac{b_0^{(4)}}{r} - \frac{3b'''_0}{r^2} + \frac{6b''_0}{r^3} - \frac{6b'_0}{r^4}\right) + (m-1)rb_0^{(5)}, \quad (30)$$

és így tovább b_2 magasabb deriváltjaira.

A (21) $k = 0$ értékre

$$12(m-1)a_2 + (m-2)\left(a''_0 + \frac{a'_0}{r}\right) + 2m(2b_2 + rb'_2) = 0,$$

amiből az előzőek felhasználásával

$$-6a_2 = \frac{b'_0}{r} + 3b''_0 + rb'''_0, \quad (31)$$

továbbá

$$-6a'_2 = \frac{b''_0}{r} - \frac{b'_0}{r^2} + 4b'''_0 + rb_0^{(4)}, \quad (32)$$

$$-6a''_2 = \frac{b'''_0}{r} - \frac{2b''_0}{r^2} + \frac{2b'_0}{r^3} + 5b_0^{(4)} + rb_0^{(5)}, \quad (33)$$

és így tovább a_2 deriváltjait is megadhatjuk a b_0 deriváltjainak függvényében.

Vezessük be az

$$\alpha_k := a_k(R), \quad \beta_k := b_k(R), \quad (34)$$

$$\alpha'_k := a'_k(R), \quad \beta'_k := b'_k(R), \quad (35)$$

$$\alpha_k^{(n)} := a_k^{(n)}(R), \quad \beta_k^{(n)} := b_k^{(n)}(R) \quad (36)$$

jelöléseket. A mondottak szerint tehát feladatunk a $\beta_0^{(n)}$ megtalálása minden $n = 0, 1, 2, \dots$ esetén.

Természetesen az imént levezetett függvény-egyenlőségek igazak konkrétan az R helyen is:

$$\alpha_0 = -(m\beta_0 + (m-1)R\beta'_0), \quad (37)$$

$$\alpha'_0 = -((2m-1)\beta'_0 + (m-1)R\beta''_0), \quad (38)$$

$$\alpha''_0 = -((3m-2)\beta''_0 + (m-1)R\beta'''_0), \quad (39)$$

$$2\beta_2 = (2m-3)\frac{\beta'_0}{R} + (m-1)\beta''_0, \quad (40)$$

$$2\beta'_2 = (2m-3)\left(\frac{\beta''_0}{R} - \frac{\beta'_0}{R^2}\right) + (m-1)\beta'''_0, \quad (41)$$

$$2\beta''_2 = (2m-3)\left(\frac{\beta'''_0}{R} - \frac{2\beta''_0}{R^2} + \frac{2\beta'_0}{R^3}\right) + (m-1)\beta^{(4)}_0, \quad (42)$$

$$-6\alpha_2 = \frac{\beta'_0}{R} + 3\beta''_0 + R\beta'''_0, \quad (43)$$

$$-6\alpha'_2 = \frac{\beta''_0}{r} - \frac{\beta'_0}{r^2} + 4\beta'''_0 + r\beta^{(4)}_0, \quad (44)$$

$$-6\alpha''_2 = \frac{\beta'''_0}{r} - \frac{2\beta''_0}{r^2} + \frac{2\beta'_0}{r^3} + 5\beta^{(4)}_0 + r\beta^{(5)}_0. \quad (45)$$

6.3.3. ELSŐ LÉPÉSEK

A (20) $k = 0$ esetére

$$\alpha'_0 = -2R\beta_2 = (2m-3)\beta'_0 + (m-1)R\beta''_0,$$

ami a (25) egyenlőséggel azt eredményezi, hogy

$$\beta'_0 = 0. \quad (46)$$

Következésképpen

$$\alpha_0 = -m\beta_0, \quad (47)$$

$$\alpha'_0 = -(m-1)R\beta''_0, \quad (48)$$

$$2\beta_2 = (m-1)\beta''_0. \quad (49)$$

A (19) $k = 2$ esetére $-6\alpha_2 = m2\beta_2 + (m-1)2R\beta'_2$; ezt összevetve a (43) és (46) egyenlőségekkel arra jutunk, hogy

$$R\beta'''_0 = -3\beta''_0, \quad (50)$$

amiből (43) azt adja, hogy

$$\alpha_2 = 0. \quad (51)$$

Ezekkel továbbá

$$\alpha''_0 = -R\beta''_0, \quad 2R\beta'_2 = -m\beta''_0.$$

6.3.4. MÁSODIK LÉPÉSEK

Ezek után a (21) és (22) a $k = 2$ értékre:

$$\begin{aligned} 40(m-1)a_4 + (m-2)\left(a_2'' + \frac{a_2}{r}\right) + 4m(2b_4 + rb_4') &= 0, \\ 12(m-2)rb_4 + 2(m-1)(3b_2' + rb_2'') + 3ma_2' &= 0, \\ 12(m-2)(rb_4' + b_4) + 2(m-1)(4b_2'' + rb_2''') + 3ma_2' &= 0. \end{aligned}$$

Véve ezeket az R helyen,

$$40(m-1)\alpha_4 + (m-2)\left(\alpha_2'' + \frac{\alpha_2}{R}\right) + 4m(2\beta_4 + R\beta_4') = 0, \quad (52)$$

$$12(m-2)R\beta_4 + 2(m-1)(3\beta_2' + R\beta_2'') + 3m\alpha_2' = 0, \quad (53)$$

$$12(m-2)(R\beta_4' + \beta_4) + 2(m-1)(4\beta_2'' + R\beta_2''') + 3m\alpha_2' = 0. \quad (54)$$

Továbbá a (19) és (20) a $k = 2$ értékre

$$5\alpha_4 + m\beta_4 + (m-1)R\beta_4' = 0, \quad (55)$$

$$\alpha_2' + 4R\beta_4 = 0. \quad (56)$$

Az előző eredményekkel (53) és (56) arra vezet, hogy

$$R^2\beta_4 = \frac{m-1}{12m}\beta_0'', \quad R^2\beta_0^{(4)} = \frac{13m-2}{m}\beta_0''$$

és így

$$R\alpha_2' = -\frac{m-1}{3m}\beta_0''. \quad (57)$$

Ezek ismeretében (52), (54) és (55) együtt azt adják, hogy

$$R^3\beta_0^{(5)} = -\frac{4(17m-4)}{m}\beta_0'', \quad R^2\alpha_2'' = \frac{4m-3}{3m}\beta_0'', \quad R^2\alpha_4 = -\frac{m-1}{30m}\beta_0'',$$

$$R^3\beta_4' = -\frac{m-2}{12m}\beta_0'', \quad R^3\beta_2''' = \frac{12m^2 + 4m + 10}{m}\beta_0''.$$

6.3.5. TOVÁBBI LÉPÉSEK

Ne feledjük, a feladat megoldásához a $\beta_0, \beta_0', \beta_0'', \dots$ mennyiségeket kell megtalálnunk, mert ezek meghatározzák az összes szükséges többbit.

Jól látszik az eddigeiből, hogy tovább lépve a $k = 4, 6, \dots$ értékekre, az

$$\alpha_0 = -m\beta_0, \quad \alpha_0' = -(m-1)R\beta_0'', \quad \beta_0' = 0$$

összefüggéseken túl minden szükséges mennyiség kifejezhető β_0'' többszörösekként: minden

$$k = 0, 2, 4, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad k + n - 2 \geq 0$$

esetén létezik olyan $\lambda_k^{(n)}$ és $\mu_k^{(n)}$ szám, hogy

$$R^{k+n-2}\alpha_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)}\beta_0'', \quad R^{k+n-2}\beta_k^{(n)} = \mu_k^{(n)}\beta_0''.$$

Tehát már csak β_0 -t és β_0'' -t kell ismernünk. Ezeket a (23) határfeltételből nyerhetjük:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k L^k = -h, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k L^k = 0$$

az előzőekkel az egyszerű

$$-m\beta_0 + \beta_0'' \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k L^k = -h, \quad \beta_0 + \beta_0'' \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k L^k = 0$$

lineáris egyenletrendszerre vezet.

6.4. KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSOK

Elvileg meg van oldva a feladat, de gyakorlatilag a végtelen sok λ_k és μ_k mennyiséget kellene rekurzióval megállapítani. Közelítő megoldást úgy kapunk, hogy a végtelen sorokat véggessel közelítjük.

6.4.1. ELSŐ KÖZELÍTÉS

Első közelítésben az első lépésekkel kiszámított mennyiségeket tekintjük, azaz úgy vesszük, hogy

$$u(z, r) = z(a_0(r) + a_2(r)z^2), \quad v(z, r) = r(b_0(r) + b_2(r)z^2),$$

ahol az a_0 , a_2 függvényeket elsőfokú polinomokkal helyettesítjük

$$a_0(r) = \alpha_0 + \alpha_0'(r - R),$$

$$a_2(r) = \alpha_2 + \alpha_2'(r - R)$$

alakban, a b_0 , b_2 függvényeket pedig másodfokú polinomokkal:

$$b_0(r) = \beta_0 + \beta_0'(r - R) + \frac{\beta_0''}{2}(r - R)^2,$$

$$b_2(r) = \beta_2 + \beta_2'(r - R) + \frac{\beta_2''}{2}(r - R)^2.$$

Az első lépésekben a rekurzióval eljutottunk oda, hogy a fenti együtthatók α_2' és β_2'' kivételével ismertek, mint a β és β_0'' számszorosai. Az ismeretleneket úgy határozzuk meg, hogy a határfeltétel véges sorral teljesüljön:

$$a_0 + a_2 L^2 = -h, \quad b_0 + b_2 L^2 = 0. \quad (58)$$

Megjegyzendő, hogy ennek teljesüléséhez β'_2 -t is ismeretlennek (még ki nem számítottak) kell tekintenünk. Az együtthatókra ekkor

$$\alpha_0 + \alpha_2 L^2 = -h, \quad \beta_0 + \beta_2 L^2 = 0$$

áll fenn. (47), (51) és (49) figyelembevételével

$$-m\beta_0 = -h, \quad \beta_0 + \frac{m-1}{2} L^2 \beta''_0,$$

tehát

$$\beta_0 = \frac{h}{m}, \quad \beta''_0 = -\frac{2h}{m(m-1)L^2},$$

így

$$\alpha_0 = -h, \quad \alpha'_0 = \frac{2hR}{mL^2}, \quad \beta_2 = -\frac{hR}{mL^2}.$$

Továbbá az ismeretlenekre

$$\alpha'_0 + \alpha'_2 L^2 = 0, \quad \beta'_0 + \beta'_2 L^2 = 0, \quad \beta''_0 + \beta''_2 L^2 = 0$$

következik, vagyis – emlékeztetünk, hogy $\beta'_0 = 0$, –

$$\alpha'_2 L^2 = -\alpha'_0, \quad \beta'_2 = 0, \quad \beta''_2 L^2 = -\beta''_0$$

adódik. Mindezekkel első közelítésben a

$$\rho := \frac{R}{L}$$

jelöléssel

$$u(z, r) = -hz \left[1 - \frac{2\rho^2}{m} \left(\frac{r}{R} - 1 \right) \left(1 - \frac{z^2}{L^2} \right) \right],$$

$$v(z, r) = r \frac{h}{m} \left[1 - \frac{\rho^2}{m-1} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^2 \right] \left(1 - \frac{z^2}{L^2} \right).$$

6.4.2. MÁSODIK KÖZELÍTÉS

Második közelítésben a második lépésekkel kiszámított mennyiségeket tekintjük, azaz úgy vesszük, hogy

$$u(z, r) = z(a_0(r) + a_2(r)z^2 + a_4(r)z^4), \quad v(z, r) = r(b_0(r) + b_2(r)z^2 + b_4(r)z^4),$$

ahol az a_0 stb. függvényeket másodfokú polinomokkal helyettesítjük

$$\begin{aligned}a_0(r) &= \alpha_0 + \alpha'_0(r - R) + \frac{\alpha''_0}{2}(r - R)^2, \\a_2(r) &= \alpha_2 + \alpha'_2(r - R) + \frac{\alpha''_2}{2}(r - R)^2, \\a_4(r) &= \alpha_4 + \alpha'_4(r - R) + \frac{\alpha''_4}{2}(r - R)^2\end{aligned}$$

alakban, a b_0 stb. függvényeket pedig haramadfokú polinomokkal:

$$\begin{aligned}b_0(r) &= \beta_0 + \beta'_0(r - R) + \frac{\beta''_0}{2}(r - R)^2 + \frac{\beta'''_0}{6}(r - R)^3, \\b_2(r) &= \beta_2 + \beta'_2(r - R) + \frac{\beta''_2}{2}(r - R)^2 + \frac{\beta'''_2}{6}(r - R)^3, \\b_4(r) &= \beta_4 + \beta'_4(r - R) + \frac{\beta''_4}{2}(r - R)^2 + \frac{\beta'''_4}{6}(r - R)^3\end{aligned}$$

Az eddigi számításainkban a rekurzióval eljutottunk oda, hogy a fenti együtthatók α'_4 és α''_4 és β'_4 , β''_4 kivételével ismertek, mint a β és β''_0 számszorosai. Az ismeretleneket úgy határozzuk meg, hogy a határfeltétel véges sorral teljesüljön:

$$a_0 + a_2L^2 + a_4L^4 = -h, \quad b_0 + b_2L^2 + b_4L^4 = 0.$$

Megjegyzendő, hogy ennek teljesüléséhez β'_4 -t is ismeretlennek (még ki nem számítottak) kell tekintenünk. Az együtthatókra ekkor

$$\alpha_0 + \alpha_2L^2 + \alpha_4L^4 = -h, \quad \beta_0 + \beta_2L^2 + \beta_4L^4 = 0,$$

vagyis a már kiszámított értékekkel

$$-m\beta_0 - \frac{m-1}{30mR^2}L^4\beta''_0 = -h, \quad \beta_0 + \left(\frac{m-1}{2}L^2 + \frac{m-1}{12mR^2}L^4\right)\beta''_0 = 0,$$

amiből a

$$p := \frac{1}{1 - \frac{6}{m(15+90m\rho^2)}}, \quad q := \frac{1}{1 + \frac{5m-2}{30m^2\rho^2}}$$

jelöléssel

$$\beta_0 = p\frac{h}{m}, \quad \beta''_0 = -q\frac{2h}{m(m-1)L^2}.$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -ph, & \alpha'_0 &= q\frac{2hR}{mL^2}, & \alpha''_0 &= q\frac{2h}{m(m-1)L^2}, \\ \alpha'_2 &= q\frac{2h}{3m^2RL^2}, & \alpha''_2 &= -q\frac{2h(4m-3)}{3m^2(m-1)R^2L^2}, & \alpha_4 &= q\frac{2h}{30m^2R^2L^2}, \\ \beta'''_0 &= q\frac{6h}{m(m-1)RL^2}, & \beta_2 &= -q\frac{h}{mL^2}, & \beta'_2 &= q\frac{h}{(m-1)RL^2},\end{aligned}$$

$$\beta_2'' = -q \frac{h(3m^2 + 2)}{m^2 R^2 L^2}, \quad \beta_2''' = -q \frac{4h(6m^2 + 2m + 5)}{m^2(m-1)R^3 L^2}, \quad \beta_4 = -q \frac{2h}{12m^2 R^2 L^2}.$$

Továbbá az ismeretlenekre a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \alpha_4' L^4 &= -(\alpha_0' + \alpha_2' L^2), & \alpha_4'' L^4 &= -(\alpha_0'' + \alpha_2'' L^2), \\ \beta_4' L^4 &= -(\beta_0' + \beta_2' L^2), & \beta_4'' L^4 &= -(\beta_0'' + \beta_2'' L^2), & \beta_4''' L^4 &= -(\beta_0''' + \beta_2''' L^2). \end{aligned}$$

Végül a közelítő megoldás:

$$\begin{aligned} u(z, r) = & -hz \left[1 + q \left(\frac{p-1}{q} - \frac{2\rho^2}{m} \left(\frac{r}{R} - 1 \right) - \frac{\rho^2}{m(m-1)} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^2 \right) \left(1 - \frac{z^4}{L^4} \right) - \right. \\ & \left. - q \left(\frac{1}{2m^2} \left(\frac{r}{R} - 1 \right) - \frac{4m-3}{3m^2(m-1)} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^2 \right) \frac{z^2}{L^2} \left(1 - \frac{z^2}{L^2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(z, r) = & r \frac{h}{m} \left[q \left(\frac{p}{q} + \frac{\rho^2}{2m} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^2 + \frac{\rho^3}{m(m-1)} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^3 \right) \left(1 - \frac{z^4}{L^4} \right) + \right. \\ & + q \left(-\rho^2 + m\rho^3 \left(\frac{r}{R} - 1 \right) - \frac{(3m^2+2)\rho^4}{2m} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^2 - \right. \\ & \left. \left. - \frac{2(6m^2+2m+5)\rho^5}{3m(m-1)} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^3 \right) \frac{z^2}{L^2} \left(1 - \frac{z^2}{L^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

IRODALOM

- [1] BOJTÁR, I. – VÁSÁRHELYI, B. – ASSZONYI, Cs. (2008): A Young-féle rugalmassági modulus és a Poisson-tényező, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)
- [2] MATOLCSI, T. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye. IV. Laboratóriumi próbatestek méretfüggése. Kőzetmechanika – Mérnökgeológia 2006. ISRM Konferencia, Budapest, 2006. okt. 9. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **3**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest, 2006. pp. 119–130.
- [3] TIMOSHENKO, S. P. – GOODIER, J. N. (1970): Theory of elasticity, *McGraw-Hill*, New York–etc., 3rd edition.

A PORTEVIN – LE CHATELIER HATÁS DINAMIKAI INTERPRETÁCIÓJA

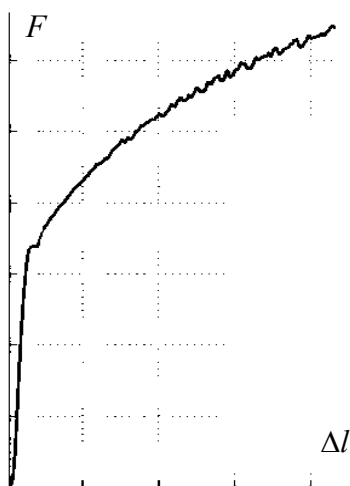
Béda Péter

MTA-BME GÉPEK ÉS JÁRMŰVEK DINAMIKÁJA KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A Portevin - Le Chatelier hatás legfontosabb jellemzői alapján, a tárgyalt egytengelyű esetben, azonosítható a dinamikus bifurkáció jelenséggel. Fontos megjegyezni, hogy jelen vizsgálatban megtartottuk a kontinuum hipotézist, és egyáltalán nem volt szükség semmilyen mikromechanikai modell alkalmazására.

BEVEZETÉS

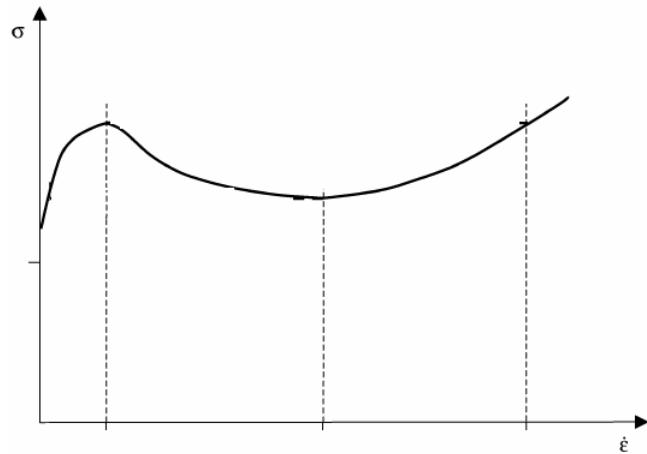
1920-as években publikált dolgozataikban [PORTEVIN & LE CHATELIER, 1923] a szerzők leírták, hogy bizonyos alumíniumötvözetek szakítóvizsgálatánál egyes esetekben öngerjesztett rezgés lépett fel, egyenletes húzás mellett a szakítódiagramként az 1. ábrához hasonló nem sima függvény adódott.



Azt is megfigyelték, hogy az említett oszcillációs jelenség akkor lépett fel, amikor a $v = \dot{\epsilon}$ alakváltozási sebesség növekedése a feszültség csökkenését eredményezte (az A és B pontok között a 2. ábrán).

1. ábra: Tipikus szakítógörbe PLC hatás esetén

A jelenség magyarázatával, illetve kísérleti vizsgálatával a szakirodalom kiterjedten foglalkozik [KUBIN & ESTRIN, 1985], [RIZZI & HÄHNER, 2004]. Egykristály esetén a mikrostruktúrákra alapozott magyarázatot ad a diszlokációk mozgására épülő "dynamic strain ageing" elmélet [McCORMICK, 1988], [FRESENGEAS ET AL., 2005].



2. ábra. A $\sigma = \sigma(\dot{\epsilon})$ görbe a PLC hatás esetén

A PORTEVIN-LE CHATELIER hatást (PLC) dinamikus anyagi instabilitásként fogjuk értelmezni. Az anyagi instabilitás definíciójában az anyag valamely S^0 állapotának *Ljapunov* értelemben vett stabilitását fogjuk tekinteni. Azt mondjuk tehát, hogy S^0 állapotban az anyag stabil, ha annak tetszőlegesen kis környezetében marad elegendően kicsiny perturbáció mellett. Nyilvánvaló tehát, hogy a kis perturbációk megengednek a vizsgálat leszűkítését a kis alakváltozás esetére.

AZ ALAPEGYENLETEK

Miként a legtöbb kontinuum mechanikai munkában, az első lépés az alapegyenletek felírása. Ezeket a kis alakváltozások elméletének megfelelően írjuk fel:

$$\dot{\epsilon}_{lm} = v_{lm} \quad (1)$$

kinematikai egyenlet, a

$$\rho \dot{v}_j = \sigma_{jk,k} \quad (2)$$

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$$

Cauchy-féle mozgásegyenletek, valamint a

$$\sigma_{jk,k} = K_{jklm}^1 \epsilon_{lm} + K_{jklm}^2 \dot{\epsilon}_{lm} \quad (3)$$

konstitutív egyenlet. Az (1), (2), (3) egyenletekben a szokásos jelöléseket alkalmaztuk:

- | | |
|---|---|
| ϵ_{ij} - alakváltozási tenzor, | v_{ij} - alakváltozási sebesség, |
| σ_{ij} - feszültségtenzor, | K_{jklm}^1, K_{jklm}^2 - az anyagtól függő állandó, |
| v_i - sebességmező, | $i, j, k, l, m, \dots$ - indexek, értékük 1,2,3. |

A konstitutív egyenlet állandói a

$$K_{jklm}^1 = \frac{1}{2}(K_{jklm} + K_{jkml}) \quad \text{és} \quad K_{jklm}^2 = \frac{1}{2}(L_{jklm} + L_{jkml}). \quad (4)$$

alakban is felírhatók. Így a (4) képletekben szereplő K_{jklm} , L_{jklm} konstansok felhasználásával a sebességmezőn két differenciáloperátor definiálható, ezek a

$$\begin{aligned} \hat{K}_{jk} v_k &:= K_{jklm} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l} v_k, \\ \hat{L}_{jk} v_k &:= L_{jklm} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l} \dot{v}_k. \end{aligned} \quad (5)$$

Legyen a vizsgált S^0 állapot a

$$\sigma_k^0, \quad \varepsilon_k^0, \quad v_k^0 \quad (6)$$

értékekkel adott. Tetszőleges kis perturbációk alkalmazásával

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sigma_k^0 + \Delta \sigma_k, \\ \varepsilon_k &= \varepsilon_k^0 + \Delta \varepsilon_k, \\ v_k &= v_k^0 + \Delta v_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Az (1), (2), (3) és (5) képletekből a

$$\rho \ddot{v}_j = \hat{K}_{jk} v_k + \hat{L}_{jk} \dot{v}_k \quad (8)$$

operátoregyenlet következik. Ha a (7)-nek megfelelően beírjuk a perturbációkat a

$$\rho(\ddot{v}_j^0 + \Delta \ddot{v}_j) = \hat{K}_{jk}(v_k^0 + \Delta v_k) + \hat{L}_{jk}(\dot{v}_k^0 + \Delta \dot{v}_k)$$

adódik. Mivel (6) kielégíti az (1), (2), (3) egyenleteket,

$$\rho \ddot{v}_j^0 = \hat{K}_{jk} v_k^0 + \hat{L}_{jk} \dot{v}_k^0$$

triviálisan fennáll. Így a perturbációkra a

$$\rho \Delta \ddot{v}_j = \hat{K}_{jk} \Delta v_k + \hat{L}_{jk} \Delta \dot{v}_k. \quad (9)$$

egyenlet adódik. Vezessük be az

$$[y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6] = [\Delta v_1 \quad \Delta v_2 \quad \Delta v_3 \quad \Delta \dot{v}_1 \quad \Delta \dot{v}_2 \quad \Delta \dot{v}_3]$$

új változókból alkotott vektort. Ezzel e (9) egyenlet alakja

$$\begin{aligned} \dot{y}_k &= y_{k+3}, \\ \dot{y}_{j+3} &= \frac{1}{\rho} (\hat{K}_{jk} y_k + \hat{L}_{jk} y_{k+3}) \end{aligned} \quad (10)$$

egy dinamikai rendszert definiál a homogén peremfeltételnek megfelelő perturbáló sebességmezőn. A (10) karakterisztikus egyenlete

$$\begin{aligned}\lambda y_k &= y_{k+3}, \\ \lambda y_{j+3} &= \frac{1}{\rho} \left(\hat{K}_{jk} y_k + \hat{L}_{jk} y_{k+3} \right)\end{aligned}\quad (11)$$

Mivel (11) egy parciális differenciálegyenlet-rendszer, amelyet homogén peremfeltételek mellett kell megoldani, az analitikus vizsgálat általános esetben nem folytatható le. Két alapvető egyszerűsítési lehetőség adódik. Megtehető speciális perturbációk alkalmazásával (11) algebrai egyenletekké alakítása, illetve korlátozható a vizsgálat egytengelyű esetre.

A STABILITÁSI FELTÉTELEK

Az egytengelyű esetben egy l_0 méretű kontinuumot vizsgálunk. Ekkor a (11) egyenlet így alakul

$$\begin{aligned}\lambda y_1 &= y_4, \\ \lambda y_4 &= \frac{K_{1111}}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} + \frac{L_{1111}}{\rho} \frac{\partial^2 y_4}{\partial x_1^2},\end{aligned}$$

illetve y_4 -et az elsőből a második egyenletbe helyettesítve

$$\lambda^2 y_1 - \frac{K_{1111}}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} - \lambda \frac{L_{1111}}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = 0. \quad (12)$$

A (10) differenciálegyenlethez tartozó homogén peremfeltétel

$$y_1(0) = y_4(0) = y_1(l^0) = y_4(l^0) = 0.$$

Ennek megfelelően a sajátfüggvények az

$$y_1(x_1) = C \exp(i\alpha x) \quad (13)$$

alakban kereshetők. Ha (13)-at a (12)-be behelyettesítjük, akkor a

$$\lambda^2 + \lambda \frac{L_{1111}}{\rho} \alpha^2 + \frac{K_{1111}}{\rho} \alpha^2 = 0 \quad (14)$$

egyenletet kapjuk a λ sajátértékekre. A peremfeltételekből

$$\begin{aligned}0 &= A(t) \cos(0) + B(t) \sin(0), \\ 0 &= A(t) \cos(\alpha l^0) + B(t) \sin(\alpha l^0)\end{aligned}$$

adódik, ebből pedig az

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l^0} \quad (15)$$

következik. *Ljapunov* indirekt módszere szerint az S^0 állapot stabilitása a (14) egyenlet λ megoldásainak valós részétől függ. A (14) és a (15) képletekből λ kifejezhető

$$\lambda_{k1,2} = \frac{-b\alpha_k^2 \pm \sqrt{b^2\alpha_k^4 - 4a\alpha_k^2}}{2}, \quad (16)$$

ahol az

$$a = \frac{K_{1111}}{\rho} \quad \text{és} \quad b = \frac{L_{1111}}{\rho} \quad (17)$$

egyszerűsítő jelöléseket alkalmaztuk.

A dinamikai rendszerek elméletéből adódó stabilitási esetek a következők: az S^0 állapot

- *stabil*, ha minden sajátértékre $Re\lambda_j < 0$,
- *instabil*, ha létezik legalább egy olyan λ_u sajátérték, amelyre $Re\lambda_u > 0$,
- *a stabilitás határán van*, ha létezik legalább egy λ_c kritikus sajátérték, amelyre $Re\lambda_c = 0$,
továbbá minden más ($j \neq c$) sajátértékre $Re\lambda_j < 0$.

A STABILITÁSVESZTÉS TÍPUSAI

A stabilitási határ, és ennek megfelelően a stabilitásvesztés, két típusa különíthető el. Az egyik esetben (SB – statikus bifurkáció) a stabilitási határon mind a valós, mind a képzetes rész nulla:

$$(SB): \quad Re\lambda_c = 0, \quad Im\lambda_c = 0.$$

A másik lehetőség (DB – dinamikus bifurkáció) az, amikor a kritikus sajátérték képzetes része nem nulla:

$$(DB): \quad Re\lambda_c = 0, \quad Im\lambda_c \neq 0.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a tárgyalt egytengelyű esetben melyek az egyes stabilitásvesztési típusok feltételei. A (16) egyenletből az SB szükséges feltétele

$$-b\alpha_k^2 \pm \sqrt{b^2\alpha_k^4 - 4a\alpha_k^2} = 0 \quad (18)$$

vagyis (17) felhasználásával

$$K_{1111} = 0,$$

ami a klasszikus lokalizációs feltétellel azonos.

A DB szükséges feltétele pedig az

$$L_{1111} = 0.$$

Vizsgáljuk most meg a (18) baloldalán álló gyök alatti

$$b^2 \alpha_k^4 - 4a \alpha_k^2 \quad (19)$$

kifejezést. Hogyha a (15) és a (17) képleteket behelyettesítjük (19)-be a $k=1$ első kritikus sajátértékhez tartozó esetben

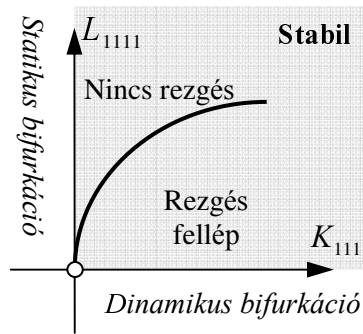
$$L_{1111}^2 \left(\frac{\pi}{l^0} \right)^4 - 4K_{1111} \left(\frac{\pi}{l^0} \right)^2 = 0,$$

azaz

$$K_{1111} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{l^0} \right)^2 L_{1111}^2 \quad (20)$$

adódik.

A (20) görbét, a stabil tartományt, illetve a stabilitási határokat a 3. ábrán rajzoltuk meg.



3. ábra. Stabilitási térkép

Itt jól látszik, hogy öngerjesztett rezgés mellett fellépő instabil viselkedés az $L_{1111} < 0$ esetben várható. Amikor $L_{1111} > 0$, lehetséges rezgés, de ez csillapodó tranziens jellegű. A két eset közötti átmenet pedig éppen az $L_{1111} = 0$ dinamikus bifurkációs feltétel.

PÉLDA EGY KONKRÉT ANYAGTÖRVÉNY ESETÉRE

A szakirodalomban publikált kísérletekkel összhangban a PORTEVIN - LE CHATELIER hatás rugalmas állapotban nem jelentkezhet. Ennek illusztrálására [VÁN, 2008] gondolatmenetének felhasználásával megvizsgáljuk az egytengelyű

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon} + \theta\ddot{\varepsilon} \quad (21)$$

tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-féle anyagtörvény esetét. Ekkor a (14) karakterisztikus egyenlet alakja

$$\rho\tau\lambda^3 + (\rho + k^2\Theta)\lambda^2 + 2k^2\eta\lambda + 2Gk^2 = 0.$$

A dinamikus bifurkáció felléptének szükséges feltétele, hogy λ képzetes szám legyen,

$$\lambda = i\omega. \quad (22)$$

Helyettesítsük be (22)-t a karakterisztikus egyenletbe, és vegyük az adódó komplex kifejezés valós- és képzetes részét

$$-\omega^2(\rho + \theta k^2) + 2Gk^2 = 0, \quad (23)$$

illetve

$$-\tau\rho\omega^3 + 2\eta k^2\omega = 0. \quad (24)$$

A (23)-ból

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{2G - \theta\omega^2}, \quad (25)$$

illetve (24)-ből $\omega \neq 0$ mellett

$$\omega^2 = \frac{2\eta}{\tau\rho} k^2. \quad (26)$$

Beírva (26)-ot (25)-be k^2 kifejezhető

$$k^2 = \frac{\rho}{\theta} \left(\frac{G\tau}{\eta} - 1 \right). \quad (27)$$

[VÁN 2008] alapján fontos viszont, hogy mindegyik állandó a termodinamika második főtétele miatt nem negatív, és

$$\frac{\eta}{G} \geq \tau,$$

tehát a (27) képletből adódó egyik eset $k^2 < 0$. Ez nyilvánvalóan nem lehetséges, mivel a k hullámszám valós szám. A másik lehetőség a

$$\frac{\eta}{G} = \tau$$

eset, ami szintén problematikus, mert ekkor $k = 0$, azaz nincs oszcilláció. Azt kaptuk tehát, hogy dinamikus bifurkáció nem jön létre a tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-féle anyagtörvény mellett, azaz nem lehetséges a rugalmas tartományban nem-csillapodó rezgés.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást az OTKA a K60422 projekt keretében támogatta.

IRODALOM

- [A. PORTEVIN, F. LE CHATELIER, C. R. (1923)]: *Acad. Sci. Paris* 176 (1923) 507.
- [L.P. KUBIN, Y. ESTRIN, (1985)]: The PORTEVIN–LE CHATELIER effect in deformation with constant stress rate. *Acta Metall.* 33, 397–407.
- [RIZZI, E., HÄHNER, P., (2004)]: On the PORTEVIN–LE CHATELIER effect: theoretical modeling and numerical results. *Int. J. Plasticity* 20, 121–165.
- [MCCORMICK, P.G., (1988)]: Theory of flow localisation due to dynamic strain ageing. *Acta Metall.* 36, 3061–3067.
- [C. FRESSENGEAS, A.J. BEAUDOIN, M. LEBYODKIN, L.P. KUBIN, Y. ESTRIN, (2005)]: Dynamic strain aging: A coupled dislocation—Solute dynamic model, *Materials Science and Engineering A* 400–401, 226–230
- [P. VÁN, (2008)]: A PORTEVIN-LE CHATELIER hatás reológiai eredete, *kézirat*, 2008.

SZERZŐK

ASSZONYI CSABA DR. (1941) okl. gépészmérnök (NME, 1964), műszaki doktor (NME, 1965), a műszaki tud. kandidátusa (1972), a műszaki tud. doktora (1976). Kutatási területe: a kontinuumok mechanikája és az irreverzibilis termodinamika. Eredményeit 192 publikációban és 10 könyvben tette közre. Főbb mérnöki eredményei és szabadalmi az alagút- és épület-rekonstrukciók, víz- és környezetvédelem területén találhatók. A bányászatban volt kutatómérnök, osztályvezető, gazdasági igazgató, tröszt főosztályvezető, kutatóintézeti igazgató. 1988-as megalakulásától kezdve a MONTAVID Csoport vezetője, s a MONTAVID INVESTMENT TECHNOLOGIES TRUST elnök-vezérigazgatója 2006-ig. Jelenleg kutatással, műszaki fejlesztéssel foglalkozik a MONTAVID RESEARCH GROUP keretei között.

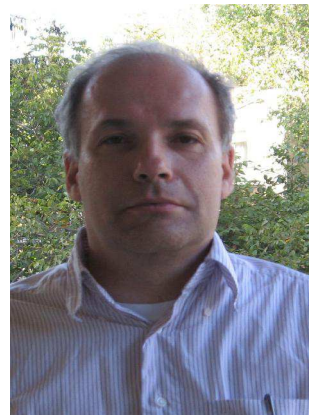


1112 Budapest, Táncos u.6. T: (06) 309 215 684, (1) 215 8463, asszonyi@gmail.com

BÉDA PÉTER DR. (1963) okl. gépészmérnök (BME, 1986), a műszaki tud. kandidátusa (1990), az MTA doktora (2005). Kutatási területe: véges és végtelen szabadságfokú rendszerek dinamikája, anyagi instabilitás. Eredményeit mintegy 80 publikációban tette közre.

1986-89 között TMB ösztöndíjas, 1989-től az MTA által támogatott kutatócsoportok keretein belül a BME Villamosmérnöki majd a Közlekedésmérnöki Kar Mechanika Tanszékén tudományos munkatárs, tudományos főmunkatárs, végül tudományos tanácsadó. 2007-től egyetemi docens a BME Járműváz- és Könnyűszerkezetek Tanszékén.

1530 Budapest, Pf. 18. Telefon: (06) 20 463 9815, bedap@kme.bme.hu



BOJTÁR IMRE DR. (1950). okl. építőmérnök (BME, 1973), mérnök matematikus (BME, 1980), műszaki doktor (BME, 1979), műszaki tud. kandidátusa (1985), dr. habil (1995). Kutatási területe: biomechanika (érrendszerek szilárdságtani vizsgálata), anyagmodellek vizsgálata (elsősorban szemcsés struktúrájú anyagokhoz). Eredményeit 40 cikk, 78 előadás illetve 9 könyv (illetve könyvrészlet) tartalmazza. Jelenleg a BME Építőmérnöki Karának Tartószerkezetek Mechanikája Tanszékén dolgozik



1111 Budapest, Műgyetem r. 3. K. mf. 35.
Telefon: (1) 463 1160, ibojtart@mail.bme.hu

FÜLÖP TAMÁS DR. (1967). okl. fizikus (ELTE, 1991), egyetemi doktor (ELTE, 1996), PhD. (University of Tokyo, Japán, 2006). 1999-ig az ELTE Elméleti Fizika Tanszéken oktat fizika és matematika tárgyakat, az 1997-99 és 2002-06 években Japánban kutat, 2006-2007 között pedig Csehországban. Jelenleg a MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORTBAN dolgozik. Fő kutatási témája 2007-ig a határfeltételek fizikai szerepe és alkalmazásai a kvantummechanikában, jelenleg a kontinuumfizika (reológia, a téridő szerepe, elemkapcsolások, stb.). Eddig 20 szakcikke jelent meg.



2120 Dunakeszi, Iskola u. 5. Tel: (1)-215-8463,
tamas.fulop@gmail.com.

MATOLCSI TAMÁS DR. (1941) 1969-ben végzett az ELTE fizikus szakán, a matematikai tud. kandidátusa (1976). 1969-től 1973-ig az MTA Számítástechnikai Központjának tudományos segédmunkatársa, 1973-tól 1975-ig a szegedi József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetében tudományos munkatárs. 1975-től az ELTE TTK Alkalmazott Analízis tanszékének oktatója, 1981-től docensként. 2005-ben nyugdíjba vonult. Tudományos munkásságát a matematikai fizika területén fejti ki. Számos hazai és nemzetközi konferencián szerepelt előadóként.

Hét egyetemi jegyzetet írt, huszonhárom tudományos cikket és négy angol nyelvű könyvet publikált.

2071 Páty, Tölgyfa utca 14. Tel: (23) 343 043, (20) 5444 086,
matolcsi@ludens.elte.hu



VÁN PÉTER DR. (1964). okl. fizikus (ELTE, 1990), egyetemi doktor (BME, 1994), PhD (BME, 2002). 2005-ig a BME Kémiai Fizika Tanszékének munkatársa. Jelenleg a KFKI, RMKI Elméleti Főosztályán és a BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszékén dolgozik. Az ELFT Termodinamikai Szakcsoportjának elnöke. Több ízben dolgozott külföldön, Olaszországban, Németországban és Észtországban. Kutatási területe



a nemegyensúlyi termodinamika mint általános fizikai keretelmélet, ennek alapjai, illetve különféle alkalmazásai. Az alapkérdések közül a nemegyensúlyi termodinamika variációs elveivel és gyengén nemlokális kiterjesztésével, az anyagi objektivitás elvével és a relativisztikus disszipatív folyadékok elméleteivel foglalkozott. Érdeklődési területéhez tartozik ezen kívül a károsodás mechanika és a reológia. Eddig mintegy 70 szakcikke és egy könyve jelent meg.

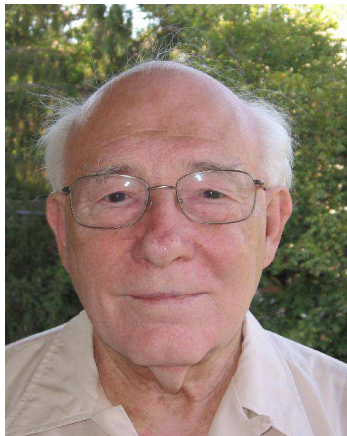
1012 Budapest, Lovas utca 18. Tel: Tel: 2145243, (70) 332 2831,
vp@rmki.kfki.hu

VÁSÁRHELYI BALÁZS DR. (1969). okl. építőmérnök (BME, 1993), PhD (BME, 2000), jelenleg a BME Építőanyagok és Mérnökgeológia Tanszék poszt-doktorandusa. Doktori tanulmányokat folytatott Franciaországban (INPL-Nancy), Svájcban (ETH-Zürich), valamint az Egyesült Államokban (MIT, Boston). Fő kutatási területe a kőzettestek osztályozásának lehetőségei és a gyakorlatban való alkalmazhatósága alagutak, illetve sziklarézsűk állékonyságának számításához, a szükséges biztosítási mód optimalizálásához. Kőzetmechanikai kutatásokat folytat még a repedések keletkezésének, terjedésének, valamint összekapcsolódásának témakörben és a víz jelenlétének szilárdságot befolyásoló hatásáról. 1126 Budapest, Hollósy S. u.3. T: (20) 460 1182, vasarhelyib@freemail.hu



LEKTOROK

BÉDA GYULA DR. (1931) okl. gépészmérnök (NME, 1953), a műszaki tudomány kandidátusa



(1961), a műszaki tudomány doktora (1983). 1953-56 aspiráns, 1956-61 egyetemi adjunktus, 1961-67 egyetemi docens az NME Mechanikai Tanszékén, majd a BME Gépészmérnöki Kar Műszaki Mechanikai Tanszékén, ahol 1968-2001 egyetemi tanár, 1970-1995 között tanszékvezető volt. 2001-től professzor emeritus. Fő kutatási témái: kontinuummechanika, az anyagtörvény elméleti és kísérleti vizsgálata, a szilárd testben keltett hullámok, képlékenységtan, biomechanika a mechanika általános egyenletei.

Kutatási eredményeiből 5 szakkönyv, 10 jegyzet, és több mint 80 publikáció jelent meg.

1530 Budapest, Pf. 18. Telefon: (1) 463 1369,

beda@mm.bme.hu

VERHÁS JÓZSEF DR.(1939) okl. vegyészmérnök (BME, 1962), műszaki doktor (BME, 1966), fizikai tudomány kandidátusa (1974), Massinai Tudományos Akadémia tagja (1990), kémiai tudomány doktora (1991), PhD és Dr. habil (BME, 1994), Európai Tudományos Akadémia tagja (2002). 1959 demonstrátor, 1962 gyakornok, 1963 tanársegéd, 1967 adjunktus a BME Fizikai Kémia Tanszékén. 1975 docens, 1994-2007 egyetemi tanár a BME Fizikai Intézetében. 1988-1990 meghívott előadó a Kertészeti Egyetemen, 1987-1992 tanszékvezető helyettes, 1988-1992 Fizikai Intézet igazgatóhelyettese. 1989-2000 7 alkalommal vendégprofesszor Olaszországban. Fő kutatási témái: fenomenologikus termodinamika, irreverzibilis termodinamika. Megteremtette a termodinamikai reológiát és a sejtosztódás modelljét. Kutatási eredményeiből 4 szakkönyv, 4 jegyzet és 85 publikáció jelent meg, amelyeket több mint 300 helyen idéztek.

