

Szerkesztette:
Asszonyi Csaba

Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról



Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9



KONTINUUMMECHANIKAI
FELADATOK MEGOLDÁSÁRÓL

*International Society for Rock Mechanics
Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 Konferencia, Budapest*

KONTINUUMMECHANIKAI FELADATOK MEGOLDÁSÁRÓL

SZERKESZTETTE

ASSZONYI CSABA

Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

ÍRTA

ASSZONYI CSABA, BÉDA GYULA, FÜLÖP TAMÁS, SZARKA ZOLTÁN



MŰEGYETEMI KIADÓ
2009

SZERKESZTETTE

DR. ASSZONYI CSABA

Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

ÍRTA

DR. ASSZONYI CSABA, DR. BÉDA GYULA, DR. FÜLÖP TAMÁS, DR. SZARKA ZOLTÁN

LEKTORÁLTA

PROF. DR. OBÁDOVICS J. GYULA

a matematikai tudomány kandidátusa

PROF. DR. HORVÁTH RÓBERT

a műszaki tudomány kandidátusa

A KUTATÁST ÉS A KÖTET MEGJELENÉSÉT

A MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT,
AZ ETTE EGYESÜLET A TUDOMÁNY ÉS TECHNOLÓGIA EGYSÉGÉÉRT ÉS
AZ ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS KUTATÁSI ALAP

TÁMOGATÁSA TETTE LEHETŐVÉ

ISBN 978-963-420-991-1

ISSN 1789-0454

Megjelent a *Műegyetemi Kiadó* gondozásában

www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 12,90 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Hungarian Printing House

Felelős vezető:

Kovács-Sebestyén Szabolcs

©2009 BUDAPEST, ASSZONYI CSABA, BÉDA GYULA, FÜLÖP TAMÁS, SZARKA ZOLTÁN

KONTINUUMMECHANIKAI FELADATOK MEGOLDÁSÁRÓL

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó	9
--------------	---

ELSŐ RÉSZ: ALAPELVEK

RUGALMAS ÉS REOLÓGIAI LINEÁRIS FELADATOK

(Fülöp Tamás)

1. A DEFORMÁCIÓTENZOR FIZIKAI SZEREPE, KINEMATIKAI ÉSZREVÉTELEK	11
2. KONSTITÚCIÓS ÖSSZEFÜGGÉSEINK	17
3. DINAMIKA: EGZISZTENCIA, UNICITÁS	19
4. DINAMIKA: AZ ISMERETLENEK KIKÜSZÖBÖLÉSÉNEK MÓDSZEREI	25
5. MATEMATIKA: FÜGGVÉNYRENDSZER SZERINTI KIFEJTÉS	28
6. MATEMATIKA: EGYENLETMEGOLDÁS KIFEJTÉSSEL	33
7. DINAMIKA: A REDUKÁLT EGYENLETEK SZÉTVÁLASZTHATÓSÁGA	35
8. DINAMIKA: AZ EGYENLETEK MEGOLDÁSA	36
9. EGYENSÚLYI KÖZELÍTÉS: EGZISZTENCIA, UNICITÁS	41
10. EGYENSÚLYI KÖZELÍTÉS: REDUKÁLÁSI MÓDSZEREK	48
11. EGYENSÚLYI KÖZELÍTÉS: MEGOLDÁSI MÓDSZEREK	50
KÖSZÖNETMONDÁS	51
IRODALOM	51

A KONTINUUMMECHANIKA ALAPEGYENLETEINEK MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

(Asszonyi Csaba – Béda Gyula – Szarka Zoltán)

1. FEJEZET

A KONTINUUMMECHANIKA ALAPEGYENLETEI	53
A mozgásegyenlet	55
A geometriai egyenlet	55
Az anyagegyenlet	55
A kompatibilitási egyenlet	56
A tömegmérleg (tömeg kontinuitási egyenlet)	56
Kezdeti és peremfeltételek	56

2. FEJEZET

AZ ANYAGTÖRVÉNYRŐL (KONSTITÚCIÓS ÖSSZEFÜGGÉSRŐL)	57
2.1. Anyagtörvény a rugalmas tartományban	57

2.1.1. A jelenlegi helyzet elméletileg	57
A tehetetlenségi standard test időtényezői	59
A homogén-lineáris anyagegyenletek egységes alakja	60
Anyagtörvény feszültségre, illetve deformációra feloldott alakja	62
Az anyagtörvény egytengelyű feszültségállapotban	63
Anyagegyenlet a tengelyirányú deformációval	64
Következmények	65
Anyagegyenlet a keresztirányú deformációval	66
2.1.2. Az anyagtörvény alkalmazása gyakorlatilag	67
Végkövetkeztetés	70
2.2. Anyagtörvény a rugalmas-képlékeny alakváltozások tartományában	71
Anyagtörvény deviatorikus felbontásban	71
Deformációs munka	72
Torzulási deformációs munka	72
Térfogati deformációs munka	72
Az anyagtörvény feszültségre, illetve deformációra feloldott alakja	73
3. FEJEZET	
AZ ALAPEGYENLETEK VISSZAVEZETÉSE EGYETLEN VÁLTOZÓRA	74
3.1. Az alapegyenletek az elmozdulásvektorral kifejezve	75
3.2. Az alapegyenletek a sebességvektorral kifejezve	77
3.3. Az alapegyenletek a deformációtenzorral kifejezve	77
3.4. Az alapegyenletek a feszültségtenzorral kifejezve	78
4. FEJEZET	
SPECIÁLIS ESETEK – A STATIKAI EGYENSÚLY A STANDARD MODELL ESETÉBEN	79
4.1. Általános (háromdimenziós) esetek	80
4.1.1. Az elmozdulásvektorra vonatkozó összefüggések	80
A $\Theta = \nabla \mathbf{u}$ egyenlet	80
Az elmozdulások biharmonikus differenciálegyenlete	81
4.1.2. A deformációtenzorra vonatkozó összefüggések	81
Az alakváltozási függvények	81
4.1.3. A feszültségtenzorra vonatkozó összefüggések	82
A feszültségfüggvények	82
MAXWELL-féle feszültségfüggvény	83
MORERA-féle feszültségfüggvény	83
4.2. Síkbeli (kétdimenziós) esetek	83
Síkbeli alakváltozás	83
Sík feszültségi állapot	84
$F = F(x,y,t)$ az ún. AIRY-féle feszültségfüggvény	85
$A = A(x,y,t)$ az alakváltozási függvény	85
4.3. Egyváltozós esetek	85
A feladat megfogalmazása	87
A megoldás	87
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	89
IRODALOM	89

FÜGGELÉK

IZOTROP KONTINUUMOK RUGALMAS-KÉPLÉKENY, REOLÓGIAI ANYAGTÖRVÉNYE A NEMEGYENSÚLYI TERMODINAMIKÁBAN	91
Feltevések	91
Az entrópia mérlege	91
Izotrop kontinuumok anyagtörvénye egyensúlyi esetben	93
Izotrop kontinuumok anyagtörvénye egyensúlyi állapotban deviátoros formában	94
Izotrop kontinuumok anyagtörvénye nemegyensúlyi esetben	96

MÁSODIK RÉSZ: ALKALMAZÁSOK

HIDROSZTATIKUS KÖRNYEZETBEN NYITOTT HENGERSZIMMETRIKUS ALAGÚT KÖRÜLI REOLÓGIAI IDŐFÜGGÉS (Fülöp Tamás – Béda Gyula)

1. BEVEZETÉS	99
2. A MODELL	100
3. ANALÍZIS	104
4. PÉLDÁK	110
5. KÖVETKEZTETÉSEK	112
KÖSZÖNETMONDÁS	113
IRODALOM	113

KÖRSZELVÉNYŰ FÖLDALATTI FOLYOSÓK KÖRÜL KIALAKULÓ MECHANIKAI MEZŐK (Asszonyi Csaba – Szarka Zoltán – Béda Gyula)

1. FEJEZET	
ÁLTALÁNOS MEGFONTOLÁSOK	115
A vájvéghatás	118
2. FEJEZET	
A PRIMER ÁLLAPOT	119
A primer állapot felfogásai	120
Primer alakváltozási mező	123
3. FEJEZET	
AZ ÜREGNYITÁS IDŐTARTAMÁNAK HATÁSA	124
4. FEJEZET	
A MECHANIKAI ALAPEGYENLETEK	128
Jelölések	128
Kontinuummechanikai alapegyenletek	129
Egyensúlyi egyenletek	129
Geometriai egyenletek	129
Anyagegyenletek	130
A primer állapot	131

5. FEJEZET	133
KERÜLETI ÉS KEZDETI FELTÉTELEK	133
5.1. A kerületi feltételek	135
5.2. A kezdeti feltételek	
6. FEJEZET	137
HIDROSZTATIKUS PRIMER MEZŐBEN KIHAJTOTT VÁGAT	138
A HOOKE-féle anyagmodell esetén	138
A POYNTING-THOMSON-féle standard modell esetén	139
Kezdeti feltétel	139
Megjegyzések	140
A POYNTING-THOMSON-féle tehetetlenségi standard modell	142
Kezdeti feltételek	
7. FEJEZET	143
ÁLTALÁNOS ORIENTÁCIÓJÚ PRIMER MEZŐBEN KIHAJTOTT VÁGAT HOOKE-MODELL ESETÉN	143
A megoldás elvi vázlata	144
7.1. Síkalakváltozási mezőben kihajtott vágat	149
7.2. Torzulási mezőben kihajtott vágat	151
7.3. A teljes megoldás	152
7.4. A vágat alakjának megváltozása	155
1. Példa	156
2. Példa	157
3. Példa	
8. FEJEZET	157
AZ ÁLTALÁNOS REOLÓGIAI MEGOLDÁS A STANDARD MODELL ESETÉN	158
Elsőrendű differenciálegyenletre vezető eset	160
Másodrendű differenciálegyenletre vezető eset	162
Harmadrendű differenciálegyenletre vezető eset	164
A reológiai megoldás összefoglalása	
9. FEJEZET	166
REOLÓGIAI MEGOLDÁS TEHETETLENSÉGI STANDARD MODELL ESETÉN	169
A reológiai megoldás összefoglalása	170
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	170
IRODALOM	
SZERZŐK	172

ELŐSZÓ

A MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT ezt a kötetet az elmúlt négy év kutatási eredményei egy részének tematikus összefoglalására és alkalmazás bemutatására szánta. Ennek megfelelően a kötet két részre tagolódik.

Az *első rész* két tanulmánya összefoglalja az izotrop közegek kontinuummechanikai alapegyenleteit, rámutatva a deformációtensor szerepére, az anyagtörvény (konstitúciós összefüggés) termodinamikai értelmezésére, az egzisztencia- és unicitástételekre. Bemutatja a mechanikai változók kiküszöbölésének módszereit, – közkeletű elnevezéssel – megoldási módjait (valójában az alapegyenletek egyetlen változóra feloldott alakját). Majd vizsgálja az egyensúly esetét, s ebben az esetben alkalmazható módszereket.

A *második rész* két tanulmánya bemutatja az alkalmazás csupán egyetlen példáját: földalatti folyosók mechanikai tervezésének menetén keresztül. Ezeknek a cikkeknek az igazi előnye nem abban rejlik, hogy az adott probléma megoldásait megadják – az első részben tárgyalt elvi összefüggések segítségével, – hanem a számos más esetben is alkalmazható ötleteket sugallnak (anyagtörvény egyszerűsítése, technológiai idő kezelése, kezdeti feltételek megtalálása, magasabbrendű egyenletek egyszerű megoldása, stb.).

Eddigi szokásunknak megfelelően, a meg nem oldott esetekre is ráirányítjuk a figyelmet, hogy minden mechanikával foglalkozó szakember lássa, hogy milyen utat tettünk meg, s ha szerencséje és kitartása van, akkor szolgáltatssa a még hiányzó megoldásokat.

Néhány korábbi eredményünket, már közzétett munkánk néhány gondolatát is beépítettük cikkeinkbe, például

a 7TH EUROMECH Solid Mechanics Conference (ESMC), Lisszabon, 2009. szeptember 7-11 közötti konferencián ASSZONYI CSABA, VÁN PÉTER és FÜLÖP TAMÁS által *Objectivity and Continuum Mechanics* címmel, FÜLÖP TAMÁS és VÁN PÉTER által *Finite Strain Tensors: Which one to use?* címmel tartott előadások egy-egy gondolatát,

valamint

az „ISRM Symposium EUROCK 2009” Dubrovnik, 2009. október 29-31 közötti konferencián FÜLÖP TAMÁS és BÉDA GYULA által *Analytical Investigation of the Rheological Dynamics of Tunnels* címmel tartott teljes előadást is, bővített formában, hogy magyar nyelven is hozzáférhető legyen.

Budapest, 2009. november 16.

A Szerzők

RUGALMASSÁGTANI ÉS REOLÓGIAI LINEÁRIS FELADATOK

Fülöp Tamás

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A lineáris közelítésben tekintett rugalmasságtani (azaz HOOKE-modellt alkalmazó) és reológiai (KELVIN-modellt, POYNTING-THOMSON-modellt, ... tartalmazó) kontinuummechanikai feladatok tárgyalásához segédkezik jelen írás. Többek között áttekintést ad a vonatkozó kinematikai szempontokról (eközben bebizonyítja például, hogy az $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ és $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u})$ formulák általánosan összeférhetetlenek egymással), foglalkozik a dinamikai egyenletrendszer megoldásával, és vizsgálja az egyensúlyi/kvázistatikus közelítést a megoldás egyértelműsége szempontjából.

1. A DEFORMÁCIÓTENZOR FIZIKAI SZEREPE, KINEMATIKAI ÉSZREVÉTELEK

A deformációtenzor a kontinuum kinematikájához kapcsolódó mennyiség, de szerepe nem az, hogy a közeg mozgásának matematikai leírását („könyvelését”) nyújtsa. Erre a célra nem is alkalmas, ugyanis érzéketlen egy tetszőleges helyfüggetlen haladó mozgásra és egy tetszőleges merevtestszerű forgásra. Másra használjuk: arra, hogy a közeget jellemző konstitúciós reláció („anyagtörvény”), például egy rugalmasságtani¹ lineáris konstitúciós összefüggés geometriai jellegű változója legyen. Tehát például azt kívánjuk megadni általa, hogy az anyag egy helyi geometriai állapotához — alakjához, deformáltságához (tágultságához és torzultságához) — milyen belső erők (feszültségek) tartoznak. Ha engedjük, hogy egy szilárd közeg teljesen relaxáljon, szabadon kirúgja magát, akkor felvesz egy bizonyos alakot, amiben feszültségmentes, minimális rugalmas energiájú, egyensúlyi állapotban van. Ez az ő ideális, természetes alak-elrendeződése, kitüntetett geometriai állapota. Ha ehhez a geometriai elrendezéshez képest más alak-eloszlásra kényszerítjük, ahhoz erők-re-feszültségek van szükség, illetve ilyenek ébrednek benne.

¹ E szó alatt ez az írás azt fogja érteni: reológia mentes, azaz ahol feszültség és deformálódás között direkt, időkézés nélküli kapcsolat van. Lineáris keretben a HOOKE-modellt jelenti.

A tankönyvek általában egy t_0 referencia-időpillanattól mért elmozdulásokból, azaz az akkortól bekövekezett változásokból származtatják a deformációtenzort. Ez azonban csak akkor lehet megfelelő a kívánt fizikai szerep szempontjából, ha t_0 -kor a közeg a maga természetes, ideálisan tágulatlan-torzítatlan, teljesen relaxált, „békénhagyott”, hatásmentes állapotában van. Ez a valóságban néha teljesül, néha nem. Például egy fém vagy kőzet mintadarab laboratóriumi egytengelyű terheléskísérletének kezdetén teljesülhet (bár precíz emberek már itt is rámutathatnak a légköri nyomás nemnulla voltára és az ebből fakadó kicsi összenyomódottságra). Egy alagútnyitás vagy más hasonló mélyépítési feladat során azonban nem: a talaj vagy kőzet az önsúly és a különböző földtani okok/viszonyok miatt sosincs, és talán sosem volt fesztelen, szabad, relaxált állapotban, talán egyetlen közegpontban sem.

A deformáció tehát általánosan nem egy *változást*, hanem egy *állapotot* kell jellemezni. Egy geometriai állapotot, hogy a közeg helyileg mennyire van kitágulva-összenyomódva és eltorzulva egy bizonyos ideális, legbékénhagyottabb állapotbeli alakhoz képest. Egy kezdeti pillanatban egy valamilyen — nulla vagy nemnulla deformáltsági — állapotból indulunk, a közeg mozgása pedig ennek az állapotnak a változását szabja meg. A deformáció (szubsztanciális) időderiváltja a közegmozgás helyfüggéséből, azaz a sebességmező térderiváltjából határozódik meg, és ehhez a differenciálegyenlethez kezdeti feltételként tehetjük hozzá a kezdeti — nulla vagy nemnulla — értékét.

Megjegyzendő, hogy a rugalmasságtanban az időbeliség sokszor nem látszik explicit módon, de valójában olyankor is jelen van. Már maguk az „elmozdulás”, „alakváltozás” kifejezések is jelzik, hogy változásokról, folyamatokról beszélünk, változások pedig szükségszerűen mindig időben zajlanak. Amikor például egy egyik végén vízszintesen befogott rúd súlyerő hatására történő lehajlását tekintjük, világos, hogy egy folyamatról van szó, ahol a rudat vízszintes nyugvó állapotból indítjuk, mely aztán (például lengések és rezgések után, csillapítások hatására aszimptotikusan) egy statikus egyensúlyi végállapotba fejlődik. A végállapot történetesen független attól, hogy a folyamat milyen konkrét időbeli lefolyással zajlott le. Ennek ellenére kétségtelen, hogy egy valamilyen időbeli folyamat során jutott át a rúd a kezdeti állapotból a végállapotba, és a végállapothoz rendelt elmozdulás a kezdeti állapottól mért elmozdulást, odébbmozdulást, helyváltoztatást jelent. Ugyanígy egy időbeli folyamat zajlik minden olyan esetben, amikor „ráadjuk” egy testre a terhelést, vagy egy talajból kivett fúrómag „felszabadul” a terhelés alól.

Az elmozdulás is az időbeliség révén értelmezendő: mint az időbeli változások egyfajta felösszegzettje. Önmagában $\mathbf{u}(t)$ elmozdulás, mint valami állapotjelző nem létezik. Csak egy kiválasztott t_0 kezdeti időponthoz viszonyított $\mathbf{u}_{t_0}(t)$ létezik, mely az

$$(1) \quad \mathbf{u}_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt'$$

odébbmozdulásként értelmezhető (itt rögzítettünk egy közegpontot, ennek sebességét in-

tegráljuk időben).

Konkrét rugalmasságtani és reológiai problémák megoldásához praktikus választani egy kezdeti t_0 időpontot, a közegpontokat az akkor elfoglalt $\mathbf{r}$ helyvektorukkal jellemezni, és ezt az $\mathbf{r}$ anyagi helyváltozót használni a lokális (inerciális) $\mathbf{r}^{\text{iner}}$ helyváltozó helyett. Általában nem tételezhetjük fel, hogy eme t_0 -kor a közeg nulla deformáltságú állapotban van — egy másik szempontból hasznos ez a lépés. Így ugyanis az anyag által kitöltött tartomány határának bármely pontját minden időpillanatban ugyanazzal a helyváltozó-értékkel jellemezzük, mely a peremfeltételek kirovásakor előnyös technikai tulajdonság. Pl. egy egytengelyű nyomás hatására fokozatosan kihasasodó henger palástját egy állandó hengerpalástként, a kezdeti hengerpalásttal írhatjuk le. Ha lokális/inerciális változóiban dolgoznánk, azokban nézve a közeg határa időfüggően vándorolna, a vándorlást folyamatosan követni kéne, mely gyakorlati-számolástechnikai szempontból felettébb kényelmetlen volna. Ne feledjük azonban, hogy az anyagi helyváltozó használatától peremfeltételeink még nem feltétlenül válnak az idő változótól függetlenné: ha a terhelés változik közegünk határán, akkor a peremfeltételek elkerülhetetlenül időfüggőek (tehát mindig, amikor ráadunk vagy lecsökkentünk terhelést). Reológiai viselkedésű anyagoknál ez az időfüggés reológiai folyamatokat indukál, melyeket nyomon kell követnünk.

Kezdeti t_0 időpont és $\mathbf{r}$ anyagi helyváltozó használata esetén, ha az $\mathbf{r}$ -el jellemzett közegpont a t pillanatban a $\chi_{t_0}(t, \mathbf{r})$ inerciális helyen jár, akkor elmozdulása [ld. (1)] természetesen az

$$(2) \quad \mathbf{u}_{t_0}(t, \mathbf{r}) = \chi_{t_0}(t, \mathbf{r}) - \mathbf{r}$$

módon is számítható. Ez az elmozdulás azonban általában nem a t -kori deformáltsággal mint pillanatnyi fizikai-geometriai *állapottal* kapcsolatos, hanem csupán a t_0 és t között lezajlott kinematikai *változással*.

Térjünk most vissza a deformációra. Ez a mennyiség — a már említett fizikai szerepének megfelelően — az anyag deformáltságát, azaz a pillanatnyi helyi geometriai viszonyoknak az ideálisan ellazult állapothoz tartozó alakviszonyoktól való eltérését hivatott mérni. A közeg mozgása a deformáció változási gyorsaságát szabja meg, maga a deformáció meghatározásához pedig szükséges egy kezdeti érték ismerete is. Ezeknek a jellegzetességeknek a véges (azaz nem feltétlenül végtelenül kicsi, „infinitezimális”) deformációkra (deformáltságokra) vonatkozó következményeivel korábban [FÜLÖP (2008)] foglalkozott. Jelen céljainkra, azaz a lineáris problémákhoz viszont elegendő lesz a kis deformáltságok és elfordulások esetén alkalmazható CAUCHY-deformációtenzor. Ennek definiáló differenciálegyenlete

$$(3) \quad \dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{v} \circ \nabla)^S,$$

ahol a felülpont a szubsztanciális időderiváltat jelöli, mely anyagi helyváltozó használata esetén egyszerűen a parciális időderivált, $\circ$ a diadikus/tenzorszorzat jele, ∇ az $\mathbf{r}$ anyagi

helyváltozóban vett térderivált, mely kontextustól függően hat balra ($\overleftarrow{\nabla}$) illetve jobbra ($\overrightarrow{\nabla}$) [kérdéses esetekben a kontextust zárójelzés fogja egyértelműsíteni], végül S a tenzorok szimmetrikus részét jelöli [az antiszimmetrikus részt pedig A , továbbá T a transzponálás jele; többindexes tenzornál pl. $^{A_{1,3}}$ jelöli az első és harmadik „indexben” vett antiszimmetrizáltat, mely indexesen pl. $\frac{1}{2}(C_{ijk} - C_{kji})$].

A (3) egyenlet közvetlenül felintegrálható: a $\int_{t_0}^t$ időintegrálját képezve az eredmény

$$(4) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \mathbf{r}) = \left(\int_{t_0}^t \mathbf{v}(t', \mathbf{r}) dt' \circ \nabla \right)^S = \left(\mathbf{u}_{t_0}(t, \mathbf{r}) \circ \nabla \right)^S$$

(hiszen a térderiválás és az időintegrálás független, felcserélő műveletek), azaz

$$(5) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \mathbf{r}) + \left(\mathbf{u}_{t_0}(t, \mathbf{r}) \circ \nabla \right)^S.$$

Ez tehát a CAUCHY-deformációtenzor hagyományos,

$$(6) \quad (\mathbf{u}_{t_0} \circ \nabla)^S$$

alakú bevezetésének² azon általánosítása, amely tetszőleges kezdőfeltételekhez alkalmas, és amely valóban a deformáltságot méri (nem annak egy megváltozását). Az (5)-ben szereplő $\boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \mathbf{r})$ kezdeti érték nem teljesen tetszőleges, ugyanis az $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r})$ deformáltságtenzornak teljesítenie kell a tankönyvekből is ismert alakú³

$$(7) \quad \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \mathbf{0}$$

kompatibilitási feltételt.⁴

A (7) feltételhez kötődő következményekhez érdemes felidézni azt a hasonló helyzetet, hogy egy örvénymentes $\mathbf{a}(t, \mathbf{r})$ vektormezőhöz, azaz melyre $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$,⁵ létezik — nem egyértelmű módon — egy $U(t, \mathbf{r})$ skalár függvény (ún. potenciál), amelynek gradienseként előállítható: $\mathbf{a} = \nabla U$. Ez a potenciál a vektormezőből vonalintegrállal számítható ki:

$$(8) \quad U(t, \mathbf{r}) = U_*(t) + \int_{\mathbf{r}_*}^{\mathbf{r}} \mathbf{a}(t, \mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

² A t_0 index nem fölösleges precízkedésből van (6)-ban kiírva, hanem mert lényeges szempontra hívja föl a figyelmet.

³ ahol a bal oldal konvenciónk szerint $\overleftarrow{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \overleftarrow{\nabla}$ -ként értendő, a sorrend a tenzoriális sorrendet tükrözi.

⁴ Ez a feltétel a deformáltságtenzor véges deformáltságokra is érvényes kiterjesztésének [FÜLÖP (2009)] tulajdonságaiból vezethető le a kis deformáltságok határesetében, itt nem részletezendő módon.

⁵ A tértartomány, melynek minden pontjában kirójuk ezt, legyen egyszeresen összefüggő, bizonyos bonyodalmak elkerülése végett.

ahol az $\mathbf{r}_*$ segéd-pontot és az integrálás útját tetszőlegesen választhatjuk, és ezek rögzítése után a potenciál az $U_*(t)$ tetszőleges időfüggő függvény erejéig határozatlan.

A (7) képlet egy szimmetrikus tenzormezőre fogalmaz meg hasonló tulajdonságot. Ezzel a feltétellel matematikailag az ekvivalens, hogy létezik — nem egyértelmű módon — egy $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}(t, \mathbf{r})$ vektor értékű függvény (nevezhetjük CAUCHY-potenciálnak, mert a CAUCHY-féle deformációtenzorhoz tartozik), amelyből $\boldsymbol{\varepsilon}$ az

$$(9) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}} \circ \nabla)^S$$

módon előállítható. Ez a vektorpotenciál-fajta $\boldsymbol{\varepsilon}$ -ből vonalintegrállal számítható ki, az úgynevezett CESÀRO-formulával — melynek levezetését ld. pl. [BÉDA-KOZÁK (1987), 27. o.]-on:

$$(10) \quad \mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{u}_*(t) + \boldsymbol{\Omega}_*(t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*) + \int_{\mathbf{r}_*}^{\mathbf{r}} [\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r}') + 2(\boldsymbol{\varepsilon} \circ \nabla)^{A_{1,3}}(t, \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{r}',$$

ahol az $\mathbf{r}_*$ segéd-pontot és az integrálás útját tetszőlegesen választhatjuk, és ezek rögzítése után a CAUCHY-potenciál a tetszőleges $\mathbf{u}_*(t)$ vektorfüggvény és $\boldsymbol{\Omega}_*(t)$ antiszimmetrikus tenzorfüggvény erejéig, azaz tetszőleges időfüggésű merevtestszerű haladás plusz forgás erejéig határozatlan.

Egy CAUCHY-potenciál tehát a deformáció egy matematikai segédmenyisége (hasonlóan, ahogy egy $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \mathbf{0}$ tulajdonsággal rendelkező feszültséghez ún. feszültségfüggvények rendelhetők hozzá⁶). Fizikai jelentéssel azonban általában nem rendelkezik. Ránézésre (9) olyan, mint a CAUCHY-deformációtenzor hagyományos (6) bevezetése (amely tehát nem kielégítő, mert nem törődik az általában nemnulla $\boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \mathbf{r})$ kezdeti feltétellel, és ehhez kapcsolódóan a deformációtenzor fizikai, deformáltságmérő feladatával). Az $\mathbf{u}_{t_0}$ és $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}$ közti kapcsolat azonban két okból sem triviális: az általában nemnulla $\boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \mathbf{r})$ miatt sem, és az $\mathbf{u}_*(t)$, $\boldsymbol{\Omega}_*(t)$ határozatlanságok miatt sem. Ezért nézzük most meg, egy ismert $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r})$ deformációmezőből hogyan és mennyire határozható meg a $\mathbf{u}_{t_0}(t, \mathbf{r})$ elmozdulás.

Kiindulópontként azt állapíthatjuk meg, (4) és (9) összevetésével, hogy $\mathbf{u}_{t_0}(t, \mathbf{r})$ az

$$(11) \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t_0}(t, \mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \mathbf{r})$$

szimmetrikus tenzormező egy CAUCHY-potenciálja kell legyen. Következésképp előáll a CESÀRO-formula révén

$$(12) \quad \mathbf{u}_{t_0}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{u}_{t_0*}(t) + \boldsymbol{\Omega}_{t_0*}(t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*) + \int_{\mathbf{r}_*}^{\mathbf{r}} [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t_0}(t, \mathbf{r}') + 2(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t_0} \circ \nabla)^{A_{1,3}}(t, \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{r}'$$

⁶ Eme analógia miatt $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}$ -et alakváltozási függvénynek is hívják.

alakban, ahol az $\mathbf{r}_*$ segéd-pontot és az integrálás útját mi választhatjuk meg — így az integrált ki tudjuk számítani —, viszont $\mathbf{u}_{t_0*}(t)$ és $\boldsymbol{\Omega}_{t_0*}(t)$ általunk ismeretlen. A közeg elmozdulása tehát egy merevtest-elmozdulás erejéig határozatlan. Egyértelmű meghatározásához kell még valami többletinformáció a határozatlanságok rögzítésére.⁷ A gyakorlatban egyes peremfeltételek (pl. befogott rúd: a perem egy része rögzítve van), vagy az elrendezés bizonyos eltolási, forgatási és/vagy tükrözési szimmetriái szoktak ilyen egyértelműsítő többletismeretek lenni. Amikor viszont ilyen segítség nem áll rendelkezésre, akkor csak az (1) képlettel számítható ki az elmozdulás. Előrevetítve az alább következő dinamikai aspektusokat, ez azt fogja ránk róni, hogy ilyenkor a dinamikai mozgásegyenletet kell megoldanunk, akkor is, ha egyéb szempontokból annak mechanikai egyensúlyi („kvázistatikuss”) közelítése is elegendő lenne, ugyanis az egyensúlyi egyenletrendszer ilyenkor nem határozza meg egyértelműen a sebességmezőt.

Jegyezzük meg tehát: ha bárhol, bármikor egy

$$(13) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{u} \circ \nabla)^S$$

formulával találkozunk, ajánlatos gyanakodni: ha ebben $\mathbf{u}$ valóban elmozdulásként (azaz $\mathbf{u}_{t_0}$ értelemben) van értve, akkor ez a képlet csak nulla kezdeti deformációjú (deformáltságu) esetekben lehet érvényes. Nemnulla kezdeti deformáció esetén pedig ez az $\mathbf{u}$ csak egy CAUCHY-potenciál lehet, akkor viszont nem elmozdulást ír le, mert az elmozdulás nem $\boldsymbol{\varepsilon}$, hanem $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t_0}$ egy CAUCHY-potenciáljához kapcsolódik, és még attól is eltérhet egy merevtestmozgás erejéig. Ha $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r})$ helyett annak egy CAUCHY-potenciálját $[\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}(t, \mathbf{r})]$ ismerjük, abból úgy kaphatunk elmozdulást $[\mathbf{u}_{t_0}(t, \mathbf{r})]$, hogy képezzük az $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}(t, \mathbf{r}) - \mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}(t_0, \mathbf{r})$ különbséget, mert az épp $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t_0}(t, \mathbf{r})$ egy CAUCHY-potenciálja, hiszen (12) alakú, ugyanis

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}(t, \mathbf{r}) - \mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}(t_0, \mathbf{r}) &= \mathbf{u}_*(t) + \boldsymbol{\Omega}_*(t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*) + \\ &+ \int_{\mathbf{r}_*}^{\mathbf{r}} [\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r}') + 2(\boldsymbol{\varepsilon} \circ \nabla)^{A_{1,3}}(t, \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{r}' - \\ &- \mathbf{u}_*(t_0) - \boldsymbol{\Omega}_*(t_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*) - \\ &- \int_{\mathbf{r}_*}^{\mathbf{r}} [\boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \mathbf{r}') + 2(\boldsymbol{\varepsilon} \circ \nabla)^{A_{1,3}}(t_0, \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{r}' = \\ &= [\mathbf{u}_*(t) - \mathbf{u}_*(t_0)] + [\boldsymbol{\Omega}_*(t) - \boldsymbol{\Omega}_*(t_0)] + \\ &+ \int_{\mathbf{r}_*}^{\mathbf{r}} [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t_0}(t, \mathbf{r}') + 2(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t_0} \circ \nabla)^{A_{1,3}}(t, \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Ez a különbség azonban egy merevtest-elmozdulás erejéig még eltérhet $\mathbf{u}_{t_0}(t, \mathbf{r})$ -től, ezért ezt a határozatlanságot valahogyan még rögzítenünk kell. Ha vannak ehhez felhasználható

⁷ Ezek a határozatlanságok egyébként fizikailag is érthetőek: a deformálódás pontosan a merevtest-szerű mozgástól való eltérés. Ezért a deformáció ismerete pontosan egy merevtestmozgásnyi határozatlanság erejéig kell tudósítson a közeg mozgásáról.

peremfeltételek, szimmetriák vagy egyéb többlet-tudásunk, akkor ezt meg tudjuk tenni, ha nincs, nem.

Szögezzük le azt is, hogy az $\boldsymbol{\epsilon}$ deformáció egy $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}$ CAUCHY-potenciáljára általában

$$(15) \quad \dot{\mathbf{u}}^{\text{CAUCHY}} \neq \mathbf{v}.$$

Sőt, még $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{t_0}$ egy CAUCHY-potenciáljának időderiváltja is általában eltér $\mathbf{v}$ -től: különbségük egy valamilyen merevtestmozgáshoz tartozó sebességmező. Ezért ha egy (13) formula nemnulla kezdeti deformáció mellett van használat, akkor a benne szereplő $\mathbf{u}$ -ra (mely ilyenkor nem elmozdulás, hanem CAUCHY-potenciál,) általában

$$(16) \quad \dot{\mathbf{u}} \neq \mathbf{v}.$$

Ugyanígy, $\ddot{\mathbf{u}}^{\text{CAUCHY}} \neq \dot{\mathbf{v}}$, és nemnulla kezdeti deformáció esetén $\ddot{\mathbf{u}} \neq \dot{\mathbf{v}}$.

Tömör összegzésként, mint általános szilárdtestmechanikai képletek, $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ és $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{u} \circ \nabla)^S$ összeférhetetlenek egymással, és az $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{u} \circ \nabla)^S$ -ben szereplő $\mathbf{u}$ általában nem elmozdulás.

2. KONSTITÚCIÓS ÖSSZEFÜGGÉSEINK

A továbbiakban a következő, homogén és izotrop közeget feltételező, lineáris, rugalmasságtani illetve reológiai konstitúciós összefüggéseket („anyagtörvényt”) fogjuk tekinteni:

$$(17) \quad \mathcal{S}^d \boldsymbol{\sigma}^d = \mathcal{E}^d \boldsymbol{\epsilon}^d,$$

$$(18) \quad \mathcal{S}^s \boldsymbol{\sigma}^s = \mathcal{E}^s \boldsymbol{\epsilon}^s,$$

ahol d és s jelöli a tenzorok deviatorikus ill. gömbi részét ($\mathbf{I}$ az egységtenzor), azaz

$$(19) \quad \boldsymbol{\sigma}^s = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\sigma}^s = \sigma^s \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^s, \quad \boldsymbol{\epsilon}^s = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^s = \epsilon^s \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^d = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^s,$$

továbbá

$$(20) \quad \mathcal{S}^d = 1 + T_1^d \partial_t + T_2^d \partial_t^2 + \cdots + T_{s^d}^d \partial_t^{s^d}, \quad \mathcal{E}^d = U_0^d + U_1^d \partial_t + \cdots + U_{e^d}^d \partial_t^{e^d},$$

$$(21) \quad \mathcal{S}^s = 1 + T_1^s \partial_t + T_2^s \partial_t^2 + \cdots + T_{s^s}^s \partial_t^{s^s}, \quad \mathcal{E}^s = U_0^s + U_1^s \partial_t + \cdots + U_{e^s}^s \partial_t^{e^s},$$

ahol $T_i^d, T_j^s, U_k^d, U_l^s$ skalár állandók. Lefedjük tehát az összes olyan reológiai modellt, amelyben véges rendig fordulnak elő időderiváltak. Például a tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell [ld. [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007)], [VÁN-ASSZONYI (2008)]] esetében a derivált operátorok rendjei $s^d = s^s = 1$, $e^d = e^s = 2$, maguk a konstitúciós összefüggések pedig

$$(22) \quad \boldsymbol{\sigma}^d + T_1^d \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d = U_0^d \boldsymbol{\epsilon}^d + U_1^d \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + U_2^d \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^s + T_1^s \dot{\boldsymbol{\sigma}}^s = U_0^s \boldsymbol{\epsilon}^s + U_1^s \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s + U_2^s \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^s,$$

vagy, hagyományos jelölésben,

$$(23) \quad \sigma^d + \tau \dot{\sigma}^d = 2G\epsilon^d + 2\eta\dot{\epsilon}^d + \theta\ddot{\epsilon}^d, \quad \sigma^s + \tau_0 \dot{\sigma}^s = 3K\epsilon^s + 3K_v\dot{\epsilon}^s + \theta_0\ddot{\epsilon}^s.$$

Érdemes levezetni (17)–(18) két, gyakran hasznosnak bizonyuló következményét. A levezetés során alkalmazott trükk pedig maga is sokszor célszerűnek bizonyul az ilyen reológiai differenciáloperátorokkal való munka során.

Tehát, hattassuk $\mathcal{S}^s$ -t (17)-re:

$$(24) \quad \mathcal{S}^s \mathcal{S}^d \sigma^d = \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \epsilon^d,$$

$\mathcal{S}^d$ -t pedig (18)-ra:

$$(25) \quad \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \sigma^s = \mathcal{S}^d \mathcal{E}^s \epsilon^s.$$

Vegyük észre, hogy $\mathcal{S}^s \mathcal{S}^d = \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s$, illetve hogy általánosabban is, bármely két, állandó együtthatókkal rendelkező differenciáloperátor felcserélhető. Ezért a kapott két egyenletet összeadva azt találjuk, hogy

$$(26) \quad \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \sigma = \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \epsilon^d + \mathcal{S}^d \mathcal{E}^s \epsilon^s.$$

Hasonlóan, $\mathcal{E}^s$ -t hattatva (17)-re, $\mathcal{E}^d$ -t pedig (18)-ra, összeadás után kapjuk, hogy

$$(27) \quad \mathcal{E}^s \mathcal{S}^d \sigma^d + \mathcal{E}^d \mathcal{S}^s \sigma^s = \mathcal{E}^d \mathcal{E}^s \epsilon.$$

Rugalmasságtani esetben (amikor tehát mind a négy differenciáloperátor nulladrendű, azaz egyszerűen konstansok) e két alak, (26) és (27) bármelyikéből az eredeti (17) deviatorikus és (18) gömbi konstitúciós összefüggések visszakaphatóak. Reológiai esetben azonban (26) és (27) csak *következmények*, nem állítható vissza belőlük az eredeti deviatorikus és gömbi összefüggés. Differenciáloperátorokkal ugyanis nem lehet osztani, mert nincs egyértelmű inverzük.⁸

A reológiai esetben a fenti levezetés során szaporodik a differenciálegyenletek rendje, például tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell esetén a másodrendű (17)-tel és (18)-cal szemben (26) harmadrendű, (27) pedig negyedrendű. Ezért legyünk résen: ha akadnak — például valamilyen speciális szimmetria vagy más feltétel miatt — σ -ra vagy ϵ -ra (vagy legalább egy koordinátarendszer szerinti komponenseik némelyikére) valamilyen speciális, alacsonyabbrendű deriváltas összefüggések, akkor inkább azokat használjuk, ne ezeket az általánosan érvényes (26) és (27) következményeket. A gyakorlatban nem mindegy, hogy például egy negyedfokú vagy csak egy másodfokú algebrai egyenletet

⁸ A legegyszerűbb példa: $\frac{d}{dt}f$ ismeretében f nem határozódik meg egyértelműen: egy additív konstansnyi határozatlanság van.

kell-e megoldanunk, egy differenciálegyenlet karakterisztikus egyenleteként. Reológiai levezetésekben a deriváltak rendje könnyen szaporodik, könnyű fölösleges többlet deriváltakat összeszedni, melyek hatása a végeredményből majd kiesik, de sokkal nehezebb lesz eljutni ahhoz a vágyott végeredményhez.

E szakasz zárásaként vezessünk be jelölést az $\mathcal{S}^d$, $\mathcal{S}^s$, $\mathcal{E}^d$, $\mathcal{E}^s$ operátorok három bizonyos kombinációjára:

$$(28) \quad \mathcal{D}_0 = \frac{1}{3}(\mathcal{S}^d \mathcal{E}^s - \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d), \quad \mathcal{D}_1 = \frac{1}{3}(2\mathcal{S}^d \mathcal{E}^s + \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d), \quad \mathcal{D}_2 = \frac{1}{3}(\mathcal{S}^d \mathcal{E}^s + 2\mathcal{S}^s \mathcal{E}^d).$$

Ezek a következő szakaszokban (és jelen kötet 3. cikkében [FÜLÖP-BÉDA (2009)] is) hasznosnak fognak majd bizonyulni. Egy alkalmazásuk pedig már most is jelentkezik: $\mathcal{D}_0$ segítségével (26) és (27) az alábbi formába írható:

$$(29) \quad \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \boldsymbol{\epsilon} + \mathcal{D}_0 \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I},$$

$$(30) \quad \mathcal{E}^s \mathcal{S}^d \boldsymbol{\sigma} - \mathcal{D}_0 \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} = \mathcal{E}^d \mathcal{E}^s \boldsymbol{\epsilon}.$$

3. DINAMIKA: EGZISZTENCIA, UNICITÁS

A mechanikai mozgásegyenlet, melyet tekinteni fogunk, a

$$(31) \quad \rho \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \mathbf{f}$$

egyenlet, melyben a közeg ρ sűrűségét hely- és időfüggetlen konstansnak tekintjük, és mely szerint a közeg $\dot{\mathbf{v}}$ gyorsulását tehát a belső erőket jellemző $\boldsymbol{\sigma}$ feszültségtenzor divergenciája és egy $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ térfogati erőssűrűség-mező szabja meg.⁹ A sűrűséget kis deformálódások esetén azért vehetjük állandónak, mert ilyenkor az anyag térfogata (egy-egy kis elemi közegdarabka térfogata) is csak kicsit tér el a nulla deformáltságú állapotbelitől. Szintén a kis alakváltozások teszik lehetővé, hogy a helyesebb, $\mathbf{r}^{\text{iner}}$ szerint vett $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^{\text{iner}}$ inerciális divergencia helyett az anyagi $\mathbf{r}$ szerinti $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ -t alkalmazzuk: a kétfajta divergencia között a $\chi_{t_0} \circ \nabla$ szorzó a kapcsolat¹⁰, és ez a szorzó kis alakváltozások esetén körülbelül az $\mathbf{I}$ egységtenzor. Ugyanezzel a $\chi_{t_0} \circ \nabla$ szorzóval számítandók át az inerciális vektorok az anyagi helyváltozó szerinti irányviszonyokba, melyre például akkor van szükség, amikor peremfeltételeink is vannak, melyeket át szeretnénk számítani az anyagi változó szerinti megfogalmazásba. Kis alakváltozások esetén tehát ezzel az áttéréssel sem kell bajlódni.

⁹ A térfogati erő függhetne a sebességtől is, de ettől a lehetőségtől itt el fogunk tekinteni, noha a sebességgel arányos esetekben (pl. mágneses mezőben mozgás) lineáris egyenletrendszer keretén belül maradnánk, mely az itt tekintett módszerekkel szintén tárgyalhatnánk.

¹⁰ mert az $\mathbf{r}^{\text{iner}} \rightarrow \mathbf{r}$ változóhelyettesítés miatt egy összetett függvény deriváltjaként számítható egyik a másiktól

Összetéve a kinematikai, a konstitúciós és a dinamikai egyenleteinket, a teljes egyenletrendszer a következő tehát:

$$(32) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = (\mathbf{v} \circ \nabla)^S,$$

$$(33) \quad \rho \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \mathbf{f},$$

$$(34) \quad \mathcal{S}^d \boldsymbol{\sigma}^d = \mathcal{E}^d \boldsymbol{\epsilon}^d,$$

$$(35) \quad \mathcal{S}^s \boldsymbol{\sigma}^s = \mathcal{E}^s \boldsymbol{\epsilon}^s.$$

Olykor hasznos lehet az az észrevétel, hogy ha $\mathbf{f}$ konstans, vagy általánosabban, olyan függvény, mely

$$(36) \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{f}_*(t) + \boldsymbol{\Gamma}_*(t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*)$$

alakú (itt $\boldsymbol{\Gamma}_*$ antiszimmetrikus tenzor értékű függvény¹¹), akkor bevezetve a

$$(37) \quad \mathbf{w}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{\rho} \left[\int_{t_*}^t \mathbf{f}_*(t') dt' + \int_{t_*}^t \boldsymbol{\Gamma}_*(t') dt' (\mathbf{r} - \mathbf{r}_*) \right]$$

függvényt — egy tetszőleges segéd- t_* felhasználásával —, az általánosabb egyenletrendszer a (32)–(35) alakra egyszerűsödik, amelyben azonban $\mathbf{v}$ helyén mindenhol ez az új ismeretlen, $\mathbf{w}$ áll.¹²

Egy másik, időnként esetleg hasznosnak bizonyuló észrevétel az, hogy majdnem minden¹³ $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ térfogati erő összeolvasztható $\boldsymbol{\sigma}$ -val, abban az értelemben, hogy felírható egy szimmetrikus tenzor divergenciájaként:

$$(38) \quad \mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma}^f \cdot \nabla.$$

Ilyen $\boldsymbol{\sigma}^f$ a potenciálmélet alapján levezethető, de direkt módon is ellenőrizhető

$$(39) \quad \boldsymbol{\sigma}^f(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \left[\mathbf{f}(t, \mathbf{r}') \circ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]^S d^3 \mathbf{r}'$$

(legalábbis ha a közeg kitöltötte tartomány az egész tér inerciarendszerünkben — ha nem, akkor bizonyos finomítások szükségesek). A többi lehetséges $\boldsymbol{\sigma}^f$ is (39) alkalmas kiegészítettjeként adható meg. Egy ilyen $\boldsymbol{\sigma}^f$ révén (33) jobb oldala felírható egy „eltolt” feszültség, $\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^f$ divergenciájaként.

¹¹ ezért létezik hozzá egy $\boldsymbol{\gamma}_*(t)$ időfüggő axiálvektor, hogy $\boldsymbol{\Gamma}_*(t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*) = \boldsymbol{\gamma}_*(t) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_*)$, tehát a $\boldsymbol{\Gamma}_*$ -os tag egy helyfüggetlen örvényerősségű erőmezőt ír le. Örvényessége miatt ez egy nempotenciális erőjárulék lenne, mely az $\mathbf{r}_*$ -tól mért távolság növekedésével növekszik. Egy elektromosan töltött közegre hat ilyen elektromos erő, ha homogén, de időben változó $\mathbf{B}$ mágneses mezőben van: e változó mágneses mező egy örvényes elektromos mezővel jár együtt. Ilyenkor azonban fellép egy $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ -vel jellemzett másik térfogati erő is — ez szerencsére $\mathbf{v}$ -ben lineáris, így a probléma egyenletrendszere lineáris marad.

¹² Az időintegrálás azért lett benne bevezetve, hogy a mozgásegyenletben az időderiválásnak ellendolgozzon, a speciális helyfüggés pedig azért, mert pontosan ilyen esetekben teljesül $(\mathbf{w} \circ \nabla)^S = (\mathbf{v} \circ \nabla)^S$. Igen, ez épp a CAUCHY-potenciálbeli határozatlansággal kapcsolatos.

¹³ például minden kellően reguláris, és a végtelen felé megfelelően lecsengő — mellőzve a matematikai feltételek pontos megfogalmazását.

Ha az erőmező nem cseng le (azaz tart nullához) megfelelően a végtelen felé, akkor a (39)-beli integrál nem véges. σ^f azonban olyankor is létezhet, és például bizonyos szimmetriák fennállása esetén szintén egyszerűen megadható. Ilyen eset az, ha az erőmező független egy DESCARTES-koordinátarendszer szerinti x koordinátától, és x irányú komponense nulla (x -beli eltolási és tükrözési szimmetria). Ilyenkor a kétdimenziós potenciálméletből levezethető

$$(40) \quad \sigma^f(t, y, z) = \frac{1}{\pi} \int \left[\mathbf{f}(t, \mathbf{r}'_{yz}) \circ \frac{\mathbf{r}_{yz} - \mathbf{r}'_{yz}}{|\mathbf{r}_{yz} - \mathbf{r}'_{yz}|^3} \right]^S d^2 \mathbf{r}'_{yz}$$

formulával dolgozhatunk¹⁴ (az $\mathbf{r}_{yz}$ jelölés az $\mathbf{r}$ vektor x irányra merőleges, azaz yz síkbeli vetületét jelöli).

Ha pedig az erőmező csak z irányú és z -függő („magasságfüggő, függőleges erő”), azaz

$$(41) \quad \mathbf{f}(t, z) = f_z(t, z) \mathbf{e}_z$$

(ahol $\mathbf{e}_z$ az z irányú egységvektor), akkor egy tetszőleges z_* segéd-érték felhasználásával bevezetve a

$$(42) \quad \sigma^f(t, z) = \int_{z_*}^z f_z(t, z') dz'$$

függvényt, a

$$(43) \quad \sigma^f(t, z) = \sigma^f(t, z) \mathbf{I}$$

képlettel dolgozhatunk. Homogén nehézségi erő, azaz $f_z = \rho g$ esetén például $\sigma^f(z) = \rho g z \mathbf{I}$ a legegyszerűbb választás ($z_* = 0$ esete).

Figyeljünk azonban oda arra, hogy ez a feszültséggel való összeolvasztás, a feszültség eltolása csak a dinamikai mozgásegyenlet szempontjából történik, a konstitúciós összefüggések továbbra is az eredeti σ -ra vonatkoznak. Ha tudjuk, és érdemes, akkor a deformációt is eltolhatjuk úgy, hogy az eltolt feszültséggel elégítsék ki a konstitúciós összefüggéseket. Ekkor célszerű lehet $\mathbf{v}$ -t is eltolni, hogy (32) eltolt analogonját kapjuk. Az eltolt $\mathbf{v}$ viszont (33) bal oldalán változást okoz, tehát nem biztos, hogy sikerül az egész egyenletrendszerünket „eltolni”. Az egyensúlyi közelítés (a $\rho \mathbf{v}$ tag elhagyása, részletesen a 9. szakasz kezdi majd tárgyalni) esetén ez a veszély nem áll fenn.

Mind a beolvasztós, mind a (37)-féle eltolásoknál szem előtt kell tartanunk azt is, hogy ezek eltolják a kezdeti feltételeket és a peremfeltételeket is, amely befolyásolhatja (rossz esetben: akadályozhatja) feladatunk gyakorlati megoldhatóságát.

¹⁴ ha $\mathbf{f}$ az xy síkban viselkedik kellően regulárisan és végtelen felé lecsengően.

Mindamellett nem szükséges erőltetnünk a térfogati erő „eltüntetését”. A továbbiakban következő levezetések expliciten meg fogják tartani a térfogati erő jelentette inhomogén tagot.

Fontos átlátnunk, hogy tárgyalásunk számos közelítést tartalmaz. Közelítünk egyrészt a fizikai oldalon. Ugyanis homogén és izotrop közegben gondolkodunk, melyet lineáris, csak véges rendű időderiváltakig elmenő, térderiváltakat nem tartalmazó konstitúciós összefüggésekkel jellemzünk, melyekben az időderiváltak szubsztanciálisak (noha egy együttforgó-együtmozgó időderivált-típus esetleg fizikailag helytállóbb lenne, ld. [VÁN (2008a)], [VÁN (2008b)]). Elhanyagoljuk az esetleges képlékenyedést, károsodást, tönkremenetelt, és a termodinamikai aspektusokat is. Közelítünk emellett a matematikai oldalon is, ahogy kis alakváltozást feltételezve állandó sűrűséggel, CAUCHY-féle közelítő deformáltságtenzorral, anyagi helyváltozó szerinti feszültségdivergenciával, és a peremeken átszámíthatatlan irányviszonyokkal dolgozunk. Legyünk tudatában annak, hogy a különböző közelítéseink okozta hibák felösszegződhetnek, felgyűlhetnek, mely tárgyalásmódunk alkalmazhatóságát is veszélyeztetheti. Minden egyes közelítés egyre erősebb alázatra int bennünket eljárásunkkal kapcsolatban.

A (32)–(35) egyenletrendszer ügyében matematikai szempontból az első kérdés az, hogy egyenletrendszerünk konzisztens-e. Más szóval, létezik-e megoldása, akár egyetlen nemtriviális (az azonosan nullától eltérő) megoldás. (Ha több is létezik, akkor azok közül fog majd választani kellő mennyiségű kezdeti feltétel és, ha van, peremfeltétel.) Ez a kérdés ebben az írásban nyitott marad, megválaszolása további kutatást fog majd igényelni. [BÉDA GYULA szóbeli közlése szerint például a POISSON-zárójelek egyfajta általánosítása, a MAYER-zárójelek alkalmazása lehet egy lehetőség a válasz megadásához.] Itt most csak annak végiggondolása következik, hogy hogyan lehetne ezt az egyenletrendszert egy numerikus, időben expliciten léptető sémával megoldani, milyen kezdeti feltételekből, és hogy a séma felállítása során találkozunk-e bármi lehetséges inkonzisztenciával.

A (34) és (35) egyenletek arra utalnak, hogy σ^d és σ^s független változókként kezelendők, nem a $\sigma = \sigma^d + \sigma^s$ kombinációjuk formájában. Ugyanígy legyenek külön változók ϵ^d és ϵ^s . Ez azt is következményül vonja, hogy a (32) egyenlet is szétszedendő az

$$(44) \quad \dot{\epsilon}^d = \left[(\mathbf{v} \circ \nabla)^s \right]^d,$$

$$(45) \quad \dot{\epsilon}^s = \left[(\mathbf{v} \circ \nabla)^s \right]^s = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{I}$$

független részekre. A (33) egyenletet is írjuk fel szétszedett alakban:

$$(46) \quad \rho \dot{\mathbf{v}} = \sigma^d \cdot \nabla + \sigma^s \cdot \nabla + \mathbf{f}.$$

Következő lépésként, megállapíthatjuk, hogy σ^d -t a (34)–(35) és (44)–(46) egyenletek közül egyedül (34) képes meghatározni/léptetni. A továbbiakban a tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell példáján dolgozzunk [ld. (22)], amelyre $s^d = s^s = 1$ és $e^d = e^s = 2$.

Törekedjünk továbbá arra, hogy minél kevesebb változót kelljen léptetni, inkább meghatározódjanak más változók pillanatnyi értékeiből. Jó esetben olyan minimális számú változókat találhatunk, amelyek függetlenek, és kijelölik az egész folyamatot, mert a többi mennyiség ezek függvényeként áll elő. Ekkor az ilyen változókat szabadsági fokoknak nevezhetjük.

Törekvésünknek megfelelően — ahhoz hasonlóan, ahogy a tömegpont-mechanikában a sebességek helyett a kanonikus impulzusokkal, mint független fázistér-változókkal dolgoznak, — $\dot{\sigma}^d$ szerepét egy független ${}^1\sigma^d$ változóval játsszuk el. Majd csak a megoldások mentén kell kapcsolat legyen σ^d és ${}^1\sigma^d$ között, olyankor viszont feltétlenül: a $\dot{\sigma}^d = {}^1\sigma^d$ kapcsolat. Ugyanígy vezetjük be a ${}^2\epsilon^d$ változót $\ddot{\epsilon}^d$ szerepére, ${}^1\epsilon^d$ -t pedig $\dot{\epsilon}^d$ -ére, és az egységes jelölés kedvéért írjuk σ^d -t is ${}^0\sigma^d$ -nek, ϵ^d -t pedig ${}^0\epsilon^d$ -nek, vagyis definíció szerint

$$(47) \quad {}^0\sigma^d = \sigma^d, \quad {}^0\epsilon^d = \epsilon^d.$$

Analóg mennyiségeket vezetünk be σ^s és ϵ^s nulladik és magasabb deriváltjaihoz is, továbbá ${}^0\mathbf{v}$ -re és ${}^1\mathbf{v}$ -re is szükségünk lesz ($\mathbf{v}$ illetve deriváltja szerepében).

E változókkal megfogalmazva tehát azt az iménti észrevételt, hogy σ^d -t csakis (34) képes léptetni, azt írhatjuk, hogy ${}^1\sigma^d$ (34)-nek megfelelően a

$$(48) \quad {}^1\sigma^d = \frac{1}{T_1^d} (U_0^d {}^0\epsilon^d + U_1^d {}^1\epsilon^d + U_2^d {}^2\epsilon^d - {}^0\sigma^d)$$

módon határozódik meg, ${}^0\sigma^d$ -t pedig

$$(49) \quad ({}^0\sigma^d)^{\cdot} = {}^1\sigma^d$$

lépteti.

Továbbmenve, ha (44) teljesül, akkor az időderiváltja is, melyből ${}^2\epsilon^d$ meghatározódása állítható fel, a

$$(50) \quad {}^2\epsilon^d = \left[({}^1\mathbf{v} \circ \nabla)^S \right]^d$$

módon. Magából (44)-ből pedig a

$$(51) \quad {}^1\epsilon^d = \left[({}^0\mathbf{v} \circ \nabla)^S \right]^d$$

meghatározódás származtatható. Vegyük észre, hogy itt egy másik úton is eljárhatnánk: hogy ${}^2\epsilon^d$ nem meghatározódik, hanem léptetődik az

$$(52) \quad ({}^1\epsilon^d)^{\cdot} = {}^2\epsilon^d$$

szerint. Ez tehát egy lehetséges forrása inkonzisztenciának: ha a kétféle eljárás nem volna ekvivalens. Egyelőre haladjunk tovább az (51) útján, és végül ellenőrizzük, hogy a megoldások mentén (52) is teljesül-e.

${}^0\boldsymbol{\epsilon}^d$ biztosan nem meghatározódik (mert nincs miből), ezért léptetni kell, mely

$$(53) \quad \dot{({}^0\boldsymbol{\epsilon}^d)} = {}^1\boldsymbol{\epsilon}^d$$

szerint tehető meg.

A gömbi tenzorok (az s felső indexű mennyiségek) esetén ugyanilyen módon válasszuk meg, hogy mi határozódjon meg és mi léptetődjön, és melyik hogyan. Végül, (46)-ot használjuk fel ${}^1\mathbf{v}$ meghatározódására:

$$(54) \quad {}^1\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} ({}^0\boldsymbol{\sigma}^d \cdot \nabla + {}^0\boldsymbol{\sigma}^s \cdot \nabla + \mathbf{f});$$

${}^0\mathbf{v}$ pedig léptetendő,

$$(55) \quad \dot{({}^0\mathbf{v})} = {}^1\mathbf{v}$$

szerint, hiszen meghatározni semmi nem tudja. Ezen a ponton visszatérhetünk az (51) és (52) közötti dilemmára: (55) szerencsére biztosítja, hogy e két egyenlet ekvivalens [mert (55) fennállása esetén bármelyikük következik a másikból], tehát megoldások esetén mindkettő teljesül.

Összefoglalva és értelmezve sémánkat, a tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell esetén a közeg állapotát egy pillanatban egyértelműen kijelölik a ${}^0\boldsymbol{\sigma}^d$, ${}^0\boldsymbol{\epsilon}^d$, ${}^0\boldsymbol{\sigma}^s$, ${}^0\boldsymbol{\epsilon}^s$, ${}^0\mathbf{v}$ szabadsági fokok (azaz: független mennyiségek, melyek teljes jellemzést nyújtanak). A többi felmerülő mennyiség ezek függvényeként előáll [ld. (48), (51), (50) és (54)]. A szabadsági fokokat léptető egyenletekhez [ld. (49), (53) és (55)] pedig kezdeti feltételként e szabadsági fokok egy kezdőpillanatban vett értékei mellékelendők. Inkonzisztenciára pedig nem bukkantunk.

Még tömörebben: úgy tűnik, a tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-féle konstitúciós összefüggésű közeg állapotát a pillanatnyi $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ és $\mathbf{v}$ adja meg, ezeket elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer időfejleszti. Más reológiai modellek esetén hasonló analízis folytatható le. Hangsúlyozandó azonban, hogy az itt bemutatott vizsgálat nem tekintendő szigorú bizonyításnak, csak egy szisztematikus tájékozódásnak, és egy leendő bizonyítás-hoz felhasználható hozzávalóknak.

Ha ezek után egy konkrét feladathoz peremfeltételek is tartoznak, akkor az a kérdés is felvetődik, hogy létezik-e a peremfeltételeket is kielégítő megoldás. Ennek megválaszolása szintén nem egyszerű, és a bizonyítás módja a peremfeltételek típusától is függhet — erre a kérdésre a jelen írás szintén nem ad szigorú választ. Azt a heurisztikus fizikai

érzetet mindenesetre érdemes megemlíteni, hogy ha a peremfeltétel az adott elrendezés rugalmasságtani problémája ($\mathcal{S}^d = \mathcal{S}^s = 1$, $\mathcal{E}^d = U_0^d$, $\mathcal{E}^s = U_0^s$) esetén létező megoldásra vezetett, akkor reológiai konstitúciós összefüggések esetén is arra vezethet, hiszen az általánosodás itt csak idő irányú, térbeli szempontból nem változik a rendszer.

Hogy a peremfeltételeket is kielégítő megoldás milyen kezdeti feltételek esetén egyértelmű, azt is egyelőre csak valószínűsíthetjük: hogy olyanokkal, melyek a fenti értelemben szabadsági foknak tekinthető mennyiségek kezdeti értékét tartalmazzák. Tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modellre például tehát az a várakozás, hogy σ , ϵ és $\mathbf{v}$ kezdeti értékei egyértelműre rögzítik a megoldást. Szigorú állítást azonban itt is csak további kutatások tudnak adni.

4. DINAMIKA: AZ ISMERETLEN KIKÜSZÖBÖLÉSÉNEK MÓDSZEREI

Maguk a megoldások konkrét megkereséséhez vezető úton egy lehetőség az, ha általánosítjuk a rugalmasságtani esetből ismert megközelítéseket. Ennek megfelelően σ -t, ϵ -t és $\mathbf{v}$ -t (vagy $\mathbf{v}$ helyett valami elmozdulás-féleséget — ezt bővebben ld. alább) tekintjük három ismeretlen függvénynek, ebből kettőt kifejezünk a harmadikkal, és eme harmadikra egy differenciálegyenlet adódik. Ezt a kapott differenciálegyenletet redukált egyenletnek hívhatjuk.

Mielőtt ezeknek a kiküszöbölős redukálásoknak a részleteibe belemennénk, érdemes tudnunk, hogy reológiai esetekben ez az egyismeretlenes differenciálegyenlet kellemetlenül magas rendű lesz — például tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-esetben időben negyedrendű egyenlet adódik (a három ismeretlen bármelyikére is vezettük vissza a problémát). Ezt a helyzetet pedig jelentősen tovább súlyosbítja, hogy ez az egyetlen egyenlet még csalóka siker: egy koordinátarendszerben szemlélve, ez egy szimmetrikus tenzor hat (vagy egy vektor három) komponensére vonatkozó csatolt differenciálegyenlet-rendszer. Ebben egyes komponenseket ki kell még küszöbölnünk mások rovására — egyrészt az érdemi továbbhaladáshoz, másrészt mert a peremfeltételek gyakran egyetlen ilyen komponensre jelentenek feltételt.¹⁵ Mire egy egyetlen komponensre vonatkozó differenciálegyenlethez érünk, igencsak sokadrendű időderiváltas egyenlet fog előttünk állni, melynek megoldása technikailag drámaian nehéz lehet. Mint az a 18. oldalon már elhangzott, reológiai esetben a deriváltak rendje igen gyorsan szokott szaporodni levezetéseink során. Ezért ha csak tehetjük, ne ezeket az általános, alább következő egyenleteket használjuk, hanem az adott probléma geometriai szimmetriáiból következő összes speciális, egyszerű egyenletet és tulajdonságot ragadjuk meg, azokból származtassunk egyedi, alacsonyabbrendű differenciálegyenleteket. Jelen kötet további tanulmányaiban látni fogunk példákat ilyen, a szimmetriáknak köszönhető speciális egyenletekre.

¹⁵ Például egy henger alakú test terheletlen palástján a radiális feszültségkomponens, σ_{rr} nulla.

Előrejelzésként kerüljön itt megemlítésre az is, hogy a kiküszöbölésekkel kapott differenciálegyenlet megoldása is, és a megoldás peremfeltételekhez illesztése is további súlyos technikai nehézségekbe ütközhet. Ezekről a későbbiekben, a 37. oldalon lesz szó majd részletesebben.

Mindezen figyelmeztetések után írjuk azért föl ezeket az általános, egyetlen ismeretlen tenzor- ill. vektorfüggvényre visszavezetett egyenleteket.

Először küszöböljük ki $\mathbf{v}$ -t a (32)–(35) egyenletrendszerből: (32) időderiváltjába (33)-at helyettesítve kapjuk, hogy

$$(56) \quad \rho \ddot{\boldsymbol{\epsilon}} = [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \mathbf{f}) \circ \nabla]^S$$

Innen két irányba haladhatunk tovább. Az egyik az, amikor ezzel az egyenlettel $\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}$ -t és időderiváltjait küszöböljük ki (29) második időderiváltjából, melynek eredménye

$$(57) \quad \rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \circ \nabla]^S + \mathcal{D}_0 [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \cdot \nabla] \mathbf{I} + [\mathcal{S}^s \mathcal{E}^d (\mathbf{f} \circ \nabla)^S + \mathcal{D}_0 (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{I}]$$

egy pusztán $\boldsymbol{\sigma}$ -ra vonatkozó differenciálegyenlet. Ez az út tehát „feszültségmódszernek” is nevezhető (ismeretes rá a „BELTRAMI-módszer”, és a pongyolább „erőmódszer” elnevezés is), az (57)-et pedig „dinamikai feszültségegyenletnek” hívhatjuk. A másik irány az, amikor (56)-ra $\mathcal{S}^d \mathcal{S}^s$ -sel hatunk, és a jobb oldalon (29)-et helyettesítjük be: ez a „deformációmódszer”, ugyanis az eredmény, a „dinamikai deformációegyenlet” csakis $\boldsymbol{\epsilon}$ -t tartalmazza (hívják „alakváltozási módszernek” és „HUSZÁR-módszernek” is):

$$(58) \quad \rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \ddot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d [(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla) \circ \nabla]^S + \mathcal{D}_0 [(\text{tr} \boldsymbol{\epsilon}) (\nabla \circ \nabla)] + \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s (\mathbf{f} \circ \nabla)^S.$$

Ezek után lássuk azt az utat, amikor $\mathbf{v}$ -re származtatunk egy egyenletet („sebességmódszer”, „dinamikai sebességegyenlet”): (33) időderiváltjára hatunk $\mathcal{S}^d \mathcal{S}^s$ -sel, $\mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ helyére (29) időderiváltját helyettesítjük be, majd (32)-t alkalmazzuk:¹⁶

$$(59) \quad \begin{aligned} \rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \ddot{\mathbf{v}} &= [\mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathcal{D}_0 \text{tr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{I}] \cdot \nabla \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \dot{\mathbf{f}} = \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \Delta \mathbf{v} + \mathcal{D}_1 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla] + \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \dot{\mathbf{f}} = \\ &= \mathcal{D}_2 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla - \frac{1}{2} \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \dot{\mathbf{f}}. \end{aligned}$$

A rugalmasságtanban népszerű eljárás még az „elmozdulásmódszer” („LAMÉ-módszer”, vagy a pontatlanabb elnevezés: „mozgásmódszer”), amikor is egy $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{u} \circ \nabla)^S$

¹⁶ Felhasználásra kerül a $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{t}) = \nabla \circ (\nabla \cdot \mathbf{t}) - \Delta \mathbf{t}$ azonosság is, ahol $\mathbf{t}$ vektormező, vagy tetszőleges magasabb rendű tenzormező. Mellesleg, ennek az azonosságnak az ikertestvére a $(\mathbf{t} \times \nabla) \times \nabla = (\mathbf{t} \cdot \nabla) \circ \nabla - \Delta \mathbf{t}$ képlet.

képletet vesznek (32) helyett, emellett egy $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ képlet alapján (33)-ban $\dot{\mathbf{v}}$ -t $\ddot{\mathbf{u}}$ -val helyettesítik. Ezek után hasonló kiküszöbölő lépéseket tesznek, mint az előbb látott sebességmódszernél. Az eredmény ugyanolyan alakú lesz, mint (59), csak benne $\mathbf{v}$ helyén ez a bizonyos $\mathbf{u}$ áll. Mint azonban az az 1. szakaszban (ld. 17. o.) nyomatékosan hangsúlyozásra került, $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ és $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{u} \circ \nabla)^S$ nem használhatóak egyszerre általános érvényű képletként. Ezenkívül az $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{u} \circ \nabla)^S$ -ben szereplő $\mathbf{u}$ általában nem elmozdulás. Ezek miatt a hagyományos elmozdulásmódszer hibás, több szempontból is.

Vizsgáljuk meg, kialakítható-e az elmozdulásmódszernek olyan módosítása, amely mentes ezektől a problémáktól. Két eset van: az $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{u} \circ \nabla)^S$ -ben szerepeltetett $\mathbf{u}$ vagy egy $\mathbf{u}_{t_0}$ elmozdulás, vagy egy $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}$ CAUCHY-potenciál. Az utóbbi eset gyorsan elintézhető: a 17. oldalon láttuk, hogy $\ddot{\mathbf{u}}^{\text{CAUCHY}} \neq \dot{\mathbf{v}}$, és azt is, hogy még csak meg sem tudjuk mondani, hogy $\dot{\mathbf{v}} - \ddot{\mathbf{u}}^{\text{CAUCHY}}$ mennyi, ezért nem tudunk (33)-ban $\dot{\mathbf{v}}$ -ről áttérni $\ddot{\mathbf{u}}^{\text{CAUCHY}}$ -ra. (Az egyensúlyi közelítésben tekintett dinamikai egyenletrendszer esetén lehetővé válik az $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}$ -ra redukálás: ld. 49. o.)

Térjünk át az előbbi esetre: próbáljuk meg $\mathbf{u}$ -t mint egy $\mathbf{u}_{t_0}$ -t, azaz mint valóban egy elmozdulást értelmezni. (1)-ből következik, hogy $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}_{t_0}$, és $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{u}}_{t_0}$. Hassunk (33)-ra $\mathcal{S}^d \mathcal{S}^s$ -sel, $\mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \boldsymbol{\sigma}$ helyére helyettesítsük be (29)-et, és alkalmazzuk (5)-öt. Az eredmény az (59) dinamikai sebességegyenlet analogonja, csak $\mathbf{v}$ helyett $\mathbf{u}_{t_0}$ -ra vonatkozva, és egy további inhomogén taggal kibővülve:

$$(60) \quad \rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \ddot{\mathbf{u}}_{t_0} = \mathcal{D}_2 (\mathbf{u}_{t_0} \cdot \nabla) \nabla - \frac{1}{2} \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_{t_0}) + \\ + \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \mathbf{f} + (U_0^d \boldsymbol{\varepsilon}_{t_0}^d + U_0^s \boldsymbol{\varepsilon}_{t_0}^s) \cdot \nabla,$$

ahol $\boldsymbol{\varepsilon}_{t_0}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_0, \mathbf{r})$ a deformáció kezdeti feltétele.

Láthatjuk tehát, hogy a „dinamikai elmozduláseggyenlet” tartalmaz egy nemtriviális inhomogén tagot. Hogy ez a tag mikor nulla, az első ránézésre nem nyilvánvaló. A gyakorlatban valószínűleg leggyakrabban előadódó ilyen eset olyankor fordulhat elő, amikor t_0 -kor $\boldsymbol{\varepsilon}$ első, második, ..., kellően magas rendig minden időderiváltja nulla. Ekkor

$$(61) \quad (U_0^d \boldsymbol{\varepsilon}_{t_0}^d + U_0^s \boldsymbol{\varepsilon}_{t_0}^s)(\mathbf{r}) = (\mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \boldsymbol{\varepsilon}^d + \mathcal{S}^d \mathcal{E}^s \boldsymbol{\varepsilon}^s)(t_0, \mathbf{r}) = (\mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \boldsymbol{\sigma})(t_0, \mathbf{r})$$

[v.ö. (26)]. Ha $\boldsymbol{\sigma}$ kellően magas rendig vett időderiváltjai is mind nullák t_0 -kor, akkor

$$(62) \quad (\mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \boldsymbol{\sigma})(t_0, \mathbf{r}) = \boldsymbol{\sigma}(t_0, \mathbf{r}).$$

Ezért ilyenkor

$$(63) \quad (U_0^d \boldsymbol{\varepsilon}_{t_0}^d + U_0^s \boldsymbol{\varepsilon}_{t_0}^s) \cdot \nabla = \boldsymbol{\sigma}_{t_0} \cdot \nabla,$$

ahol $\boldsymbol{\sigma}_{t_0}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\sigma}(t_0, \mathbf{r})$ a deformáció kezdeti feltétele. Ezért leszűrhetjük, hogy ha a kezdeti feltételre fennáll még $\boldsymbol{\sigma}_{t_0} \cdot \nabla = \mathbf{0}$ is (pl. $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ és egyensúlyból indul a rendszer), akkor a (60) dinamikai elmozduláseggyenlet extra inhomogén tagja nulla.

Hangsúlyozandó, hogy a kezdeti deformációt tartalmazó inhomogén tag nemcsak reológiai konstitúciós összefüggések esetén lép fel, hanem a rugalmasságtani, azaz HOOKE-esetben is.

5. MATEMATIKA: FÜGGVÉNYRENDSZER SZERINTI KIFEJTÉS

Az (57), (58), (59), (60) jellegű egyenletek analitikus megoldásához a talán leggyakrabban, legáltalánosabban alkalmazható lehetőség a megoldás egy függvényrendszer szerinti kifejtése. Ezen belül is a legismertebbek az olyan függvényrendszerek, melyek négyzetesen integrálható értelemben állítják elő a megoldást, azaz a függvény sorozat négyzetesen integrálható értelemben tart a megoldáshoz: az egyre hosszabb véges részletösszegeknek a megoldástól vett eltérése négyzetének integrálja nullához tart.¹⁷ Ezen belül is a leggyakoribb és legpraktikusabb lehetőség — mely peremfeltételes problémákhoz különösen illeszkedik, — az, amikor egy önadjungált differenciáloperátor (melynek definícióját ld. alább) teljes ortogonális sajátfüggvényrendszere szerint fejtünk ki, a négyzetesen integrálható függvények L^2 HILBERT-terében. A szinusz- és koszinuszfüggvények szerinti klasszikus FOURIER-kifejtés például egy intervallumon vett $-d^2/dx^2$ operátor sajátfüggvényei szerint fejt ki, az e^{ikx} síkhullámok pedig a $(-\infty, \infty)$ egyenesen ugyanennek az operátornak a sajátfüggvényrendszere. Utóbbi esetben nem megszámlálhatóan végtelen sok normálható sajátfüggvény, hanem folytonosan végtelen sok, csak disztribúció-értelemben normálható sajátfüggvény lép fel, de ezek NEUMANN és követői funkcionálanalízisbeli eredményeinek [REED–SIMON (1975)] köszönhetően szintén matematikai problémáktól mentesen alkalmazhatóak, a megszámlálhatóan végtelen sok sajátfüggvény esetével közös keretben. Sok operátornál keveredik is e két lehetőség: a sajátértékek egy része egy megszámlálható sorozat, a többi viszont egy intervallumot fut folytonosan. Ilyen lép fel például a Coulomb-vonzóerőben történő kvantummechanikai mozgást (ld. pl. hidrogénatom) leíró HAMILTON-operátoránál (energiaoperátoránál): a negatív energia-sajátértékek megszámlálhatóan sokan vannak, és a hozzátartozó sajátfüggvények kötött állapotokat fejeznek ki, a pozitív sajátértékek pedig folytonosan sokan vannak, szórásállapotot kifejező sajátfüggvényekkel (annak megfelelően, hogy szórás kísérletben tetszőleges energiájú elektront küldhetünk rá egy protonra).

Amint azt az e^{ikx} síkhullámok esete is sejteti, technikai okokból akkor is érdemes kimenni a valós függvények köréből a komplex függvényekébe, ha a kifejtendő függvényeink mind valósak. Ez semmi tartalmi gondot nem fog okozni, minden, aminek fizikai jelentése folytán valósnak kell lennie, valós lesz.

Felületes ránézés alapján sokan szőrszálhasogatásnak vélik, de tartalmi fontossággal

¹⁷ Ez gyengébb előállítás, mint a minden pontban teljesülő konvergencia (és még gyengébb, mint az egyenletes konvergencia), viszont erősebb, mint a disztribúció-értelemben vett konvergálás.

bír, hogy az önadjungált differenciáloperátorok¹⁸ nincsenek értelmezve az összes négyzetesen integrálható függvényen. Ennek egyik oka az az (önadjungáltsághoz szükségszerű) követelmény, hogy ne vezessenek ki az L^2 térből. A másik ok az, hogy ha közönséges függvényderiválásként értelmezzük őket a deriválhatóakra (másodrendű differenciáloperátor esetén kétszer deriválhatóakra stb.) szorítkozva, akkor túl szűk lesz az operátor értelmezési tartománya ahhoz, hogy önadjungált lehessen. Csak ún. szimmetrikus operátor lesz ezen a szűkebb értelmezési tartományon, a szimmetrikus és önadjungált operátor közti megkülönböztetés pedig fontos, mert csak utóbbiaknak van teljes sajátfüggvény-rendszerük. Ha viszont disztribúcióderiválásként értelmezzük differenciáloperátorunkat, akkor minden négyzetesen integrálható függvényre képes hatni, az viszont túl bő értelmezési tartomány lesz az önadjungáltsághoz.¹⁹

Ezekon túlmenően, térbeli peremek esetén peremfeltételek is korlátozzák az értelmezési tartományt. Egy differenciáloperátorhoz meghatározható — értd: konkrétan kiszámolható —, hogy mely peremfeltételek esetén kapunk olyan értelmezési tartományt, amin operátorunk önadjungált. A peremfeltételek követelménye miatt állhat elő az a meghökkenítő eset, hogy egy négyzetesen integrálható függvény hiába deriválható (és deriváltja is hiába L^2 -beli): ha függvényünk a peremfeltételnek nem tesz eleget, akkor önadjungált differenciáloperátorunk mégis rajta értelmezve, mégsem hat rajta deriválásként.

Az értelmezési tartomány L^2 -nél szűkebb volta a sajátfüggvények szerinti kifejtést nem befolyásolja. Egy tetszőleges L^2 -beli függvény kifejthető egy önadjungált operátor sajátfüggvényei szerint, azaz megadható a sajátfüggvények alkalmas lineárkombinációjaként. Amikor ellenben hattatni is kívánjuk operátorunkat a kifejtett függvényre, akkor szerepet játszik az értelmezési tartomány: csak az ezen belüli függvényekre hattatható az operátor, ezekre pedig a függvény kifejtésében tagonként hat. Vagyis, ha $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ az $\mathcal{L}$ operátor normált sajátfüggvényei $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sajátértékekkel,²⁰ és ψ a kifejtendő függvény, akkor vannak olyan $c_1, c_2, \dots$ együtthatók, melyekkel

$$(64) \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n.$$

Ha ψ benne van $\mathcal{L}$ értelmezési tartományában, akkor ezen felül teljesül az is, hogy

$$(65) \quad \mathcal{L}\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathcal{L}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \varphi_n.$$

¹⁸ Egy $\mathcal{L}$ differenciáloperátor önadjungált egy L^2 térben, ha $\int \psi_1^*(\mathbf{r})(\mathcal{L}\psi_2)(\mathbf{r}) d^n \mathbf{r} = \int (\mathcal{L}\psi_1)^*(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r}) d^n \mathbf{r}$ bármely ψ_1, ψ_2 L^2 -beli függvényekre $\mathcal{L}$ értelmezési tartományából. Itt $*$ a komplex konjugálást jelöli.

¹⁹ A közönséges függvény-értelemben vett deriválható függvények enyhe általánosítása, az ún. abszolút folytonos függvények lesznek a célunknak pont megfelelőek. Ezek pontosan azok a függvények, amelyek előállnak valamely függvény határozatlan integráljaként. Deriváltjukon pedig épp ezt a „valamely függvényt” értjük (mely egyértelmű eleme L^2 -nek).

²⁰ Ha vannak folytonos eloszlású sajátértékek is, azokra az itt következő összegek integrálként írandók.

Az ilyen esetekben tehát $\mathcal{L}$ tagonként hattatható. Egyébként ψ pontosan akkor van benne $\mathcal{L}$ értelmezési tartományában, ha a

$$(66) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n \lambda_n|^2$$

összeg véges.

Amikor egy differenciáloperátornak több önadjungált értelmezési tartománya van (mert több peremfeltétel is illet szolgáltat), akkor mindegyikhez külön-külön teljes ortogonális sajátfüggvényrendszer tartozik. A sajátértékek szintén különbözőek lesznek.

Egy egyszerű példa, amely az eddig elhangzottakat jól illusztrálja, az $\mathcal{L} = -d^2/dx^2$ operátor a $[0, \infty)$ félegyenesen.²¹ Kiszámolható, hogy ekkor a

$$(67) \quad \varphi(0) + \ell \frac{d\varphi}{dx}(0) = 0$$

peremfeltételek nyújtanak önadjungált értelmezési tartományokat, ahol ℓ tetszőleges valós, hossz dimenziójú paraméter (az $\ell = \infty$ eset is meg van engedve, mely alatt a $\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0$ peremfeltétel értendő). Adott ℓ esetén a (67) peremfeltétellel kijelölt értelmezési tartományú önadjungált operátor sajátfüggvényei a tetszőleges pozitív k -hoz tartozó

$$(68) \quad \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ikx} - \frac{1 - ik\ell}{1 + ik\ell} e^{ikx} \right), \quad \lambda_k = k^2,$$

csak disztribúció-értelemben (DIRAC-deltára) normálható függvények (bejövő síkhullám plusz az origóról visszavert síkhullám, adott fázisugrással). $\ell > 0$ esetén ezeken kívül létezik egyetlen diszkrét sajátértékű, normálható sajátfüggvény,

$$(69) \quad \varphi_{-}(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} e^{-x/\ell}, \quad \lambda_{-} = -\frac{1}{\ell^2}.$$

$\ell \leq 0$ esetén nincs ilyen sajátfüggvény [durván szólva azért, mert olyankor a (69)-ben szereplő függvény nem exponenciálisan csökken az origótól távolodva, hanem exponenciálisan nő, így nem négyzetesen integrálható].

Egy tetszőleges $[0, \infty)$ -n négyzetesen integrálható ψ függvény előállítása egy $\ell > 0$ -hez tartozó sajátfüggvényrendszerrel

$$(70) \quad \psi(x) = c_{-}\varphi_{-}(x) + \int_0^{\infty} c(k)\varphi_k(x)dk$$

alakú, egy $\ell \leq 0$ rendszerrel pedig

$$(71) \quad \psi(x) = \int_0^{\infty} c(k)\varphi_k(x)dk.$$

²¹ Erről a példáról is, és általában az önadjungált operátorok matematikai tulajdonságairól és fizikai alkalmazásáról részletesebben olvashatunk például [FÜLÖP (2006)] és [FÜLÖP (2007)] írásaiban.

Mint az már elhangzott, az L^2 -beli előállítás azt jelenti, hogy az egyre több tagú véges lineárkombinációkkal való közelítés [(71)-szerű integrálok esetén az integrál felső határával a végtelen felé tartás] hibája L^2 -értelemben nullához tart. Ez sajnos nem garantálja, hogy minden x helyen nullához tart a hiba, csak azt, hogy nullmértékű halmazt alkotnak az olyan x -ek, ahol nem. Így például ha van perem, a peremen általában nincsenek a függvények helyesen előállítva: az előállítás talán konvergál, de általában nem a kívánt értékhez. Nézzünk erre egy példát: tekintsük a $-d^2/dx^2$ operátort ezúttal a $[0, \pi]$ intervallumon. Önadjungált értelmezési tartományhoz az intervallum mindkét szélén peremfeltételre van szükség. Sok (folytonosan sok) ilyen önadjungált lehetőség adódik, válasszuk most ezek közül az egyszerű

$$(72) \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\pi) = 0$$

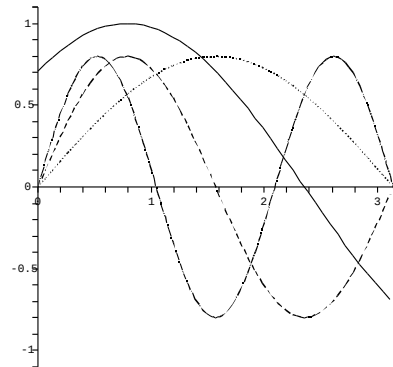
esetet. Az operátor e feltételeket kielégítő sajátfüggvényei a

$$(73) \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots); \quad \lambda_n = n^2$$

ortonormált függvényrendszer. Fejtsük ki ezen a függvényrendszeren a

$$(74) \quad \psi(x) = \sin(x + \pi/4)$$

függvényt: egy olyan függvényt, ami nem tesz eleget a (72) peremfeltételeknek (hogy legyen egy kis izgalom, illetve néhány nagy tanulság — lásd alább), de egy nagyon jól viselkedő, és konkrét számolásokhoz is nagyon praktikus példa. Az itt mellékelt ábra az első három sajátfüggvényt mutatja (pontosított, szaggatott és pont-szaggatott vonal), továbbá a kifejtendő függvényt (folytonos vonal). A kifejtés a következő:

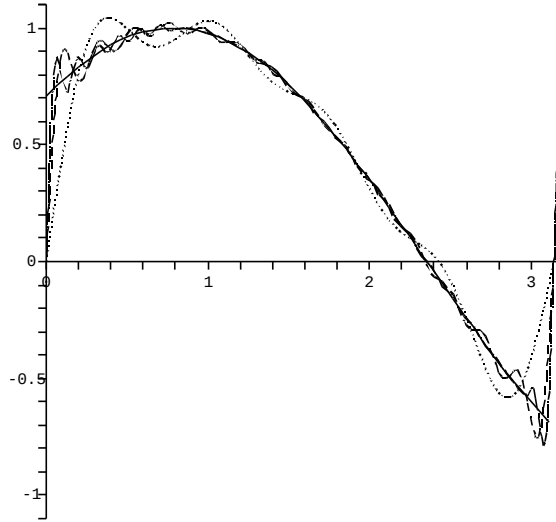


$$(75) \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad c_n = \int_0^{\pi} \varphi_n(x) \psi(x) dx,$$

$$(76) \quad c_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad c_3 = c_5 = c_7 = \dots = 0, \quad c_n = -\frac{2n}{\sqrt{\pi}(n^2 - 1)} \quad (n = 2, 4, 6, \dots).$$

A következő ábrán az látható, hogy hogyan közelítik meg az egyre hosszabb véges részletösszegek a kifejtett függvényt. (Folytonos vonal: a kifejtendő függvény. Pontosított, szaggatott és pont-szaggatott vonal: a kifejtés az első 10, 30 ill. 50 tagig.) A konvergencia a peremeknél a leglassabb. Ez érthető is, mert a peremen minden véges közelítés nulla értéket kell fölvegyen, hiszen ott az összes sajátfüggvény értéke nulla, a peremfeltétel miatt. Ugye ne feledjük el, hogy olyan kifejtésünk van, mely csak L^2 -értelemben tart a kifejtett

függvényhez, így csak majdnem mindenhol kell nullához tartania az eltérésnek. Általában is, minden olyan esetben, amikor a kifejtendő függvény nem tesz eleget a sajátfüggvények peremfeltételeinek, akkor a peremeken nem lesz helyesen előállítva a függvény, csak a tartomány belsejében. A kifejtés a peremeken is általában konvergál valahova (példánkban például a nullákból álló sorozat konvergál a nullához), de sajnos nem a kifejtendő függvény ott felvett értékéhez.



Nemtriviális az a kérdés sem, hogy egy kifejtést szabad-e tagonként deriválni. Mint az az előbb már említésre került, $\mathcal{L}$ akkor hathat tagonként, ha a kifejtett függvény benne van $\mathcal{L}$ értelmezési tartományában (azaz amikor a (66) összeg véges). Az iménti példában (74) nincs benne a $-d^2/dx^2$ operátornak a (72) peremfeltételekhez tartozó értelmezési tartományában, mert nem tesz eleget e peremfeltételeknek — és a (66) összegről is jól látható, hogy végtelen:

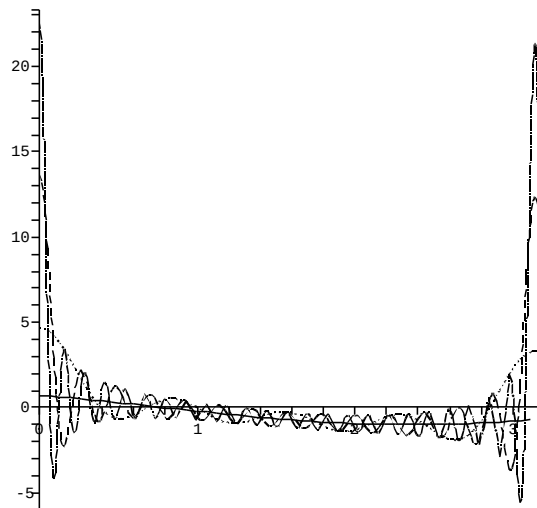
$$(77) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n \lambda_n|^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 1^4 + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{4n^2}{\pi(n^2-1)^2} \cdot n^4 = \infty,$$

— tehát ez az önadjungált operátor nem tud rá hatni.

A d/dx deriválás sem hattatható tagonként. Bizonyítható ugyanis, hogy az

$$(78) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{d\varphi_n}{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{-2n}{\sqrt{\pi}(n^2-1)} \cdot n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$$

összeg kivezet az L^2 függvénytérből, nem konvergál benne. Ez az eredmény szemléletesen is látszik: itt az ábrán megfigyelhető, hogy a (78) függvényösszeg egyre magasabb rendű tagjai egyre patológikusabb viselkedést hoznak be, különösen a peremeknél. (Folytonos vonal: a kifejtendő függvény deriváltja. Pontozott, szaggatott és pont-szaggatott vonal: a kifejtés első 10, 30 ill. 50 tagjának deriváltja.) Ez a példa is mutatja, hogy általában is pontos matematikai



odafigyelést igényel, hogy egy kifejtésre szabad-e valamilyen deriválással tagonként hatatni. Amikor pedig az derül ki, hogy nem, akkor nem szabad formális manipulációkba bocsátkozva ezt mégis „valamilyen értelemben” feltételezni, mert az eredmény értelmetlen lesz. Ehelyett körül kell nézni a matematika eszköztárában, hogy ilyen esetekben hogyan lehetséges kiszámolni, amiket ki szeretnénk.

Megjegyzendő, hogy létezik olyan eset, hogy egy térderiváló operátorral bederiválhassunk tagonként a másik szerinti kifejtésbe: akkor, ha a két operátor felcserélhető. Ilyenkor a két operátornak létezik közös sajátfüggvényrendszere, és ha ezen fejtettünk ki, akkor van lehetőségünk az egyikkel tagonként hatatni a másik szerinti kifejtésre. Az operátorok felcserélhetősége azonban értelmezési tartományuk figyelembe vételével értendő, úgymond kompatibilisnek kell lennie a két értelmezési tartománynak is. Peremfeltételek esetén, azaz több önadjungált értelmezési tartomány létezése esetén ezt különösen nehéz biztosítani [a (78)-nál látott példában is tulajdonképpen ezen vész el a dolog].

6. MATEMATIKA: EGYENLETMEGOLDÁS KIFEJTÉSSSEL

Az előző szakaszban tárgyalt kifejtés azért érdekes számunkra, mert az (57), (58), (59), (60) jellegű egyenletek megoldásához nyújt lehetőséget, legalábbis bizonyos esetekben.

Tekintsünk egy

$$(79) \quad \mathcal{T}_1 \psi = \mathcal{T}_2 \mathcal{L} \psi + \chi$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet, ahol $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ a ∂_t időderiváló operátor valamilyen polinomjai, $\mathcal{L}$ valamilyen térderiváló operátor, $\psi(t, \mathbf{r})$ az ismeretlen függvény, $\chi(t, \mathbf{r})$ pedig egy adott függvény.²² Ennek az $\mathcal{L}$ -nek létezzen olyan értelmezési tartománya a térváltozóban négyzetesen integrálható függvényeken belül, amelyen ő önadjungált. Ha peremfeltételek is fennállnak ψ -re, akkor azt is kirójuk, hogy e peremfeltételek legyenek időfüggetlenek, és tartozzon hozzájuk $\mathcal{L}$ egy önadjungált értelmezési tartománya.

Legyenek $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ az $\mathcal{L}$ operátor normált sajátfüggvényei $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sajátértékekkel ezen az önadjungált értelmezési tartományon.²³

A térváltozóban négyzetesen integrálható (és kellően sokszor deriválható ill. abszolút

²² $\chi = 0$ esetén egy ilyen alakú egyenlet a szétválasztható változójú differenciálegyenletek egy speciális esete. Szétválasztható változójú egy egyenlet, ha léteznek szorzat alakú megoldásai, ahol az egyik tényező csak az egyik, a másik a másik változó függvénye (több változó esetén pedig ha minden tényező csak egyetlen változó függvénye). $\chi \neq 0$ esetén *inhomogén szétválasztható változójú*nak nevezhetjük egyenletünket.

²³ Ha vannak folytonos eloszlású sajátértékek is, azokra az itt következő összegek integrálként írandók. Mint az már elhangzott, az ilyen integrálokra ugyanolyan/analóg számolási szabályok és tulajdonságok teljesülnek, mint a diszkrét sajátértékekhez tartozó összegekre.

folytonos) $\psi(t, \mathbf{r})$ megoldások kifejezhetők a sajátfüggvényrendszer szerint:

$$(80) \quad \psi(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varphi_n(\mathbf{r}), \quad c_n(t) = \int \varphi_n(\mathbf{r}) \psi(t, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

Az olyan megoldásokra, melyek minden t pillanatban benne is vannak a szóbanforgó önadjungált értelmezési tartományban, (80)-on felül

$$(81) \quad (\mathcal{L}\psi)(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) (\mathcal{L}\varphi_n)(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \lambda_n \varphi_n(\mathbf{r})$$

is igaz. Ha $\mathcal{T}_2\psi$ és $\mathcal{T}_2\psi$ is négyzetesen integrálhatóak a térváltozóban, akkor

$$(82) \quad (\mathcal{T}_1\psi)(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{T}_1 c_n)(t) \varphi_n(\mathbf{r}),$$

$$(83) \quad (\mathcal{T}_2\mathcal{L}\psi)(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{T}_2 c_n)(t) \lambda_n \varphi_n(\mathbf{r})$$

is teljesül. Hogyha pedig χ is négyzetesen integrálható a térváltozóban, akkor a

$$(84) \quad \chi(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \varphi_n(\mathbf{r}), \quad b_n(t) = \int \varphi_n(\mathbf{r}) \chi(t, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

kifejtéssel a (79) egyenlet az

$$(85) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{T}_1 c_n)(t) \varphi_n(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{T}_2 c_n)(t) \lambda_n \varphi_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \varphi_n(\mathbf{r})$$

módon is írható. Mivel pedig a $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ teljes és lineárisan független rendszer szerinti kifejtés egyértelmű L^2 -ben, ezért tagonként teljesül, hogy

$$(86) \quad \mathcal{T}_1 c_n = \lambda_n \mathcal{T}_2 c_n + b_n.$$

Ezeket a közönséges differenciálegyenleteket (melyek szerencsére mind ugyanolyan típusúak) kell tehát csak megoldanunk, illesztve a $\psi(t_0, \mathbf{r})$, $(\partial_t \psi)(t_0, \mathbf{r})$, ... kezdeti feltételekhez — ezeket kifejtve ugyanis a $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ függvényrendszeren, az együttthatók épp $c_n(t_0)$, $\dot{c}_n(t_0)$, ... lesznek.

Ha peremfeltételek is vannak, akkor az ahhoz illeszkedő sajátfüggvények szerinti kifejtés biztosítja, hogy a megoldás is eleget tesz nekik.

Mint látható, számos feltételezéssel éltünk az egyenletre és a megoldásra. Sajnos, ha ezeket nem tesszük meg, akkor valamely lépéseket nem tudjuk megtenni.²⁴ Ezek oka

²⁴ legalábbis az L^2 -beli kifejtések keretében. Más értelemben vett kifejtések esetleg többet is megengednek, de ha találunk is erősebb tulajdonságokkal rendelkező kifejtést, számítsunk rá, hogy annak alkalmazhatósága erősebb feltételekhez fog kötődni.

az előző szakasz alapján érthető, talán csak a peremfeltételek időfüggetlensége igényel magyarázatot. Ha ugyanis a peremfeltételek időfüggőek, akkor — hogy a sajátfüggvények szerinti kifejtés a peremen is konvergáljon, — a hozzájuk tartozó sajátfüggvények is időfüggőek kell legyenek [a (67)-nél mutatott példában: ha L egy időfüggő $L(t)$, az a (68)–(69) sajátfüggvényekben időfüggést okoz]. Ekkor viszont $\mathcal{T}_2$ a sajátfüggvényeket is deriválja, ami tönkreteszi a jobb oldal $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ szerint kifejtett alakját.

7. DINAMIKA: A REDUKÁLT EGYENLETEK SZÉTVÁLASZTHATÓSÁGA

Az (57), (58), (59), (60) redukált egyenletek mindegyike inhomogén szétválasztható változójú, ha $\mathcal{S}^d \mathcal{E}^s$ és $\mathcal{S}^s \mathcal{E}^d$ arányos egymással. [A $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ operátorok ugyanis mindnyájan e kettő bizonyos lineárkombinációi — ld. (28).] Amikor ez nem áll fenn, az (59) sebességegyenletből akkor is szétválasztható változójúakat nyerhetünk. Mielőtt azonban erre rátérnénk, idézzük fel a korábbi ötletet, hogy konkrét szimmetriák vagy egyéb speciális viszonyok teljesülése esetén eme általánosan fennálló redukált egyenletek mellett egyszerűbb speciális egyenleteket is le tudhatunk vezetni, és akkor elegendő azok megoldására koncentrálni. Emellett az általános feszültségegyenlet és deformációegyenlet deviatorikus és gömbi része is bizonyos speciális feladatok esetén kellemesen egyszerű lehet.

Lássuk tehát, hogy az általános szinten mit lehet tenni az (59) sebességegyenlettel. Egy $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ sebességmezőhöz hozzárendelhető a

$$(87) \quad \mathbf{v}^{(\text{rot}=0)}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{v} \cdot \nabla)(t, \mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}' =$$

$$(88) \quad = \left[-\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{v} \cdot \nabla)(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \right] \nabla$$

mező.²⁵ A jobb felső sarokba írt $^{(\text{rot}=0)}$ jelölés arra utal, hogy ez a vektormező rotációmentes. Ez a második, (88) alakból jól látszik, hiszen egy gradiens rotációja nulla. Belátható [az első, (87) alakból], hogy

$$(89) \quad \mathbf{v}^{(\text{rot}=0)} \cdot \nabla = \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

Ezért a

$$(90) \quad \mathbf{v}^{(\text{div}=0)} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^{(\text{rot}=0)}$$

vektormező pedig divergenciamentes. Ez tehát a $\mathbf{v}$ vektormező rotációmentes és divergenciamentes részre való felbontása. Ez a felbontás határozatlan, legalábbis egy helyfüggetlen (de tetszőleges időfüggésű) vektor erejéig. Egy divergenciamentes vektormezőből

²⁵ Itt fel kell tennünk $\mathbf{v}$ bizonyos kellően reguláris viselkedését, és divergenciájának végtelen felé való lecsengését.

egy rotációmentesbe átcsoportosítani ugyanis olyan vektormezőt lehet, amely divergenciamentes és rotációmentes is egyszerre. Egy rotációmentes vektormező ∇U alakú (ld. 14. oldal²⁶). Mivel emellett divergenciamentes is, ez $(\nabla U) \cdot \nabla = 0$ -t jelenti, azaz $\Delta U = 0$ -t. Ennek tetszőleges $\mathbf{a}(t)$ -vel megoldása az

$$(91) \quad U(t, \mathbf{r}) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{r}$$

függvény. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy elrendezésünk olyan, hogy valóban pontosan (91) alakúak a lehetséges megoldások. Ekkor $\nabla U = \mathbf{a}$ az átcsoportosítható vektormező, mely egy tetszőleges időfüggésű, helyfüggetlen vektor.

Maga $\mathbf{v}$ felbontásánál nem is lesz fontos az egyértelműség, a (87) és (90) definíciókkal fogunk tovább dolgozni. E mennyiségekkel (59) utolsó sora a

$$(92) \quad \rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \ddot{\mathbf{v}} = \mathcal{D}_2 (\mathbf{v}^{(\text{rot}=0)} \cdot \nabla) \nabla - \frac{1}{2} \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}^{(\text{div}=0)}) + \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \dot{\mathbf{f}}$$

alakba írható. Itt a jobb oldalon az első tag rotációja nulla, a második tagnak pedig a divergenciája nulla. Ezért ha vesszük a bal és a jobb oldal felbontását rotáció- és divergenciamentes részre, akkor a

$$(93) \quad \rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \ddot{\mathbf{v}}^{(\text{rot}=0)} = \mathcal{D}_2 (\mathbf{v}^{(\text{rot}=0)} \cdot \nabla) \nabla + \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \dot{\mathbf{f}}^{(\text{rot}=0)} + \mathbf{b}$$

és

$$(94) \quad \rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \ddot{\mathbf{v}}^{(\text{div}=0)} = -\frac{1}{2} \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}^{(\text{div}=0)}) + \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \dot{\mathbf{f}}^{(\text{div}=0)} - \mathbf{b}$$

komponenseket kapjuk, ahol $\mathbf{b}(t)$ egy tetszőleges időfüggő, helyfüggetlen vektor, mely a felbontás nem-egyértelműsége miatt lép fel, $\dot{\mathbf{f}}^{(\text{rot}=0)}$ és $\dot{\mathbf{f}}^{(\text{div}=0)}$ pedig $\dot{\mathbf{f}}$ felbontása a (87) és (90) képletekben látott módon. A (93) és (94) egyenletek pedig már (inhomogén) szétválasztható változójúak.

Mivel a $\rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{b}$ differenciálegyenletnek létezik $\mathbf{c}(t)$ megoldása, ezért a (93) egyenletet a $\mathbf{v}^{(\text{rot}=0)} - \mathbf{c}$ ismeretlenre, (94)-et pedig $\mathbf{v}^{(\text{div}=0)} + \mathbf{c}$ -re írva át, a $\mathbf{b}$ jelentette inhomogén tag el is tüntethető.

Érdekes kérdés, hogy a vektormezők divergenciamentes és rotációmentes részre való felbontása hogyan általánosítható tenzormezőkre, egyik tenzori „indexükben” (tenzori komponensükben), illetve egyszerre több „indexük” szerint is. Egy ilyen felbontás hasznos eszközt és látásmódot adhatna képleteinkhez (gondoljunk például a mozgásegyenletben szereplő $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ kifejezésre, vagy a $\nabla \times \boldsymbol{\epsilon} \times \nabla = \mathbf{0}$ tulajdonságra).

8. DINAMIKA: AZ EGYENLETEK MEGOLDÁSA

Következzenek most észrevételek, javaslatok az egyenletek — akár a redukáltak, akár

²⁶ mint ott is, most is tegyük fel, hogy a tértartomány, amit $\mathbf{r}$ befut, egyszeresen összefüggő

az esetleges speciális egyszerűbbek — megoldásához. Ezek a korábbi szakaszokban említettek következményei, ezért az itt írtak indoklásai, magyarázatai fentebb találhatóak.

- Olyan redukált (vagy más) egyenletre törekedjünk, amely (inhomogén) szétválasztható változójú. Ha peremfeltételek is vannak, akkor arra a változóra elimináljunk-redukáljunk, amire a peremfeltételek meg vannak adva, mert a többi várhatóan a megoldás valamilyen térderiváltjaként adódna, de a kifejtés várhatóan nem lesz tagonként deriválható (és pláne nem várható, hogy a remélt értékhez konvergál a peremen). Csak ha két térderiváló operátor felcserélhető, akkor deriválhatunk be tagonként az egyik szerinti kifejtésben a másikkal (és csak akkor, ha a két operátor közös sajátfüggvény-rendszerén fejtettünk ki).
- A minket érdeklő megoldás sajnos nem feltétlenül négyzetesen integrálható. Erre gyanakodhatunk például, ha a kezdeti feltétel, vagy a várt nagy idejű aszimptotikus végeredmény²⁷ nem négyzetesen integrálható. Fizikailag a négyzetek — mozgási ill. rugalmas — energiákhoz kötődnek (pl. $\mathbf{v}^2$, $\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^2$, $\text{tr} \boldsymbol{\epsilon}^2$), ezért hogyha fizikailag meg tudjuk mondani, véges vagy végtelen energiák várhatóak a rendszerben, az is segít annak megtipplésében, hogy fenn fog-e állni négyzetes integrálhatóság. Ha nem, akkor abban reménykedhetünk, hogy legalább a változások véges energiájúak lesznek. Ilyenkor vonjuk le a keresett mennyiségből a kezdeti feltételbeli értékét, vagy a várt nagy idejű aszimptotikus végeredményt. Ha e kettő különbsége nem négyzetesen integrálható, akkor baj van.

Például egy hengerszimmetriájú feladatban a henger tengelye irányú eltolásokra invariancia van, ezért ha a valaminek a tengelyre merőleges síkbeli integrálja nemnulla, akkor a tengely irányú integrálástól végtelen lesz a térintegrálja. Ilyenkor viszont abban reménykedhetünk, hogy a szimmetriatengelyre merőleges síkban négyzetes integrálhatóság van, és hogy ez a fajta kétdimenziós négyzetes integrálhatóság elég lesz a megoldáshoz.

- Ha a peremfeltétel időfüggő, vonjuk le a keresett ismeretlen függvényből egy olyan kiválasztott segéd-függvényt, ami ugyanilyen peremfeltételű, hogy a különbségre az időfüggetlenül nulla peremfeltétel teljesüljön. Ezt a levonást az esetleges más levonással összhangban tegyük: a négyzetes integrálhatóság is biztosítva legyen. Arra is ügyeljünk, hogy az egyenlet szétválasztható változójú maradjon.

A sok nehézség felvázolása után lássunk egy konkrét esetet, ahol mindezek nem lépnek fel. Tekintsünk egy végtelen közeget, egy tetszőleges időfüggetlen $\mathbf{f}$ térfogati erőmezőben, és egyelőre egy tetszőleges (17)–(18) reológiával. Az egyszerűség kedvéért nem

²⁷ A reológiai konstitúciós összefüggések csillapításokat szoktak leírni, így a rendszer sok esetben egy statikus egyensúlyi, rugalmasságtani állapothoz tart.

magukat (93)-at és (94)-et, hanem egy-egy egyszerűbb következményüket oldjuk meg most. Képezzük (93) divergenciáját:

$$(95) \quad \rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \left(\mathbf{v}^{(\text{rot}=0)} \cdot \nabla \right) = \mathcal{D}_2 \triangle \left(\mathbf{v}^{(\text{rot}=0)} \cdot \nabla \right);$$

továbbá (94) rotációját (ld. a 16. lábjegyzetbeli azonosságot is):

$$(96) \quad \rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \left(\nabla \times \mathbf{v}^{(\text{div}=0)} \right) = \frac{1}{2} \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \triangle \left(\nabla \times \mathbf{v}^{(\text{div}=0)} \right).$$

E két származtatott egyenlet egy-egy hullámegyenlet, csak reológiai csillapításokkal tarkítva (a rugalmasságtani longitudinális ill. transzverzális hullámok reológiai általánosításai).

Mindkét hullámegyenlet négyzetesen integrálható megoldásait megkaphatjuk a $-\triangle$ térderiváló operátor (térbeli DIRAC-deltára) normált

$$(97) \quad \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \lambda_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^2 = k^2$$

sajátfüggvényrendszere szerinti kifejtésben. A (86) egyenlet a

$$(98) \quad \rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s c_{\mathbf{k}} = k^2 \mathcal{D}_2 c_{\mathbf{k}}$$

illetve

$$(99) \quad \rho \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s c_{\mathbf{k}} = k^2 \frac{1}{2} \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d c_{\mathbf{k}}$$

alakot ölti. Mindkettő állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet lévén,

$$(100) \quad c_{\mathbf{k}}(t) = \gamma_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t}$$

alakban kereshetjük a megoldásaikat.²⁸ A (100) alakot behelyettesítve (98)-ba ill. (99)-be, mivel sajnos ω -t nem tudjuk expliciten kifejezni $\mathbf{k}$ függvényeként [mely $\omega(\mathbf{k})$ függvényt diszperziós relációnak hívják], ezért fejezzük ki k^2 -et ω függvényeként:

$$(101) \quad k^2 = \frac{3\rho\omega^2 \left[\sum_{j=0}^{s^s} T_j^s(-i\omega)^j \right] \left[\sum_{l=0}^{s^d} T_l^d(-i\omega)^l \right]}{2 \left[\sum_{m=0}^{s^s} T_m^s(-i\omega)^m \right] \left[\sum_{n=0}^{e^d} U_n^d(-i\omega)^n \right] + \left[\sum_{p=0}^{s^d} T_p^d(-i\omega)^p \right] \left[\sum_{q=0}^{e^s} U_q^s(-i\omega)^q \right]}$$

illetve

$$(102) \quad k^2 = \frac{2\rho\omega^2 \left[\sum_{j=0}^{s^s} T_j^s(-i\omega)^j \right] \left[\sum_{l=0}^{s^d} T_l^d(-i\omega)^l \right]}{\left[\sum_{m=0}^{s^s} T_m^s(-i\omega)^m \right] \left[\sum_{n=0}^{e^d} U_n^d(-i\omega)^n \right]} = \frac{2\rho\omega^2 \sum_{l=0}^{s^d} T_l^d(-i\omega)^l}{\sum_{n=0}^{e^d} U_n^d(-i\omega)^n}.$$

²⁸ legalábbis a nem-elfajulóakat: a reológiai együtthatók olyan speciális együttállásai esetén, amikor a karakterisztikus egyenletnek vannak többszörös gyökei, olyankor $te^{i\omega t}$, $t^2 e^{i\omega t}$, ... megoldások is lesznek.

Vegyük észre, hogy utóbbi, a transzverzális esetben a csak a torzulási konstitúciós reláció, (17) játszik szerepet, a gömbi, (18) nem.

A (101) és (102) összefüggések meglehetősen bonyolultak. Vegyük először a rugalmasságtan esetét: ($\mathcal{S}^d = \mathcal{S}^s = 1$, $\mathcal{E}^d = U_0^d$, $\mathcal{E}^s = U_0^s$). Ekkor

$$(103) \quad k^2 = \frac{3\rho\omega^2}{2U_0^d + U_0^s} \implies \omega = \pm \sqrt{\frac{2U_0^d + U_0^s}{3\rho}} k$$

illetve

$$(104) \quad k^2 = \frac{2\rho\omega^2}{U_0^d} \implies \omega = \pm \sqrt{\frac{U_0^d}{2\rho}} k$$

diszperziós relációkra egyszerűsödik a helyzet. Ilyenkor a jelsebesség nagysága, ω/k ,²⁹ és a $d\omega/d\mathbf{k}$ csoportsebesség nagysága ugyanaz a $\mathbf{k}$ -független állandó, mind a longitudinális (103), mind a transzverzális (104) esetben.

Ha reológiai esetekre térünk át, akkor (101) és (102) megoldásai ω -ra általában komplexek. Ilyenkor a csoportsebességet nem is értelmezhetjük a szokásos $d\omega/d\mathbf{k}$ kifejezéssel. Ezért ismételjük át a csoportsebesség értelmezését, de olyan módon, hogy az komplex ω esetére is működjön. Tekintsük egy olyan ψ megoldás

$$(105) \quad \begin{aligned} \psi(t, \mathbf{r}) &= \int \gamma_{\mathbf{k}} e^{-i\omega(\mathbf{k})t} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \gamma_{\mathbf{k}} e^{i[\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t]} d^3\mathbf{k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \gamma_{\mathbf{k}} e^{\text{Im}\omega(\mathbf{k})t} e^{i[\mathbf{k}\mathbf{r} - \text{Re}\omega(\mathbf{k})t]} d^3\mathbf{k} \end{aligned}$$

kifejtését, amelyben $\gamma_{\mathbf{k}}$ valós és egy $\mathbf{k}_0$ köré koncentrálódik (például egy $\mathbf{k}_0$ maximumú GAUSS-görbe profilú függvény). Ekkor az integrálban természetesen $\mathbf{k}_0$ e környezete dominál. Emellett az integrandus egy $\mathbf{k}$ -függő fázisú komplex szám, és a stacionárius fázis módszere értelmében egy ilyen integrálban az olyan $\mathbf{k}$ vidéke ad csak jelentős járulékot, ahol a fázis $\mathbf{k}$ -függése éppen „leáll”, azaz ahol a fázis $\mathbf{k}$ szerinti deriváltja nulla. Ezért $\psi(t, \mathbf{r})$ olyan t és $\mathbf{r}$ értékekre jelentős, ahol ez a két domináló környezet ugyanaz, tehát ahol a fázis $\mathbf{k}$ szerinti deriváltja épp $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ -ban nulla:

$$(106) \quad \mathbf{r} - \frac{d\text{Re}\omega}{d\mathbf{k}}(\mathbf{k}_0)t = 0.$$

Így t -kor ψ maximuma a

$$(107) \quad \frac{d\text{Re}\omega}{d\mathbf{k}}(\mathbf{k}_0)t$$

helyen van, mely maximumhely az idő függvényében vándorol, a

$$(108) \quad \frac{d\text{Re}\omega}{d\mathbf{k}}(\mathbf{k}_0)$$

²⁹ A jelsebességnek mint vektornak $\omega\mathbf{k}/k^2$ tekinthető.

sebességgel. A csoportsebesség, azaz egy hullámcsomag (avagy „csoport”) tetejének vándorlási sebessége tehát a (108) kifejezés, mely komplex ω esetén is értelmezve lett tehát.³⁰

Ezek után tekintsünk második példaként egy POYNTING-THOMSON-modellt, és az átláthatóság kedvéért csak a transzverzális egyenletet vizsgáljuk. Ekkor az $\mathcal{S}^d = 1 + T_1^d \partial_t$, $\mathcal{E}^d = U_0^d + U_1^d \partial_t$, konstitúciós operátorokkal van dolgunk, (102) pedig

$$(109) \quad k^2 = \frac{2\rho\omega^2 [1 + T_l^d(-i\omega)]}{U_0^d + U_1^d(-i\omega)} = \frac{2\rho\omega^2}{U_0^d} \frac{1 + T_l^d(-i\omega)}{1 + \frac{U_1^d}{U_0^d}(-i\omega)}$$

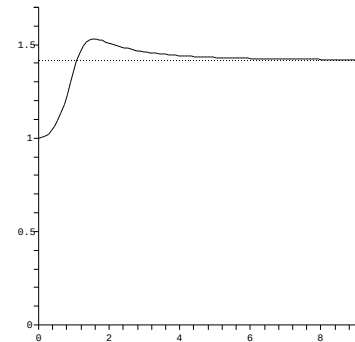
lesz. Ez a képlet kis ω [a reológiai időskálákhoz képest kicsi, azaz $|\omega| \ll T_l^d, \frac{U_1^d}{U_0^d}$] esetén a rugalmasságtani (104)-re vezet, a lassú folyamatok tehát reológiamentesen zajlanak. Ezzel ellentétben, a $|\text{Re}\omega| \gg T_l^d, \frac{U_1^d}{U_0^d}$ gyors folyamatok esetén

$$(110) \quad \begin{aligned} \frac{U_0^d}{2\rho} k^2 &= \omega^2 \frac{1 + T_l^d(-i\omega)}{1 + \frac{U_1^d}{U_0^d}(-i\omega)} = (\text{Re}\omega + i\text{Im}\omega)^2 \frac{T_1^d \text{Re}\omega + i(1 + T_1^d \text{Im}\omega)}{\frac{U_1^d}{U_0^d} \text{Re}\omega + i(1 + \frac{U_1^d}{U_0^d} \text{Im}\omega)} = \\ &= \frac{T_1^d}{\frac{U_1^d}{U_0^d}} (\text{Re}\omega)^2 \left[1 + \frac{i}{\text{Re}\omega} \left(2\text{Im}\omega + \frac{1}{T_1^d} - \frac{U_0^d}{U_1^d} \right) + O\left(\frac{1}{(\text{Re}\omega)^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

A bal oldal valós, ezért a jobb oldal képzetes része is nulla kell legyen. Ha feltételezzük, hogy $|\text{Im}\omega| \ll |\text{Re}\omega|$, akkor ez $2\text{Im}\omega + \frac{1}{T_1^d} - \frac{U_0^d}{U_1^d}$ nulla mivoltát³¹ jelenti. Innen $\text{Im}\omega \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{U_0^d}{U_1^d} - \frac{1}{T_1^d} \right)$, azaz $\text{Im}\omega$ egy bizonyos véges értékhez tart. Ez azt mutatja, hogy $|\text{Im}\omega| \ll |\text{Re}\omega|$ feltevésünk konzisztens volt. Erre támaszkodva (110) azt mutatja, hogy $\frac{U_0^d}{2\rho} k^2$ egyre pontosabban $\frac{T_1^d}{U_1^d/U_0^d} (\text{Re}\omega)^2$ -tel lesz egyenlő. Eszerint a (108) csoportsebesség nagysága $\text{Re}\omega \rightarrow \infty$ során a

$$(111) \quad \sqrt{\frac{U_1^d/U_0^d}{T_1^d}} \sqrt{\frac{U_0^d}{2\rho}}$$

értékhez tart. Mivel termodinamikai megfontolásokból [VÁN-ASSZONYI (2006)], [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007)] $U_1^d/U_0^d \geq T_1^d$, ezért az aszimptotikusan nagy frekvenciájú hullámok csoportsebessége nagyobb, mint az aszimptotikusan kisfrekvenciásoké. A (109) egyenletet numerikusan is megoldhatjuk, melynek eredménye egyezik a kis- és nagyfrekvenciás számítási eredményünkkel, e két szélsőséges jelenségtartomány között pedig a csoportsebesség nagyságának nemtriviális



³⁰ Általánosabban, ha $\gamma_{\mathbf{k}}$ nem valós, de abszolút értéke továbbra is egy $\mathbf{k}_0$ köré koncentrálódik, és e hullámszám-környezetben $\gamma_{\mathbf{k}}$ komplex fázisa $\mathbf{k}$ -nak jó közelítéssel lineáris függvénye, az csak annyi változást okoz, hogy a hullámcsomag teteje $t = 0$ -kor $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ helyett egy valamilyen $\mathbf{r}_0$ helyen jár.

³¹ helyesebben: nullához tartását $\text{Re}\omega \rightarrow \infty$ során

alakulására hívja föl a figyelmet. Az itt mellékelt ábrán látható a számított csoportsebesség $\sqrt{U_0^d/2\rho}$ egységekben, $\text{Re}\omega$ függvényében ($\frac{U_1^d}{U_0^d}$ egységekben) [az ábra $T_1^d = \frac{1}{2} \frac{U_1^d}{U_0^d}$ esetén készült]. A longitudinális csoportsebesség függvénygörbéje a magasabbfokú polinomok miatt jóval cirkalmasabb menetű, tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell esetén pedig már a transzverzális függvénymenet is jóval bonyolultabb.

Mindamellett tartsuk szem előtt, hogy a csoportsebesség egy viszonylag hozzávetőleges, közelítő mennyiség, csak körülbelüli tájékoztatást ad a folyamatok sebességéről. Amikor pedig peremfeltételekkel határolt tartományt foglal el közegünk, ott a peremek miatt másak lesznek a sajátfüggvények, ezért a hullámterjedés is. Egy laboratóriumi próbatestre bocsátott ultrahangos terjedésssebesség-mérésnél pedig a jel bebocsátása időfüggően gerjesztett peremfeltételt jelent, a detektálás pedig nem egy hullámcsomag tetejének érkezését figyeli, hanem inkább az érkezett jel felfutását, ezért ott jelentősen más számításokra van szükség a mért sebességérték anyagi paramétereitől való függésének megállapításához.

9. EGYENSÚLYI KÖZELÍTÉS : EGZISZTENCIA, UNICITÁS

A (32)–(35) egyenletrendszer egyensúlyi közelítése alatt az értendő, amikor (33) bal oldalát nullának vesszük:

$$(112) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = (\mathbf{v} \circ \nabla)^S,$$

$$(113) \quad \mathbf{0} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \mathbf{f},$$

$$(114) \quad \mathcal{S}^d \boldsymbol{\sigma}^d = \mathcal{E}^d \boldsymbol{\epsilon}^d,$$

$$(115) \quad \mathcal{S}^s \boldsymbol{\sigma}^s = \mathcal{E}^s \boldsymbol{\epsilon}^s.$$

Ezzel a hullámokat és más gyors jelenségeket elveszítjük: olyan tranzienseket, amik lecsengenek, ám addig nagy változásokat — így képlékenyedést vagy tönkremenetelt — is okozhatnak. A gyors összeugrások/kitágulások lefolyását sem tudjuk nyomon követni. Ezek a gyors változások elfutó jellegűek (hullámszerűen odébbhaladnak a közegben), míg a reológiaiak helybenmaradóak.³²

Az egyensúlyi közelítést hívják kvázistatikusnak is, de a „statika” kifejezés alatt nemcsak az erők egyensúlyát szokás érteni, hanem beleértik a sebességek nulla voltát is.³³ Ezért a „kvázistatikus” szóval az a probléma, hogy nem világos belőle, hogy mi benne a

³² legalábbis eme lokális konstitúciós relációjú reológiai modelleink esetén. Ha a konstitúciós összefüggések például a deformáció gradiensét is tartalmazzák [VÁN (2004)], [VÁN (2009)], akkor egyensúlyi közelítésben is kaphatunk vándorló változásokat.

³³ Ebből az is látszik, hogy a statikusság egy vonatkoztatási rendszerhez kötődő fogalom: egy közegfolyamat akkor statikus, ha létezik inerciarendszer, amelyhez képest nyugvó a közeg mozgása, és ezt a nyugvó mozgást az erők (és a forgatónyomatékok) egyensúlya tartósan fenn is tartja.

kvázi, és mi benne a statikus. A mechanikai egyensúly áll-e fenn továbbra is, és a sebesség inerciális volta nem? Vagy fordítva? Vagy mindkettő csak egy kicsit sérül? Ráadásul az egyensúlyi közelítés kivitelezéséhez nem kell a sebességre semmit sem mondani, akármi-lyen $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ mellett kiróható (csak a gyorsulásoknak kell elég kicsinek lenni ahhoz, hogy a $\rho \dot{\mathbf{v}}$ tagot eldobhassuk).

Megjegyzendő, hogy egyensúly alatt itt mechanikai egyensúly van értve: az erők egyensúlya (mely mellett a forgatónyomatékok egyensúlya a feszültségtenzor szimmetri-ája alapján már teljesül). A termodinamikai aspektusok itt el vannak hanyagolva.

Fontos kérdés, hogy mihez képest legyen a $\rho \dot{\mathbf{v}}$ tag annyira kicsi, hogy eldobhassuk. A biztonságos válasz az, hogy $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ -hoz és $\mathbf{f}$ -hez képest egyaránt kicsinek kell lennie. Amikor térfogati erő nincs, akkor nehezebb helyzetben vagyunk. Azt mégsem mondhatjuk, hogy $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ -hoz képest, hiszen ha $\rho \dot{\mathbf{v}}$ -t eldobtuk, akkor a $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \mathbf{0}$ egyenletet oldjuk meg, és ha ennek megoldását jó közelítésnek tartjuk, akkor eszerint $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ valóban „meglehetősen” nulla. Sőt, pont annyira nemnulla, amennyire $\rho \dot{\mathbf{v}}$ nemnulla (hiszen a $\rho \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ egyenlet szerint egyenlők).

Már az is pikáns kérdés, hogy mi a matematikai feltétele annak, hogy egy térfogati erő elhanyagolható. Erre egy első válasz az lehet, hogy az $\mathbf{f}$ térfogati erőhöz többnyire rendelhető egy $\boldsymbol{\sigma}^f$ „effektív feszültségtenzor” (ld. 3. szakasz), és ez kell elhanyagolható legyen a közeg peremén ható nyomásokhoz képest. Sajnos, $\boldsymbol{\sigma}^f$ definíciója nem egyértelmű adott $\mathbf{f}$ esetén. Emellett ha egy függvény jóval kisebb egy másiknál, a deriváltja (így pl. a divergenciája) nem lesz szükségképpen jóval kisebb a másik deriváltjánál.³⁴ Ezért egy kevésbé praktikus válasszal kellhet beérnünk: meg kell oldani a feladatot $\mathbf{f}$ nélkül, és ha a kapott $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ jóval nagyobb, bizonyul $\mathbf{f}$ -nél, akkor jogosan hagyjuk el.

A $\rho \dot{\mathbf{v}}$ tag elhagyása is talán akkor tehető meg, ha a nélküle megoldott problémából kiszámolható $\rho \dot{\mathbf{v}}$ valóban jóval kisebb a kialakuló $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ -nál. Természetesen jó volna ennél hasznosabb kritériumot is felállítani, de ez egyelőre nyitott kérdés, mely megbízható választ igényel.

Megjegyezhető, hogy gyors, periodikus zavarok lassú változásokat (drift-et) is okozhatnak. Az ilyenek közelítő tárgyalásához az ún. adiabatikus közelítés és a FLOQUET-módszer is alkalmazható, melyek valamilyen értelemben kiátlagolnak a gyors változásokra. Érdemes volna feltárni, hogy ezek a módszerek hozzásegíthetnek-e az egyensúlyi közelítés jobb megértéséhez.

A (112)–(115) egyenletrendszerben nincs már olyan egyenlet, mely $\mathbf{v}$ -t meghatározná/időfejlesztené. $\boldsymbol{\epsilon}(t, \mathbf{r})$ ismeretében (32)-ből kell rekonstruálnunk az 1. szakaszban láttott módon, a (10) CESÀRO-formulát $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ -ra alkalmazva, és a fellépő határozatlanságokat

³⁴ Példa: $A_1(2 + \sin k_1 x)$ és $A_2(2 + \sin k_2 x)$, ahol $A_1 \ll A_2$, de $k_1 \gg k_2$ úgy, hogy $A_1 k_1 > A_2 k_2$.

valamilyen többlet-információ segítségével (peremfeltételek, szimmetriák) rögzíteni.

A (112)–(115) egyenletrendszer megoldásának létezését (egzisztenciáját) jelen írás nem vizsgálja. Ez vélhetőleg annak ötvözéseként lenne kivitelezhető, ahogyan a rugalmasságtani egzisztencia bizonyítható, és ahogy az alább következő unicitás vizsgálható reológiai esetekben. A megoldás egyértelműségének (unicitásának) bizonyítására viszont sor kerül itt. A különböző reológiai modellek különbözőképpen tűnnek viselkedni unicitás szempontjából, ezért a különböző modellek egyesével lesznek sorra véve.

Az unicitásbizonyítások prototípusa a rugalmasságtani eset lesz, tekintsük tehát először ezt az $\mathcal{S}^d = \mathcal{S}^s = 1$, $\mathcal{E}^d = U_0^d$, $\mathcal{E}^s = U_0^s$ esetet, azaz a

$$(116) \quad \sigma^d = U_0^d \epsilon^d, \quad \sigma^s = U_0^s \epsilon^s$$

konstitúciós összefüggéseket.³⁵

Tételezzük fel először, hogy közegünk egy olyan tartományt tölt ki, melynek alakja és pereme olyan, hogy rá a GAUSS-tétel (vektormező divergenciájának térfogati integrálja egyezik a vektormező felületi integráljával) alkalmazható. Tegyük föl továbbá, hogy σ_1 , ϵ_1 , $\mathbf{v}_1$ is megoldása a (112)–(115) egyenletrendszernek és valamilyen kirótt peremfeltételeknek, és σ_2 , ϵ_2 , $\mathbf{v}_2$ szintén megoldása ugyanennek a feladatnak. Tekintsük ϵ_1 egy $\mathbf{u}_1^{\text{CAUCHY}}$ CAUCHY-potenciálját — ez lehet egy t_0 -tól mért $(\mathbf{u}_{t_0})_1$ elmozdulás is, de lehet bármely más lehetséges CAUCHY-potenciál is. Ugyanígy vegyünk egy $\mathbf{u}_2^{\text{CAUCHY}}$ CAUCHY-potenciált ϵ_2 -höz. Ezek után vezessük be a

$$(117) \quad \sigma_\Delta = \sigma_2 - \sigma_1, \quad \epsilon_\Delta = \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad \mathbf{v}_\Delta = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}} = \mathbf{u}_2^{\text{CAUCHY}} - \mathbf{u}_1^{\text{CAUCHY}}$$

jelöléseket.

Eme előkészületek után vegyük a következő levezetést:

$$(118) \quad \begin{aligned} (\sigma_\Delta \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}}) \cdot \nabla &= (\sigma_\Delta \cdot \nabla) \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}} + \sigma_\Delta : (\mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}} \circ \nabla) = \\ &= \sigma_\Delta : (\mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}} \circ \nabla)^S = \sigma_\Delta : \epsilon_\Delta = (\sigma_\Delta^d + \sigma_\Delta^s) : (\epsilon_\Delta^d + \epsilon_\Delta^s) = \\ &= \sigma_\Delta^d : \epsilon_\Delta^d + \sigma_\Delta^s : \epsilon_\Delta^s = U_0^d \epsilon_\Delta^d : \epsilon_\Delta^d + U_0^s \epsilon_\Delta^s : \epsilon_\Delta^s, \end{aligned}$$

ahol az $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ jelölés $\text{tr} \mathbf{AB}$ -t jelenti, és kihasználtuk többek között (113)-at, σ_Δ szimmetrikusságát, és hogy egy deviatorikus és egy gömbi tenzor szorzatának nyoma nulla. Ha U_0^d és U_0^s nemnegatívak — ami összhangban van fizikai tapasztalatainkkal —, akkor egy pozitív definit³⁶ kifejezés alakult ki levezetésünk során.

³⁵ De nem egy, egyes könyvekben előforduló fél-fizikai, fél-matematikai, fizikailag helytelen, matematikailag pedig nem kielégítő érvelgetéssel fogjuk tárgyalni, hanem egy tisztán matematikai gondolatmenet révén, [MATOLCSI (2009)] felhasználásával.

³⁶ ez alatt azt értjük: nemnegatív értékeket felvevő kifejezés. A csakis pozitív kifejezéseket szigorúan pozitív definitnek fogjuk hívni.

Tegyük fel ezután még, hogy feladatunkhoz olyan peremfeltételek vannak adva, amelyek biztosítják, hogy a peremen $\sigma_\Delta \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}}$ normális irányú komponense nulla legyen. Ilyenek a gyakorlatban előforduló peremfeltételek, egyszerű példaként gondoljunk arra az esetre, amikor a peremfelületen ható felületi erőssűrűség, $\sigma \mathbf{n}$ egy megszabott — általában időfüggő és helyfüggő — érték, ahol $\mathbf{n}$ a peremfelület normálvektorát jelöli. Ha tehát σ_1 és σ_2 egyaránt eleget tesz ennek a feltételnek, akkor $\sigma_\Delta \mathbf{n}$ nulla, melyből

$$(119) \quad \mathbf{n} \sigma_\Delta \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}} = \mathbf{0}$$

is következik. Ekkor (118) tértartományunkra vett integrálját véve, $(\sigma_\Delta \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}}) \cdot \nabla$ térintegrálja a GAUSS-tétel miatt $\mathbf{n} \sigma_\Delta \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}}$ peremre vett felületi integráljával egyenlő, mely (119) miatt nulla. Eszerint a (118) során kapott pozitív definit kifejezés térintegrálja nulla, amiből az következik, hogy e kifejezés minden térpontban nulla (minden időpillanatban). Emiatt ϵ_Δ^d és ϵ_Δ^s is mindenhol és mindenkor nulla. Így összegük, ϵ_Δ is az, másrészt a (116) összefüggések alapján σ_Δ^d és σ_Δ^s , így σ_Δ is mindenhol és mindenkor nulla. Eszerint $\sigma_1 = \sigma_2$ és $\epsilon_1 = \epsilon_2$. $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ viszonyáról nem tudunk bizonyítani semmit, ami nem csoda, tekintve, hogy a (112)–(115) egyenletrendszer sem határozza meg $\mathbf{v}$ -t (tudjuk, a CESÀRO-formula jelentette határozatlanság...).

Ha a tértartományunk valamilyen irányokban végtelen, akkor a megoldás egyértelműségéhez peremfeltétel-szerűségként valamilyen aszimptotikus viselkedést kell kiróni ezekben az irányokban. Konkrétabban: olyan aszimptotikus viselkedésre van szükség, hogy ha egy korlátos tartományra vett GAUSS-tétellel indulunk, majd a tartomány határát a közeg végesben levő peremeihez illetve a végtelen felé tartatjuk, akkor a végtelen felé tartó felületi integrál nullához kell tartson. Az egyértelműség tehát az olyan aszimptotikus viselkedésű megoldások között lesz bizonyítható, melyek különbségeire vett $\mathbf{n} \sigma_\Delta \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}}$ a felület végtelenbe tartásakor nullához tart.

Ugyan a rugalmasságtani eset tárgyalásához nincs közvetlenül szükség rá, a reológiai esetekhez módszertanilag hasznos lesz a rugalmasságtani unicitás egy másik bizonyítása. Ez annyiban tér el az előzőtől, hogy a (118) levezetésben látott lépéseket $(\sigma_\Delta \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}}) \cdot \nabla$ helyett $(\sigma_\Delta \mathbf{v}_\Delta) \cdot \nabla$ -ra hajtjuk végre. Az eredmény

$$(120) \quad (\sigma_\Delta \mathbf{v}_\Delta) \cdot \nabla = U_0^d \epsilon_\Delta^d : \dot{\epsilon}_\Delta^d + U_0^s \epsilon_\Delta^s : \dot{\epsilon}_\Delta^s = \left(\frac{U_0^d}{2} \epsilon_\Delta^d : \epsilon_\Delta^d + \frac{U_0^s}{2} \epsilon_\Delta^s : \epsilon_\Delta^s \right) \cdot \dot{\epsilon}_\Delta,$$

mely egy pozitív definit mennyiség időderiváltja. A GAUSS-tételes érveléssel, ha $\mathbf{n} \sigma_\Delta \mathbf{v}_\Delta$ a peremen eltűnik (az esetleges végtelen irányokba pedig nullához tart a felületi integrálja), akkor eredményként (120) jobb oldalának pontonkénti (és mindenkori) nulla voltát kapjuk. Ha a feladathoz ismerjük a $\sigma(t_0, \mathbf{r})$, $\epsilon(t_0, \mathbf{r})$ kezdeti feltételeket, akkor az ezeket kielégítő σ_1 , ϵ_1 és σ_2 , ϵ_2 megoldásokra $\sigma_\Delta(t_0, \mathbf{r})$ és $\epsilon_\Delta(t_0, \mathbf{r})$ nulla. Ezért t_0 -kor a (120) jobb oldalán a zárójelben álló pozitív definit mennyiség nulla. Ha pedig a nulláról indul,

és nulla az időderiváltja is, akkor később is mindig nulla. Innen ismét $\boldsymbol{\epsilon}_\Delta$ nulla volta, abból pedig $\boldsymbol{\sigma}_\Delta$ nulla volta következik.

Noha egyelőre öncélúnak tűnik, a reológiai esetekhez értékes eljárásnak fog bizonyulni a rugalmasságtani eset két eddigi bizonyításának egy kombinálása is. Ennek során a tetszőleges α, β nemnegatív együtthatókkal (118) és (120) egy ötvözetét tekintjük:

$$(121) \quad \begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma}_\Delta (\alpha \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}} + \beta \mathbf{v}_\Delta)] \cdot \nabla = & \alpha \left(U_0^d \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^d : \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^d + U_0^s \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^s : \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^s \right) + \\ & + \beta \left(\frac{U_0^d}{2} \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^d : \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^d + \frac{U_0^s}{2} \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^s : \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^s \right). \end{aligned}$$

Ami itt módszertanilag érdekes, az az, hogy a jobb oldal ezúttal egy pozitív definit mennyiségnek (jelöljük röviden P -vel) és másik egy pozitív definit mennyiség (rövid jelölése: Q) időderiváltjának az összege. Egy ilyen $P + \dot{Q}$ térintegráljának, rövid jelöléssel $\int (P + \dot{Q})$ -nak a nullasága³⁷ esetén a következőképpen érvelhetünk. $P \geq 0$, ezért $\int P \geq 0$, ahonnan $\int \dot{Q} = \partial_t \int Q \leq 0$. Ha a kezdeti feltételek miatt Q t_0 -kor nulla, akkor $\int Q$ is az, így később $\int Q \leq 0$. Mivel viszont emellett Q egy pozitív definit mennyiség, ezért $Q \geq 0$, és így $\int Q \geq 0$ is fennáll. E kettő úgy teljesülhet egyszerre, ha $\int Q = 0$ minden $t \geq t_0$ -kor. Q pozitív definit volta miatt ez $Q = 0$ -t jelent. Továbbá mivel $\int Q$ minden t_0 -nál későbbi pillanatban nulla, ezért az időderiváltja is. Ezért $\int (P + \dot{Q}) = \int P + \partial_t \int Q = \int P$ nullasága a pozitív definit P nulla voltát vonja maga után. Ezután ki kell értékelni, hogy P és Q nullasága mit jelent $\boldsymbol{\epsilon}_\Delta$ -ra és $\boldsymbol{\sigma}_\Delta$ -ra, az pedig a megoldás egyértelműségére.

Most már hozzáfoghatunk az egyes reológiai modellek unicitásának bizonyításához. A KELVIN-KELVIN-modell esetén, mely alatt az értendő, hogy mind a deviatorikus, mind a gömbi konstitúciós összefüggés egy-egy KELVIN-modell:

$$(122) \quad \boldsymbol{\sigma}^d = U_0^d \boldsymbol{\epsilon}^d + U_1^d \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^s = U_0^s \boldsymbol{\epsilon}^s + U_1^s \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s$$

(melyekben az együtthatók nemnegatívak), a fentiekkel analóg lépésekkel

$$(123) \quad (\boldsymbol{\sigma}_\Delta \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}}) \cdot \nabla = \left(U_0^d \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^d : \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^d + U_0^s \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^s : \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^s \right) + \left(\frac{U_1^d}{2} \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^d : \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^d + \frac{U_1^s}{2} \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^s : \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^s \right)$$

révén, ha a feladat peremfeltételei miatt $\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma}_\Delta \mathbf{v}_\Delta$ a peremeken eltűnik (ill. a végtelen felé alkalmasan cseng le — ezt a továbbiakban értsük hozzá a peremeken eltűnéshez), akkor $\boldsymbol{\epsilon}$ t_0 -kori kezdeti feltétele egyértelműre rögzíti az egyenletrendszer $\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ megoldását.

Következzen most a POYNTING-THOMSON-POYNTING-THOMSON-modell:

$$(124) \quad \boldsymbol{\sigma}^d + T_1^d \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d = U_0^d \boldsymbol{\epsilon}^d + U_1^d \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^s + T_1^s \dot{\boldsymbol{\sigma}}^s = U_0^s \boldsymbol{\epsilon}^s + U_1^s \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s,$$

³⁷ melyet $\mathbf{n} [\boldsymbol{\sigma}_\Delta (\alpha \mathbf{u}_\Delta^{\text{CAUCHY}} + \beta \mathbf{v}_\Delta)]$ peremeken nulla volta ill. végtelen felé való alkalmas eltűnése biztosítana

csupa nemnegatív együtthatóval. Itt az

(125)

$$(\mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \sigma_\Delta \mathbf{v}_\Delta) \cdot \nabla = (U_1^d + T_1^s U_0^d) \dot{\epsilon}_\Delta^d : \dot{\epsilon}_\Delta^d + \left(\frac{U_0^d}{2} \epsilon_\Delta^d : \epsilon_\Delta^d + \frac{T_1^s U_1^d}{2} \dot{\epsilon}_\Delta^d : \dot{\epsilon}_\Delta^d \right) + ({}^d \longleftrightarrow {}^s)$$

levezetés szolgáltatja azt a kritériumot, hogy ϵ és $\dot{\epsilon}$ kezdeti értéke egyértelműre rögzíti a megoldást, ha a peremeken $\mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \sigma_\Delta \mathbf{v}_\Delta$ eltűnik; itt a $({}^d \longleftrightarrow {}^s)$ jelölés azt jelenti, hogy az addigi kifejezés megismétlendő, benne minden d jelet s -re cserélve és viszont (azaz egy deviatorikus-gömbi tükrözést jelent a formulában, hogy az összeg deviatorikus-gömbi szempontból szimmetrikus legyen).

Alternatív eljárásként

(126)

$$(\sigma_\Delta \mathcal{E}^d \mathcal{E}^s \mathbf{v}_\Delta) \cdot \nabla = (U_1^s + T_1^d U_0^s) \dot{\sigma}_\Delta^d : \dot{\sigma}_\Delta^d + \left(\frac{U_0^s}{2} \sigma_\Delta^d : \sigma_\Delta^d + \frac{T_1^d U_1^s}{2} \dot{\sigma}_\Delta^d : \dot{\sigma}_\Delta^d \right) + ({}^d \leftrightarrow {}^s)$$

is használható, ez σ és $\dot{\sigma}$ kezdeti értéke esetén biztosít egyértelműséget, ha a peremeken $\sigma_\Delta \mathcal{E}^d \mathcal{E}^s \mathbf{v}_\Delta$ eltűnik.

A harmadik reológiai eset, mely itt bemutatásra kerül, a tehetetlenségi-POYNTING-THOMSON-tehetetlenségi-POYNTING-THOMSON-modell:

$$(127) \quad \sigma^d + T_1^d \dot{\sigma}^d = U_0^d \epsilon^d + U_1^d \dot{\epsilon}^d + U_2^d \ddot{\epsilon}^d, \quad \sigma^s + T_1^s \dot{\sigma}^s = U_0^s \epsilon^s + U_1^s \dot{\epsilon}^s + U_2^s \ddot{\epsilon}^s,$$

nemnegatív együtthatókkal, sőt, itt a termodinamikai oldalról ismert [VÁN-ASSZONYI (2006)], [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007)] $U_1^d \geq T_1^d U_0^d$, $U_1^s \geq T_1^s U_0^s$ egyenlőtlenségek-re is szükség lesz (legalábbis egy kicsit gyengébb változatokra). Az

$$(128) \quad (\mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \dot{\sigma}_\Delta \mathcal{E}^d \mathcal{E}^s \mathbf{v}_\Delta) \cdot \nabla = \left(U_1^s - \frac{T_1^s U_0^s}{2} \right) \dot{\mathbf{L}}^d : \dot{\mathbf{L}}^d + T_1^s U_2^s \ddot{\mathbf{L}}^d : \ddot{\mathbf{L}}^d + \\ + \left[\frac{U_0^s}{2} \mathbf{L}^d : \mathbf{L}^d + \frac{U_2^s + T_1^s U_1^s}{2} \dot{\mathbf{L}}^d : \dot{\mathbf{L}}^d + \frac{T_1^s U_0^s}{2} (\mathbf{L}^d : \mathbf{L}^d) \right] + \\ + ({}^d \longleftrightarrow {}^s)$$

választás célszerűnek bizonyul, ahol az $\mathbf{L}^d = \mathcal{S}^d \sigma_\Delta$ rövidítés lett alkalmazva. A kiértékelés az előzőeknél bonyolultabb, mert a szögletes zárójelben levő kifejezés (plusz ${}^d \leftrightarrow {}^s$ párja, összegüket jelölje Q) nem pozitív definit. Mindenesetre induljunk el a 45. oldalon látott érveléshez hasonlóan. A GAUSS-tételből és a szögletes zárójelen kívüli pozitív definit P összeg $\int P \geq 0$ térintegráljából $\int \dot{Q} = \partial_t \int Q \leq 0$. Ha a kezdeti feltételek biztosítják, hogy t_0 -kor $Q = 0$, és így ekkor $\int Q = 0$, akkor későbbi időkre $\int Q \leq 0$. Q maga nem pozitív definit, de egy pozitív definit R mennyiségnek és egy másik pozitív S mennyiség időderiváltjának az összege, ahol

(129)

$$R = \frac{U_0^s}{2} \mathbf{L}^d : \mathbf{L}^d + \frac{U_2^s + T_1^s U_1^s}{2} \dot{\mathbf{L}}^d : \dot{\mathbf{L}}^d + ({}^d \longleftrightarrow {}^s), \quad S = \frac{T_1^s U_0^s}{2} \mathbf{L}^d : \mathbf{L}^d + ({}^d \longleftrightarrow {}^s).$$

Tehát most azt tudjuk, hogy $\int Q = \int (R + \dot{S}) \leq 0$. A 45. oldalon látott érvelés most R -re és S -re folytatható le: $R \geq 0 \Rightarrow \int R \geq 0$, ahonnan $\int \dot{S} = \partial_t \int S \leq 0$. Ha a kezdeti feltételek miatt S t_0 -kor nulla, akkor $\int S$ is az, így később $\int S \leq 0$. Emellett ugye $S \geq 0 \Rightarrow \int S \geq 0$, melyekből $\int S = 0$ minden $t \geq t_0$ -kor. Pozitív definit S -sel ez $S = 0$ esetén lehetséges. Továbbá mivel $\int S$ minden $t \geq t_0$ -ra nulla, ezért az időderiváltja is az. Innen $\int (R + \dot{S}) = \int R + \partial_t \int S = \int R \leq 0$ a pozitív definit R nullaságát vonja maga után. Ezzel $Q = 0$ -t bizonyítottuk bármely $t \geq t_0$ -ra. Ez $\dot{Q} = 0$ -t maga után vonja, és ez $\int (P + \dot{Q}) = 0$ -ból $\int P = 0$ -re vezet, mely pedig a pozitív definit P nullaságát biztosítja. S nulla volta $\mathbf{L}^d$ és $\mathbf{L}^s$ mindenkori nullaságát eredményezi. Ezért ha σ_Δ^d kezdetben nulla, akkor a

$$(130) \quad \sigma_\Delta^d + T_1^d \dot{\sigma}_\Delta^d = \mathbf{L}_\Delta^d = \mathbf{0}$$

σ_Δ^d -ra vonatkozó differenciálegyenlet e kezdeti feltételhez tartozó egyértelmű megoldása a $\sigma_\Delta^d = \mathbf{0}$. Hasonlóan, σ_Δ^s kezdeti nullasága a későbbi mindenkori nullaságát vonja maga után. E kettő együtt σ_Δ kezdeti nullaságát igényli.

Emellett, a (127)-beli deviatorikus konstitúciós összefüggés alapján

$$(131) \quad U_0^d \boldsymbol{\epsilon}_\Delta^d + U_1^d \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\Delta^d + U_2^d \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}_\Delta^d = \sigma_\Delta^d + T_1^d \dot{\sigma}_\Delta^d = \mathbf{L}_\Delta^d = \mathbf{0}.$$

Ennek a $\boldsymbol{\epsilon}_\Delta^d$ -ra vonatkozó differenciálegyenletnek az a megoldása az azonosan nulla függvény, amely $\boldsymbol{\epsilon}_\Delta^d$ és első deriváltja nulla kezdeti feltételéhez tartozik. Az unicitás hasonló követel meg $\boldsymbol{\epsilon}_\Delta^s$ -tól és deriváltjától. Összegezve, e gondolatmenet σ , $\boldsymbol{\epsilon}$ és $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ kezdeti értékét igényli a megoldás egyértelműségéhez.

Az érvelés során Q és S kezdeti nullaságát tételeztük fel, meg kell néznünk, hogy ezek jelentenek-e többletfeltételt az eddig találtakhoz képest. S kezdeti nulla volta $\mathbf{L}^d$ és $\mathbf{L}^s$ kezdeti nullaságát igényli. Ezért $\dot{\sigma}_\Delta$ is nulla kell legyen kezdetben, azaz a $\dot{\sigma}$ -ra vonatkozó kezdeti feltétel is szükséges az unicitáshoz. Q kezdeti nulla volta R kezdeti nullaságát követeli meg, amely $\dot{\mathbf{L}}^d$ és $\dot{\mathbf{L}}^s$ kezdeti nulla voltát rója még ki számunkra. Emiatt $\ddot{\sigma}$ -ra is kell ismernünk a kezdeti feltételt az unicitáshoz. Összefoglalva, σ , $\dot{\sigma}$, $\ddot{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ és $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ kezdeti feltételei már biztosítják a megoldás egyértelműségét. Észrevehetjük, hogy a konstitúciós összefüggések és deriváltjuk miatt $\dot{\sigma}$ kezdeti értékének ismerete kiváltható $\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}$ -ével, $\ddot{\sigma}$ -é pedig $\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}$ -ével. Ezért σ , $\boldsymbol{\epsilon}$, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}$ és $\ddot{\sigma}$ kezdeti feltételei is unicitást biztosítanak. Mindezekhez a peremeken $S^d S^s \dot{\sigma}_\Delta \mathcal{E}^d \mathcal{E}^s \mathbf{v}_\Delta$ -nak kell eltűnnie.

Meglepően magas rendig lett szükség a kezdeti feltételek ismeretére a tehetetlenségi-POYNTING-THOMSON-tehetetlenségi-POYNTING-THOMSON-modell esetén. Ez azonban talán mégsem nagyon meglepő, mert ennél a modellen már a konstitúciós relációk is meglehetősen magas rendig tartalmaznak időderiváltakat, a (113) egyenlet pedig összecsatolja a deviatorikus és a gömbi ágat, és az ilyen összecsatolódások emelni szokták az

időderiváltak rendjét (ilyet már többször láttunk az eddigiekben). Ez a modell láthatóan már egy igencsak komplikált reológiai eset, jelentősen bonyolult tulajdonságokkal.

10. EGYENSÚLYI KÖZELÍTÉS: REDUKÁLÁSI MÓDSZEREK

Heurisztikus várakozásunknak megfelelően, ha a dinamikai redukált feszültség-, deformáció-, sebesség- és elmozdulás-egyenletből [(57), (58), (59) ill. (60)] elhagyjuk a ρ -val szorzott tagot, olyan egyenleteket kapunk, melyek mind valóban levezethetők az egyensúlyi közelítésben:

$$(132) \quad \mathbf{0} = \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \circ \nabla]^S + \mathcal{D}_0 [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \cdot \nabla] \mathbf{I} + [\mathcal{S}^s \mathcal{E}^d (\mathbf{f} \circ \nabla)^S + \mathcal{D}_0 (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{I}],$$

$$(133) \quad \mathbf{0} = \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d [(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla) \circ \nabla]^S + \mathcal{D}_0 [(\text{tr} \boldsymbol{\epsilon}) (\nabla \circ \nabla)] + \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s (\mathbf{f} \circ \nabla)^S,$$

$$(134) \quad \mathbf{0} = \mathcal{D}_2 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla - \frac{1}{2} \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \dot{\mathbf{f}},$$

$$(135) \quad \mathbf{0} = \mathcal{D}_2 (\mathbf{u}_{t_0} \cdot \nabla) \nabla - \frac{1}{2} \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_{t_0}) + \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \mathbf{f} + (U_0^d \boldsymbol{\epsilon}_{t_0}^d + U_0^s \boldsymbol{\epsilon}_{t_0}^s) \cdot \nabla.$$

Az egyensúlyi közelítés azonban ennél erősebb lehetőségeket is nyújt, melyeket súlyos vétek volna nem kihasználni. Vegyük sorra ezeket a lehetőségeket az egyes mennyiségek szerint. Ehhez hasznos lesz ismét tudatosítani magunkban, hogy a (112) egyenlet helyett az egyensúlyi közelítésben rendelkezésünkre áll az erősebb $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}} \circ \nabla)^S$ egyenlet, és a vele ekvivalens $\nabla \times \boldsymbol{\epsilon} \times \nabla = \mathbf{0}$ tulajdonság (v.ö. 1. szakasz).

A feszültségre redukálás során ez utóbbiból indulhatunk ki: egyrészt vegyük a nyomát:

$$(136) \quad 0 = \text{tr} (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon} \times \nabla) = \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla - \Delta \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}.$$

Hattatva erre $\mathcal{E}^d \mathcal{E}^s$ -t, behelyettesítve (30)-at, és alkalmazva (113)-at, arra juthatunk, hogy

$$(137) \quad \mathcal{D}_2 \Delta \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = -\mathcal{S}^d \mathcal{E}^s \nabla \cdot \mathbf{f}.$$

Ebből a $\Delta \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$ -ra vonatkozó időbeli differenciálegyenletből meghatározható $\Delta \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$, abból pedig szerencsés esetben $\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = 3\sigma^s$ is.

Másrészt, tekintsük $\nabla \times \boldsymbol{\epsilon} \times \nabla = \mathbf{0}$ kétoldali rotációját: a 16. lábjegyzetbeli azonosságokat [ld. 26. oldal] figyelembe véve

$$(138) \quad \begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon} \times \nabla) \times \nabla = \nabla \circ (\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla) \circ \nabla - \\ &\quad - \Delta [\nabla \circ (\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}) + (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla) \circ \nabla] + \Delta \Delta \boldsymbol{\epsilon}. \end{aligned}$$

Erre is hassunk $\mathcal{E}^d \mathcal{E}^s$ -sel, és éljünk ismét (30)-cal és (113)-mal:

$$(139) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}^d \mathcal{E}^s \Delta \Delta \boldsymbol{\sigma} + \mathcal{D}_0 [(\nabla \circ \nabla) \Delta \text{tr} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{I} \Delta \Delta \text{tr} \boldsymbol{\sigma}] &= \mathcal{S}^d \mathcal{E}^s [(\nabla \circ \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \\ &\quad - \Delta (\nabla \circ \mathbf{f} + \mathbf{f} \circ \nabla)]. \end{aligned}$$

Ide behelyettesíthetjük az imént meghatározott $\Delta \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$ -t, és így egy inhomogén biharmónikus egyenletet kapunk $\boldsymbol{\sigma}$ -ra.

Az időderiváltak rendjének szaporodása árán egy bizonyos szempontból formásabb következményt is előállíthatunk, (139)-re $\mathcal{D}_2$ -vel hatva és (137)-et alkalmazva:

(140)

$$\mathcal{S}^d \mathcal{E}^s [\mathcal{D}_2 \Delta \Delta \boldsymbol{\sigma} - \mathcal{D}_1 (\nabla \circ \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mathcal{D}_0 \Delta (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} + \mathcal{D}_2 \Delta (\nabla \circ \mathbf{f} + \mathbf{f} \circ \nabla)] = \mathbf{0}.$$

Az ilyen, szorzat alakú egyenletek [általánosan: $\mathcal{A}(\mathcal{B}p + q) + r = 0$, az ismeretlen függvény p] megoldásánál úgy járhatunk el, hogy először megoldjuk a „külső” egyenletet [$\mathcal{A}s + r = 0$, az ismeretlen függvény s], majd ennek s általános megoldásával megoldjuk a „belső” egyenletet [$\mathcal{B}p + q = s$].

Ilyen redukált feszültségegyenletek kaphatók tehát az egyensúlyi közelítésben.

Vegyük észre, hogy a dinamikai feszültségegyenlet inspirálta (132) viszont nem más, mint (137) egy elbonyolított következménye [nézzük csak meg (132)-ben az első és a harmadik tag összegét, illetve a második és a negyedik tag összegét: mindkettő (137), amire hatottunk egy valamilyen térderiváló operátorral és egy valamilyen időderiváló operátorral]. Az egyensúlyi közelítés tehát értékes lehetőségeket hoz be.

Hasonló elbonyolítás az egyensúlyi közelítés egyenletei szemszögéből a (133) egyenlet, mely szintén (137), ráhatva egy fölösleges térderiváló operátorral (majd azzal a szükséges időderiváló operátorral, ami (29) behelyettesítését lehetővé teszi). Nem szerepel viszont benne az az információ, hogy a deformáció CAUCHY-potenciális. Ezt nehéz is összekombinálni az előzőekkel, nehéz frappáns, hasznos redukált deformációegyenletet megadni az egyensúlyi közelítésben. Az imént látott feszültségegyenletekből a konstitúciós összefüggések révén ugyan áttérhetünk deformációegyenletekre, de ennek során nő az időderiváltak rendje, ami praktikus szempontokból feltétlenül kerülendő.

A (134)–(135) redukált sebesség- és elmozdulásegyenlet ellenben nem rendelkezik semmi értékcsökkenéssel, mindketten valóban az egyensúlyi közelítésben levezethető leg-effektívebb redukált egyenletek. Nyílik azonban egy extra lehetőség: az, hogy az elmozdulásmódszerrel párhuzamosan most levezethető a CAUCHY-potenciálra is egy redukált egyenlet. $\mathcal{S}^d \mathcal{S}^s$ -sel hattatva (113)-ra, behelyettesítve (29)-et, abba pedig (11)-et, azt kapjuk ugyanis, hogy

$$(141) \quad \mathbf{0} = \mathcal{D}_2 (\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}} \cdot \nabla) \nabla - \frac{1}{2} \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}) + \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \mathbf{f}.$$

Ennek előnye az elmozdulásegyenlettel szemben, hogy nincs benne a kezdeti feltételtől függő inhomogén tag. Hátránya, hogy $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}$ -ra nincs kezdeti feltétel és esetleges peremfeltétel, hanem belőle mint segédmenyiségből ki kell számolni $\boldsymbol{\varepsilon}$ -t és $\boldsymbol{\sigma}$ -t, esetleg $\mathbf{u}_{t_0}$ -t vagy $\mathbf{v}$ -t is, és csak ezután lehet a határozatlanságokat a kezdeti és peremfeltételekkel rögzíteni.

E szakasz zárásaként érdemes megemlíteni, hogy a tenzorok 36. oldalán említett esetleges felbontása az egyensúlyi közelítés egyenleteihez szintén hasznosnak bizonyulhatna.

11. EGYENSÚLYI KÖZELÍTÉS : MEGOLDÁSI MÓDSZEREK

A redukált egyenletek, és még a belőlük származtatott bizonyos egyszerűbb következmények is általában olyan magas rendig tartalmazhatnak időderiváltakat, mely a gyakorlat számára kellemetlenül magas lehet. Például egy harmad- vagy negyedrendű differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet három ill. négy algebrai gyökére létezik megoldóképlet, de meglehetősen komplikált, ötödrendtől kezdve pedig nem is létezik. Ezért minden egyéb megközelítés értékes lehet reológiai feladatok megoldásához.

Egy ilyen lehetőségnek ígérkezik az ún. VOLTERRA-elv (egy megfogalmazását ld. [BÉDA–KOZÁK–VERHÁS (1986), 208. o.]), mely egy reológiai feladat megoldását a megfelelő rugalmasságtani feladat megoldásából származtatja. Sajnos, egyrészt nehéz fellelni olyan művet, ahol ez az elv matematikai pontossággal van kimondva, például illusztrálva, vagy méginkább: matematikailag bizonyítva. Emellett a jelen kötet 3. cikkében [FÜLÖP–BÉDA (2009)] tekintett konkrét feladat (hengerszimmetrikus alagút nyitása hidrosztatikus környezetben) megoldása ellentmondani látszik a VOLTERRA-elvnek.³⁸ Óriási értékkel bírna, ha sikerülne pontosan kimondani ennek az elvnek egy olyan alakját, amelyet sikerülne is matematikailag bizonyítani.

Akár a VOLTERRA-elv által inspirálva, akár máshogy, hasznos lehet a megoldást valamilyen alakban megsejteni, például úgy, hogy a rugalmasságtani megfelelő megoldásban a rugalmasságtani állandók helyére időfüggő ismeretlen függvényeket teszünk (hiszen a reológiai konstitúciós összefüggések ugyanis csak időderiváltak szempontjából különböznek a rugalmasságtanitól, térbeli viselkedés szempontjából nem), és az így kapott megoldás-jelöltre kirójuk a feladat alapegyenleteit. Ha ezek teljesülnek, akkor a megoldás egyértelműségét unicitástétellel bizonyíthatjuk.

Amikor egy gyors időbeli változás leírása elegendő közelítőleg, akkor elegendő lehet a reológiai konstitúciós összefüggésekben csak a legmagasabb időderiváltas tagokat tartani meg, és így egy effektív közelítő egyszerűbb reológiai szituációra redukálni a feladatot. Ilyen módon jár el például [VÁN–SZARKA (2006)] a gyors alagútnyitás jellemzésére. Jelen kötet 4. tanulmányában [ASSZONYI–SZARKA–BÉDA (2009)] pedig részletesebben kifejtett példát is láthatunk erre (a 3. cikkben [FÜLÖP–BÉDA (2009)] ellenben nem ezen a módon, hanem pontos határátmenettel sikerül előállítani a gyors alagútnyitás esetét). Ezt a reológia-egyszerűsítő közelítést kellő óvatossággal kell végrehajtani, ugyanis a gyors folyamatok hiába zajlanak le rövid idő alatt, az összefüggések miatt egyes mennyiségek

³⁸ A deformációkomponensekre adódó megoldásban csak a deviatorikus eredetű rész látszik a VOLTERRA-elv által elvárt módon viselkedni, a gömbi eredetű rész nem.

időderiváltja a végtelenhez tarthat, és ilyenkor e mennyiségek véges mértékűt képesek változni eme rövid idő alatt is. Például egy alagút nyitása alatt már lezajlhat véges mértékű konvergencia (ún. szelvénysszűkülés, azaz az alagút szűkülése, összehúzódása).

Zárszóként megemlítendő, hogy jelen kötet második dolgozata [ASSZONYI–BÉDA–SZARKA (2009)] a kontinuummechanikai lineáris feladatok itt nem tárgyalt aspektusaival is foglalkozik.

KÖSZÖNETMONDÁS

Köszönet illeti ASSZONYI CSABÁT és SZARKA ZOLTÁNT a sok értékes észrevételért.

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. – SZARKA, Z. – BÉDA, GY. (2009): Körszelvényű földalatti folyosók körül kialakuló mechanikai mezők, Mérnökeológia-Kőzetmechanika 2010 ISRM Konferencia. In: ASSZONYI, CS. (szerk.), Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **9**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)
- ASSZONYI, CS. – VÁN, P. – SZARKA, Z. (2007): Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota, Mérnökeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **5**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- ASSZONYI, CS. – BÉDA, GY. – SZARKA, Z. (2009): A kontinuummechanika alapegyenleteinek megoldási módszerei, Mérnökeológia-Kőzetmechanika 2010 ISRM Konferencia. In: ASSZONYI, CS. (szerk.), Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **9**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)
- BÉDA, GY. – KOZÁK, I. – VERHÁS, J. (1986): Kontinuummechanika, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.
- FÜLÖP, T. (2006): The physical role of boundary conditions in quantum mechanics, *PhD disszertáció*, The University of Tokyo, Japan.
- FÜLÖP, T. (2007): Singular potentials in quantum mechanics and ambiguity in the self-adjoint Hamiltonian, *SIGMA* **3**, 107–118.
- FÜLÖP, T. (2008): Kontinuumok kinematikájának új értelmezése, Mérnökeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- FÜLÖP, T. (2009): Véges deformációk leírása, Montavid Termodinamikai Kutatócsoport

kutatási jelentés.

- FÜLÖP, T. – BÉDA, GY. (2009): Hidrosztatikus környezetben nyitott hengerszimmetrikus alagút körüli reológiai időfüggés, Mérnökeológia-Kőzetmechanika 2010 ISRM Konferencia. In: ASSZONYI, Cs. (szerk.), Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **9**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)
- MATOLCSI, T. (2009): Rugalmas feladatok unicitása, Montavid Termodinamikai Kutatócsoport kutatási jelentés.
- REED, M. – SIMON, B. (1975): Methods of Modern Mathematical Physics II, Fourier analysis, self-adjointness, Academic Press, New York.
- VÁN, P. (2004): Weakly nonlocal continuum theories of granular media: restrictions from the Second Law, International Journal of Solids and Structures, 2004, 41/21, 5921–5927.
- VÁN, P. (2008a): Anyagi sokaságok a nemrelativisztikus téridőben, Mérnökeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- VÁN, P. (2008b): Objective time derivatives in nonequilibrium thermodynamics, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **57** (2008) 127–131.
- VÁN, P. (2009): Weakly nonlocal non-equilibrium thermodynamics – variational principles and Second Law, in Applied Wave Mathematics (Selected Topics in Solids, Fluids, and Mathematical Methods), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009, ed. Ewald Quak and Tarmo Soomere, ch.III, pp 153–186.
- VÁN, P. – ASSZONYI, Cs. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye. II. Az általános törvényszerűségek levezetése. In: ASSZONYI, Cs. (szerk.), Izotróp kontinuumok anyagtörvénye, Mérnökeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **3**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest, pp. 25–88.
- VÁN, P. – SZARKA, Z. (2006): Rock rheology – time dependence of dilatation and stress around a tunnel, EUROROCK 2006 – Multiphysics Coupling and Long Term Behavior in Rock Mechanics, Liège, Belgium, 9–12 May 2006, Proceedings of the International Symposium of the International Society for Rock Mechanics, 357–363.
- VÁN, P. – ASSZONYI, Cs. (2008): Izotrop kontinuumok anyagtörvényei és speciális esetei, Mérnökeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: ASSZONYI, Cs. (szerk.), Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai, Mérnökeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **6**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

A KONTINUUMMECHANIKA ALAPEGYENLETEINEK MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

Asszonyi Csaba

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Béda Gyula

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM, MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Szarka Zoltán

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A cikk összefoglalja a kontinuummechanika alapegyenleteinek egyes változókra feloldott alakját (ún. megoldási módszereit: Lamé-, Beltrami- stb. egyenleteket) reológiai anyagtörvény mellett, mind a rugalmas, mind a képlékeny alakváltozások esetére.

Megvizsgálja a speciális esetként az egyensúly fennállását, valamint a reológiai megoldások előállításának egy egyszerű esetét.

1. FEJEZET

A KONTINUUMMECHANIKA ALAPEGYENLETEI

Földalatti létesítményeknél, bányászati, alagútépítési feladatoknál a mérnöki gyakorlat legtöbbször a kontinuummechanika (folytonos közegek mechanikája) összefüggéseit – a feladat kezdeti és kerületi feltételeivel együttesen – használja fel. Ezek a kontinuummechanika ún. alapegyenletei. A kontinuummechanika nagy álma olyan elméletek – matematikai modellek – felállítása, hogy a fizikai probléma megfogalmazásakor egyúttal matematikailag is értelmes legyen, ráadásul egyértelmű megoldása létezzen. Elvárható ez egy fizikai elmélettől? TRUESDELL ÉS NOLL szerint igen, abban az esetben, ha modellünk elég pontosan képezi le a valóságot [TRUESDEL-NOLL (1965)]. A valóságban adott kezdeti és peremfeltételek esetén ugyanis mindig egyértelműen történni fog valami. A legfontosabb és tisztázatlan kérdés pedig az anyag viselkedése, az anyag

modelljeit kell igazán jól ismernünk, hogy a fenti követelményt eséllyel teljesítő modellekig juthassunk. Az anyagtörvények természetesen sokfélék lehetnek, de általában is jó lenne látnunk, milyen általánosságban vannak olyan feltételek, ahol az előbbi nagyon erős követelményrendszer teljesülhet. TRUESDELL és NOLL fontos felismerése, hogy mindezen feltételek leglényegesebb részét az általános alapelvek: az objektivitás és a második főtételek jelentik. Ma még nem tudjuk, elegendőek-e, azt azonban tudjuk, hogy számos esetben azok. Viszont az objektivitás követelményét még nem fogalmazta meg elég jól a nemrelativisztikus kontinuummechanika [MATOLCSI-VÁN (2006), MATOLCSI-VÁN (2007)]. Ha megadtunk egy jobb megfogalmazást, akkor annak következményei felderítése, a például egy megfelelő, objektív deformáció mérték megtalálása, annak termodinamikai keretek közé illesztése több lépéses, többoldalú vizsgálatot igénylő folyamat [ASSZONYI-VÁN (2006), FÜLÖP (2008)]. Ebben az írásban a kontinuummechanika feladatainak különféle megoldási módszereit tekintjük át.

A kontinuummechanikában a feladatmegoldás a különböző tenzormezők (helytől és időtől függő, szakaszosan folytonos és differenciálható tenzor értékű függvények) meghatározását jelenti. Ez a mechanikai alapegyenletek megoldását kívánja meg, véges számú szakadással (diszkontinuitással) rendelkező, egyszeresen vagy többszörösen összefüggő tartományon, a kezdeti és kerületi feltételek mellett.¹

Egy kontinuummechanikai feladatot mérnöki szempontból megoldottnak tekintünk, ha ismerjük az adott terhelési esetben a $\boldsymbol{\sigma}$ feszültségtenzort:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \sigma_x(\mathbf{r}, t) & \tau_{xy}(\mathbf{r}, t) & \tau_{xz}(\mathbf{r}, t) \\ \tau_{yx}(\mathbf{r}, t) & \sigma_y(\mathbf{r}, t) & \tau_{yz}(\mathbf{r}, t) \\ \tau_{zx}(\mathbf{r}, t) & \tau_{zy}(\mathbf{r}, t) & \sigma_z(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix},$$

az $\boldsymbol{\varepsilon}$ deformációtenzort:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(\mathbf{r}, t) & \frac{1}{2}\gamma_{xy}(\mathbf{r}, t) & \frac{1}{2}\gamma_{xz}(\mathbf{r}, t) \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx}(\mathbf{r}, t) & \varepsilon_y(\mathbf{r}, t) & \frac{1}{2}\gamma_{yz}(\mathbf{r}, t) \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx}(\mathbf{r}, t) & \frac{1}{2}\gamma_{zy}(\mathbf{r}, t) & \varepsilon_z(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

és $\mathbf{u}$ elmozdulásvektort

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} u_x(\mathbf{r}, t) \\ u_y(\mathbf{r}, t) \\ u_z(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

az $\mathbf{r}$ hely- és t időkoordináták függvényében. A feszültségtenzor hat, a deformációtenzor szintén hat, s az elmozdulásvektor pedig három, tehát összesen tizenöt skalár függvény ismeretét kívánja meg. Meghatározásukhoz a mechanika alapegyenletei állnak rendelkezésünkre. Az $\boldsymbol{\varepsilon}$ és $\mathbf{u}$ helyes értelmezését az előző cikk fejti ki [FÜLÖP (2009a)], s így

¹ A mechanikai alapegyenletek közé tartozik a diszkontinuitásoknál érvényes geometriai- és mozgásegyenletek is [ASSZONYI, Cs.- RICHTER, R. (1979)], [VÁN-ASSZONYI (2006)].

talán nem okoz félreértést a t_0 indexek elhagyása ($\mathbf{u}_{t_0}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t_0} = \boldsymbol{\varepsilon}$).

A kontinuummechanika alapegyenletei a következők:

A MOZGÁSEGYENLET: amely az anyag tetszőleges zárt tartományának dinamikai egyensúlyát fejezi ki, s NEWTON axiómáinak heurisztikus általánosításaként nyerhető, és általában CAUCHY-egyenlet néven is ismert. Levezetni korrekten az impulzus mérleg-egyenletének felírásával, az impulzus megmaradásának figyelembe vételével lehet:

$$(1) \quad \boldsymbol{\sigma} \nabla = \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} \right), \quad [\text{vektoregyenlet} - 3 \text{ skaláregyenlettel}]$$

ahol ρ a tömegsűrűség, $\mathbf{f}$ a térfogati erőhatás, s $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ a gyorsulásmező, $\mathbf{v}$ a sebességmező.

A GEOMETRIAI EGYENLET: amely a deformált test pontjainak elmozdulása ($\mathbf{u}$) és egy tetszőleges pont környezetének deformációja ($\boldsymbol{\varepsilon}$) közötti összefüggést adja meg, s azt fejezi ki, hogy a deformáció a környezetet alkotó pontok elmozdulásaiból kell, hogy származzon, pl. a jobb oldali poláris deformáció tenzorral:

$$(2a) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \sqrt{(\mathbf{I} + \nabla \circ \mathbf{u})(\mathbf{I} + \mathbf{u} \circ \nabla)} - \mathbf{I} \quad [\text{tenzoregyenlet} - 6 \text{ skaláregyenlettel}]$$

Amennyiben a mechanikai feladatnál az $\mathbf{H} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \circ \nabla$ mozgásgradiens szimmetrikus, akkor a deformáció a

$$(2) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u})$$

Cauchy-féle deformációtenzorral egyezik meg. Egyéb esetekben ez a tenzor csak a kis deformációk tartományán érvényes közelítés. Az $\mathbf{u}$ elmozdulásmező – ha a t_0 „kiindulási” deformálatlan állapothoz [$\mathbf{u}(t_0) \equiv \mathbf{0}$] nullázzuk az elmozdulásmezőt, s a deformációmezőt [$\boldsymbol{\varepsilon}(t_0) \equiv \mathbf{0}$], – akkor

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt'.$$

AZ ANYAGEGYENLET: amelyet a deformált testben ébredő feszültségek és deformáció (valamint deriváltjaik) közötti összefüggésként értelmeznek. Ez az anyag szerkezetére vonatkozó felfogásunkon alapul, és izotrop esetben, amikor a feszültségtenzor főirányai és a deformációtenzor főirányai egybeesnek:

$$(3) \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\hat{G}\boldsymbol{\varepsilon} + (3\tilde{K} - 2\hat{G})\boldsymbol{\varepsilon}^o + \Psi \boldsymbol{\sigma}_f^d.^2 \quad [\text{tenzoregyenlet} - 6 \text{ skaláregyenlettel}]$$

Az anyagegyenlet – ilyen formájú, HOOKE-törvényre emlékeztető felírása – magyarázatot igényel, amelyet a későbbiekben teszünk meg.

² Rugalmas és képlékeny alakváltozásnál egyaránt érvényes anyagtörvény.

Ez a 3 tenzor-, illetve 15 skaláregyenlet, a kezdeti és kerületi feltételek ismeretében megoldható. A megoldáshoz egyszerűbb esetekben többféle úton is eljuthatunk, bonyolultabb feladatoknál viszont meg kell elégednünk a szigorú helyett közelítő megoldásokkal is.

A KOMPATIBILITÁSI EGYENLET. A (2) szerint az $\mathbf{u}$ vektorból Gradiens-képzéssel állítjuk elő az $\boldsymbol{\varepsilon}$ deformációtenzort, s a szimmetrikus $\boldsymbol{\varepsilon}$ 6 komponense nem független egymástól. (2) alapján teljesül a DE SAINT-VENANT-féle, ún. kompatibilitási egyenlet:

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \mathbf{0}.$$

A TÖMEGMÉRLEG (TÖMEG KONTINUITÁSI EGYENLET). A tárgyalásból a tömegsűrűséget ki szokták hagyni, ui. a $\rho(\mathbf{r}, t)$ sűrűségeloszlás a $\mathbf{v}$ vektor ismeretében egyszerűen meghatározható

$$(4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \text{ illetve } \dot{\rho} + \rho \nabla \mathbf{v} = 0$$

a tömegmérlegből.

KEZDETI ÉS PEREMFELTÉTELEK. A $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ és $\mathbf{u}$ mezőfüggvényeknek ki kell elégítenie a kezdeti és peremfeltételeket.

A *kezdeti feltétel* a vizsgálat kezdetének t_0 időpillanatában érvényes feszültség, deformáció, stb. megadását jelenti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_0 &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t_0), & \boldsymbol{\varepsilon}_0 &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t_0), & \mathbf{u}_0 &= \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_0), & \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0), \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 &= \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}, t_0), & \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}, t_0), & \dot{\mathbf{u}}_0 &= \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t_0), & \dot{\mathbf{v}}_0 &= \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t_0), \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

a feladat differenciálegyenletei által megkívánt rendig.

A *peremfeltétel* pedig a határoló felületeken működő peremértékek figyelembe vételét jelenti. Legyen S – a határfelület, $\mathbf{n}$ – az S határfelület kifelé mutató normális egységvektora, és legyen

- $S_F \subseteq S$ az S felület azon része, ahol a peremen előírt $\tilde{\mathbf{p}}$ erőssűrűség,
- $S_D \subseteq S$, ahol a peremen előírt $\tilde{\mathbf{d}}$ deformációsűrűség,
- $S_u \subseteq S$, ahol a peremen előírt $\tilde{\mathbf{u}}$ elmozdulás,
- $S_v \subseteq S$, ahol a peremen előírt $\tilde{\mathbf{v}}$ sebesség működik.

Ekkor a kerületi feltételek a következők:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{S_F} &= \tilde{\mathbf{p}}, \text{ ha } S_F \subseteq S, \\ \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}|_{S_D} &= \tilde{\mathbf{d}}, \text{ ha } S_D \subseteq S, \\ \mathbf{u}|_{S_u} &= \tilde{\mathbf{u}}, \text{ ha } S_u \subseteq S, \\ \mathbf{v}|_{S_v} &= \tilde{\mathbf{v}}, \text{ ha } S_v \subseteq S. \end{aligned}$$

A peremeken is teljesülnie kell a kompatibilitási feltételnek, sőt többszörösen összefüggő tartományok esetén az ún. „nagybani” kompatibilitási feltételnek is, vagyis n -szeresen összefüggő tartomány esetén $n-1$ darab nagybani feltételnek [BÉDA-KOZÁK-VERHÁS (1986), 52. old.].

2. FEJEZET

AZ ANYAGTÖRVÉNYRŐL (KONSTITÚCIÓS ÖSSZEFÜGGÉSRŐL)

A mechanikai anyagmodellek matematikai egyenletét háromféle formában szokás felírni:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})] & \quad \text{a } \boldsymbol{\sigma} \text{ feszültségtenzorra feloldott formában,} \\ [\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})] & \quad \text{az } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ deformációtenzorra feloldott formában,} \end{aligned}$$

$[\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma}^d(\boldsymbol{\varepsilon}^d), \boldsymbol{\sigma}^o = \boldsymbol{\sigma}^o(\boldsymbol{\varepsilon}^o)]$ deviatorikus és gömbi felbontásban³, amelyeket *torzulási* és *térfogatváltozási* egyenleteknek is nevezünk.

Foglaljuk ezeket össze, először a tisztán *rugalmas alakváltozás* tartományán érvényes formában, majd a maradó deformációk megjelenésével létrejövő *képlékeny alakváltozás* tartományán érvényes formában.

Az anyagtörvény levezetését kivonatossan bemutatjuk – a *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **3** (2006), **5** (2007) és **6** (2008) köteteiben közölt tanulmányok alapján – a Függelékben.

2.1. ANYAGTÖRVÉNY A RUGALMAS ALAKVÁLTOZÁSI TARTOMÁNYBAN

2.1.1. A JELENLEGI HELYZET ELMÉLETILEG

Izotrop kontinuumok legáltalánosabb homogén-lineáris reológiai anyagmodellje, az $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^o$ és $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^d + \boldsymbol{\varepsilon}^o$. deviatorikus felbontásnak megfelelően, a következő:

$$\begin{aligned} \left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} + \tau_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \tau_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}\right) \boldsymbol{\sigma}^d &= \left(U_0 + U_1 \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + U_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^d, \\ \left(1 + \tau_1^o \frac{\partial}{\partial t} + \tau_2^o \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \tau_n^o \frac{\partial^n}{\partial t^n}\right) \boldsymbol{\sigma}^o &= \left(U_0^o + U_1^o \frac{\partial}{\partial t} + U_2^o \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + U_m^o \frac{\partial^m}{\partial t^m}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^o, \end{aligned}$$

ahol $\tau_i, \tau_i^o, U_j, U_j^o$ az ún. (csúsztatási, v. torzulási, illetve térfogati) anyagállandók.

³ $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^o$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^d + \boldsymbol{\varepsilon}^o$, $\boldsymbol{\sigma}^o = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^o = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}$. Az előző cikkben FÜLÖP az izotrop v. gömbtenzort ^o helyett ^s indexszel jelöli, a „szférikus” kifejezésre utalva.

Ez a felírás azonban mindössze öncélú játéknak tűnik, ugyanis ez idáig semmiféle fizikai indoklás vagy igazolás nem támasztotta alá, csupán a meglévő modellek egy általánosítása.

Az elmúlt években először sikerült a különböző kontinuummechanikai anyagmodellek között rendet vágni. A szabad spekuláció és a gyakorlati méréseket legjobban megközelítő modellalkotások végtelen lehetőségei közül választás helyett a termodinamika második főtételéből – és az ehhez kapcsolódó entrópiánövekedés elvéből – sikerült szigorúan deduktíve levezetni az egyetlen olyan anyagegyenletet, amelyet már *anyagtörvénynek* nevezhetünk.

Az anyagegyenlet [VÁN–ASSZONYI (2008) 40. old.], amely a termodinamika második főtételéből – a spontán entrópiánövekedés pozitív voltából – került levezetésre:

$$(5) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d + \tau \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}^d &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon}^d + \mu \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^o + \tau_o \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}^o &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o + \lambda_o \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon}^o + \mu_o \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^o, \end{aligned}$$

ahol az $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ tenzorok a

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{I})^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon}$$

összefüggés diadikus és gömbi felbontásából származnak.

Látható, hogy az (5) egyenlet kétszer 5, azaz 10 anyagállandót és két különböző deformációt tartalmaz. Az (5) levezetésénél *két* egyszerűsítő feltevéssel is éltünk:

- a sima szubsztanciális időderiválttal dolgoztunk az objektív időderivált helyett,
- csupán egyetlen tenzoriális fizikai belső változót vettünk alapul.

Ennek ellenére eléggé bonyolult, s a gyakorlat számára nehezen alkalmazható összefüggést kaptunk.

Megengedhetőnek véltük – mint harmadik egyszerűsítő feltevést – a gyakorlati alkalmazásoknál a kétféle deformáció egyenlővé tételét: $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$,⁴ s ezáltal a $2\eta = \lambda + \mu$ és $3K_v = \lambda_o + \mu_o$ jelölések bevezetésével az ún. *tehetetlenségi standard testet* kaptuk eredményül:

$$(6) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^o + \tau_o \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \theta_o \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o, \end{aligned}$$

s a benne szereplő

G – csúsztató rugalmassági modulus [MPa], K – térfogatváltozási modulus [MPa],
 η – viszkozitási együttható [MPa h], K_v – térfogati viszkozitási tényező [MPa h],
 τ – relaxációs idő [h], τ_o – térfogati relaxációs idő [h],
 θ – torzulási tehetetlenségi tényező [MPa h²], θ_o – térfogati tehetetlenségi tényező [MPa h²].

⁴ $(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{I})^{-1} \approx \mathbf{I}$

anyagállandókra – az ONSAGER-féle vezetési tenzor pozitív definit voltából adódóan –

$$G \geq 0, \eta \geq 0, \theta \geq 0, \tau \geq 0, \frac{\eta}{G} - \tau \geq 0, \text{ ill.}$$

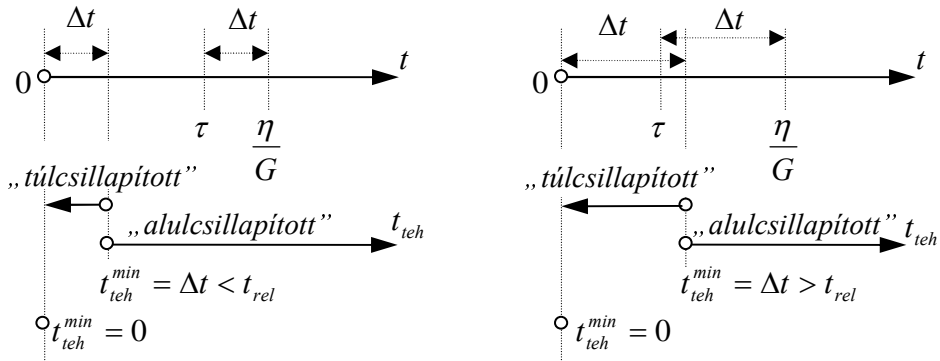
$$K \geq 0, K_v \geq 0, \theta_o \geq 0, \tau_o \geq 0, \frac{K_v}{K} - \tau_o \geq 0$$

termodinamikai feltételek (korlátozások) állnak fenn.

A TEHETETLENSÉGI STANDARD TEST IDŐTÉNYEZŐI. A reológiai folyamatra jellemző időparaméterek [ASSZONYI-FÜLÖP-VÁN-SZARKA-HORVÁTH (2008), 88.o.] a következők:

<i>deformációk késési ideje:</i>	$t_{def} := \eta/G,$	$t_{def}^o := K_v/K,$
<i>relaxációs idő:</i>	$t_{rel} := \tau,$	$t_{rel}^o := \tau_o,$
<i>időbeli eltolás:</i>	$\Delta t := \eta/G - \tau = t_{def} - t_{rel},$	$\Delta t^o := K_v/K - \tau_o,$
<i>tehetetlenségi idő:</i>	$t_{teh} := \theta/2G\tau,$	$t_{teh}^o := \theta_o/3K\tau_o,$

amelyek egymáshoz való viszonyát (torzulási állapotnál) az 1. ábra mutatja. Ez azt jelenti, hogy ha az anyag tehetetlenségének ideje nagyobb, mint az időeltolás ($t_{teh} > \Delta t$), akkor az anyag „alulcsillapított”, ha kisebb ($t_{teh} < \Delta t$), akkor „túlcsillapított”.



1. ábra. Az időtényezők

A gyakorlat szempontjából az egyszerűbb reológiai anyagmodellek alkalmazásának is lehet értelme, mert az anyag mechanikai tulajdonságai mellett a mechanikai folyamat jellege is meghatározó. Tehát pl. a $\theta \ddot{\epsilon}$ nagy θ esetén is lehet nulla közeli érték, amikor a mechanikai folyamatban a gyorsulás kicsi vagy nulla. Ugyanez elmondható a $\tau \dot{\sigma}$ vagy $\eta \dot{\epsilon}$ tagokra is, ha a sebesség kicsi vagy nulla.

A következő táblázat tartalmazza a rugalmas tartományban szokásos egyszerűbb anyagmodelleket, amelyek az általánosból az egyes anyagállandók zérussal történő egyenlővé tételével állíthatók elő:

1. táblázat

ANYAGMO- DELL	TORZULÁSI ÁLLAPOT ANYAG- EGYENLETE	TÉRFOGATVÁLTOZÁSI ÁLLAPOT ANYAGEGYENLETE
<i>Hooke-</i> test	$\boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d$	$\boldsymbol{\sigma}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o$
<i>Kelvin-</i> test	$\boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$	$\boldsymbol{\sigma}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o$
Tehetetlenségi <i>Kelvin</i> -test	$\boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$	$\boldsymbol{\sigma}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \theta_o\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o$
<i>Maxwell-</i> test	$\boldsymbol{\sigma}^d = 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \tau\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d$	$\boldsymbol{\sigma}^o = 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o - \tau_o\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o$
Tehetetlenségi <i>Maxwell</i> -test	$\boldsymbol{\sigma}^d = 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \tau\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$	$\boldsymbol{\sigma}^o = 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o - \tau_o\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o + \theta_o\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o$
Klasszikus standard test ⁵	$\boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \tau\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d$	$\boldsymbol{\sigma}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o$
Általános standard test	$\boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \tau\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d$	$\boldsymbol{\sigma}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o - \tau_o\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o$
Tehetetlenségi standard test	$\boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \tau\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$	$\boldsymbol{\sigma}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o - \tau_o\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o + \theta_o\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o$

Ennek a felsorolásnak az értelmét az adja, hogy számos esetben az anyagtörvény akár jelentősen is egyszerűsödhet, amelyet a következő, gyakorlati anyagtörvény című szakaszban mutatunk meg.

A HOMOGÉN LINEÁRIS ANYAGEGYENLETEK EGYSÉGES ALAKJA. A (6) alatti anyagtörvény differenciáloperátorokkal felírva a

$$(6a) \quad \begin{aligned} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma}^d &= \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^d, \\ \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma}^o &= \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^o, \end{aligned}$$

alakú lesz, amelynél bevezetve a

$$(7) \quad 2\tilde{G} := 2G \frac{1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 3\tilde{K} := 3K \frac{1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}}$$

formalizmust, az anyagtörvény a HOOKE-testnél megszokott alakot ölti:

$$(8) \quad \boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o.$$

⁵ Standard test: POYNTING-THOMSON-féle test, klasszikus formája: nem reológiai térfogatváltozás esetén

A (8) alakú felírás csupán a levezetéseket és az áttekinthetőséget segítő formalizmus, mert általános értelemben a differenciáloperátoroknak nem létezik szigorúan vett inverze, csupán egy integrációs állandóval terhelt integrálalakja. Ezért a konkrét alkalmazások során a (8)-ban a nevezőben lévő kifejezéssel való átszorozást mindig el kell végezni.

A (6) és (8) összehasonlításából látszik, hogy jóval egyszerűbb a (8) formulával dolgozni, mint a részletesen kiírt (6a) differenciálegyenlettel. Persze annak ellenére, hogy tisztában vagyunk azzal, hogy végeredményben a munkát nem spóroljuk meg, csupán áttekinthetőbbé tesszük a levezetéseket. Ennek megfelelően a leggyakrabban használt (2. táblázat) reológiai modellek esetén az anyagfüggvények a következők:

2. táblázat

ANYAGMODELL	$2\tilde{G}$	$3\tilde{K}$
<i>Hooke-test</i>	$2G$	$3K$
<i>Kelvin-test</i>	$2G\left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t}\right)$	$3K\left(1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t}\right)$
Tehetlenségi <i>Kelvin-test</i>	$2G\left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$	$3K\left(1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$
<i>Maxwell-test</i>	$2\eta \left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}} \right)$	$3K_v \left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}} \right)$
Tehetlenségi <i>Maxwell-test</i>	$2\eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1 + \frac{\theta}{2\eta} \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}} \right)$	$3K_v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1 + \frac{\theta_o}{3K_v} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}} \right)$
Klasszikus standard test	$2G \left(\frac{1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}} \right)$	$3K$
Általános standard test	$2G \left(\frac{1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}} \right)$	$3K \left(\frac{1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}} \right)$
Tehetlenségi standard test	$2G \left(\frac{1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}} \right)$	$3K \left(\frac{1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}} \right)$

ANYAGTÖRVÉNY FESZÜLTSGRE, ILLETVE DEFORMÁCIÓRA FELOLDOTT ALAKJA. Az anyagegyenlet (8) alatti formája alapján, az $\boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d$, $\boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o$ jelölésekkel pedig:

$$(9) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon} + (3\tilde{K} - 2\tilde{G})\boldsymbol{\varepsilon}^o = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon} + (3\tilde{K} - 2\tilde{G})\frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} = \\ &= 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon} + (3\tilde{K} - 2\tilde{G})\boldsymbol{\varepsilon}_o\mathbf{I} = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{3}\Theta\mathbf{I}, \end{aligned}$$

illetve

$$(10) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2\tilde{G}}\boldsymbol{\sigma} - \left(\frac{3\tilde{K}}{2\tilde{G}} - 1\right)\boldsymbol{\varepsilon}^o = \frac{1}{2\tilde{G}}\boldsymbol{\sigma} - \left(\frac{3\tilde{K}}{2\tilde{G}} - 1\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}^o}{3\tilde{K}} = \\ &= \frac{1}{2\tilde{G}}\boldsymbol{\sigma} - \left(\frac{1}{2\tilde{G}} - \frac{1}{3\tilde{K}}\right)\boldsymbol{\sigma}_o\mathbf{I} = \frac{1}{2\tilde{G}}\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{6\tilde{K}\tilde{G}}S\mathbf{I}, \end{aligned}$$

formában írható, ahol

$$(11) \quad \begin{aligned} \Theta &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 3\varepsilon_o = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ S &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 3\sigma_o = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \end{aligned}$$

Az anyagegyenlet három formája (a (8), (9) és (10)) – a HOOKE-testet kivéve – nem ekvivalens egymással. Azt kell mondanunk, hogy a deviatorikus felbontás az anyagtörvény természetes alakja. Ez furcsa, hiszen a deviatorikus alak tűnik az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{D}$ tenzorokból származtatottnak. Pedig a törvény levezetése az entrópia növekedéséből is csak az impulzusáram tenzori (deviatorikus) és skalár (gömbi) felbontásával történik, mivel a feltételeknek minden tenzori rangú áramra külön-külön kell teljesülnie.

Írjuk egymás mellé az anyagegyenlet különböző felírásának kifejtett alakját:

- deviatorikus alak:

$$(6a) \quad \begin{aligned} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{\sigma}^d &= \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^d, \\ \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{\sigma}^o &= \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^o, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{azaz} \quad \boldsymbol{\sigma}^d + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^o + \tau_o \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \theta_o\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o, \end{aligned}$$

- feszültségre feloldott alak:

$$(9a) \quad \begin{aligned} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{\sigma} &= \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon} + \\ &+ \left\{\left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) - \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right)\right\}\boldsymbol{\varepsilon}^o, \\ \text{azaz} \quad \boldsymbol{\sigma} + (\tau + \tau_o)\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \tau\tau_o\ddot{\boldsymbol{\sigma}} &= (3K - 2G)\boldsymbol{\varepsilon}^o + [(3K_v + 3K\tau) - (2\eta + 2G\tau_o)]\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \\ &+ [(\theta_o + 3K_v\tau) - (\theta + 2\eta\tau_o)]\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + [\theta_o\tau - \theta\tau_o]\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o, \end{aligned}$$

- deformációra feloldott alak:

$$(10a) \quad \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{\varepsilon} = \left(1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma} -$$

$$- \left\{ \left(1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{2G} - \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{3K} \right\} \boldsymbol{\sigma}^o,$$

azaz

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{\eta}{G} + \frac{K_v}{K}\right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{\theta}{2G} + \frac{\eta}{G} \frac{K_v}{K} + \frac{\theta_o}{3K}\right) \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{\theta}{2G} \frac{K_v}{K} + \frac{\eta}{G} \frac{\theta_o}{3K}\right) \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\theta}{2G} \frac{\theta_o}{3K} \boldsymbol{\varepsilon}^{(4)} = \\ = \frac{1}{2G} \left[\boldsymbol{\sigma} + \left(\frac{K_v}{K} + \tau\right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\theta_o}{3K} + \frac{K_v}{K} \tau\right) \ddot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\theta_o}{3K} \tau \ddot{\boldsymbol{\sigma}} \right] \\ - \left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{3K}\right) \boldsymbol{\sigma}^o - \left[\left(\frac{K_v}{K} - \frac{\eta}{G}\right) - (\tau - \tau_o)\right] \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o \\ - \left[\left(\frac{\theta_o}{3K} - \frac{\theta}{2G}\right) - \left(\frac{K_v}{K} \tau - \frac{\eta}{G} \tau_o\right)\right] \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^o - \left(\frac{\theta_o}{3K} \tau - \frac{\theta}{2G} \tau_o\right) \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^o. \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy a deviatorikus felbontás az egyszerűbb, ui.

- a (6a) egyenletei feszültségállapotra elsőrendig, deformációállapotra pedig másodrendig bezárólag tartalmaznak időderiváltakat,
- a (9a) egyenlet feszültségállapotra másodrendig, deformációállapotra pedig harmadrendig bezárólag tartalmaz időderiváltakat,
- a (10a) egyenlet feszültségállapotra harmadrendig, deformációállapotra pedig negyedrendig bezárólag tartalmaz időderiváltakat.

AZ ANYAGTÖRVÉNY EGYTENGELYŰ FESZÜLTÉGÁLLAPOTBAN. [ASSZONYI (2006) 93.old.] azt állította, hogy a POYNTING-THOMSON-féle, ún. standard modell egytengelyű feszültségállapotban nem írható fel egyetlen skaláregyenlettel, hanem csak kettővel, mivel a $\sigma_{||} := \sigma$ tengelyirányú feszültség nemcsak az $\varepsilon_{||}$ tengelyirányú deformáció, hanem az $\varepsilon_{\perp}$ keresztirányú deformációnak is függvénye [$\sigma = f(\varepsilon_{||}, \varepsilon_{\perp})$]. Ennek megfelelően két egyenletből indult ki [SZARKA (2006) 138-142.old.] is, s így adta meg a megoldást az egytengelyű nyomókísérlet esetére.

[FÜLÖP TAMÁS (2009)] rámutatott, hogy az ε_k keresztirányú fajlagos nyúlás kiküszöbölhető az összefüggésből, igaz, annak árán (amire úgy látszik, nem akartunk gondolni), hogy megjelennek magasabb időderiváltak is.

Egytengelyű folyamatok esetén

$$\boldsymbol{\sigma}^o = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = \sigma_o \mathbf{I} = \frac{1}{3} \sigma \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^o = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} = \varepsilon_o \mathbf{I} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{||} + 2\varepsilon_{\perp}) \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{||} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^o = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 2\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^d = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^o = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 2(\varepsilon_{||} - \varepsilon_{\perp}) & 0 & 0 \\ 0 & -(\varepsilon_{||} - \varepsilon_{\perp}) & 0 \\ 0 & 0 & -(\varepsilon_{||} - \varepsilon_{\perp}) \end{Bmatrix}.$$

A (6) anyagegyenlet ekkor a

$$(12) \quad \begin{aligned} \sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2G(\varepsilon_{||} - \varepsilon_{\perp}) + 2\eta(\dot{\varepsilon}_{||} - \dot{\varepsilon}_{\perp}) + \theta(\ddot{\varepsilon}_{||} - \ddot{\varepsilon}_{\perp}), \\ \sigma + \tau_o \dot{\sigma} &= 3K(\varepsilon_{||} + 2\varepsilon_{\perp}) + 3K_v(\dot{\varepsilon}_{||} + 2\dot{\varepsilon}_{\perp}) + \theta_o(\ddot{\varepsilon}_{||} + 2\ddot{\varepsilon}_{\perp}), \end{aligned}$$

alakot ölti, illetve differenciáloperátoros formában

$$(13) \quad \begin{aligned} \sigma &= 2\tilde{G}(\varepsilon_{||} - \varepsilon_{\perp}), \\ \sigma &= 3\tilde{K}(\varepsilon_{||} + 2\varepsilon_{\perp}). \end{aligned}$$

[FÜLÖP TAMÁS (2009)] levezetése alapján felírjuk az anyagegyenlet egytengelyű alakját következőkben.

ANYAGEGYENLET A TENGEYIRÁNYÚ DEFORMÁCIÓVAL. Adjuk össze a (13) első egyenletének $6\tilde{K}$ -szorosát, a második egyenlet $2\tilde{G}$ -szeresével – mivel a $\partial/\partial t$ bármely két polinomja felcserélhető egymással – ezért az összegből az ε_k kiesik:

$$(14) \quad \sigma = \frac{9\tilde{G}\tilde{K}}{\tilde{G} + 3\tilde{K}} \varepsilon_{||}.$$

A (14) egyenlet behelyettesítés és rendezés után

$$(15) \quad \sigma + \mathcal{G}\dot{\sigma} + \mathcal{G}_a\ddot{\sigma} + \mathcal{G}_b\ddot{\sigma} = E\varepsilon_{||} + \lambda\dot{\varepsilon}_{||} + \lambda_a\ddot{\varepsilon}_{||} + \lambda_b\ddot{\varepsilon}_{||} + \lambda_c\varepsilon_{||},^{(4)}$$

ahol

$$(16) \quad \begin{aligned} E &:= \frac{18GK}{2G + 6K}, & \lambda &:= \frac{3(6K\eta + 6GK_v)}{2G + 6K}, \\ \mathcal{G} &:= \frac{2\eta + 6K_v + 2G\tau_o + 6K\tau}{2G + 6K}, & \lambda_a &:= \frac{3(2G\theta_o + 6\eta K_v + 3K\theta)}{2G + 6K}, \\ \mathcal{G}_a &:= \frac{\theta + 2\theta_o + 2\eta\tau_o + 6K_v\tau}{2G + 6K}, & \lambda_b &:= \frac{3(2\eta\theta_o + 3K_v\theta)}{2G + 6K}, \\ \mathcal{G}_b &:= \frac{\theta\tau_o + 2\theta_o\tau}{2G + 6K}, & \lambda_c &:= \frac{3\theta\theta_o}{2G + 6K}. \end{aligned}$$

Ennek az összefüggésnek a jelentősége abban van, hogy olyan egytengelyű mérési eredményekből is meghatározhatjuk mind a 8 anyagállandót, amelynél a keresztirányú nyúlást nem regisztrálták. Ez a helyzet az 1960-tól végzett egytengelyű reológiai mérések több mint háromnegyedénél.⁶

Eddig az irodalomban az alacsonyabbrendű reológiai modellek egytengelyű anyag-egyenletei – hibásan – a következő

HOOKE:	$\sigma = E\varepsilon$,
KELVIN:	$\sigma = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon}$,
MAXWELL:	$\sigma = \lambda\dot{\varepsilon} - \mathcal{G}\dot{\sigma}$,
STANDARD:	$\sigma = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} - \mathcal{G}\dot{\sigma}$.

formában szerepeltek [$\varepsilon := \varepsilon_{||}$]. Azonban a (15) és (16) összefüggés alapján láthatjuk, hogy ezek az egyenletek a HOOKE-testet kivéve nem igazak.

Vegyük példának a KELVIN-testet [$\sigma^d = 2G\varepsilon^d + 2\eta\dot{\varepsilon}^d$, $\sigma^o = 2G\varepsilon^o + 3K_v\dot{\varepsilon}^o$], amelynek egytengelyű állapotra vonatkozó anyagegyenlete a (16) alapján a $\tau = 0$, $\theta = 0$, $\tau_o = 0$, $\theta_o = 0$ felhasználásával:

$$\sigma + \mathcal{G}^K \dot{\sigma} = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} + \lambda_a^K \ddot{\varepsilon},$$

ahol

$$\mathcal{G}^K := \frac{2\eta + 6K_v}{2G + 6K}, \quad E := \frac{18GK}{2G + 6K}, \quad \lambda := \frac{3(6K\eta + 6GK_v)}{2G + 6K}, \quad \lambda_a^K := \frac{18\eta K_v}{2G + 6K},$$

amely formailag a *tehetetlenségi standard modell* alakját veszi fel, illetve a „klasszikus”⁷ KELVIN-test [$\sigma^d = 2G\varepsilon^d + 2\eta\dot{\varepsilon}^d$, $\sigma^o = 2G\varepsilon^o$] esetében:

$$\sigma + \mathcal{G}\dot{\sigma} = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon},$$

ahol

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \lambda = \frac{9K\eta}{3K + G}, \quad \mathcal{G} = \frac{\eta}{3K + G},$$

amely formailag a *standard modell* alakját veszi fel.

KÖVETKEZMÉNYEK. FÜLÖP ezen a felismerésének messzemenő hatása van az anyagállandók meghatározására és az anyagtörvény kiválasztására:

1. Az irodalomban legtöbbször egytengelyű kísérletekből határozzák meg az anyagállandók értékét, s ez hibás eredményre vezet. Példánkból láttuk, ha az egytengelyű kísérletből – a legjobb szorosság alapján – a standard, vagy a tehetetlenségi standard

⁶ Ha ASSZONYI-VÁN-SZARKA 2007-ben ismerte volna ezt az összefüggést, akkor KLECZEK sziléziai feketeszénre vonatkozó 1969-es kísérleti adatainak felhasználásánál nem kellett volna erőszakolt feltevessel élniük (115. old.).

⁷ Amelynél a térfogatváltozás időtől független, azaz $K_v = 0$, $\tau_o = 0$, $\theta_o = 0$.

modell adódik, akkor a tényleges anyagmodell a „klasszikus” KELVIN-, vagy a KELVIN-test.

2. Az egytengelyű laborkísérletek típusai általában

(a) egyenletes sebességű terhelés $[\dot{\sigma} = \text{constans}]$,

(b) egyenletes deformációsebességű terhelés $[\dot{\varepsilon} = \text{constans}]$,

majd a felterhelés után kiegészítésként

(c) állandó terhelés (kúszás vizsgálat) $[\sigma = \text{constans}]$,

(d) állandó deformáció (relaxációs vizsgálat) $[\varepsilon = \text{constans}]$,

s ezek a kísérletek már be is határolják, hogy milyen végeredményt kapunk, vagyis, hogy mely anyagállandókat tudjuk meghatározni. Ha a *constans* értéket A -val jelöljük, akkor a (15) egyenlet alapján a kapható legmagasabb rendű anyagtörvények, s a meghatározható anyagállandók a következők:

3. táblázat

	FELTÉTEL	A KIÉRTÉKELÉS EGYENLETE	ANYAGÁLLANDÓK
(a)	$\dot{\sigma} = A, \ddot{\sigma} = \ddot{\sigma} = 0$	$\sigma + \mathcal{G}A = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} + \lambda_a\ddot{\varepsilon} + \lambda_b\ddot{\varepsilon} + \lambda_c \varepsilon^{(4)}$	$\mathcal{G}, E, \lambda, \lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$
(b)	$\dot{\varepsilon} = A, \ddot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon} = \varepsilon = 0$	$\sigma + \mathcal{G}\dot{\sigma} + \mathcal{G}_a\ddot{\sigma} + \mathcal{G}_b\ddot{\sigma} = E\varepsilon + \lambda A$	$\mathcal{G}, \mathcal{G}_a, \mathcal{G}_b, E, \lambda$
(c)	$\sigma = A, \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \ddot{\sigma} = 0$	$A = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} + \lambda_a\ddot{\varepsilon} + \lambda_b\ddot{\varepsilon} + \lambda_c \varepsilon^{(4)}$	$E, \lambda, \lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$
(d)	$\varepsilon = A, \dot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon} = \varepsilon = 0$	$\sigma + \mathcal{G}\dot{\sigma} + \mathcal{G}_a\ddot{\sigma} + \mathcal{G}_b\ddot{\sigma} = EA$	$E, \mathcal{G}, \mathcal{G}_a, \mathcal{G}_b$

Ahhoz, hogy mindegyik anyagállandót meg lehessen határozni, az kell, hogy mind a σ , mind az ε mérési értékek a harmadik, illetve negyedik időderiváltig bezárólag különbözzenek zérustól. Ilyen mérések pl. a periodikus terhelési kísérletek.

3. Ezek a problémák nem merülnek fel akkor, ha a laboratóriumi mérések során nemcsak a terhelésirányú, hanem a keresztirányú fajlagos nyúlásértékek is rögzítésre kerülnek az idő függvényében. Ekkor ugyanis alacsonyabbrendű egyenletekkel dolgozunk a kiértékelésnél. A (13) egyenlet alapján – tehetetlenségi standard testnél – ezek az összefüggések:

$$(13a) \quad \begin{aligned} \sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2G(\varepsilon_{||} - \varepsilon_{\perp}) + 2\eta(\dot{\varepsilon}_{||} - \dot{\varepsilon}_{\perp}) + \theta(\ddot{\varepsilon}_{||} - \ddot{\varepsilon}_{\perp}), \\ \sigma + \tau_o \dot{\sigma} &= 9K(\varepsilon_{||} + 2\varepsilon_{\perp}) + 9K_v(\dot{\varepsilon}_{||} + 2\dot{\varepsilon}_{\perp}) + 3\theta_o(\ddot{\varepsilon}_{||} + 2\ddot{\varepsilon}_{\perp}), \end{aligned}$$

ha figyelembe vesszük, hogy $\sigma_o = \frac{1}{3}\sigma$.

ANYAGEGYENLET A KERESZTIRÁNYÚ DEFORMÁCIÓVAL. Az egytengelyű anyag-egyenlet nemcsak az $\varepsilon_{||}$ -sal, hanem az $\varepsilon_{\perp}$ -sel is kifejezhető, bár ennek különösebb gyakorlati haszna nincs. Adjuk össze a (13) első egyenletének $-3\tilde{K}$ -szorosát a második egyenlet $2\tilde{G}$ -szeresével, s ekkor

$$(17) \quad \sigma = \frac{18\tilde{G}\tilde{K}}{2\tilde{G}-3\tilde{K}} \varepsilon_{\perp},$$

$$(18) \quad \sigma + \mathcal{G}^k \dot{\sigma} + \mathcal{G}_a^k \ddot{\sigma} + \mathcal{G}_b^k \ddot{\sigma} = E^k \varepsilon_{\perp} + \lambda^k \dot{\varepsilon}_{\perp} + \lambda_a^k \ddot{\varepsilon}_{\perp} + \lambda_b^k \ddot{\varepsilon}_{\perp} + \lambda_c^k \varepsilon_{\perp}^{(4)},$$

ahol

$$(19) \quad \begin{aligned} E^k &:= \frac{18GK}{2G-3K}, & \lambda^k &:= \frac{18(K\eta + GK_v)}{2G-3K}, \\ \mathcal{G}^k &:= \frac{2G\tau_o + 2\eta - 3K_v - 3K\tau}{2G-3K}, & \lambda_a^k &:= \frac{3(3K\theta + 6\eta K_v + 2G\theta_o)}{2G-3K}, \\ \mathcal{G}_a^k &:= \frac{\theta + 2\eta\tau_o - \theta_o - 3K_v\tau}{2G-3K}, & \lambda_b^k &:= \frac{3(2\eta\theta_o + 3K_v\theta)}{2G-3K}, \\ \mathcal{G}_b^k &:= \frac{\theta\tau_o - \theta_o\tau}{2G-3K}, & \lambda_c^k &:= \frac{3\theta\theta_o}{2G-3K}. \end{aligned}$$

2.1.2. AZ ANYAGTÖRVÉNY ALKALMAZÁSA GYAKORLATILAG

A (6) *tehetetlenségi standard* anyagmodell jó szándékkal tudjuk ajánlani a gyakorlati számítások részére, mivel minden megkívánt mechanikai szempontnak megfelel, s a modell képes visszatükrözni az anyag

- rugalmas alakváltozási képességét, [feszültség deformáció-függését]
- belső súrlódását (kúszás és relaxáció), [feszültség deformációsebesség-függését]
- belső tehetetlenségét. [feszültség deformációgyorsulás-függését]

Ennek ellenére fel kell tenni a kérdést, hogy – bár elméletileg nem, de – a gyakorlati alkalmazás számára ez a modell tovább már nem egyszerűsíthető? A válasz azonban nem könnyű, mert minden további egyszerűsítésnél le kell mondanunk valamiről! Tudjuk, hogy mérnöki létesítményeink tervezésénél a rugalmasságról, a kúszásról és a relaxációról nem mondhatunk le, mivel ez a biztonság és a megbízható tervezés rovására menne. Egyetlen lehetőségként az anyag belső tehetetlenségének figyelmen kívül hagyása kínálkozik. Kérdés azonban: ennek mi az ára? Ennek hatása csak a tranziens jelenségeknél, a rezgésállapotoknál, és a rezonanciakatasztrófa számításánál van. Ha a mechanikai feladatnál ilyen problémával nem kell szembenézni, akkor – mint ahogy már egy ízben korábban javasoltuk, – elégséges a *standard* modellel számolni, amely skaláris formában írva:

$$(20) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta \dot{\varepsilon},$$

$$\sigma_o + \tau_o \dot{\sigma}_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v \dot{\varepsilon}_o,$$

ahol

$$(21) \quad \sigma := \sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij} = \sigma_{ij}^d, \quad \varepsilon := \varepsilon_{ij} - \varepsilon_o \delta_{ij} = \varepsilon_{ij}^d, \quad \sigma_o := \frac{1}{3} \sum \sigma_{ii}, \quad \varepsilon_o := \frac{1}{3} \sum \varepsilon_{ii}.$$

Ha azonban ezekkel a problémákkal szembe kell nézni, akkor a fáradtságosabb utat kell választanunk, ha nem akarjuk, hogy az általunk tervezett műtárgyakat katasztrófákkal kapcsolatosan emlegessék.

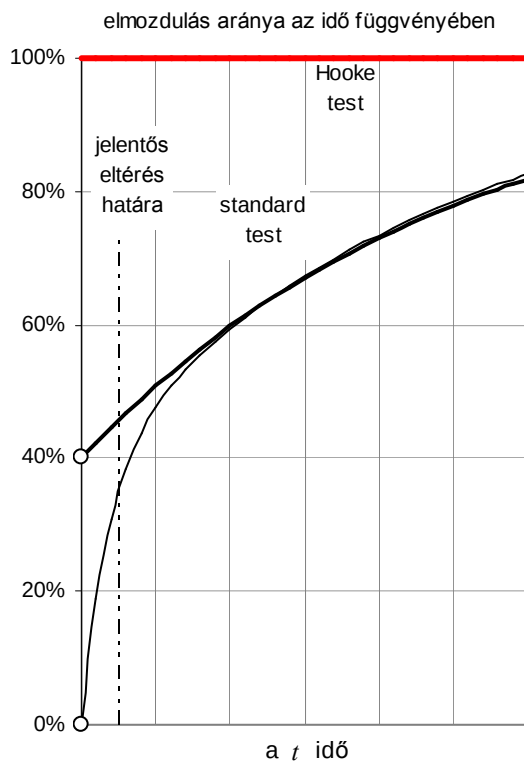
A formai azonosság miatt a következőkben mondanivalónkat csak a torzulási egyenletre korlátozzuk, ui. a megállapítások azonosak a térfogati egyenletre is.

Amíg nem voltunk tisztában a tényleges anyagtulajdonságokkal, addig a hagyományos méretezéseinknél jó adag szerencsére is szükségünk volt.

Ma már tudjuk ugyanis, hogy a *túlméretezés* földalatti létesítményeknél nem a biztonság, hanem adott esetben a katasztrófa irányába tett lépés. Mivel a túlméretezett (vastagabb, ridegebb) szerkezet – merevebb, így a szerkezet merevségével arányosnál jobban nő a közetkörnyezet biztosításra átadott terhelése [ASSZONYI, Cs. (1975)].

Ezért a továbbiakban, ha feltesszük, hogy az anyagtörvényből a $\theta \dot{\epsilon}$, ill. $\theta_0 \ddot{\epsilon}_0$ tag kihagyható,⁸ akkor konszolidált terhelés–deformáció esetére gondolunk.

Illusztrációként vegyük a hidrosztatikus primer mezőben kihajtott körszelvényű folyosónál a kerületi pontok sugárirányú elmozdulását [FÜLÖP–BÉDA (2009)]:



2. ábra

az $r = R$ kerületi pont HOOKE-test szerinti – időben állandó – elmozdulásához viszonyítottunk. Látható, hogy az eltérés a $t = 0$ időpillanatban jelentős, mert a standard modell-

Hooke-test esetén:

$$u = \frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2,$$

Standard test esetén:

$$u = \frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{\eta - G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right\},$$

Tehetlenségi standard test esetén:

$$u = \frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left\{ 1 + \left[\frac{2G\tau - \eta}{\theta} s(t) - c(t) \right] e^{-\frac{\eta}{\theta}t} \right\}$$

A θ tehetlenségi állandó értékétől függően több megoldás is lehet aszerint, hogy a θ értéke kisebb, mint a „kritikus”

$$\theta_{krit} = \eta^2 / 2G,$$

akkor az anyag „alulsillapított”, vagy nagyobb, amikor „túlsillapított”. A 2. ábrán

⁸ Arról nem is beszélve, hogy a tehetlenségi állandó értéke csak olyan mérésekből határozható meg, amelyenél a deformációgyorsulás megjelenik.

nél azonnali elmozdulások [$u_0^{standard} \neq 0$] vannak, míg a tehetetlenségi standard modellnél nincsenek. A kezdeti eltérés után mindkét modellnél – túlszillapított esetben – majdnem megegyező lefutást tapasztalunk, tehát adott feladatnál állást tudunk foglalni arról, mikor engedhető meg a $\theta \ddot{\varepsilon} \approx 0$ közelítés.

Azonban a tehetetlenségi tag - külön vizsgálat nélküli - kizárása (elhagyása) adott esetben nagyszerű lehetőségektől foszt meg minket. Tavalyi könyvünkben [SZARKA–ASSZONYI–FÜLÖP, (2008)] rámutattunk, hogy az anyagnak van *reológiai* sajátfrekvenciája [$\omega_0 = \sqrt{2G/\theta}$],⁹ amelyet például alagúthajtásnál a jövesztőfej által létrehozott frekvencia megközelíthet. Ebben az esetben energiatakarékos jövesztést produkálhatunk.

Gondolatban – az anyagegyenlet egyszerűsítése érdekében – sokféle esetet el lehet képzelni, pl.

- (a) Ha az üregnyitás után egyéb mechanikai hatások nem érik a közetkörnyezetet, akkor a deformációk a HOOKE-test szerinti értékhez konvergálnak. Tehát, ha csak a végállapotra vagyunk kíváncsiak – az időbeli lefutás nem érdekel minket – akkor elégséges a HOOKE-törvénnyel számolnunk [$2\eta \dot{\varepsilon} - \tau \dot{\sigma} + \theta \ddot{\varepsilon} \approx 0$].
- (b) Ha az üregnyitás utáni hirtelen változások (tranziens jelenségek) – amelyek rövid időn belül lejártszódnak (ld. 2. ábra „jelentős eltérés hatása”) – nem érdekesek számunkra, akkor elég a standard testtel számolni [$\theta \ddot{\varepsilon} \approx 0$].
- (c) Továbbá, ha a deformációkat nem korlátozzuk – pl. biztosítószerkezet beépítésével, vagy bármiféle deformáció- v. mozgáskorlátozással, – akkor a relaxáció nem léphet fel [$-\tau \dot{\sigma} + \theta \ddot{\varepsilon} \approx 0$], s elégséges a KELVIN-moddal dolgozni.

Természetesen számos egyéb, fel nem sorolt lehetőség is kínálkozik még.

Ha az általánostól eltérő, egyszerűbb anyagmodellel szeretnénk dolgozni, az anyagállandók értékét akkor is a teljes tehetetlenségi standard test esetére kell kiszámolni, csupán a későbbiekben a konkrét méretezésnél az egyes tagokat elhanyagoljuk (az ezekhez tartozó anyagállandók értékét közelítőleg zérusnak vesszük).

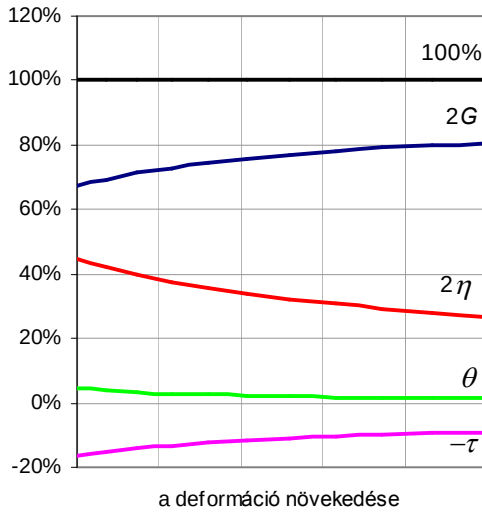
Az anyag, a mérnöki szerkezet, műtárgy teherviselésének gerincét a rugalmas alakváltozás képessége [α %] adja:

$$(22) \quad \underbrace{\sigma}_{100\%} = \underbrace{2G\varepsilon}_{\alpha\%} + \underbrace{2\eta\dot{\varepsilon}}_{\beta\%} + \underbrace{\theta\ddot{\varepsilon}}_{\gamma\%} - \underbrace{\tau\dot{\sigma}}_{\delta\%}.$$

Ugyanis ha az általánostól eltérő, alacsonyabb rendű reológiai modellel kívánunk dolgozni, akkor a mérési adatokat nem szabad az alacsonyabb rendű modell szerint

⁹ Amely nem egyezik meg a szerkezetek méretviszonyaitól függő *rugalmasságtani* sajátfrekvenciákkal.

meghatározni, mert az hibás eredményt ad. Egy adott mérési adatsorhoz tartozó közelítő anyagegyenlet legyen például



$$\sigma = 1.500\varepsilon + 7.500\dot{\varepsilon} + 5.000\ddot{\varepsilon} - 3\dot{\sigma}.$$

Ekkor a lehetséges közelítések (a legkisebb négyzetek minimuma alapján) következők:

HOOKE: $\sigma = 2.474\varepsilon$,

a helyes $\sigma = 1.500\varepsilon$ helyett,

KELVIN: $\sigma = 1.568\varepsilon + 7.420\dot{\varepsilon}$,

a helyes $\sigma = 1.500\varepsilon + 7.500\dot{\varepsilon}$ helyett,

Standard: $\sigma = 1.502\varepsilon + 8.174\dot{\varepsilon} - 1,115\dot{\sigma}$,

a helyes $\sigma = 1.500\varepsilon + 7.500\dot{\varepsilon} - 3\dot{\sigma}$ helyett.

3. ábra. Az egyes tagok részesedése a 100%-ból

Ez a kép csak azt mutatja meg, hogy milyen elvi hibákat követhetünk el. Az anyag-állandók értékét általában laboratóriumi mérések útján határozzuk meg, a vett mintából kialakított szabályos próbatesteken, azaz kapott értékeink a *kőzettömegre* vonatkozó anyagállandó-értékek, nem pedig a *kőzettestre*. Ezt különböző

RQD, C, RMR, RCR, RSR, Q, GSI, RMi

empirikus indexekkel való korrekció révén számítják át a *kőzettestre* vonatkozó – s a tervezésnél figyelembe vett – értékekre. Ezek több 10%-os korrekciót is jelenthetnek, tehát feltehető a kérdés, van-e gyakorlati értelme annak, hogy a jelenleginél még pontosabb anyagtörvény, illetve annak állandói meghatározásával foglalkozzunk.

VÉGKÖVETKEZTETÉS. Gyakorlati feladataink során minimálisan a (7) standard testtel kell dolgoznunk, de lehetőség szerint a (6) tehetetlenségi standard testre is érdemes egy kontroll-elemzést végezni, hogy nem sikkad-e el valami lényeges fizikai hatás? Amennyiben a reológiai állandók között fennáll a $2G\theta < \eta^2$ nagyságrendi reláció, akkor rezonancia-hatással nem kell számolnunk, ugyanis az anyag belső súrlódása (gyors csillapítása) meggátolja létrejöttét [SZARKA–ASSZONYI–FÜLÖP, (2008)].

Ekkor a deformációk késési ideje [$t_{def} := \eta/G$], a relaxációs idő [$t_{rel} := \tau$] és a tehetetlenségi idő [$t_{teh} := \theta/2G\tau$] között a

$$(23) \quad \frac{\theta}{2G\tau} < \frac{1}{\tau} \left(\frac{\eta}{G} \right)^2, \text{ azaz } t_{teh} < \frac{t_{def}^2}{t_{rel}}, \text{ illetve } t_{def} > \sqrt{t_{rel}t_{teh}}$$

nagyságrendi relációnak kell fennállnia.

2.2. ANYAGTÖRVÉNY A RUGALMAS-KÉPLÉKENY ALAKVÁLTOZÁSOK TARTOMÁNYÁBAN

ANYAGTÖRVÉNY DEVIATORIKUS FELBONTÁSBAN. A rugalmas és képlékeny tartományban egyaránt érvényes *tehetetlenségi standard test* egyenlete a következő [ASSZONYI-VÁN (2007), 45. old. (37)]:

$$(24) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \Psi \left\{ (2G - 2G_{pl}) (\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d) + (2G - 2G_{pl}) \tau \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d \right\}, \\ \boldsymbol{\sigma}^o + \tau_o \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \theta_o\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o, \end{aligned}$$

ahol G_{pl} a képlékenységi modulus, s

$$(25) \quad \Psi = \begin{cases} 0, & \text{ha } W^d < W_f^d, \quad \text{vagy } \Delta W^d < 0, \\ 1, & \text{ha } W^d \geq W_f^d, \quad \text{és } \Delta W^d \geq 0 \end{cases}$$

a HEAVISIDE-féle egységugrásfüggvény, amely a rugalmas tartományt a képlékeny tartománytól elválasztó határt jelöli ki, ahol a W^d térfogategységre jutó torzulási deformációs munka (a deviatorikus feszültségek és deformációk munkája). Ha W^d értéke átlépi a W_f^d határt, akkor megjelennek a maradó deformációk.

A (24) jól mutatja, hogy az anyagegyenlet térfogatváltozási egyenlete rugalmas és képlékeny tartományban azonos alakú. Ez azt jelenti, hogy a térfogatváltozás nem hoz létre képlékeny állapotot. A valóságban ez így nem feltétlenül igaz. Helyesebb talán azt mondani, hogy általános feszültségállapot esetén az anyag tönkremenetele hamarabb bekövetkezik, mint hogy a térfogati képlékeny állapot (a maradó térfogati deformáció) megjelenne.

Ha az induló állapotot a t_0 időponthoz kötjük (s ekkor feltesszük, hogy $W^d = 0$), akkor a $t_0 \rightarrow t_f$ folyamat során (ahol t_f a folyáshatár elérésének időpontja), a torzulási deformációs munka a $0 \rightarrow W^d(t_f) = W_f^d$ értékkészletet futja be:

$$(26) \quad W_f^d = \int_{t_0}^{t_f} \dot{W}^d dt = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{r}, t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(\mathbf{r}, t) dt,$$

és ennél az értéknél az adott deformációs út esetében az összetartozó feszültség ill. deformáció értékek a képlékenységi határnál: $W_f^d : \{\boldsymbol{\sigma}_f^d, \boldsymbol{\varepsilon}_f^d\}$.

A különböző $\mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_f^d$, $\mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_f^d$ terhelési-deformációs utakhoz mindig más és más – az anyagtörvény által meghatározott – $\boldsymbol{\sigma}_f^d, \boldsymbol{\varepsilon}_f^d$ értékek tartoznak.

Ennek megfelelően az egyes munkaformák $[W(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = W^d(\boldsymbol{\sigma}^d, \boldsymbol{\varepsilon}^d) + W^o(\boldsymbol{\sigma}^o, \boldsymbol{\varepsilon}^o)]$ a következők:

a deformációs munka:

$$W_f = \int_{t_0}^{t_f} \dot{W} dt = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}, t) dt \quad \Rightarrow \quad \left\{ \boldsymbol{\sigma}(t_f), \boldsymbol{\epsilon}(t_f) \right\},$$

a torzulási deformációs munka:

$$W_f^d = \int_{t_0}^{t_f} \dot{W}^d dt = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{r}, t) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d(\mathbf{r}, t) dt \quad \Rightarrow \quad \left\{ \boldsymbol{\sigma}^d(t_f), \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d(t_f) \right\},$$

a térfogati deformációs munka:

$$W_f^o = \int_{t_0}^{t_f} \dot{W}_f^o dt = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\sigma}^o(\mathbf{r}, t) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o(\mathbf{r}, t) dt \quad \Rightarrow \quad \left\{ \boldsymbol{\sigma}^o(t_f), \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o(t_f) \right\}.$$

A (24) alatti anyagegyenlet az alábbi formában is felírható:

$$(27) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d &= \left\{ 2G - \Psi(2G - 2G_{pl}) \right\} \boldsymbol{\epsilon}^d + \left\{ 2\eta - \Psi(2G - 2G_{pl}) \tau \right\} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + \theta \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^d - \\ &\quad - \Psi(2G - 2G_{pl}) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_f^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^o + \tau_o \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o &= 3K \boldsymbol{\epsilon}^o + 3K_v \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o + \theta_o \ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^o, \end{aligned}$$

azaz a rugalmas állapotnál bevezetett – a (7) jelöléssel analóg módon –

$$(28) \quad \boldsymbol{\sigma}^d = 2\hat{G} \boldsymbol{\epsilon}^d + \Psi(2G - 2G_{pl}) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_f^d \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K} \boldsymbol{\epsilon}^o$$

formában, illetve

$$(29a,b) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d &= 2\hat{G} \boldsymbol{\epsilon}^d + \Psi \boldsymbol{\sigma}_f^d \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\hat{G}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^d) + 3\tilde{K} \boldsymbol{\epsilon}^o + \Psi \boldsymbol{\sigma}_f^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^o &= 3\tilde{K} \boldsymbol{\epsilon}^o \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\hat{G} \boldsymbol{\epsilon} + (2\hat{G} - 3\tilde{K}) \boldsymbol{\epsilon}^o + \Psi \boldsymbol{\sigma}_f^d, \end{aligned}$$

alakban írható fel, ahol

$$(30) \quad \boldsymbol{\sigma}_f^d := (2G - 2G_{pl}) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_f^d,$$

és

$$(31) \quad 2\hat{G} = 2\tilde{G} - \Psi \frac{2G_{pl} + (2G - 2G_{pl})\tau \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}} \quad 3\tilde{K} := 3K \left(\frac{1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}} \right),$$

$$(31a) \quad 2\hat{G} = \begin{cases} \left(\frac{2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}} \right), & \text{ha } \Psi = 0, \\ \left(\frac{2G_{pl} + 2\eta_{pl} \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}} \right), & \text{ha } \Psi = 1, \end{cases} \quad 3\tilde{K} := 3K \left(\frac{1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}} \right),$$

illetve

$$(32) \quad 2\eta_{pl} := 2\eta - \Psi(2G - 2G_{pl})\tau.$$

Vagyis

$$\text{a rugalmas tartományban } [\Psi = 0]: \quad \boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o,$$

$$\text{a képlékeny tartományban } [\Psi = 1]: \quad \boldsymbol{\sigma}^d = 2\hat{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d + \boldsymbol{\sigma}_f^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o,$$

és mindkét tartományon együttesen

$$(29a) \quad \boldsymbol{\sigma}^d = 2\hat{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d + \Psi\boldsymbol{\sigma}_f^d \text{ és } \boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o.$$

AZ ANYAGTÖRVÉNY FESZÜLTSGÉRE, ILLETVE DEFORMÁCIÓRA FELOLDOTT ALAKJA.

Az $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^o$ összefüggés:

$$(29b) \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\hat{G}\boldsymbol{\varepsilon} + (2\hat{G} - 3\tilde{K})\boldsymbol{\varepsilon}^o + \Psi\boldsymbol{\sigma}_f^d,$$

amely

$$\text{a rugalmas tartományban } [\Psi = 0]: \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\hat{G}\boldsymbol{\varepsilon} + (2\hat{G} - 3\tilde{K})\boldsymbol{\varepsilon}^o,$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = & \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\varepsilon} + \\ & + \left\{ \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) - \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \right\} \boldsymbol{\varepsilon}^o, \end{aligned}$$

$$\text{a képlékeny tartományban } [\Psi = 1]: \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\hat{G}\boldsymbol{\varepsilon} + (2\hat{G} - 3\tilde{K})\boldsymbol{\varepsilon}^o + \boldsymbol{\sigma}_f^d,$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = & (2G - 2G_{pl})\boldsymbol{\varepsilon}_f + \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\varepsilon} + \\ & + \left\{ \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) - \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \right\} \boldsymbol{\varepsilon}^o + \boldsymbol{\sigma}_f^d, \end{aligned}$$

A tehetetlenségi standard test ezen (konstitúciós) anyagegyenlete a feszültségre másodrendig, a deformációra harmadrendig tartalmaz időderiváltakat.

A (29b) $\boldsymbol{\varepsilon}$ -ra történő átrendezésével és $\boldsymbol{\varepsilon}^o = \frac{1}{3\tilde{K}}\boldsymbol{\sigma}^o$ felhasználásával

$$(33) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\hat{G}}\boldsymbol{\sigma} - \frac{3\tilde{K} - 2\hat{G}}{3\hat{G}\tilde{K}}\boldsymbol{\sigma}^o - \frac{1}{2\hat{G}}\Psi\boldsymbol{\sigma}_f^d,$$

illetve

$$(34) \quad 6\hat{G}\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon} = 3\tilde{K}\boldsymbol{\sigma} - (3\tilde{K} - 2\hat{G})\boldsymbol{\sigma}^o - 3\tilde{K}\Psi\boldsymbol{\sigma}_f^d.$$

Vagyis a

a rugalmas tartományban $[\Psi = 0]$:

$$6\hat{G}\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon} = 3\tilde{K}\boldsymbol{\sigma} - (3\tilde{K} - 2\hat{G})\boldsymbol{\sigma}^o,$$

$$\left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{\varepsilon} = \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} - \left\{ \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) - \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \right\} \boldsymbol{\varepsilon}^o,$$

a képlékeny tartományban $[\Psi = 1]$:

$$6\hat{G}\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon} = 3\tilde{K}\boldsymbol{\sigma} - (3\tilde{K} - 2\hat{G})\boldsymbol{\sigma}^o - 3\tilde{K}\boldsymbol{\sigma}_f^d,$$

$$\left(2G_{pl} + 2\eta_{pl} \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \boldsymbol{\varepsilon} = \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} - \left\{ \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) - \left(2G_{pl} + 2\eta_{pl} \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \right\} \boldsymbol{\varepsilon}^o - 3K\boldsymbol{\sigma}_f^d.$$

A tehetetlenségi standard test ezen anyagegyenlete a feszültségre harmadrendig, a deformációra pedig negyedrendig tartalmaz időderiváltakat.

3. FEJEZET

AZ ALAPEGYENLETEK VISSZAVEZETÉSE EGYETLEN VÁLTOZÓRA

A kontinuummechanika alapegyenletei megoldásának három klasszikus útját lehet kiemelni:

1. A tizenöt változót tartalmazó egyenletrendszer visszavezethetjük három differenciálegyenletre, amelyben csak az elmozduláskomponensek szerepelnek. Ezt szokás *mozgásmódszernek* nevezni és alkalmazása akkor célszerű, ha a kerületi és kezdeti feltételek elmozduláskomponensekkel adottak, vagy egyszerűen visszavezethetők azokra.
2. Az alapegyenleteket visszavezethetjük hat differenciálegyenletből álló rendszerre, amelyben csak a deformáció-komponensek szerepelnek. Ezt az eljárást *alakváltozási módszernek* nevezhetnénk, s alkalmazásukkal a kezdeti és kerületi feltételeket az $\boldsymbol{\varepsilon}$ tenzor elemeivel kell megadni.
3. Az alapegyenletekből kiküszöböljük az elmozdulás- és deformáció-komponenseket, s hat egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszert oldunk meg, amelyekben csupán a feszültségek szerepelnek. Ez az úgynevezett *erő módszer*, amelyet akkor célszerű alkalmazni, ha a kerületi feltételek feszültségekkel (terhelésekkel) vannak megadva.

Ezekhez adódik még egy:

4. Nem az $\mathbf{u}$ elmozdulást választjuk alapváltozónak, hanem a $\mathbf{v}$ sebességet. Ezt nevezhetjük *sebességmódszernek*.

Ezek szemléletes összefoglalását adja az előző cikk [FÜLÖP (2009a)], rámutatva alkalmazhatósági korláataira, s arra, hogy a kiküszöbölésekkel kapott differenciálegyenlet megoldása és a megoldás peremfeltételekhez illesztése számos technikai nehézségbe ütközhet.

3.1. AZ ALAPEGYENLETEK AZ ELMOZDULÁSVEKTORRAL KIFEJEZVE

A kontinuummechanika - már felsorolt - alapegyenletei:

$$\boldsymbol{\sigma} \nabla = \rho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{f}), \quad [\text{mozgásegyenlet}]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}), \quad [\text{geometriai egyenlet}]$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\hat{G}\boldsymbol{\varepsilon} + (3\tilde{K} - 2\hat{G})\boldsymbol{\varepsilon}^o + \Psi\boldsymbol{\sigma}_f^d. \quad [\text{anyagegyenlet}]$$

Ezeknek az alapegyenleteknek az $\mathbf{u}$ elmozdulásmezőre megoldott formája, amelyet szokás „mozgásmódszer”-nek is nevezni, az ún. *általánosított LAMÉ-egyenlet*.

Ezen $\boldsymbol{\varepsilon}$ tenzort behelyettesítve az anyagtörvénybe, akkor az $\boldsymbol{\varepsilon}$ deformációkat kiküszöböltük:

$$(35) \quad \boldsymbol{\sigma} = \hat{G}(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}) + \frac{3\tilde{K} - 2\hat{G}}{3} \nabla \mathbf{u} + \Psi\boldsymbol{\sigma}_f^d,$$

figyelembe véve, hogy $\boldsymbol{\varepsilon}^o = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3} \nabla \mathbf{u}$, majd ezt a (35)-öt az impulzusmérlegbe behelyettesítve

$$\left[\hat{G}(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}) + \frac{3\tilde{K} - 2\hat{G}}{3} \nabla \mathbf{u} \right] \nabla = \rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho \mathbf{f},$$

a feladatot visszavezettük egyetlen változó ($\mathbf{u}$) meghatározására (figyelembe véve, hogy $\Psi\boldsymbol{\sigma}_f^d \nabla = \Psi(2G - 2G_{pl})\boldsymbol{\varepsilon}_f^d \nabla = 0$).

A baloldalon kijelölt műveletek

$$[(\mathbf{u} \circ \nabla) \nabla = \text{Div grad}(\mathbf{u}) = \nabla \nabla \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}, (\nabla \circ \mathbf{u}) \nabla = \nabla(\nabla \mathbf{u}) = \text{grad div}(\mathbf{u})]$$

elvégzésével

$$\hat{G}(\mathbf{u} \circ \nabla) \nabla + (\nabla \circ \mathbf{u}) \nabla + \frac{3\tilde{K} - 2\hat{G}}{3} (\nabla \mathbf{u}) \nabla = \hat{G} \Delta \mathbf{u} + \hat{G} \nabla(\nabla \mathbf{u}) + \frac{3\tilde{K} - 2\hat{G}}{3} \nabla(\nabla \mathbf{u}),$$

megkapjuk az *általánosított LAMÉ-egyenletet*:

$$(36) \quad \hat{G}\Delta\mathbf{u} + \frac{3\tilde{K} - 2\hat{G}}{3}\nabla(\nabla\mathbf{u}) = \rho(\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}).$$

A $\nabla\mathbf{u} = \text{div}\mathbf{u} = \text{tr}(\mathbf{D}) = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) =: \Theta$ fajlagos térfogatváltozás bevezetésével:

$$(37) \quad \Delta\mathbf{u} + \frac{3\tilde{K} - \hat{G}}{3\hat{G}}\nabla\Theta = \frac{\rho}{\hat{G}}(\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}).$$

A $\hat{G}$ -hez és $\tilde{K}$ -hoz tartozó differenciáloperátorok (36)-ba történő behelyettesítésével megkapjuk a LAMÉ-egyenlet kifejtett formáját. Az egyesített összefüggés helyett az egyenletet külön-külön írjuk fel a (31a) differenciáloperátorok segítségével, és a

$$(38) \quad 2\eta_{pl} := 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau$$

összefüggéssel.

Ha az $\mathbf{f}$ térfogati erősrűség-mezőt állandónak tekintjük, aminek megengedhetőségi feltételeit az előző cikk [FÜLÖP (2006)], 19-21. oldalon tárgyalja, akkor az *általánosított LAMÉ-egyenlet*:

- Tisztán rugalmas állapotban [$\Psi = 0$]:

$$(39) \quad \begin{aligned} & \left(G + (\eta + G\tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\eta\tau_o + \frac{\theta}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\theta}{2} \tau_o \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) \Delta\mathbf{u} + \\ & + \frac{1}{3} \left((3K - 2G) + (3K_v + 3K\tau - 2\eta - 2G\tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\ & \left. + (3K_v\tau + \theta_o - 2\eta\tau_o - \theta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\theta_o\tau - \theta\tau_o) \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) \Theta = \\ & = \rho \left(1 + (\tau + \tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \tau\tau_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}, \end{aligned}$$

- tisztán képlékeny állapotban [$\Psi = 1$]:

$$(40) \quad \begin{aligned} & \left(G_{pl} + (\eta_{pl} + G_{pl}\tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\eta_{pl}\tau_o + \frac{\theta}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\theta}{2} \tau_o \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) \Delta\mathbf{u} + \\ & + \frac{1}{3} \left((3K - 2G_{pl}) + (3K_v + 3K_{pl}\tau - 2\eta_{pl} - 2G_{pl}\tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\ & \left. + (3K_v\tau + \theta_o - 2\eta_{pl}\tau_o - \theta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\theta_o\tau - \theta\tau_o) \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) \Theta = \\ & = \rho \left(1 + (\tau + \tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \tau\tau_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

3.2. AZ ALAPEGYENLETEK A SEBESSÉGVÉKTORRAL KIFEJEZVE

Levezetéseinkben a közelítő jelleget az $\mathbf{u}$ elmozdulásvektor képviseli, ugyanis a $\boldsymbol{\varepsilon}$ deformációtensor $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{u} \circ \nabla)^S$ formájú felírása miatt az eredmények, csak szimmetrikus $\mathbf{H} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \circ \nabla$ mozgásgradiens esetén jelentenek szigorú megoldást, más esetekben csak a kis deformációkra vonatkozó közelítések.

Ha nem az $\mathbf{u}$ -t, hanem a $\mathbf{v}$ sebességet választjuk alapváltozónak, akkor az alapegyenletek helyett, azok idő szerint derivált formáját

$$(41) \quad \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \nabla &= \rho \ddot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \left\{ 2\hat{G}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (3\tilde{K} - 2\hat{G})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \boldsymbol{\sigma}_f \right\}^* = 2\hat{G}\dot{\mathbf{D}} + (3\tilde{K} - 2\hat{G})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o \end{aligned}$$

használjuk ($\mathbf{f}$ időfüggetlenségét feltételezve).

A levezetések formailag azonosak az előző pontban közöltekkel:

$$(42) \quad \hat{G}\Delta \mathbf{v} + (3\tilde{K} - \hat{G})\nabla \dot{\Theta} = \rho \ddot{\mathbf{v}}.$$

A megszokott $\mathbf{u}$ elmozdulásvektort nem a CESÀRO-formulával állíthatjuk elő, amely klasszikus formájában a $\boldsymbol{\varepsilon}$ deformációtensorból származtatja az $\mathbf{u}$ elmozdulásvektort egyértékűen, ha $\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \mathbf{0}$. Jelen esetben a $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ differenciálegyenletről adott kezdeti feltétel melletti integrálással állítható elő.

3.3. AZ ALAPEGYENLETEK A DEFORMÁCIÓTENZORRAL KIFEJEZVE

A $\hat{G}\Delta \mathbf{u} + (3\tilde{K} - \hat{G})\nabla \dot{\Theta} = \rho(\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f})$ LAMÉ-egyenletet szorozzuk meg jobbról diadikusan ∇ -val, s ekkor

$$\hat{G} \underbrace{(\Delta \mathbf{u}) \circ \nabla}_{\Delta \mathbf{D}} + (3\tilde{K} - \hat{G}) \underbrace{\nabla (\nabla \mathbf{u}) \circ \nabla}_{(\nabla \circ \nabla) \Theta} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \circ \nabla,$$

mivel a térfogati erőssűrűség (pl. gravitációs gyorsulás) intenzitását – egy adott feladatnál – a tér minden pontjában azonosnak tekintjük:

$$(43) \quad \frac{1}{2} (\mathbf{f} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{f}) \approx \mathbf{0}.$$

A

$$\hat{G}\Delta \mathbf{D} + (3\tilde{K} - \hat{G})(\nabla \circ \nabla)\Theta = \rho \ddot{\mathbf{u}} \circ \nabla = \frac{\rho}{2} (\ddot{\mathbf{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \ddot{\mathbf{u}}) = \rho \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

átalakítással kapjuk, hogy

$$(44) \quad \hat{G}\Delta\mathbf{D} + (3\tilde{K} - \hat{G})(\nabla \circ \nabla)\Theta = \rho \ddot{\mathbf{\varepsilon}}.$$

Ez kiírva

– tisztán rugalmas állapotban [$\Psi = 0$]:

$$(45) \quad \begin{aligned} & \left(G + (\eta + G\tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\eta\tau_o + \frac{\theta}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\theta}{2} \tau_o \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) \Delta\mathbf{\varepsilon} + \\ & + \left(3K - G + (3K_v + 3K\tau - \eta - G\tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \left(3K_v\tau - \eta\tau_o + \theta_o - \frac{\theta}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\theta_o\tau - \frac{\theta}{2} \tau_o \right) \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) (\nabla \circ \nabla)\Theta = \\ & = \rho \left(1 + (\tau + \tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \tau\tau_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \ddot{\mathbf{\varepsilon}}, \end{aligned}$$

– tisztán képlékeny állapotban [$\Psi = 1$]:

$$(46) \quad \begin{aligned} & \left(G_{pl} + (\eta_{pl} + G_{pl}\tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\eta_{pl}\tau_o + \frac{\theta}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\theta}{2} \tau_o \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) \Delta\mathbf{\varepsilon} + \\ & + \left(3K - G_{pl} + (3K_v + 3K\tau - \eta_{pl} - G_{pl}\tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \left(3K_v\tau - \eta_{pl}\tau_o + \theta_o - \frac{\theta}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\theta_o\tau - \frac{\theta}{2} \tau_o \right) \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) (\nabla \circ \nabla)\Theta = \\ & = \rho \left(1 + (\tau + \tau_o) \frac{\partial}{\partial t} + \tau\tau_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \ddot{\mathbf{\varepsilon}}, \end{aligned}$$

3.4. AZ ALAPEGYENLETEK A FESZÜLTSÉGTENZORRAL KIFEJEZVE

A $2\hat{G}\Delta\mathbf{\varepsilon} + (6\tilde{K} - 2\hat{G})(\nabla \circ \nabla)\Theta = 2\rho \ddot{\mathbf{\varepsilon}}$ alakú egyenletbe, az $\mathbf{\varepsilon}$ deformáció helyébe helyettesítsük az anyagtörvény deformációra feloldott

$$(47) \quad \mathbf{\varepsilon} = \frac{1}{2\tilde{G}} \mathbf{\sigma}^d - \frac{3\tilde{K} - 2\hat{G}}{6\tilde{G}\tilde{K}} \mathbf{\sigma}^o - \frac{1}{2\tilde{G}} \mathbf{\sigma}_f^d, \quad [6\tilde{G}\tilde{K} \mathbf{\varepsilon} = 3\tilde{K}\mathbf{\sigma} - (3\tilde{K} - 2\hat{G})\mathbf{\sigma}^o - 3\tilde{K}\mathbf{\sigma}_f^d]$$

alakját, valamint a $\Theta = \frac{1}{3\tilde{K}} S$ összefüggést, s ekkor az *általánosított* BELTRAMI-egyenletet kapjuk:

$$(48) \quad 3\tilde{K}\Delta\mathbf{\sigma} - (6\tilde{K} - 2\hat{G})\Delta S \mathbf{I} + 2\hat{G}(6\tilde{K} - 2\hat{G})(\nabla \circ \nabla)S = 6\rho\tilde{K}\ddot{\mathbf{\sigma}} - 2\rho(6\tilde{K} - 2\hat{G})\ddot{S}\mathbf{I},$$

amelynek kiírása az előző pontokban közölteknek megfelelően történik.

SPECIÁLIS ESETEK – AZ ÚN. STATIKAI EGYENSÚLY A STANDARD MODELL ESETÉBEN

Az alapegyenletek között a $\sigma \nabla = \rho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{f})$ dinamikai egyenlet általában az analitikus megoldás előállításánál problémát jelent, mert pl. időfüggetlen anyagtörvény esetén is behozza az időfüggést. Ennek eredményeként a mezőfüggvények nem állíthatók elő egy tértől és egy időtől függő kifejezés szorzataként, tehát az alapegyenletek által definiált parciális differenciálegyenlet rendszer, nem vezethető vissza $\mathbf{r}$ -től és t -től függő közönséges differenciálegyenletek megoldására. Helyesebben: egyes esetekben visszavezethető végtelen számú szorzat összegére, de jelenleg nem mindig tudjuk a benne lévő állandókat a kezdeti és kerületi feltételekből meghatározni. Az előző cikkben FÜLÖP TAMÁS körbejárja a lehetséges eseteket.

Számos esetben célszerű a $\sigma \nabla = \rho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{f})$ mozgásegyenlet helyett - a tehetetlenségi és térfogati erők elhagyásával - a statikai egyensúly

$$(49) \quad \sigma \nabla = \mathbf{0}$$

egyenletét alkalmazni, bár ekkor a deformációs hullámok terjedését, a tranziens jelenségek vizsgálatának lehetőségét kizárjuk a vizsgálati körből. Vagyis mechanikai egyensúlyt veszünk, ezért hívják a (49)-et *egyensúlyi egyenletnek*. FÜLÖP ezen kötet 42. oldalán kifejti azokat a feltevéseket, amelyek teljesülése esetén a $\rho \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ közelítés megengedhető, cáfolva bizonyos tévhiteket.

A (49) egyensúlyi egyenlet mellett a 3. fejezetben levezetett összefüggések a

$$(50) \quad \hat{G} \Delta \mathbf{u} + (3\tilde{K} - \hat{G}) \nabla (\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

$$(51) \quad \hat{G} \Delta \mathbf{v} + (3\tilde{K} - \hat{G}) \nabla (\nabla \mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

$$(52) \quad \hat{G} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + (3\tilde{K} - \hat{G}) (\nabla \circ \nabla) \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0},$$

$$(53) \quad 3\tilde{K} \Delta \boldsymbol{\sigma} - (6\tilde{K} - 2\hat{G}) \Delta \mathbf{I} + 2\hat{G} (6\tilde{K} - 2\hat{G}) (\nabla \circ \nabla) \mathbf{S} = \mathbf{0}$$

alakot öltik. Mivel az alapegyenletek kielégültek, így a feladatok megoldásánál a kezdeti és kerületi feltételek figyelembe vételére van csupán szükség.

A következőkben – mivel megállapítottuk, hogy az esetek túlnyomó többségében elegendő a standard modellt alapul venni, – a vizsgálatainkat erre a modellre egyszerűsítjük.

4.1. ÁLTALÁNOS (HÁROMDIMENZIÓS) ESETEK

4.1.1. AZ ELMOZDULÁSVEKTORRA VONATKOZÓ ÖSSZEFÜGGÉSEK

Az (50) összefüggés

$$\hat{G} \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \mathbf{u} + (3\tilde{K} - \hat{G}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

a $\hat{G}$ és $\tilde{K}$ anyagfüggvények (7) alatti differenciáloperátoros összefüggésével, – a következőkben mindig a standard testre vonatkoztatva –

a tisztán *rugalmas tartományban* [$\Psi = 0$]:

$$(54) \quad \left(G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \mathbf{u} + \left\{ \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) - \left(G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} \nabla (\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

a tisztán *képlékeny tartományban* [$\Psi = 1$]:

$$(55) \quad \left(G_{pl} + \eta_{pl} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \mathbf{u} + \left\{ \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) - \left(G_{pl} + \eta_{pl} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} \nabla (\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Skaláris komponensegyenletei a következők:

$$\begin{aligned} 2\hat{G} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (3\tilde{K} - 2\hat{G}) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) &= 0, \\ 2\hat{G} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + (3\tilde{K} - 2\hat{G}) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) &= 0, \\ 2\hat{G} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + (3\tilde{K} - 2\hat{G}) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

A $\Theta = \nabla \mathbf{u}$ EGYENLET.¹⁰ Az (50) differenciálegyenletnek ∇ -val balról történő beszorzásával olyan összefüggéshez jutunk, amelyben csak Θ szerepel:

$$\hat{G} \Delta \mathbf{u} \nabla + (3\tilde{K} - \hat{G}) \nabla (\nabla \mathbf{u}) \nabla = \hat{G} \Delta \Theta + (3\tilde{K} - \hat{G}) \Delta \Theta = 3\tilde{K} \Delta \Theta,$$

s így

$$(56) \quad 3\tilde{K} \Delta \Theta = 0, \quad \text{illetve} \quad \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \Theta = 0.$$

¹⁰ Kis alakváltozások esetén „fajlagos térfogatváltozásra” vonatkozó egyenletnek is hívják.

Ezen t -re elsőrendű, homogén differenciálegyenlet a $\Delta\Theta(0) = \Delta\Theta_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$(57) \quad \Delta\Theta = \Delta\Theta_0 e^{-\frac{K}{K_v}t},$$

ha figyelembe vesszük, hogy a test magára hagyva, vagyis újabb hatás nélkül az anyag-törvényből következő a HOOKE-test szerinti értékhez tart.

AZ ELMOZDULÁSOK BIHARMONIKUS DIFFERENCIÁLEGYENLETE. Az (56)-ból még egyszeri ∇ képzéssel a

$$(58) \quad 3\tilde{K}\Delta\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{ illetve } \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

adódik.

4.1.2. A DEFORMÁCIÓTENZORRA VONATKOZÓ ÖSSZEFÜGGÉSEK

Az (52)

$$\hat{G}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + (3\tilde{K} - \hat{G})(\nabla \circ \nabla)\Theta = \mathbf{0}$$

egyenlet kiírva:

$$(52a) \quad \hat{G} \begin{vmatrix} \Delta\varepsilon_x & \Delta\frac{1}{2}\gamma_{xy} & \Delta\frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \Delta\frac{1}{2}\gamma_{yx} & \Delta\varepsilon_y & \Delta\frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \Delta\frac{1}{2}\gamma_{zx} & \Delta\frac{1}{2}\gamma_{zy} & \Delta\varepsilon_z \end{vmatrix} + (3\tilde{K} - \hat{G}) \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{vmatrix} \Theta = \mathbf{0}.$$

Az előzőpontban közöltekkel analóg módon

$$(59) \quad \tilde{G}\Delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}.$$

AZ ALAKVÁLTOZÁSI FÜGGVÉNYEK. Az $\boldsymbol{\varepsilon}$ deformációtenzornak a szimmetriából következően 6 független komponense van. Az $\boldsymbol{\varepsilon}$ definíciós egyenletéből következik a

$$(60) \quad \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\partial y}, & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\partial z}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\partial x}, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\partial y} \end{aligned}$$

az ún. DE SAINT-VENANT-féle kompatibilitási feltétel, amely 3 skaláregyenletet szolgáltat, így marad 3 független paraméter.

Jelöljük A_1, A_2 és A_3 -mal a legalább háromszor folytonosan differenciálható függvényt, az ún. *alakváltozási függvényt*:

$$(61) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial A_1}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial A_2}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial A_2}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial A_3}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial A_3}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

4.1.3. A FESZÜLTSEG TENZORRA VONATKOZÓ ÖSSZEFÜGGÉSEK

Értelemszerűen:

$$(62) \quad 3\tilde{K}\Delta\sigma - (6\tilde{K} - 2\tilde{G})\Delta S\mathbf{I} + 2\tilde{G}(6\tilde{K} - 2\tilde{G})(\nabla \circ \nabla)S = \mathbf{0}$$

A FESZÜLTSEGFÜGGVÉNYEK olyan függvények, amelyekből térszerű deriválás útján a $\sigma \nabla = \mathbf{0}$ és $\sigma = \sigma^T$ egyensúlyi egyenleteket kielégítő feszültségtenzorok előállíthatók. Legyen az $\mathbf{f}$ szimmetrikus tenzor, az ún. *feszültségfüggvény-tenzor*, s ha az $\nabla \times \mathbf{f} \times \nabla = \sigma$ előállítást vesszük, akkor teljesülnek az

$$\sigma \nabla = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\nabla \times \mathbf{f} \times \nabla) \cdot \nabla = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \sigma = \sigma^T \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{f} \times \nabla = (\nabla \times \mathbf{f} \times \nabla)^T$$

egyensúlyi egyenletek.

A σ tenzor 6 független komponenset tartalmaz, ezekre az egyenlet 3 összefüggést ad, így marad 3 ismeretlen függvény, s $[\nabla \times \mathbf{f} \times \nabla = \mathbf{0}]$ -nak 3 független komponense van, a többi nulla. Ez $\binom{6}{3} = 20$ féleképp választható ki, de kiesik az a 3 eset, amelyiknél az $\mathbf{f}$ mátrixának egy sora nulla, tehát marad 17-féle feszültségfüggvény.

A három független komponens $*$ -gal jelöltük, s az áttekinthetőség érdekében a szimmetria miatt jelentkező komponenseket pedig $\circ$ -val. A 17 variáns a következő:

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{matrix} * & * & * \\ \circ & 0 & 0 \\ \circ & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} * & * & 0 \\ \circ & 0 & * \\ 0 & \circ & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} * & * & 0 \\ \circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ \circ & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} * & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ \circ & \circ & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & \circ & 0 \end{matrix} \right\|, \\ & \left\| \begin{matrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \\ 0 & \circ & * \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & * & 0 \\ \circ & * & * \\ 0 & \circ & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & * & * \\ \circ & * & 0 \\ \circ & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & * & 0 \\ \circ & * & * \\ 0 & \circ & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ \circ & 0 & * \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & * \\ \circ & \circ & 0 \end{matrix} \right\|, \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}}_{\text{Maxwell-féle fesz.függvény}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}}_{\text{Maxwell-féle fesz.függvény}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}}_{\text{Maxwell-féle fesz.függvény}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}}_{\text{Maxwell-féle fesz.függvény}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Morera-féle fesz.függvény}},$$

amelyek közül általában csak a MAXWELL-féle és a MORERA-féle feszültségfüggvényeket szokták alkalmazni.

Legyen φ_1, φ_2 és φ_3 legalább háromszor folytonosan differenciálható függvény (az ún. MAXWELL-féle feszültségfüggvény), s ezek segítségével

$$(63) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}, & \tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}, & \tau_{zx} &= -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial x}. \end{aligned}$$

Legyen ψ_1, ψ_2 és ψ_3 legalább háromszor folytonosan differenciálható függvény (az ún. MORERA-féle feszültségfüggvény), s ezek segítségével

$$(64) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z}, & \tau_{xy} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(+\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right), \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial x}, & \tau_{yz} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right), \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial y}, & \tau_{zx} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(+\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

4.2. SÍKBELI (KÉTDIMENZIÓS) ESETEK

A háromdimenziós feladat, amennyiben kétváltozós feladatra redukálható, akkor síkbeli esetről beszélünk. Jellegzetes formája:

- a sík alakváltozási (vagy deformációs), és
- a sík feszültségi állapot.

SÍKBELI ALAKVÁLTOZÁSRÓL akkor beszélünk, ha létezik a térben egy olyan $\mathbf{n}_0$ vektorral jellemezhető irány, amelyik irányban a test nem szenved deformációt, azaz

$$\mathbf{d}_0 \equiv \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}_0 = \mathbf{0}, \text{ és } \mathbf{u} \mathbf{n}_0 = \mathbf{0},$$

vagyis a deformációk párhuzamosak az $\mathbf{n}_0$ normálisú síkkal, és az $\mathbf{n}_0$ irányba eső elmozdulás zérus értékű. Ekkor a test $\mathbf{n}_0$ normálisú síkjai egyformán deformálódnak, s ezeknek a párhuzamos síkoknak a távolsága nem változik.

Jelölje az egyszerűség kedvéért ezt az irányt a z koordinátatengely [$\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_z := \mathbf{k}$], s ekkor $\mathbf{d}_z = \left\| \frac{1}{2}\gamma_{xz} \quad \frac{1}{2}\gamma_{xz} \quad \varepsilon_z \right\| = \mathbf{0}$, valamint a deformáció- és feszültségtenzorok, illetve az elmozdulásvektor mátrixai:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z = 0 \end{array} \right\|, \quad \boldsymbol{\sigma} = \left\| \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{array} \right\|, \quad \mathbf{u} = \left\| \begin{array}{c} u_x \\ u_y \\ 0 \end{array} \right\|.$$

Az anyagtörvény z irányú komponensegyenletének (ld.(10) képlet) zérussá tételéből:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2\tilde{G}}\sigma_z - \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{18\tilde{K}\tilde{G}}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0.$$

a z irányú feszültség a másik két normál feszültségből számítható:

$$(66) \quad \sigma_z = \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{6\tilde{K} + 2\tilde{G}}(\sigma_x + \sigma_y),$$

vagyis a tehetetlenségi standard test esetén érvényes (7) operátorok behelyettesítésével:

$$\begin{aligned} \left[(6K + 2G) + (6K_v + 2\eta)\frac{\partial}{\partial t} + (2\theta_o + \theta)\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \sigma_z = \\ = \left[(3K - 2G) + (3K_v - 2\eta)\frac{\partial}{\partial t} + (\theta_o - \theta)\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned}$$

Mivel a σ_z és u_z a számításból kihagyható, ténylegesen síkbeli esetről van szó.

SÍK FESZÜLTSEGI ÁLLAPOT. Ekkor a térben létezik egy olyan $\mathbf{n}_0$ vektorral jellemezhető irány, amely irányban a testben a feszültségvektor zérus értékű, azaz

$$\mathbf{p}_0 \equiv \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_0 = \mathbf{0},$$

vagyis a feszültségek nem lépnek ki az $\mathbf{n}_0 [= \mathbf{e}_z = \mathbf{k}]$, normálisú síkból:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\| \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z = 0 \end{array} \right\|, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{array} \right\|, \quad \mathbf{u} = \left\| \begin{array}{c} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right\|.$$

Az anyagtörvény z irányú komponensegyenletének zérussá tételéből:

$$\sigma_z = 2\tilde{G}\varepsilon_z + \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0,$$

a z irányú deformáció:

$$(67) \quad \varepsilon_z = -\frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{3\tilde{K} + 4\tilde{G}}(\varepsilon_x + \varepsilon_y),$$

vagyis a tehetetlenségi standard test esetén érvényes (7) operátorok behelyettesítésével:

$$\begin{aligned} & \left[(3K - 2G) + (3K_v - 2\eta) \frac{\partial}{\partial t} + (\theta_o - \theta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \varepsilon_z = \\ & = - \left[(3K + 4G) + (3K_v + 4\eta) \frac{\partial}{\partial t} + (\theta_o + 2\theta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (\varepsilon_x + \varepsilon_y). \end{aligned}$$

Az u_z elmozdulás, amely csak az x és y koordináta függvénye lehet, a CESÀRO-formulával számítható.

Síkbeli esetben jelentősen egyszerűsödik a megoldások előállítása, mivel a *feszültségi* és az *alakváltozási függvények* száma háromról egyre csökken. Az egyensúlyi egyenletből következően

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

$F = F(x, y, t)$, az ún. AIRY-féle feszültségfüggvény, s a kompatibilitási egyenletből

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y},$$

$A = A(x, y, t)$, az alakváltozási függvény.

Hasonlóan kétváltozós feladat az egyszerű nyírás és a hajlítás is.

4.3 EGYVÁLTOZÓS ESETEK

Számos olyan mechanikai feladat van, amelyeknél a σ , ε és u tenzormező mindössze egyetlen változó függvénye. Az egytengelyű húzáson és nyomáson kívül ilyen feladat pl. a hidrosztatikus primer mezőben kihajtott körszelvényű vágat esete is (ld. következő cikk [FÜLÖP-BÉDA, 2009]). Ekkor ui. egyetlen változónak a radiális feszültséget tekinthetjük, ui. a tangenciális feszültség ennek negatívja, s a deformációk és a sugárirányú elmozdulás ebből számítható, mint látszik e kötet következő két tanulmányából is. Ez utóbbi esetre mutatunk be egy elemzést.

A gyakorlat szempontjából felbecsülhetetlen jelentőségű lenne, ha a klasszikus szilárdságtanból ismert feladatok ismert megoldásait minden külön elméleti levezetés nélkül egyszerűen átültethetnénk az általános reológiai közegek megoldásaira. Nem lenne szükség a nagyon bonyolult – számos esetben nem konvergens – reológiai végeselemes

módszerekre, helyettük elégséges lenne a nagyon egyszerű – HOOKE-törvény szerinti – merevségi mátrixszal dolgozni, s az időbeli változást az így kapott megoldáshoz csatolni. ASSZONYI már 1974-ben rámutatott, hogy a *klasszikus* (nem reológiai térfogati egyenlettel rendelkező) POYNTING-THOMSON modell esetén a kezdeti feszültségi állapot és végső alakváltozási állapot a HOOKE-törvény által előállítható. Ezt azonban elméletileg nem bizonyította, csupán egy feladat kapcsán bemutatta ennek helytállóságát. Az *általános* POYNTING-THOMSON-féle ún. standard test esetén már ezt az elvet használta az általános megoldás előállítására [2007]. Azonban itt is meghatározta az általános reológiai megoldást, s ez alapján írta fel az egyszerű transzformációt.

A következőkben a standard testre végezzük vizsgálatainkat.

A POYNTING-THOMSON-féle standard modell anyagegyenlete (deviatorikus alakban):

$$(68) \quad \begin{aligned} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma}^d &= \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^d, \\ \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma}^o &= \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^o, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \|\boldsymbol{\sigma}_{ij}\| = \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^o = \|\boldsymbol{\sigma}_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}\| + \|\sigma_o \delta_{ij}\|, \quad \sigma_o = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \|\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\| = \boldsymbol{\varepsilon}^d + \boldsymbol{\varepsilon}^o = \|\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_o \delta_{ij}\| + \|\varepsilon_o \delta_{ij}\|, \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Vágatnyitáskor úgy tekintjük, hogy az üreg létesítése egyetlen pillanat alatt megtörténik, tehát a *primér* feszültségek a $t = -0$ értéknél lévő primér feszültségekről, a $t = +0$ időpillanatra *szekunder* feszültségekre váltanak.¹¹

A standard modellről tudjuk, hogy állandó külső hatások esetén az idő múlásával az ún. HOOKE-törvényhez konvergál:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma}^d &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 2G \boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d \right\} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}^d, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma}^o &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 3K \boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o - \tau_o \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o \right\} = 3K \boldsymbol{\varepsilon}^o, \end{aligned}$$

(ahol G és K az ún. statikus csúsztató és térfogati modulusok), továbbá azt, hogy végtelesen gyors változásnál az anyagtörvény pedig az ún. dinamikus HOOKE-törvényhez tart:

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}^d \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma}^d &= \lim_{\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}^d \rightarrow \infty} \left\{ 2G \boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d \right\} = \frac{2\eta}{\tau} \boldsymbol{\varepsilon}^d, \\ \lim_{\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}^o \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma}^o &= \lim_{\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}^o \rightarrow \infty} \left\{ 3K \boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o - \tau_o \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o \right\} = \frac{3K_v}{\tau_o} \boldsymbol{\varepsilon}^o \end{aligned}$$

(ahol $\eta/\tau := G_{din}$ és $K_v/\tau_o := K_{din}$ az ún. dinamikus modulusok).

¹¹ Erre vonatkozóan ld. a következő cikkeket.

A FELADAT MEGFOGALMAZÁSA. Mindezen előzmények után a megoldandó feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a (68) anyagmodell esetén hogyan lehet az adott reológiai feladatot egy rugalmasságtani – nem reológiai – megoldásból, egy egyszerű transzformációval származtatni. Más szavakkal: keressük a (68) differenciálegyenletek

$$(69) \quad \begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}^d)^0 &= \frac{2\eta}{\tau} (\boldsymbol{\varepsilon}^d)^0, & (\boldsymbol{\sigma}^d)^\infty &= 2G(\boldsymbol{\varepsilon}^d)^\infty, \\ (\boldsymbol{\sigma}^o)^0 &= \frac{3K_v}{\tau_o} (\boldsymbol{\varepsilon}^o)^0, & (\boldsymbol{\sigma}^o)^\infty &= 3K(\boldsymbol{\varepsilon}^o)^\infty, \end{aligned}$$

megoldását adott „0” kezdeti és „ ∞ ” és végső érték mellett.

[MATOLCSI (2009)] gondolatmenetét felhasználva bemutatjuk, hogy a

$$(70) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G\varepsilon + 2\eta \dot{\varepsilon}, \quad \sigma(0) = \frac{2\eta}{\tau} \varepsilon(0), \quad \sigma(\infty) = 2G\varepsilon(\infty)$$

egyváltozós feladatot hogyan lehet megoldani a szokásostól eltérő módon.

Vezessük be a

$$\sigma(0) := \sigma^0, \quad \sigma(\infty) := \sigma^\infty, \quad \varepsilon(0) := \varepsilon^0, \quad \varepsilon(\infty) := \varepsilon^\infty$$

jelöléseket, továbbá az

$$(71) \quad \mathbf{x} := \begin{Bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \tau & -2\eta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} -1 & 2G \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}^\infty$$

vektorokat. Ezekkel a jelölésekkel a (70) feladat

$$(72) \quad \mathbf{a}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b}\mathbf{x}, \quad \mathbf{a}\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}\mathbf{x}^\infty = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathbf{b}\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}\mathbf{x}^\infty \neq \mathbf{0}$$

módon írható fel.

A MEGOLDÁS. Keressük a (70), illetve (72) differenciálegyenlet megoldását

$$(73) \quad \mathbf{x} = e^{(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})t} \cdot \mathbf{x}^0$$

alakban, ahol $\mathbf{c}$ egyelőre ismeretlen vektor. Ez a

megoldás már kielégíti az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ kezdeti feltételt. Az analízisből ismert exponenciális függvény MACLAURIN-sorát felhasználva,

$$e^{(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})t} = \mathbf{I} + (\mathbf{c} \circ \mathbf{b})t + \frac{1}{2!}(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})^2 t^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})^3 t^3 + \dots$$

A sor tagjait átalakítjuk:

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} \circ \mathbf{b})^2 &= (\mathbf{c} \circ \mathbf{b})(\mathbf{c} \circ \mathbf{b}) = \mathbf{c} \circ (\mathbf{b}\mathbf{c})\mathbf{b} = (\mathbf{c}\mathbf{b})(\mathbf{c} \circ \mathbf{b}), \\ (\mathbf{c} \circ \mathbf{b})^3 &= (\mathbf{c} \circ \mathbf{b})^2(\mathbf{c} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{c}\mathbf{b})(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})(\mathbf{c} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{c}\mathbf{b})^2(\mathbf{c} \circ \mathbf{b}), \\ (\mathbf{c} \circ \mathbf{b})^4 &= (\mathbf{c} \circ \mathbf{b})^3(\mathbf{c} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{c}\mathbf{b})^3(\mathbf{c} \circ \mathbf{b}), \dots \end{aligned}$$

Ezeket felhasználva,

$$\begin{aligned} e^{(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})t} &= \mathbf{I} + (\mathbf{c} \circ \mathbf{b})t + \frac{1}{2!}(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})t^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})^2(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})t^3 + \dots = \\ &= \mathbf{I} + \left[(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})t + \frac{1}{2!}(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})^2t^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})^3t^3 + \dots \right] \frac{\mathbf{c} \circ \mathbf{b}}{\mathbf{c} \circ \mathbf{b}} = \\ &= \mathbf{I} + \left[e^{(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})t} - 1 \right] \frac{\mathbf{c} \circ \mathbf{b}}{\mathbf{c} \circ \mathbf{b}}, \quad \mathbf{c} \circ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ezt az eredményt behelyettesítve (73)-ba, a (72) differenciálegyenlet megoldása:

$$(74) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \left[e^{(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})t} - 1 \right] \frac{\mathbf{c} \circ \mathbf{b}}{\mathbf{c} \circ \mathbf{b}} \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0 + \left[e^{(\mathbf{c} \circ \mathbf{b})t} - 1 \right] \frac{\mathbf{c}(\mathbf{b} \mathbf{x}^0)}{\mathbf{c} \circ \mathbf{b}}, \quad \mathbf{c} \circ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}.$$

Az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ kezdeti feltétel automatikusan teljesül. Az $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}^\infty$ feltétel teljesüléséhez alkalmas módon kell meghatározni a $\mathbf{c}$ vektort és a $\mathbf{c} \circ \mathbf{b}$ skaláris szorzatot. A (74)-ből

$$(75) \quad \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}^0 - \frac{\mathbf{c}(\mathbf{b} \mathbf{x}^0)}{\mathbf{c} \circ \mathbf{b}} \Rightarrow \mathbf{c} = (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^\infty) \frac{\mathbf{c} \circ \mathbf{b}}{\mathbf{b} \mathbf{x}^0}.$$

Az utóbbi egyenlőséget skalárisan szorozva $\mathbf{a}$ -val, és kihasználva azt, hogy $\mathbf{a} \mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$,

$$-\mathbf{a} \mathbf{x}^\infty = \frac{(\mathbf{a} \mathbf{c})(\mathbf{b} \mathbf{x}^0)}{\mathbf{c} \circ \mathbf{b}}.$$

Legyen $\mathbf{a} \mathbf{c} = 1$ (ezt megválaszthatjuk így). Ekkor

$$(76) \quad \mathbf{c} \circ \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b} \mathbf{x}^0}{\mathbf{a} \mathbf{x}^\infty} < 0.$$

És ennek negatívnak kell lennie, mert a (75) csak így teljesülhet.

A (75) egyenlőséget felhasználva (a (76)-ot behelyettesítve oda):

$$(77) \quad \mathbf{c} = (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^\infty) \frac{\mathbf{c} \circ \mathbf{b}}{\mathbf{b} \mathbf{x}^0} = (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^\infty) \frac{-1}{\mathbf{a} \mathbf{x}^\infty} = \frac{\mathbf{x}^\infty - \mathbf{x}^0}{\mathbf{a} \mathbf{x}^\infty}.$$

A (74)-be $\mathbf{c} \circ \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ értékét behelyettesítve, a (72) feladat megoldása (a végeredmény):

$$(78) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^\infty - (\mathbf{x}^\infty - \mathbf{x}^0) e^{-\frac{\mathbf{b} \mathbf{x}^0}{\mathbf{a} \mathbf{x}^\infty} t}$$

Figyelembe véve a (71) összefüggéseket, írható, hogy

$$(79) \quad \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}^0}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^\infty} = \frac{G}{\eta} \frac{\sigma^0}{\sigma^\infty} = \frac{1}{\tau} \frac{\varepsilon^0}{\varepsilon^\infty} = \frac{G}{\eta} \frac{\sigma^0}{\sigma^\infty},$$

aszerint, hogy a feladat kezdeti feltételei deformációval, vagy feszültséggel adottak-e.

A (79)-et az exponensben felhasználva a megoldás

$$(80) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^\infty - (\mathbf{x}^\infty - \mathbf{x}^0) e^{-\frac{1}{\tau} \frac{\varepsilon^0}{\varepsilon^\infty} t} = \mathbf{x}^\infty - (\mathbf{x}^\infty - \mathbf{x}^0) e^{-\frac{G}{\eta} \frac{\sigma^0}{\sigma^\infty} t}$$

alakokban is felírható.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerzők köszönetüket fejezik ki FÜLÖP TAMÁSnak segítségéért, eredményeinek rendelkezésre bocsátásáért, VÁN PÉTERnek alkotó gondolataiért és segítő javaslataiért, valamint OBÁDOVICS J. GYULA professzornak lektori munkája kapcsán adott javaslataiért.

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. et al. (1972): Rheological Basic Relations of Rock Mechanics. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungaricae* **7/1-2.** p. 3-33.
- ASSZONYI, CS. (1973): On a New Rockmechanical Theory. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungaricae* **8/3-4.** p. 313-322. Mechanical Theory of Continua. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungaricae* **8/3-4.** p. 323-360.
- ASSZONYI, CS. (1975): Kőzetkontinuumok reológiai elméletéről. *Akadémia doktori disszertáció.* Budapest, p. 62.
- ASSZONYI, CS.- RICHTER, R. (1979): The Continuum Theory of Rock Mechanics. *Trans Techn. Publications.* Clausthal-Zellerfeld p.332.
- ASSZONYI, CS. et al.: Izotrop kontinuumok anyagtörvénye. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **3** (2006), Izotrop kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota **5** (2007), Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai **6** (2008).
- BÉDA, GY.– KOZÁK, I. (1987): Rugalmas testek mechanikája. *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.
- BÉDA, GY.– KOZÁK, I.– VERHÁS, J. (1986): Kontinuummechanika. *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.
- FÜLÖP, T. (2009): Egytengelyű eredő reológia, és relaxáció mint deviatorikus kúszás. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **10** (2010), Budapest.
- FÜLÖP, T. (2009a): Rugalmasságtani és reológiai lineáris feladatok. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **9.** pp: 11-50.
- FÜLÖP, T.– BÉDA, GY. (2009): Rheological Dynamics of Tunnels - An Analytical Investigation. „ISRM Symposium EUROCK 2009” Dubrovnik, 2009. október 29-31.
- FÜLÖP, T.– BÉDA, GY. (2009): magyarul „ISRM Symposium EUROCK 2009” Dubrovnik, 2009. október 29-31.
- FÜLÖP, T.– VÁN, P. (2009): Finite Strain Tensors: Which one to use? „ISRM Symposium EUROCK 2009” Dubrovnik, 2009. október 29-31.
- GREEN, A. E. (1947): A Concentrated Force Problem of Plane Strain or Plane Stress. *Journal of*

Applied Mechanics, **14** A246.

HUSZÁR, I. (1953): A szilárdságtan felépítése és módszerei. *Mérnöki Továbbképző Intézet*, **1007**, Budapest.

JUDD, W. R. (1964): Rock Stress, Rock Mechanics and Research. *Elsevier*, New York.

MATOLCSI, T. (2009): Volterra [1]. *Montavid kutatási jelentés*. Budapest.

MATOLCSI, T. - VÁN, P. (2007): Absolute time derivatives, *Journal of Mathematical Physics* **48** pp. 053507-19, (math-ph/0608065).

MATOLCSI, T. - VÁN, P. (2006): Can material time derivative be objective?, *Physics Letters A*, 2006, **353**, pp. 109-112. (math-ph/0510037).

MICHELBERGER, P. – HORVÁTH, S. (1993): Mechanika V. (Válogatott fejezetek). *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

TRUESDELL, C. - NOLL, W. (1965): The non-linear field theories of mechanics, (Handbuch der Physik, III/3.) *Springer Verlag*, 47. old.

IZOTROP KONTINUUMOK RUGALMAS-KÉPLÉKENY, REOLÓGIAI ANYAGTÖRVÉNYE A NEMEGYENSÚLYI TERMODINAMIKÁBAN

FELTEVÉSEK. Legyen s az anyagi rendszer fajlagos entrópiája. Létezzen az anyagi rendszernek egyensúlyi állapota, amelyet jelöljünk $s^{eq} := \tilde{s}$ -sel, s ekkor matematikailag létezik az ún. nemegyensúlyi entrópia: $s^{noneq} := \Delta s = s - \tilde{s}$, mely az egyensúlytól való eltérést reprezentálja.

1. POSZTULÁTUM. Az entrópia két részből építhető fel: az egyensúlyban létező entrópiából, és az egyensúlytól való eltérés entrópiájából.¹²

$$s = s^{eq} + s^{noneq} := \tilde{s} + \Delta s.$$

2. POSZTULÁTUM. Az entrópia mechanikai egyensúly esetén az anyagtörvény csak az e belsőenergia és az $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}$ alakváltozási tenzor függvénye: $s^{egyensúlyi} := \tilde{s}(e, \mathbf{A})$.¹³

3. POSZTULÁTUM. Az egyensúlytól való eltérés egy $\boldsymbol{\xi}$ belső dinamikai változóval jellemezhető, amely szimmetrikus másodrendű tenzor.¹⁴

4. POSZTULÁTUM. Az egyensúlytól való eltérést dinamikai mennyiségnek tekintjük, ezért az $\varepsilon_{kin} = \frac{1}{2} \mathbf{v} \mathbf{v}$ kinetikus energiához hasonló formában írható fel: $\Delta s = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}$,¹⁵ s ennek megfelelően:

$$s = s(e, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{s}(e, \mathbf{A}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}.$$

AZ ENTRÓPIA MÉRLEGE. Mindezek alapján a $\rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \sigma_s \geq 0$ entrópiamérlegből [VÁN-ASSZONYI, 2006, 2007, 2008] – feltételezve az izotermikus állapotváltozást és azt, hogy az entrópia fluxusa a szokásos módon a hőáramsűrűség és a hőmérséklet hányadosa: $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}_q / T$, – izotrop kontinuumra:

¹² Ez triviális matematikai állítás.

¹³ Ez annak következménye, hogy az entrópia csupán a termodinamikai mérlegekben szereplő extenzív változók függvénye lehet.

¹⁴ Ez a legegyszerűbb feltételezés, ui. ennél alacsonyabb tenzori rangú mennyiséggel nem írható le a (másodrendű feszültségi, deformáció tenzorok által kifeszített) mechanikai állapottérben két pont közötti távolság.

¹⁵ Ez a feltevés el is hagyható, explicit felírása elengedhető, s akkor az $s = s(e, \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi})$ kifejezéssel dolgozunk.

$$\begin{aligned}
\rho \dot{s}(e, \mathbf{A}, \xi) &= \rho \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e} + \rho \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} + \rho \frac{\partial s}{\partial \xi} : \dot{\xi} = \\
&= \rho \frac{d}{dt} \left[\tilde{s} - \frac{1}{2} \xi : \xi \right] = \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial e} \dot{e} + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} - \rho \xi : \dot{\xi} \\
&= -\frac{1}{T} (\nabla \cdot \mathbf{j}_q - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{v} \circ \nabla) + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} - \rho \xi : \dot{\xi} = \\
&= -\frac{1}{T} (\nabla \cdot \mathbf{j}_q - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}) + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} - \rho \xi : \dot{\xi} = \\
&= -\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}_q}{T} + \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} + \rho \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} - \rho \xi : \dot{\xi},
\end{aligned}$$

illetve

$$(1) \quad \left(\boldsymbol{\sigma} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right) : \mathbf{v} \circ \nabla - \rho T \xi : \dot{\xi} \geq 0$$

vezethető le, amely utóbbi az entrópia-produkció növekedését írja le.

Ez az egyenlőtlenség minden további vizsgálódás kiindulópontja.

Jelöljük megszokott módon d indexszel a tenzorok deviatorikus és o indexszel a gömbi részét. A d indexszel jelzett másodrendű tenzor tenzori áramot, a o indexszel jelzett gömbtenzor pedig skalár áramot indukál. Mivel a különböző tenzori rangú áramok nem csatolódnak, ezáltal ésszerű feltételeznünk, hogy a nemnegativitási feltételnek külön-külön is teljesülnie kell:

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \left(\boldsymbol{\sigma}^d + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)^d \right) : (\mathbf{v} \circ \nabla)^d - \rho T \xi^d : \dot{\xi}^d \geq 0, \\
& \left(\boldsymbol{\sigma}^o + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)^o \right) : (\mathbf{v} \circ \nabla)^o - \rho T \xi^o : \dot{\xi}^o \geq 0.
\end{aligned}$$

Ez az összefüggés a *kontinuumok mechanikai anyagtörvénye termodinamikai meghatározásának alapja*.

A $\boldsymbol{\sigma}$, az impulzus konduktív áramsűrűségének két része: a $\boldsymbol{\sigma}^d$ tenzori rangú áram adja a *transzverzális*, és a $\boldsymbol{\sigma}^o$ skaláris áram pedig a *longitudinális* áramokat.

Az (2) egyenlet a termodinamikai erők $[\mathbf{J} = \mathbf{J}^d + \mathbf{J}^o]$ és termodinamikai áramok $[\mathbf{X} = \mathbf{X}^d + \mathbf{X}^o]$ jelölésének, ill. fogalmának bevezetésével

$$\mathbf{X}_A : \mathbf{J}_A + \mathbf{X}_\xi : \mathbf{J}_\xi \geq 0, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{X}_A^d : \mathbf{J}_A^d + \mathbf{X}_\xi^d : \mathbf{J}_\xi^d \geq 0, \\ \mathbf{X}_A^o : \mathbf{J}_A^o + \mathbf{X}_\xi^o : \mathbf{J}_\xi^o \geq 0. \end{cases}$$

formában is felírhatók, ahol

$$\mathbf{J}_A^d \equiv \boldsymbol{\sigma}^d + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right), \quad \mathbf{X}_A^d \equiv (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})^d, \quad \mathbf{J}_\xi^d \equiv \dot{\xi}^d, \quad \mathbf{X}_\xi^d \equiv -\rho T \xi^d,$$

$$\mathbf{J}_A^o \equiv \boldsymbol{\sigma}^o + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right), \quad \mathbf{X}_A^o \equiv (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})^o, \quad \mathbf{J}_\xi^o \equiv \dot{\xi}^o, \quad \mathbf{X}_\xi^o \equiv -\rho T \xi^o.$$

Az anyagtörvényt – mint az entrópiát – két különböző esetre szétbontva célszerű vizsgálni:

- egyensúly esetére, és az
- egyensúlyon túlira.

A nemdisszipatív esetet – az (1), ill. (2) egyenlőtlenségeknél – az egyenlőség fennállása jellemzi. Egyensúlyi anyagcsaládot akkor kapunk, ha az entrópia nem függ a dinamikai változótól [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007), 36-41. o.], azaz

$$\mathbf{J}_A^d = \mathbf{0}, \quad \mathbf{J}_A^o = \mathbf{0}, \quad \mathbf{J}_\xi^d = \mathbf{0}, \quad \mathbf{J}_\xi^o = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}_A^d = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}_A^o = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}_\xi^d = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}_\xi^o = \mathbf{0}.$$

IZOTROP KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE EGYENSÚLYI ESETBEN ennek megfelelően a következő:

$$(3) \quad \boldsymbol{\sigma}^d = -\rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^o = -\rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)^o.$$

Ez az összefüggés, mivel eddig semmiféle megkötést nem tettünk, rugalmas és képlékeny állapotban egyaránt érvényes, tetszőleges alakváltozások esetén.

Az anyagtörvényt általában nem az $\mathbf{A}$ alakváltozással, hanem a $\boldsymbol{\varepsilon}$ deformációval szokás felírni [$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}$], hogy a deformálatlan állapotot ne az $\mathbf{I}$ identitással, hanem a $\mathbf{0}$ nulla állapottal jellemezzük.

Az ún. torzulási és ún. térfogatváltozási rész külön tárgyalása érdekében térjünk át a feszültségeknél és deformációknál a már megszokott deviátoros és gömbi felbontásra:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^d + \boldsymbol{\varepsilon}^o =: \mathbf{E} + \mathbf{E}_o, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^o =: \mathbf{T} + \mathbf{T}_o,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^o =: \mathbf{E}_o = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} = \frac{1}{3} \varepsilon_o \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\sigma}^o =: \mathbf{T}_o = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = \frac{1}{3} \sigma_o \mathbf{I}.$$

A $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{A}$ tenzorok szimmetrikus voltából következően, valamint a $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}}$ tenzorok

főirányainak egyezőségéből következően: $\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{A}$, - s ezért írható

$$\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{E} + \varepsilon_o \mathbf{I} + \mathbf{I}) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{E} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \mathbf{I} = \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_d + \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_o,$$

$$\left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_d = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I}, \quad \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_o = \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \mathbf{I}.$$

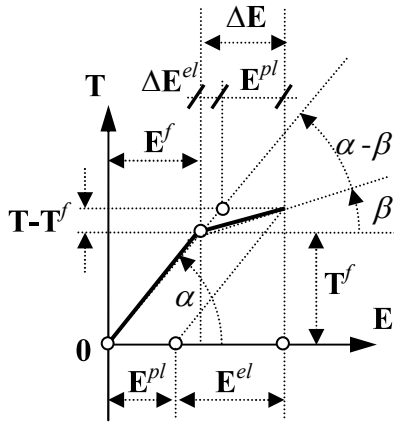
Izotrop kontinuumok anyagtörvénye egyensúlyi állapotban deviátoros formában:

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= -\rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} \right\}, \\ \mathbf{T}_o^{eq} &= -\rho T \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{E} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \mathbf{I} \right\}. \end{aligned}$$

Eddig nem tettünk különbséget a *rugalmas* és a *képlékeny* alakváltozás között. A különbség csak az $\mathbf{\varepsilon}$ deformációtenzor $\mathbf{E}$ deviátoros részénél [$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{el} + \Psi \mathbf{E}^{pl}$] van, ugyanis a gömbi részben [$\varepsilon_o = \varepsilon_o^{el}$ és $\varepsilon_o^{pl} = 0$] nincs.

Ha megnézzük a különböző deformációk közötti összefüggéseket, akkor a (4) egyenlet pontosítható. Vegyük figyelembe azt

[ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007), 69-80. old.], hogy a (4) összefüggés lineáris összefüggéssel is leírható. Ezt mutatja a torzulási állapotra vonatkozóan a mellékelt *ábra*.



Magyarázat a feszültségek és deformációk közötti összefüggések feltárásához

A képlékenységi határt az ún. képlékenységi feltétel jelöli ki, ahol a W^d torzulási deformációs munka egy küszöbértéket elér. Feltételezzük, hogy a térfogatváltozási állapotban nincs képlékeny állapot, nincs képlékenységi határ.¹⁶ A térfogatváltozási állapotban viszont jelentkezik egy ún. összenyomhatósági határ, amely után a térfogati deformációk már nem változnak. Az 1. ábra alapján a deviátoros feszültség- és deformáció-

definíciók, valamint geometriai összefüggéseik a következők:

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{el} + \mathbf{E}^{pl}, & (i) \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}^{el} + \mathbf{T}^{pl}, \text{ ahol } \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}^{el}, \mathbf{T}^{pl} = \mathbf{0}, & (ii) \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}^f + \Delta \mathbf{E}, \text{ ahol } \Delta \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E}^{el} + \mathbf{E}^{pl}, & (iii) \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}^f + \Delta \mathbf{T}, \text{ ahol } \mathbf{T} - \mathbf{T}^f = \Delta \mathbf{T}, & (iv) \\ \text{arc tg } \alpha &= 2G, \quad \text{arc tg } \beta = 2G_{pl}, & (v) \\ \mathbf{E}^{el} &= \frac{1}{2G} \mathbf{T}, \quad \Delta \mathbf{E}^{el} = \frac{1}{2G} (\mathbf{T} - \mathbf{T}^f), & (vi) \\ \mathbf{E}^{pl} &= \frac{1}{2G_{pl}} (\mathbf{T} - \mathbf{T}^f) & (vii) \\ \mathbf{E}^{pl} &= \left(1 - \frac{2G_{pl}}{2G} \right) (\mathbf{E} - \mathbf{E}^f). & (viii) \end{aligned}$$

¹⁶ Helyesebben ami ott jelentkezik (pl. egytengelyű kísérletnél) az a torzulás miatt bekövetkező képlékeny viselkedés megjelenése.

Tehát lineáris esetben az egyensúlyi anyagtörvény:

$$(6) \quad \mathbf{T} = 2G\mathbf{E}^{el},$$

mind a rugalmas, mind a képlékeny tartományon.

Ebből következik, hogy a (4) alatti összefüggés helyesen a következő:

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= -\rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}^{el}} \mathbf{E}^{el} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}^{el}} \mathbf{E}^{el} \right) \mathbf{I} \right\}, \\ \mathbf{T}_o^{eq} &= -\rho T \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}^{el}} \mathbf{E}^{el} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \mathbf{I} \right\}. \end{aligned}$$

(az ε_o -nál az el indexet azért nem tüntettük fel, mert $\varepsilon_o^{pl} = 0$, s így $\varepsilon_o = \varepsilon_o^{el} + \varepsilon_o^{pl} = \varepsilon_o^{el}$).

Tehát a (6) összefüggés mind a rugalmas, mind a képlékeny tartományon leírja az anyag *mechanikai* viselkedését.

Ha figyelembe vesszük az [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007), 69-80. old.] közöltek, miszerint az anyagegyenlet egyensúly esetén a HOOKE-törvénnyel is leírható,¹⁷ akkor

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= -\rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}^{el}} \mathbf{E}^{el} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}^{el}} \mathbf{E}^{el} \right) \mathbf{I} \right\}, & \mathbf{T}^{eq} &= 2G\mathbf{E}^{el}, \\ \mathbf{T}_o^{eq} &= -\rho T \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}^{el}} \mathbf{E}^{el} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} (1 + \varepsilon_o) \mathbf{I} \right\}. & \mathbf{T}_o^{eq} &= 3K\mathbf{E}_o. \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

Innen következik, hogy a két rugalmassági állandó termodinamikai definíciója:

$$(9) \quad \begin{aligned} 2GI &:= -\rho T \left\{ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}^{el}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}^{el}} \mathbf{E}^{el} \right) (\mathbf{E}^{el})^{-1} \right\}, \\ 3K &:= -\rho T \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{E}^{el}} \mathbf{E}^{el} \right) \frac{1}{\varepsilon_o} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \varepsilon_o} \frac{1 + \varepsilon_o}{\varepsilon_o} \right\}. \end{aligned}$$

Az anyagtörvényben – ha mind a rugalmas, mind a képlékeny tartománybeli viselkedést le akarjuk írni, – akkor nem az $\mathbf{E}^{el}$ *elasztikus* deformációkat szoktuk feltüntetni, hanem az $\mathbf{E}$ -t.

Bevezetve a képlékenységi határ jelöléséhez a $\Psi = \Psi(W^d, \dot{W}^d)$ HEAVISIDE-féle egységugrás-függvényt

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \text{ha } W^d < W_f^d, \text{ vagy } \Delta W^d < 0, \\ 1, & \text{ha } W^d \geq W_f^d, \text{ és } \Delta W^d \geq 0, \end{cases}$$

¹⁷ Vagyis a CAYLEY-HAMILTON tételből következően a legáltalánosabb forma a kvadrátikus alak, azonban a másodrendű tag az eddig megismert anyagoknál százalékosan jóformán ki sem fejezhető eltérést jelent csupán, így elhanyagolható.

amely

- „0”-val fejezi ki, ha a torzulási deformációs munka még nem lépte túl a W_f^d képlékenységi határt kijelölő értéket, tehát az anyag még rugalmas állapotban van, vagy pedig ha a deformációs munka csökken, mert a „tehermentesülés” rugalmas úton történik, és
- „1”-gyel, ha már megjelentek a plasztikus (vagyis maradó) deformációk, mindaddig, míg a munka értéke növekszik, tehát a plasztikus deformációk is nőnek.

Ennek megfelelően a kiinduló összefüggés

$$\mathbf{E}^{el} = \mathbf{E} - \Psi \mathbf{E}^{pl} \quad \text{és} \quad \mathbf{E}_o^{el} = \mathbf{E}_o \quad [\text{ill. } \varepsilon_o^{el} = \varepsilon_o],$$

amelyet ha behelyettesítjük a (7) alatti jobboldali kifejezésbe – felhasználva az *ábra* alatti (5viii) összefüggést, – akkor

$$(10) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= 2G\mathbf{E}^{el} = 2G\mathbf{E} - \Psi 2G\mathbf{E}^{pl} = 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}^f), \\ \mathbf{T}_o^{eq} &= 3K\mathbf{E}_o. \end{aligned}$$

Az „egyensúlyi állapotban lévő közeg” gyakorlatban alkalmazott anyagtörvénye a

$$(10) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{eq} &= 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \\ \sigma_o^{eq} &= 3K\varepsilon_o, \end{aligned}$$

s a $\Psi = 0$ érték adja a *tisztán rugalmas* viselkedést:

$$\mathbf{T}^{eq} = 2G\mathbf{E},$$

$\Psi = 1$ érték adja a *tisztán képlékeny* viselkedést:

$$\mathbf{T}^{eq} = 2G\mathbf{E}_f + 2G_{pl}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \quad \text{vagy} \quad \mathbf{T}^{eq} = 2G_{pl}\mathbf{E} + (2G - 2G_{pl})\mathbf{E}_f.$$

IZOTROP KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE NEMEGYENSÚLYI ESETBEN. Eddig az egyensúly állapotát vizsgáltuk, most lépünk tovább, a nemegyensúlyi esetre. Ehhez vissza kell térnünk a

$$(2) \quad \begin{aligned} \left(\mathbf{T} + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_d \right) : (\mathbf{v} \circ \nabla)_d - \rho T \xi_d : \dot{\xi}_d &\geq 0, \\ \left(\mathbf{T}_o + \rho T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mathbf{A}} \right)_o \right) : (\mathbf{v} \circ \nabla)_o - \rho T \xi_o : \dot{\xi}_o &\geq 0 \end{aligned}$$

összefüggéshez. Mivel

$$(11) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{eq} + \boldsymbol{\sigma}^{noneq}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^{eq} + \mathbf{T}^{non,eq}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{T}_o = \mathbf{T}_o^{eq} + \mathbf{T}_o^{noneq},$$

nemegyensúlyi esetben a szigorú egyenlőtlenség áll fenn:

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{noneq} : (\mathbf{v} \circ \nabla)_d - \rho T \dot{\xi}_d &> 0, \\ \mathbf{T}_o^{noneq} : (\mathbf{v} \circ \nabla)_o - \rho T \dot{\xi}_o &> 0. \end{aligned}$$

Az anyagtörvényt legtöbbször az ún. térfogatváltozási és torzulási alakban alkalmazzuk, a tenzorokat deviátoros és gömbi részre bontva: egy másodrendű tenzorra és egy nulladrendű tenzorra. Vagyis a mechanikai kölcsönhatások termodinamikájában két különböző tenzori rangú termodinamikai erő és termodinamikai áram jelenik meg. A különböző tenzori rendű áramok izotrop anyagokban nem csatolódnak, ezért ha nem bontjuk külön, akkor kihagyunk egy lényeges egyszerűsítési lehetőséget. Az $\boldsymbol{\sigma}^{noneq}$ és a ξ felbontása magától értetődő. Az $\mathbf{v} \circ \nabla = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$ -nél azonban bonyolultabb a helyzet. A feszültségtenzor szimmetrikus volta miatt a kétpontos szorzatban csupán a sebesség-gradiens szimmetrikus része szolgáltat nullától eltérő eredményt. Ezért az $(\mathbf{v} \circ \nabla)^S$ szimmetrikus tenzort véve, új jelölést célszerű bevezetni:

$$(\mathbf{v} \circ \nabla)^S = (\mathbf{v} \circ \nabla)_d^S + (\mathbf{v} \circ \nabla)_o^S := \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}_o = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\varepsilon}_o \mathbf{I},$$

ahol

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{I} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^{-1} = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}_o = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\varepsilon}_o \mathbf{I}, \\ \dot{\varepsilon}_o &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{v} \circ \nabla) = \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{I} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^{-1}). \end{aligned}$$

A (12) egyenlőtlenség megoldása – mint már láttuk [ASSZONYI et al. (2006), (2007)], – a LAGRANGE-féle középértéktétel felhasználásával történhet, a

$$(13) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{noneq} \\ \dot{\xi}_d \end{pmatrix} = \mathbf{L}_d \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ -\rho T \dot{\xi}_d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_o^{noneq} \\ \xi_o^{noneq} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_o \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_o \\ -\rho T \dot{\xi}_o \end{pmatrix},$$

illetve kiírva

$$(13a) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{noneq} \\ \dot{\xi}_d \end{pmatrix} = \mathbf{L}_d \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ -\rho T \dot{\xi}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ -\rho T \dot{\xi}_d \end{pmatrix},$$

$$(13b) \quad \begin{pmatrix} \sigma_o^{noneq} \\ \xi_o \end{pmatrix} = \mathbf{L}_o \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_o \\ -\rho T \dot{\xi}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_o \\ -\rho T \dot{\xi}_o \end{pmatrix}.$$

egyenletek megoldása révén, ahol $\mathbf{L}$ egy negyedrendű – pozitív definit szimmetrikus – impulzusvezetési tenzor mátrixa, valamint $\mathbf{L}_d$ és $\mathbf{L}_o$ annak deviátorikus és gömbi (izotrop) felbontása. Fizikai jelentősége van annak is, ha nemcsak szimmetrikus vezetési tenzorokat engedünk meg.¹⁸

A fenti $\mathbf{L}_d$ és $\mathbf{L}_o$ mátrixok feltüntetett komponensei izotrop anyagokban skalárok (a megfelelő reprezentációs tételek értelmében). Ekkor az egyenletrendszer megoldása a ξ_d, ξ_o változók kiküszöbölésével:

¹⁸ Ezt [ASSZONYI-FÜLÖP-VÁN-SZARKA-HORVÁTH (2008) 55-56.old] bemutatja részletesebben.

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{noneq} - L_{22}^{-1} \dot{\mathbf{T}}^{noneq} &= L_{11} L_{22}^{-1} \ddot{\mathbf{E}} + (L_{12} L_{21} L_{22}^{-1} - L_{11}) \ddot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_0^{noneq} - L_{22}^{-1} \dot{\sigma}_0^{noneq} &= l_{11} l_{22}^{-1} \ddot{\varepsilon}_0 + (l_{12} l_{21} l_{22}^{-1} - l_{11}) \ddot{\varepsilon}_0, \end{aligned}$$

illetve a

$$\begin{aligned} \tau &:= -L_{22}^{-1}, & \theta &:= L_{11} L_{22}^{-1}, & 2\mu &:= L_{12} L_{21} L_{22}^{-1} - L_{11}, \\ \tau_0 &:= -l_{22}^{-1}, & \theta_0 &:= l_{11} l_{22}^{-1}, & 2\mu_0 &:= l_{12} l_{21} l_{22}^{-1} - l_{11}, \end{aligned}$$

jelölések bevezetésével

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^{noneq} + \tau \dot{\mathbf{T}}^{noneq} &= \theta \ddot{\mathbf{E}} + 2\mu \ddot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_0^{noneq} + \tau_0 \dot{\sigma}_0^{noneq} &= \theta_0 \ddot{\varepsilon}_0 + 2\mu_0 \ddot{\varepsilon}_0, \end{aligned}$$

alakban állítható elő.

A (10) egyensúlyi anyagtörvény

$$\mathbf{T}^{eq} = 2G\mathbf{E} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f), \quad \sigma_0^{rev} = 3K\varepsilon_0,$$

illetve időszerinti deriváltja

$$\dot{\mathbf{T}}^{eq} = 2G\dot{\mathbf{E}} - \Psi(2G - 2G_{pl})\dot{\mathbf{E}}, \quad \dot{\sigma}_0^{rev} = 3K\dot{\varepsilon}_0,$$

(15)-be történő behelyettesítésével a

$$\begin{aligned} \mathbf{T} - 2G\mathbf{E} + \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) + \tau (\dot{\mathbf{T}} - 2G\dot{\mathbf{E}} + \Psi(2G - 2G_{pl})\dot{\mathbf{E}}) &= \theta \ddot{\mathbf{E}} + 2\mu \ddot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_0 - 3K\varepsilon_0 + \tau_0 (\dot{\sigma}_0 - 3K\dot{\varepsilon}_0) &= \theta_0 \ddot{\varepsilon}_0 + 2\mu_0 \ddot{\varepsilon}_0 \end{aligned}$$

összefüggést kapjuk.

Ennek megfelelően az *izotrop kontinuumok anyagtörvénye* a következő:

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2G\tau \dot{\mathbf{E}} - \Psi(2G - 2G_{pl})(\mathbf{E} - \mathbf{E}_f) - \\ &\quad - \Psi(2G - 2G_{pl})\tau \dot{\mathbf{E}} + 2\mu \ddot{\mathbf{E}} + \theta \ddot{\mathbf{E}}, \\ \sigma_0 + \tau_0 \dot{\sigma}_0 &= 3K\varepsilon_0 + 3K\tau_0 \dot{\varepsilon}_0 + 2\mu_0 \ddot{\varepsilon}_0 + \theta_0 \ddot{\varepsilon}_0. \end{aligned}$$

Ha megengedhető – a gyakorlati alkalmazásoknál – a kétféle deformáció egyenlővé tétele: $\ddot{\mathbf{E}} \approx \dot{\mathbf{E}}$,¹⁹ akkor a $2\eta = \lambda + \mu$ és $3K_v = \lambda_0 + \mu_0$ jelölések bevezetésével az ún. *tehetetlenségi standard testet* kaptuk eredményül:

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}} + \theta \ddot{\mathbf{E}}, & \boldsymbol{\sigma}^d + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d, \\ \mathbf{T}_0 + \tau_0 \dot{\mathbf{T}}_0 &= 3K\mathbf{E}_0 + 3K_v \dot{\mathbf{E}}_0 + \theta_0 \ddot{\mathbf{E}}_0, & \boldsymbol{\sigma}^0 + \tau_0 \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^0 + 3K_v \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 + \theta_0 \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0. \end{aligned} \quad \text{azaz}$$

¹⁹ $\ddot{\mathbf{E}} \approx \dot{\mathbf{E}} \Leftrightarrow (\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1} \approx \mathbf{I}$

HIDROSZTATIKUS KÖRNYEZETBEN NYITOTT HENGERSZIMMETRIKUS ALAGÚT KÖRÜLI REOLÓGIAI IDŐFÜGGÉS

Fülöp Tamás

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Béda Gyula

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM,
MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Meghatározzuk a feszültség, deformáció, sebesség és elmozdulás reológia-vezérelte időfüggését egy hidrosztatikus környezetben megnyitott, hosszú, henger alakú alagút körül, tetszőleges véges rendű időderiváltakat tartalmazó reológiai közegmodellek esetére, lineáris és egyensúlyi közelítésben.

1. BEVEZETÉS

Az alagutak időfüggő jelenségeinek egyik forrása a környező talaj és kőzet reológiai viselkedése. Ezeket a reológiai effektusokat tanulmányozzuk egy analitikus számolás révén.

Természetesen ahhoz, hogy analitikus megoldást kaphassunk, egy olyan modellt tekintünk, amely számos egyszerűsítést és közelítést fejez ki a valóságos alagútszituációkhoz képest. Ennek ellenére azt várhatjuk, hogy az eredmény egy hasznos közelítést nyújt a reológiai jelenségek leírására egy alagút körül. Így például információt nyerhetünk a releváns karakterisztikus reológiai (kúszási, relaxációs stb.) időskálák anyagi paramétereiktől való függéséről.

Munkánk két szempontból általánosítja a hengeres alagút körüli reológiai viselkedésről szóló eddigi tanulmányokat [ASSZONYI–RICHTER (1979)], [CRISTESCU (1993)],

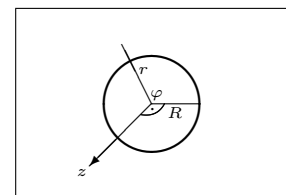
[LADANYI (1993)], [PANET (1993)], [VÁN–SZARKA (2006)]. Egyrészt, számításunk tet-szőleges, véges időderiváltakat tartalmazó reológiai modellekre érvényes. Az eredmé-nyeket két esetre részletezzük (POYNTING-THOMSON-modell és tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell). Másrészt, a gyors alagútnyitás okozta kezdeti feltételeket nem feltéte-lezzük, és nem is a konstitúciós összefüggések legmagasabb rendű deriváltjaiból származ-tatjuk (e módszerről lásd részletesen jelen kötet negyedik cikkét [ASSZONYI–SZARKA–BÉDA (2009), 135. o.]), hanem *levezetjük*. A lassú alagútnyításkor érvényes megoldást is bemutatjuk, azaz amikor az alagútnyitás nem gyors a reológiai időskálához képest.

Az esetleg fellépő képlékenyedés leírásától eltekintünk. Megjegyzendő viszont, hogy amit sokan/sokszor képlékenyedésnek vélnek, az gyakran egyszerűen a közeg *mozgá-sa*. A statikus elrendezésekhez szokott szemnek természetesen minden mozgás szokatlan lehet, de ilyenkor nem szükséges egyből képlékeny átalakulásra gondolni. Ha például egy mélyépítési munka során átrendeződtek a talajban a feszültségviszonyok, akkor a kiegyenlítetlenné vált erők gyorsulásokat hoznak létre, a közeg mozgásba jön. A közeg reológiai belső súrlódása ezen a gyorsuláson csillapítani fog valamennyit, de valamilyen sebességű mozgások sokáig — például évtizedekig — fennmaradnak. A közeg mozgása közben fenntarthatja rugalmas állapotát, egyszerűen csak odébbhelyeződik valamennyit, mely vándorlás közben bizonyos mértékű rugalmas alakváltozás bekövetkezik, de más, például képlékenyedés vagy tönkremenetel nem feltétlenül. (Jelen írás a tönkremenetel lehetőségével sem foglalkozik.)

Az analitikus tárgyalhatóság érdekében a kontinuummechanika lineáris közelítésé-ben dolgozunk (lásd jelen kötet [FÜLÖP (2009a)] és [ASSZONYI–BÉDA–SZARKA (2009)] tanulmányait), és azon belül is az egyensúlyi („kvázistatikus”) közelítésben. A számolha-tóság érdekében tett eme engedményeink miatt nem tudjuk leírni a leggyorsabb, tranziens (ám szerencsére hullámszerűen elfutó) jelenségeket, és a pontosságból is veszítünk, de valószínűleg benne maradunk a mélyépítési feladatoknál megfigyelhető főbb időskálák és változások szokásos mérettartományában. Írásunk végén összegezzük azokat a nehéz-ségeket is, melyek akkor lépnek fel, amikor az egyensúlyi közelítés helyett a gyorsulást is figyelembe véve kívánjuk a számítást elvégezni.

2. A MODELL

Egy végtelen, háromdimenziós közeget tekintünk, melynek minden egyes anyagi pontját egy t_0 pillanatban felvett $\mathbf{r}$ helyvektorával jellemez-zük [egy szokásos inerciarendszerből szemlélve [MATOLCSI (1993)]]. Egy hengerkoordináta-rendszert választva, az (r, φ, z) koordinátákkal jellemezzük ezeket az anyagi helyvektorokat. A megnyitandó alagút az $r \leq R$ tartomány.



Formalizmusunk a jelen kötet első cikkében [FÜLÖP (2009a)] találhatóval egyezik, melynek itt tömören csak azt a kivonatát adjuk meg, mely a jelen számolásokhoz közvetlenül szükséges. A három alapvető mennyiségünk a σ feszültségtenzor, az ϵ deformációtenzor és a $\mathbf{v}$ sebességvektor, mindegyikük a $(t, \mathbf{r})$ idő- és térváltozókban tekintve (Lagrange-leírás). Feltételezzük, hogy a közeg homogén és izotrop, továbbá hogy rugalmas és reológiai tulajdonságait a

$$(1) \quad \mathcal{S}^d \sigma^d = \mathcal{E}^d \epsilon^d, \quad \mathcal{S}^s \sigma^s = \mathcal{E}^s \epsilon^s,$$

konstitúciós összefüggések jellemzik, ahol d és s jelöli a tenzorok deviatorikus ill. gömbi részét ($\mathbf{I}$ az egységtenzor):

$$(2) \quad \sigma^s = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma, \quad \sigma^s = \sigma^s \mathbf{I}, \quad \sigma^d = \sigma - \sigma^s, \quad \epsilon^s = \frac{1}{3} \text{tr} \epsilon, \quad \epsilon^s = \epsilon^s \mathbf{I}, \quad \epsilon^d = \epsilon - \epsilon^s,$$

és

$$(3) \quad \mathcal{S}^d = 1 + T_1^d \partial_t + T_2^d \partial_t^2 + \dots + T_{s^d}^d \partial_t^{s^d}, \quad \mathcal{E}^d = U_0^d + U_1^d \partial_t + \dots + U_{e^d}^d \partial_t^{e^d},$$

$$(4) \quad \mathcal{S}^s = 1 + T_1^s \partial_t + T_2^s \partial_t^2 + \dots + T_{s^s}^s \partial_t^{s^s}, \quad \mathcal{E}^s = U_0^s + U_1^s \partial_t + \dots + U_{e^s}^s \partial_t^{e^s}.$$

Lefedjük tehát az összes olyan reológiai modellt, amelyben véges rendig fordulnak elő időderiváltak. Például a tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell esetére [ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007)], [VÁN-ASSZONYI (2008)], [VÁN (2008)] $s^d = s^s = 1$, $e^d = e^s = 2$, maguk a konstitúciós összefüggések pedig

$$(5) \quad \sigma^d + T_1^d \dot{\sigma}^d = U_0^d \epsilon^d + U_1^d \dot{\epsilon}^d + U_2^d \ddot{\epsilon}^d, \quad \sigma^s + T_1^s \dot{\sigma}^s = U_0^s \epsilon^s + U_1^s \dot{\epsilon}^s + U_2^s \ddot{\epsilon}^s,$$

vagy, az együtthatók hagyományos jelölésében,

$$(6) \quad \sigma^d + \tau \dot{\sigma}^d = 2G \epsilon^d + 2\eta \dot{\epsilon}^d + \theta \ddot{\epsilon}^d, \quad \sigma^s + \tau_0 \dot{\sigma}^s = 3K \epsilon^s + 3K_v \dot{\epsilon}^s + \theta_0 \ddot{\epsilon}^s$$

(a felülpont itt és a továbbiakban ∂_t -t jelenti).

A t_0 kezdeti időpontban és annak egy környezetében, egészen egy $t_1 > t_0$ pillanatig, a közeget stacionárius egyensúlyban lévőnek tételezzük fel, egy

$$(7) \quad \sigma(t, \mathbf{r}) = \bar{\sigma} = -p_0 \mathbf{I}$$

állandó hidrosztatikus feszültségtenzorral¹, a hozzá tartozó deformációtenzorral [v.ö. (1)]:

$$(8) \quad \epsilon(t, \mathbf{r}) = \bar{\epsilon} = -\frac{p_0}{U_0^s} \mathbf{I}$$

¹ E feltételezés alapját ld. alább.

és nulla sebességmezővel:

$$(9) \quad \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}.$$

Szokásos — de egyáltalán nem szükséges — bevezetni az

$$(10) \quad \bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) = -\frac{p_0}{U_0^s} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

mennyiséget is, mely vektormezőre teljesül $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\bar{\mathbf{u}} \circ \nabla)^s$, ahol $\circ$ a diadikus/tenzorszorzatot jelöli, a ∇ operáció balra is hathat (mindig a kontextusnak megfelelően), és s jelenti egy tenzor szimmetrikus részét. Ezt az $\bar{\mathbf{u}}$ -t elmozdulásnak szokás nevezni, mely egy megtévesztő elnevezés, mivel ez a mennyiség nem tartozik semmilyen mozgáshoz és nem fejez ki semmiféle változást (a közeg egész múltját stacionáriusnak tekintjük). Ez csupán a deformációtenzor egyfajta vektorpotenciálja, és nincs semmilyen fizikai szerepe vagy jelentése. (Erről a CAUCHY-potenciálnak nevezhető matematikai segédmennyiségről, és meghatározatlanságának fokáról ld. [FÜLÖP (2009a)], jelen kötetben.) Elmozdulásról egyelőre nem beszélhetünk, hiszen közegünk tartósan egy nyugalmi állapotban van. Majd csak a folyamatok elindulása után lesz értelme beszélni a kezdeti elrendezéshez képest bekövetkezett elmozdulásokról (amiket ki is fogunk számolni).

A (7)–(9) hidrosztatikai feltételezés azon a várakozáson alapszik, hogy az alagút nyitása okozta változások csak egy pl. $r < 10R$ környezetben lesznek majd jelentősek, melyen belül például az önsúlyból fakadó helyfüggés elhanyagolható. Ha az életbeli szituációban a hidrosztatikus nyomás önsúlyból származik, akkor feltételezésünk annak felel meg, hogy az alagút az R sugaránál jóval mélyebben található a felszín alatt. Megjegyezzük, hogy jelen kötet [ASSZONYI–SZARKA–BÉDA (2009)] tanulmánya foglalkozik azzal az esettel, amikor a leendő alagút környezetében a feszültség nem hidrosztatikus, hanem egy tetszőleges (de továbbra is helyfüggetlen) feszültségtenzor.

Az alagútnyitást modellünkben úgy fogalmazzuk meg, hogy az alagút $r = R$ felületére ható felületi erő normálirányú (sugárirányú) komponense, mely komponens hengerkoordináta-rendszerünkben nem más, mint a feszültségtenzor mátrixának σ_{rr} eleme, t_1 és egy annál későbbi t_2 között $-p_0$ -ról nullára változik. Ennek a változásnak a részleteit nem konkretizáljuk. Csak annyit követelünk meg, hogy az idő függvényében elegendően simán történjen (az összes szükséges időderivált létezzen és folytonos legyen). Ez azt a feltételezést is magában foglalja, hogy minden szóbanforgó mennyiségünk ugrás és törés nélkül változik meg mind t_1 -kor, mind t_2 -kor (mind közben bármikor, de a két szélső időpontbeli viselkedés fizikailag különösen jelentős, mert azt tételezi fel, hogy a nyitást a legkisebb „zökkenés” nélkül, teljesen sima átmenettel tudjuk indítani és befejezni²). Különösen az a határeset fog bennünket érdekelni, amikor, a nyitás időprofiljának

² Hogy ez mennyire realiztikus, az természetesen kérdés. A változások reológiai lekövetéséhez azon-

alakját megtartva, t_1 -et fokozatosan t_2 -höz tarttatjuk, így modellezve egy gyors/hirtelen nyitást — a jelenlevő reológiai időskálákhoz viszonyítva sokkal gyorsabban.

A nyitás a hengerszimmetria megőrzésével történjen, azaz

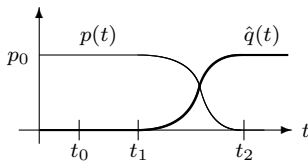
$$(11) \quad \sigma_{rr}(t, R, \varphi, z) = -p(t),$$

ahol

$$(12) \quad p(t) = \begin{cases} p_0 & \text{ha } t \leq t_1, \\ 0 & \text{ha } t \geq t_2, \\ \text{közben sima.} & \end{cases}$$

Számításaink kényelmesebbé tételéhez célszerű lesz bevezetnünk a

$$(13) \quad \hat{q}(t) = p_0 - p(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \leq t_1, \\ p_0 & \text{ha } t \geq t_2, \\ \text{közben sima} & \end{cases}$$



jelölést is. Az $r \rightarrow \infty$ térszerű végtelenben (mely egy valódi alagútra nem feltétlenül kell többet jelentsen, mint $r \sim \sim 10R$.) azt tesszük fel, hogy a hidrosztatikus feszültség változatlan marad. Ezt a feltételezést mint úgymond aszimptotikus peremfeltételt fogjuk felhasználni.

A deformációtenzor fizikai szerepe nem az, hogy egy kezdeti t_0 -tól mért változást fejezzon ki, hanem azt a különbséget kell kifejezze, hogy a pillanatnyi helyi geometriai viszonyok mennyire térnek el attól, ami egy terheetlen, teljesen relaxált, ideális állapotban állna fenn. A deformáció változási gyorsaságát a sebességmező—közelebbről, annak gradiense—szabja meg, és e mellé a deformációsebességet megszabó egyenlet mellé egy kezdeti feltételt kell biztosítani, mely a t_0 -kori kezdeti deformációt adja meg. Mi itt a CAUCHY-féle deformációtenzort használjuk, melynek változási gyorsasága egyszerűen

$$(14) \quad \dot{\epsilon} = (\mathbf{v} \circ \nabla)^S,$$

a kezdeti feltételünk pedig

$$(15) \quad \epsilon(t_0, \mathbf{r}) = \bar{\epsilon}.$$

Ami a mozgásegyenletet (lendületmérleget) illeti, a

$$(16) \quad \sigma \cdot \nabla = \mathbf{0}$$

ban szükség van erre a feltételezésre. Belefér viszont ebbe az általunk használt keretbe, hogy σ (vagy valahányadik időderiváltja) t_1 -től kezdve először simán, de nagyon gyorsan változik egy jelentőset, azután sokáig csak „szelíden” változik, majd t_2 környékén megint egy „vadabb” változással zár.

egyensúlyi közelítést tekintjük. Fizikailag helyesebb volna a $\rho \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ egyenletet alkalmazni, akkor azonban súlyos nehézségek akadályozzák a sikeres analitikus tárgyalást. Ezeket a nehézségeket a KÖVETKEZTETÉSEK szakaszban nevezzük meg. Ezért jelen munkában a (16) egyenlet mellett maradunk, elhagyva ezáltal a reológiaiilag csillapított rugalmas hullámok leírását, és a gyors alagútnyitás okozta jelenségek egy részét is.

3. ANALÍZIS

Míg jelen kötet [FÜLÖP (2009a)] dolgozata az általános elrendezésekre vezet le, illetve mutat be egyenleteket és megoldási módszereket, itt, épp ellentétesen, arra kívánunk példát mutatni, hogy hogyan lehet egy konkrét feladat speciális tulajdonságait hatékonyan felhasználni ahhoz, hogy minél alacsonyabb rendű differenciálegyenleteket kelljen megoldani.

Az (1), (14), (16) egyenletrendszerünk, a $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\bar{\mathbf{v}}$ kezdeti feltételek [ld. (7)–(9)] és az $r = R$ -nél és $r \rightarrow \infty$ -nél kirótt peremfeltételek — azaz (11) ill.

$$(17) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma}(t, r, \varphi, z) = -p_0 \mathbf{I}$$

— mind eleget tesznek a hengersizimetriának. Ezért a kontinuum egész folyamata is rendelkezni fog a hengersizimetriával. Ez, hengerkoordinátákban a következőket jelenti:

$$(18) \quad \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(t, r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varphi\varphi}(t, r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}(t, r) \end{pmatrix},$$

$$(19) \quad \boldsymbol{\epsilon}(t, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}(t, r) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\varphi\varphi}(t, r) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(t, r) \end{pmatrix},$$

$$(20) \quad \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} v_r(t, r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

és következésképp

$$(21) \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}' + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(22) \quad (\mathbf{v} \circ \nabla)^S = \begin{pmatrix} v_r' & 0 & 0 \\ 0 & v_r/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol a vesszőt a ∂_r deriválás jelölésére vezettük be.

A továbbiakhoz hasznos bevezetni a következő mennyiségeket:³

$$(23) \quad \hat{\sigma} = \sigma - \bar{\sigma}, \quad \hat{\epsilon} = \epsilon - \bar{\epsilon}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v},$$

$$(24) \quad \hat{\mathbf{u}}(t, r) = \int_{t_0}^t \hat{\mathbf{v}}(\tilde{t}, r) d\tilde{t}.$$

Ezek a mennyiségek mérik a kezdeti állapothoz képesti változásokat. Így például $\hat{\mathbf{u}}$ valóban elmozdulás, mely az anyagi pontok helyeinek változását fejezi ki kezdeti helyükhöz képest.

Következésképp az is igaz — (14) időintegrálása révén —, hogy

$$(25) \quad \hat{\epsilon} = (\hat{\mathbf{u}} \circ \nabla)^S = \begin{pmatrix} \hat{u}_r' & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u}_r/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Figyeljük meg, hogy az elmozdulás a deformációtenzor *változásával* kapcsolatos.) Továbbá, (1)-ből következően

$$(26) \quad \mathcal{S}^d \hat{\sigma}^d = \mathcal{E}^d \hat{\epsilon}^d,$$

$$(27) \quad \mathcal{S}^s \hat{\sigma}^s = \mathcal{E}^s \hat{\epsilon}^s.$$

Emellett (21)-et (16)-ba helyettesítve

$$(28) \quad \hat{\sigma}_{rr}' + (\hat{\sigma}_{rr} - \hat{\sigma}_{\varphi\varphi})/r = 0,$$

mely az egyensúlyi mozgásegyenlet egyetlen nemtriviális komponense, $\hat{\sigma}$ -pal kifejezve. A σ -ra felírt peremfeltételeket szintén fordítsuk le $\hat{\sigma}$ nyelvére:

$$(29) \quad \hat{\sigma}_{rr}(t, R) = \hat{q}(t), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_{rr}(t, r) = 0.$$

Mivel ezek a peremfeltételek kizárólag $\hat{\sigma}_{rr}$ -t tartalmazzák, mostantól kezdve az lesz a célunk, hogy az összes többi mennyiséget elimináljuk az egyenleteinkből.

(26)-ból azt kapjuk, hogy

$$(30) \quad \mathcal{S}^d(\hat{\sigma}_{rr} - \hat{\sigma}_{\varphi\varphi}) = \mathcal{E}^d(\hat{\epsilon}_{rr} - \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}),$$

melyet felhasználva, ha $\mathcal{S}^d$ -t hattatjuk (28)-ra, kapjuk, hogy

$$(31) \quad \mathcal{S}^d \hat{\sigma}_{rr}' + \mathcal{E}^d(\hat{\epsilon}_{rr} - \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi})/r = 0.$$

³ A felülvonással jelölt kezdeti mennyiségekre ismeretes a „primer mező”, az ezektől való (kalappal jelölt) eltérésekre pedig a „kiegészítő mennyiség” elnevezés. Az alagútnytítás után fennálló mennyiségeket pedig „szekunder” jelzővel szokás illetni.

Ezenkívül, ha $\mathcal{S}^s$ -t hattatjuk (26)-ra, $\mathcal{S}^d$ -t pedig (27)-re, akkor a következő lesz az egyik ill. másik eredmény:

$$(32) \quad \mathcal{S}^s \mathcal{S}^d \hat{\sigma}^d = \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \hat{\epsilon}^d, \quad \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s \hat{\sigma}^s = \mathcal{S}^d \mathcal{E}^s \hat{\epsilon}^s.$$

Észrevéve, hogy $\mathcal{S}^s \mathcal{S}^d = \mathcal{S}^d \mathcal{S}^s$, és hogy általánosabban is, bármely két állandó együtthatókkal rendelkező differenciáloperátor felcserélhető, e két egyenletet összeadva

$$(33) \quad \mathcal{S}^s \mathcal{S}^d \hat{\sigma} = \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d \hat{\epsilon}^d + \mathcal{S}^d \mathcal{E}^s \hat{\epsilon}^s.$$

Ennek a tenzoregyenletnek a $(\quad)_{rr}$ komponensére azt találjuk, hogy

$$(34) \quad \mathcal{S}^s \mathcal{S}^d \hat{\sigma}_{rr} = \frac{1}{3} \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d (2\hat{\epsilon}_{rr} - \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{3} \mathcal{S}^d \mathcal{E}^s (\hat{\epsilon}_{rr} + \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}).$$

Következő lépésként, (25)-ről leolvashatjuk, hogy

$$(35) \quad \hat{\epsilon}_{rr} = (r\hat{\epsilon}_{\varphi\varphi})',$$

ami egy roppant speciális tulajdonság, mely hengerszimmetriánk ajándéka. Ezzel (31)-ből az

$$(36) \quad \mathcal{S}^d \hat{\sigma}_{rr}' = -\mathcal{E}^d [(r\hat{\epsilon}_{\varphi\varphi})' - \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}]/r = -\mathcal{E}^d \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}'$$

egyenletre juthatunk, (34)-ből pedig az

$$(37) \quad \mathcal{S}^s \mathcal{S}^d \hat{\sigma}_{rr} = \mathcal{D}_1 \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi} + \mathcal{D}_2 r \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}'$$

összefüggésre, ahol bevezetésre kerültek a

$$(38) \quad \mathcal{D}_1 = \frac{1}{3} (2\mathcal{S}^d \mathcal{E}^s + \mathcal{S}^s \mathcal{E}^d), \quad \mathcal{D}_2 = \frac{1}{3} (\mathcal{S}^d \mathcal{E}^s + 2\mathcal{S}^s \mathcal{E}^d)$$

hasznos jelölések. Hattatva $\mathcal{E}^d \partial_r$ -t (37)-re, adódik

$$(39) \quad \mathcal{E}^d \mathcal{S}^s \mathcal{S}^d \hat{\sigma}_{rr}' = (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) \mathcal{E}^d \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}' + \mathcal{D}_2 \mathcal{E}^d r \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}'',$$

ahol ismét kihasználtuk, hogy mindezek a differenciáloperátorok felcserélhetőek egymással. Itt $\mathcal{E}^d \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}'$ helyébe $-\mathcal{S}^d \hat{\sigma}_{rr}'$ -t helyettesíthetünk [v.ö. (36)], amelynek eredménye:

$$(40) \quad \mathcal{E}^d \mathcal{S}^s \mathcal{S}^d \hat{\sigma}_{rr}' = -(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) \mathcal{S}^d \hat{\sigma}_{rr}' - \mathcal{D}_2 \mathcal{S}^d r \hat{\sigma}_{rr}'',$$

és ez volt a célunk: egy olyan egyenlet, mely kizárólag $\hat{\sigma}_{rr}$ -t tartalmazza. Ez a (40) egyenlet a következő egyszerű alakra rendezhető át:

$$(41) \quad \mathcal{S}^d \mathcal{D}_2 (3\hat{\sigma}_{rr}' + r \hat{\sigma}_{rr}'') = 0.$$

Tekintsük ezt az egyenletet mint egy időbeli differenciálegyenletet, mely a $3\hat{\sigma}_{rr}' + r\hat{\sigma}_{rr}''$ függvényre vonatkozik. Definíciójából kifolyólag $\hat{\sigma}_{rr}(t, r)$ minden $t < t_1$ időpillanatban nulla [ld. (23)]. Ezért azokban az időkből $3\hat{\sigma}_{rr}' + r\hat{\sigma}_{rr}''$ szintén nulla, és tetszőleges rendű időderiváltjai, $\partial_t^j(3\hat{\sigma}_{rr}' + r\hat{\sigma}_{rr}'')$ -k szintén nullák. Így mindazon t_0 -kori kezdeti feltételek nullák, melyek ahhoz szükségesek, hogy egyértelműen rögzítsék (41) egy megoldását — azaz az összes, $\mathcal{S}^d\mathcal{D}_2$ rendjénél alacsonyabb rendű időderivált. Ebből következőleg az egész megoldás mint az idő függvénye azonosan nulla kell legyen (hiszen az azonosan nulla megoldás egy ilyen megoldás, és ez a megoldás egyértelmű). Azt kaptuk tehát, hogy

$$(42) \quad 3\hat{\sigma}_{rr}' + r\hat{\sigma}_{rr}'' = 0.$$

Ennek az egyenletnek, mint differenciálegyenletnek az r változóban, az általános megoldása

$$(43) \quad \hat{\sigma}_{rr}(t, r) = \frac{A(t)}{r^2} + B(t).$$

Az $A(t)$, $B(t)$ ismeretlen függvények a (29) peremfeltételekkel állapíthatók meg: egyikük, az $r \rightarrow \infty$ viselkedés $B(t) = 0$ -t követeli meg, másikuk, az $r = R$ -nél előírt időfüggés pedig ezek után arra vezet, hogy $A(t) = \hat{q}(t)R^2$, vagyis végeredményben

$$(44) \quad \hat{\sigma}_{rr}(t, r) = \hat{q}(t) \frac{R^2}{r^2}.$$

(44)-ből elindulva meghatározhatjuk az összes többi ismeretlen mennyiséget. Először is, (28) lehetővé teszi, hogy megkapjuk $\sigma_{\varphi\varphi}$ -t:

$$(45) \quad \hat{\sigma}_{\varphi\varphi} = \hat{\sigma}_{rr} + r\hat{\sigma}_{rr}' = -\hat{q}(t) \frac{R^2}{r^2} = -\hat{\sigma}_{rr}.$$

Következő lépésként, ahhoz hasonlóan, ahogy (33)-at kaptuk (26)–(27)-ből, levezethetjük azt is, hogy

$$(46) \quad \mathcal{E}^s \mathcal{S}^d \hat{\sigma}^d + \mathcal{E}^d \mathcal{S}^s \hat{\sigma}^s = \mathcal{E}^s \mathcal{E}^d \hat{\epsilon},$$

melynek $(\)_{zz}$ komponense

$$(47) \quad \mathcal{E}^s \mathcal{S}^d \frac{1}{3} (2\hat{\sigma}_{zz} - \hat{\sigma}_{rr} - \hat{\sigma}_{\varphi\varphi}) + \mathcal{E}^d \mathcal{S}^s \frac{1}{3} (\hat{\sigma}_{rr} + \hat{\sigma}_{\varphi\varphi} + \hat{\sigma}_{zz}) = 0,$$

hiszen (25) alapján $\hat{\epsilon}_{zz} = 0$. (45)-ből leszűrve, hogy $\hat{\sigma}_{rr} + \hat{\sigma}_{\varphi\varphi} = 0$ -t, (47) arra egyszerűsödik, hogy

$$(48) \quad \mathcal{D}_1 \hat{\sigma}_{zz} = 0.$$

Ez ismét egy időbeli differenciálegyenlet. Hasonlóan $3\hat{\sigma}_{rr}' + r\hat{\sigma}_{rr}''$ -höz, $\hat{\sigma}_{zz}$ -nek szintén „nulla múltja van” (azaz a t_1 előtti időkből azonosan nulla értéket vesz föl). Emiatt a

$3\hat{\sigma}_{rr}' + r\hat{\sigma}_{rr}''$ kifejezéshez használthoz hasonló érveléssel mutathatjuk meg, hogy (48) teljes megoldása nulla:

$$(49) \quad \hat{\sigma}_{zz} = 0.$$

Ennélfogva kiderül, hogy $\hat{\sigma}^s = \mathbf{0}$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^d$. Ez (27)-et

$$(50) \quad \mathcal{E}^s \hat{\epsilon}^s = \mathbf{0}$$

-ra egyszerűsíti. Minthogy $\hat{\epsilon}^s$ -nek szintén nulla múltja van, ezért szintén minden időre nulla kell legyen:

$$(51) \quad \hat{\epsilon}^s = \mathbf{0}, \quad \implies \quad \hat{\epsilon}_{rr} + \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi} = 0; \quad \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^d.$$

Továbbá, (26) az

$$(52) \quad \mathcal{S}^d \hat{\sigma} = \mathcal{E}^d \hat{\epsilon}$$

egyenletre egyszerűsödik, melynek $(\)_{rr}$ komponense azt adja, hogy

$$(53) \quad \mathcal{E}^d \hat{\epsilon}_{rr} = (\mathcal{S}^d \hat{q}) \frac{R^2}{r^2}.$$

Ennek következményeként, ha $\hat{a}(t)$ -vel jelöljük az

$$(54) \quad \mathcal{E}^d \hat{a} = \mathcal{S}^d \hat{q}$$

ama megoldását, melynek nulla múltja van, akkor

$$(55) \quad \hat{\epsilon}_{rr} = \hat{a}(t) \frac{R^2}{r^2}.$$

Mielőtt meghatároznánk $\hat{a}(t)$ -t, vonjuk le előbb a

$$(56) \quad \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi} = -\hat{a}(t) \frac{R^2}{r^2}, \quad \hat{u}_r = -\hat{a}(t) \frac{R^2}{r}$$

következtetéseket is: $\hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}$ -t (51)-ből találjuk, $\hat{u}_r$ -t pedig $\hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}$ -ből és (25)-ből.

Most kiszámoljuk $\hat{a}$ -t, azaz megkeressük az (54) egyenlet nulla múltú megoldását. Legyen n egy rövidítés a következőkben sokszor előforduló $\mathcal{E}^d$ -re, mely ugyebár nem más, mint $\mathcal{E}^d$ -ben a legmagasabb időderiválás rendje [ld. (3)]. Legyenek továbbá $f_1, f_2, \dots, f_n$ az $\mathcal{E}^d f = 0$ n -edrendű differenciálegyenletnek n darab lineárisan független megoldása, melyeknek ennél fogva nem nulla a Wronski-determinánsuk:

$$(57) \quad \det\{\partial_t^j f_k\}_{k=1, \dots, n}^{j=0, \dots, n-1}(t) \neq 0.$$

Két matematikai segéderedménynek fogjuk hasznát venni a következőkben. Az egyik, hogy ha g egy olyan (elegendően sima) függvény, melyre $g(t) = 0$ minden $t \leq t_1$ -re,

akkor az $\mathcal{E}^d f = g$ egyenlet ama egyértelmű f megoldása, amely minden $t \leq t_1$ -re nulla, az

$$(58) \quad f(t) = \frac{1}{U_n^d} \sum_{i=1}^n f_i(t) (-1)^{n+i} \int_{t_0}^t g(\tilde{t}) \frac{\det\{\partial_t^j f_k\}_{k=1, \dots, n, k \neq i}^{j=0, \dots, n-2}(\tilde{t})}{\det\{\partial_t^j f_k\}_{k=1, \dots, n}^{j=0, \dots, n-1}(\tilde{t})} d\tilde{t}$$

függvény (emlékezzünk rá, hogy $t_0 < t_1$). Ezt a képletet az állandók variálásának módszerével kaphatjuk meg, de közvetlenül is ellenőrizhetjük. A másik segéderedmény az, hogy ha $g(t)$ egy állandó g_0 értéket vesz föl minden $t \geq t_2$ -re, akkor az $\mathcal{E}^d f = g$ egyenletnek az $f(t_2) = 0$, $(\partial_t f)(t_2) = 0$, $\dots$, $(\partial_t^{n-2} f)(t_2) = 0$ feltételeknek eleget tevő bármely megoldása⁴ az

$$(59) \quad f(t) = \frac{g_0}{U_0^d} + \sum_{i=1}^n \frac{f_i(t) (-1)^i}{\det\{\partial_t^j f_k\}_{k=1, \dots, n}^{j=0, \dots, n-1}(t_2)} \left[\frac{g_0}{U_0^d} \det\{\partial_t^j f_k\}_{k=1, \dots, n, k \neq i}^{j=1, \dots, n-1}(t_2) + \right. \\ \left. + (-1)^n (\partial_t^{n-1} f)(t_2) \det\{\partial_t^j f_k\}_{k=1, \dots, n, k \neq i}^{j=0, \dots, n-2}(t_2) \right]$$

alakba írható (minden $t \geq t_2$ időre). Ez a képlet szintén közvetlen módon ellenőrizhető.

Egy általános időprofilú alagútnyitás esetén [ld. (13)] (58)-at használhatjuk, ahol $f = \hat{a}$, $g = \mathcal{S}^d \hat{q}$. Egy gyors nyitás esetén viszont az integrálás elkerülhető. Induljunk ugyanis ki általános $\hat{q}$ -ból [ld. (13)], majd tartsuk t_1 -et fokozatosan t_2 -höz, és ennek megfelelően húzzuk össze $\hat{q}$ -ot úgy, hogy az alakját megtartsuk. Ekkor a (58)-beli integrál határértéke parciális integrálással és integrál-középértéktétellel meghatározható. Hogy elkerüljük a kiadódó rekurzív képletek hosszadalmas és túlonatú technikai ismertetését, az eredményt itt csak az $s^d \leq 1$ esetre közöljük, amikor is

$$(60) \quad \hat{a}(t_2) \rightarrow 0, \quad (\partial_t \hat{a})(t_2) \rightarrow 0, \quad \dots, \quad (\partial_t^{n-2} \hat{a})(t_2) \rightarrow 0,$$

továbbá

$$(61) \quad (\partial_t^{n-1} \hat{a})(t_2) \rightarrow \frac{T_1^d}{U_n^d} p_0.$$

Látható, hogy a gyors határesetben az $(n-1)$ -edik derivált ugrik, míg az alacsonyabb deriváltak (beleértve a nulladikat is) folytonosak maradnak. Így tehát *levezethettük*, hogy milyen kezdeti feltételeket generál egy általános gyors alagútnyitás a folyamat hátralevő részére, azaz a $t \geq t_2$ időkre. Az e kezdeti feltételekhez tartozó megoldás a $t \geq t_2$ időkre, (59) alapján,

$$(62) \quad \hat{a}(t) = \frac{p_0}{U_0^d} + \sum_{i=1}^n \frac{f_i(t) (-1)^i}{\det\{\partial_t^j f_k\}_{k=1, \dots, n}^{j=0, \dots, n-1}(t_2)} \left[\frac{p_0}{U_0^d} \det\{\partial_t^j f_k\}_{k=1, \dots, n, k \neq i}^{j=1, \dots, n-1}(t_2) + \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{T_1^d}{U_n^d} p_0 \det\{\partial_t^j f_k\}_{k=1, \dots, n, k \neq i}^{j=0, \dots, n-2}(t_2) \right].$$

⁴ Vegyük észre, hogy ezek a feltételek nem határozzák meg f -et egyértelműre, mert a $(\partial_t^{n-1} f)(t_2)$ érték nem lett előírva.

Megjegyzendő, hogy [ASSZONYI – SZARKA – BÉDA (2009)] (jelen kötetben) arra mutat részletesen kifejtett példát, amikor a gyors nyitás okozta változások nem az itt alkalmazott módon, hanem a konstitúciós összefüggések legmagasabb rendű időderiváltas tagjaiból kiindulva, bizonyos ésszerű feltételezéseket téve, általánosabban határozhatók meg.

4. PÉLDÁK

A részletes megoldást két esetre, a POYNTING-THOMSON- és a tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell esetére mutatjuk be, mindkettőt a gyors nyitás határesetében tekintve.

A POYNTING-THOMSON-modell esetén (54) a következő:

$$(63) \quad (U_0^d + U_1^d \partial_t) \hat{a} = (1 + T_1^d \partial_t) \hat{q}.$$

Világos módon, $n = e^d = 1$, $f_1(t) = e^{-(U_0^d/U_1^d)t}$ egy megoldása a homogén problémának, és (62) alapján

$$(64) \quad \begin{aligned} \hat{a}(t) &= \frac{p_0}{U_0^d} + \frac{e^{-(U_0^d/U_1^d)t} (-1)}{e^{-(U_0^d/U_1^d)t_2}} \left[\frac{p_0}{U_0^d} \cdot 1 + (-1) \frac{T_1^d}{U_1^d} p_0 \cdot 1 \right] = \\ &= \frac{p_0}{U_0^d} \left[1 - \frac{U_1^d - T_1^d U_0^d}{U_1^d} e^{-(U_0^d/U_1^d)(t-t_2)} \right] \end{aligned}$$

minden $t \geq t_2$ -re (megjegyezzük, hogy a nulla dimenziós determinánsok értéke a triviális 1 szám). A teljes végeredményt a hagyományos jelölésekkel adva meg [ld. (6), a $\theta = \theta_0 = 0$ értékekkel]:

$$(65) \quad \sigma_{rr} = -p_0 \left[1 - \frac{R^2}{r^2} \right], \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -p_0 \left[1 + \frac{R^2}{r^2} \right], \quad \sigma_{zz} = -p_0,$$

$$(66) \quad \varepsilon_{rr} = -\frac{p_0}{3K} + \frac{p_0}{2G} \left[1 - \frac{\eta - \tau G}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_2)} \right] \frac{R^2}{r^2},$$

$$(67) \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{p_0}{3K} - \frac{p_0}{2G} \left[1 - \frac{\eta - \tau G}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_2)} \right] \frac{R^2}{r^2}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{p_0}{3K},$$

$$(68) \quad \hat{u}_r = -\frac{p_0}{2G} \left[1 - \frac{\eta - \tau G}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_2)} \right] \frac{R^2}{r}.$$

Vegyük észre, hogy itt a valódi fizikai elmozdulás, $\hat{u}_r$ került feltüntetésre. Nem adjuk hozzá a semmi fizikai, reális jelentést nem hordozó $\bar{u}_r$ „ál-elmozdulást”. Egy alagút ún. konvergenciája (szűkülése az idő függvényében) $\hat{u}_r$ -ből határozható meg, az alagút falán vett pontok $\hat{u}_r$ -jeinek különbségeként. Ami viszont a feszültséget és a deformációt illeti, az itt felírt $\sigma = \bar{\sigma} + \hat{\sigma}$ és $\epsilon = \bar{\epsilon} + \hat{\epsilon}$ összegek az igazi fizikai mennyiségek.

Például ha le tudjuk egy alagút körül *in situ* mérni a feszültséget, az (kellően sikeres módszertannal kivitelezett mérési módszer esetén) ezt az össz-feszültséget kell adja. Egy egységnyi anyag térfogata pedig, viszonyítva a terheletlen térfogatához, szintén ebből az össz-deformációból számítható ki.⁵

A tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell esetén

$$(69) \quad f_1(t) = e^{-\frac{\eta}{\theta}(t-t_2)} s(t-t_2), \quad f_2(t) = e^{-\frac{\eta}{\theta}(t-t_2)} c(t-t_2)$$

egy lehetséges választás, ahol

$$(70) \quad s(\tilde{t}) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{2G}{\theta} - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2} \tilde{t}\right)}{\sqrt{\frac{2G}{\theta} - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2}} & \text{ha } 2G\theta \geq \eta^2, \\ \tilde{t} & \text{ha } 2G\theta = \eta^2, \\ \frac{\sinh\left(\sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}} \tilde{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}} & \text{ha } 2G\theta \leq \eta^2, \end{cases}$$

$$(71) \quad c(\tilde{t}) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{\frac{2G}{\theta} - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2} \tilde{t}\right) & \text{ha } 2G\theta \geq \eta^2, \\ 1 & \text{ha } 2G\theta = \eta^2, \\ \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}} \tilde{t}\right) & \text{ha } 2G\theta \leq \eta^2. \end{cases}$$

Ami a megoldást illeti, σ és ε_{zz} ugyanazok, mint a POYNTING-THOMSON-modellnél, viszont

$$(72) \quad \varepsilon_{rr} = -\frac{p_0}{3K} + \frac{p_0}{2G} \left\{ 1 + \left[\frac{2\tau G - \eta}{\theta} s(t-t_2) - c(t-t_2) \right] e^{-\frac{\eta}{\theta}(t-t_2)} \right\} \frac{R^2}{r^2},$$

$$(73) \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{p_0}{3K} - \frac{p_0}{2G} \left\{ 1 + \left[\frac{2\tau G - \eta}{\theta} s(t-t_2) - c(t-t_2) \right] e^{-\frac{\eta}{\theta}(t-t_2)} \right\} \frac{R^2}{r^2},$$

$$(74) \quad \hat{u}_r = -\frac{p_0}{2G} \left\{ 1 + \left[\frac{2\tau G - \eta}{\theta} s(t-t_2) - c(t-t_2) \right] e^{-\frac{\eta}{\theta}(t-t_2)} \right\} \frac{R^2}{r}.$$

A POYNTING-THOMSON-modell esetén tehát egyetlen exponenciálisan „ernyedő” időfüggés szerint tart az elrendezés a statikus rugalmasságtani végállapothoz. A tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modellnél pedig a kritikus $\eta^2/2G$ értéknél kisebb θ tehetetlenségi együttható esetén⁶ két exponenciális „ernyedés” van jelen, a kritikusnál nagyobb érték esetén viszont egy exponenciálisan csökkenő amplitúdójú oszcillálás figyelhető meg.

⁵ Azaz egy alagút körül *in situ* mért sűrűség relatív eltérése a terheletlen állapotú sűrűségtől ennek az össz-deformációnak a nyomával fejezhető ki.

⁶ Ez az ún. alulatehetetlen vagy túlcillapított eset.

5. KÖVETKEZTETÉSEK

Tetszőleges reológiai modell esetén a következő általános tulajdonságokat figyelhetjük meg. Egyrészt, az alagútnyitás nem okoz gömbi — térfogati — változásokat, csak deviatorikusakat. Ez valószínűleg a feladat geometriai szimmetriájának és a jelen kötet első tanulmánya (137) egyenletének összjátékaként magyarázható.

Ennek következménye második megfigyelésünk, mely szerint csak a deviatorikus reológia jut szerephez, a gömbi nem. Ez egy kellemes eredmény, mert így a reológia figyelembe vételéhez a teljes reológiai modell anyagi paramétereinek csak a fele játszik szerepet. Érdekes adalék ehhez az, hogy egy gömb alakú üreg nyitásakor szintén nincsenek térfogati változások és így szintén nem játszik szerepet a térfogati reológia [FÜLÖP (2009b)].

Harmadik megállapításunk az, hogy a folyamat feszültségvezérelt. A peremfeltételek és az egyensúlyi mérlegegyenlet minden pillanatban egyértelműen meghatározzák a feszültséget, a reológia pedig ennek a helyzetnek engedelmeskedik. Ez a harmadik tulajdonság valószínűleg szintén nem független az itt tekintett speciális geometriától, mert a rugalmasságtani statikában is ismeretesek olyan elrendezések, ahol a feszültségmező függ a POISSON-hányadostól, amely pedig reológiai szituációkban időfüggést kap.

Negyedjére, ha a gyors alagútnyitás határesetét akarjuk használni, a $\mathcal{E}^d$ -ben rejlő reológiai időskálák azok, melyekhez képest a nyitásnak gyorsnak kell lennie. Amikor ez nem teljesül, akkor pedig az (58) integrandusában szereplő determinánsos szorzók számottevően változnak a nyitás alatt, és ekkor az általános (58) képletet szükséges használni.

Végül megemlítenénk tapasztalatainkat azzal kapcsolatban, amikor a $\rho \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ dinamikai mozgásegyenlettel próbálunk dolgozni. Négy probléma merül fel, amikor a felmerülő parciális differenciálegyenlet-rendszert a változók szétválasztásával próbáljuk megoldani. Közülük kettő, a szükséges négyzetes integrálhatóság biztosítása, illetve a peremfeltételek időfüggő volta kezelhető. A két másik nehézség azonban alapvető akadályt jelent. Nevezetesen, amikor egyenleteinket egyedül σ_{rr} -re vezetjük vissza (hiszen a peremfeltételek ennek a mennyiségnek a nyelvén vannak megadva), a változók szétválasztása nem működik. Ha viszont mindent egyedül u_r -re vezetünk vissza, akkor nem tudjuk kiróni a peremfeltételeket. Ugyanis ha egy megoldást egy végtelen függvényrendszer bázisán fejtünk ki, az négyzetesen integrálható értelemben előállítja a megoldást, de pontonként nem — és így például az alagút $r = R$ határán nem. (Mindezekről a nehézségekről részletesen ír jelen kötet első cikke.) A $\rho \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$ egyenlet kezelése tehát egy különlegesen kifinomult eljárást igényel.

KÖSZÖNETMONDÁS

A szerzők köszönetet mondanak SZARKA ZOLTÁNNAK értékes adalékaiért és hasznos észrevételeiért, és ASSZONYI CSABÁNAK bevilágító megjegyzéseiért és alkotó javaslataiért.

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. – RICHTER, R. (1979): The Continuum Theory of Rock Mechanics, Trans. Tech., Clausthal.
- ASSZONYI, CS. – SZARKA, Z. – BÉDA, GY. (2009): Körszelvényű földalatti folyosók körül kialakuló mechanikai mezők, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 ISRM Konferencia. In: ASSZONYI, CS. (szerk.), Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **9**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)
- ASSZONYI, CS. – VÁN, P. – SZARKA, Z. (2007): Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **5**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- CRISTESCU, N. D. (1993): Rock Rheology, Comprehensive Rock Engineering, V1. Fundamentals, Hudson, J. A. and Brown, E. T., Pergamon Press, Oxford-etc., 523–544.
- FÜLÖP, T. (2008): Kontinuumok kinematikájának új értelmezése, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- FÜLÖP, T. (2009a): Rugalmasságtani és reológiai lineáris feladatok, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 ISRM Konferencia. In: ASSZONYI, CS. (szerk.), Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **9**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)
- FÜLÖP, T. (2009b): Hidrosztatikus környezetben létrejött gömb alakú üreg körüli reológiai időfüggés, Montavid Termodinamikai Kutatócsoport kutatási jelentés.
- LADANYI, B. (1993): Time-dependent response of rock around tunnels, Comprehensive Rock Engineering, V2. Analysis and Design Methods, Hudson, J. A. and Brown, E. T., Pergamon Press, Oxford-etc., 77–112.

- MATOLCSI, T. (1993): Spacetime without reference frames, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- PANET, M. (1993): Understanding deformations in tunnels, *Comprehensive Rock Engineering*, V1. Fundamentals, Hudson, J. A. and Brown, E. T., *Pergamon Press, Oxford-etc.*, 663–690.
- VÁN, P. (2004): Weakly nonlocal continuum theories of granular media: restrictions from the Second Law, *International Journal of Solids and Structures*, 2004, 41/21, 5921–5927.
- VÁN, P. (2008a): Anyagi sokaságok a nemrelativisztikus téridőben, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia*. In: FÜLÖP, T. (szerk.), *Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8, Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- VÁN, P. (2008): Objective time derivatives in nonequilibrium thermodynamics, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **57** (2008) 127–131.
- VÁN, P. (2009): Weakly nonlocal non-equilibrium thermodynamics – variational principles and Second Law, in *Applied Wave Mathematics (Selected Topics in Solids, Fluids, and Mathematical Methods)*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009, ed. Ewald Quak and Tarmo Soomere, ch.III, pp 153–186.
- VÁN, P. – ASSZONYI, Cs. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye. II. Az általános törvényszerűségek levezetése. In: ASSZONYI, Cs. (szerk.), *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 3, Műegyetemi Kiadó*, Budapest, pp. 25–88.
- VÁN, P. – SZARKA, Z. (2006): Rock rheology – time dependence of dilatation and stress around a tunnel, *EUROROCK 2006 – Multiphysics Coupling and Long Term Behavior in Rock Mechanics*, Liège, Belgium, 9–12 May 2006, *Proceedings of the International Symposium of the International Society for Rock Mechanics*, 357–363.
- VÁN, P. – ASSZONYI, Cs. (2008): Izotrop kontinuumok anyagtörvényei és speciális esetei, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia*. In: ASSZONYI, Cs. (szerk.), *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6, Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

KÖRSZELVÉNYŰ FÖLDALATTI FOLYOSÓK KÖRÜL KIALAKULÓ MECHANIKAI MEZŐK

Asszonyi Csaba

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Szarka Zoltán

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Béda Gyula

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM, MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A cikk általános, térbeli orientációjú primér mezőben kihajtott körszelvényű folyosó esetét vizsgálja. A feladat megoldásának jelentősége nem csak az alagút- vagy vágathajtás szempontjából van, hanem mert a primer feszültségmező in situ mérésekkel történő meghatározásához is megadja az alapvető összefüggéseket.

Az előadás azt is illusztrálja, hogy egy kontinuummechanikai feladat tisztán rugalmasságtani megoldásából hogyan állítható elő a reológiai megoldás.

1. FEJEZET

ÁLTALÁNOS MEGFONTOLÁSOK

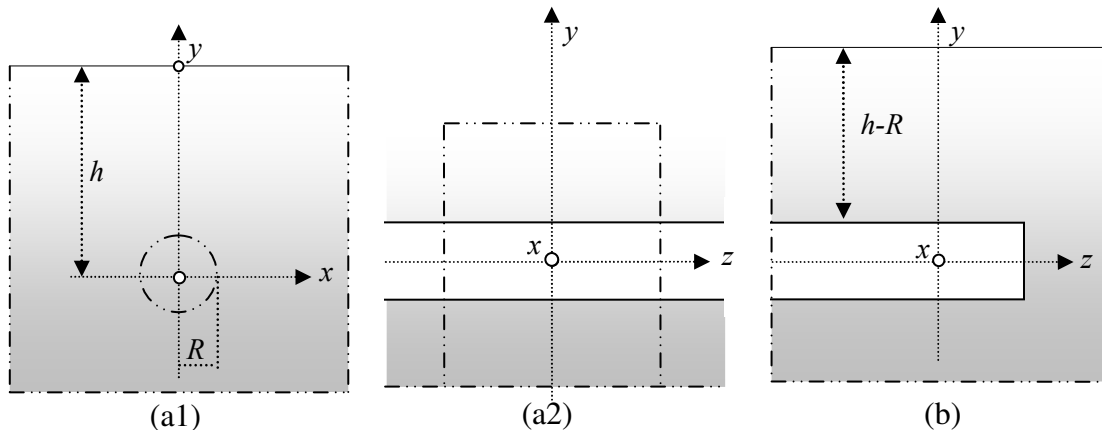
Körszelvényű földalatti folyosók (alagutak, vágatok, stb.) vizsgálata kulcsfontosságú, annak ellenére, hogy ez a legegyszerűbb zártszelvény, ui. ennek megoldása ismeretében a feladat általánosabb esetben is megoldható.

A feladat legáltalánosabb megfogalmazása a következő:

- (1) *„Általános orientációjú, térbeli feszültségeloszlású primér mezőben létesített, tetszőleges tengelyirányú és tetszőleges zárt szelvényű folyosó körül kialakuló mechanikai mező matematikai meghatározása, általános anizotrop kontinuumnak tekinthető (diszkontinuitásokkal szabdalts) reológiai kőzetkontinuumban.”*

Ez a megközelítésünk természetesen általánossága ellenére korlátozza a lehetséges anyagmodelleket. Így eltekint a kőzettömeg károsodásától és tönkrementelétől is. Ezeknek a hatásoknak a figyelembe vétele az itt megadott anyagmodellek általánosítását igénylik. A tönkrementelt termodinamikai elméletünkhöz hasonlóan egy belső változós termodinamikai keretek között lehet modellezi [VÁN (2001), VÁN–VÁSÁRHELYI, (2001)]. Természetesen a viszonyok nem egyszerűek, hiszen a kőzettest maga is felfogható károsodott kőzetnek [VÁN–VÁSÁRHELYI, 2001], illetve reológiai anyagmodellek közvetlenül is kapcsolatba hozhatóak a károsodással. (lásd pl. [VÁSÁRHELYI et al. (2000)]).

Az egyenes tengelyű, körszelvényű vágat körüli mechanikai mező meghatározásának problémáját két különböző részre lehet osztani, amelyek külön-külön vizsgálhatók:



1. ábra

- (a) a vágattengelyre merőleges keresztmetszetben, síkalakváltozási állapot feltételezésével, és
- (b) a vágattengely síkjában (1. ábra).

Ebben a tanulmányunkban vizsgálatainkat az 1. ábra (a) esetre korlátozzuk, s a konkrét megoldás helyett csupán felvillantjuk a (b) eset néhány sajátosságát.

Az irodalomban az (1) feladat megoldására már eddig is számtalan *analitikai* rész-megoldás született. Ezek mindegyikének sajátja, hogy

1. Az üreg kiterjedését a vizsgált szelvénytől mindkét irányban *végtelennek* tekintik, hogy a feladatot síkbeli esetre (ún. *síkalakváltozási* állapotra) vezessék vissza. Emiatt azonban kénytelenek figyelmen kívül hagyni az üregnyitás során a homlok (vájvég) előrehaladásának hatását a mechanikai mezőre.

2. Feltételezik, hogy az üreg közvetlen környezetének feszültség-, alakváltozás- és mozgásmezejének vizsgálatánál megengedhető, hogy a *primér* – üregnyitás előtti – állapotot *homogén feszültségeloszlásúnak* tartsák. Ez azt jelenti, hogy a primér feszültségek értékét az üreg szelvényének középpontjában uralkodó primér feszültségértékkel

veszik egyezőnek. Ezért általában a külszínt nem veszik figyelembe, azaz a végtelen félteret teljes térrel helyettesítik.

3. A végtelen félteret kitöltő közettömeget *homogénnek, izotropnak* tekintik.

4. A megoldás matematikai meghatározásánál az impulzusmérleg általános dinamikai $[\partial_i \sigma_{ij} = \rho \dot{v}_j - \rho g_j]$ összefüggése helyett az önsúly nélküli $[\rho g_j = 0]$ *statikai egyensúly* esetére $[\partial_i \sigma_{ij} = 0]$ korlátozzák a vizsgálatokat.

Ezeket a feltevéseket első közelítésben - kiindulásként - mi is elfogadjuk.

FÜLÖP TAMÁS ÉS BÉDA GYULA előző tanulmányában a feladatot *hidrosztatikus primér mezőben* kihajtott vágat esetére oldotta meg, tetszőleges homogén lineáris reológiai anyagtörvény és tetszőleges üregnyitási idő karakterisztika esetére.

Tekintettel arra, hogy a *homogén és hidrosztatikus primér mezőről* a homogén, általános orientációjú primér mezőre történő áttérés csupán két egyszerű transzformációt igényel, s a megoldás továbbra is zárt alakban marad [ASSZONYI (1973)], ezért a következőkben ezt az esetet tárgyaljuk.

Az általunk vizsgált feladat tehát a következő:

- (2) „Általános orientációjú, térbeli feszültségeloszlású homogén, primér mezőben létesített, tetszőleges tengelyirányú körszelvényű folyosó körül kialakuló mechanikai mező matematikai meghatározása általános homogén lineáris izotrop kontinuumban.”

A probléma (2) szerinti megfogalmazása nagyon speciálisnak és korlátozottnak tűnik az (1)-hez képest, azonban ez csak látszat.

Tanulmányunkban az alapul vett feltételek a megoldás egyszerűsítését és zárt alakban¹ történő meghatározását szolgálják. Azonban

- a *homogén primér mezőről* az önsúlyosra, illetve a geológiai és tektonikai erőhatások eredményeként kialakult általánosra való áttérés zárt alakú megoldást már nem tesz lehetővé, s valamilyen alkalmas közelítő módszer (pl. véges elemek (FEM) vagy véges differenciák módszere (FDM)) alkalmazását kívánja meg,
- a *kör szelvényről* adott más zárt szelvényre történő áttérés alkalmas transzformációval mindig megoldható. Ezt azonban csak az ellipszis szelvénynél alkalmazzák, mert a többi esetben végtelen sorokkal kell dolgozni, ezért inkább a FEM-mel dolgoznak.

[ASSZONYI-BÉDA-SZARKA (2009)] e kötetbeli előző cikkéből látszik, hogy abban az esetben ha a feladatot a *lineárisan rugalmas – nem reológiai – anyag* feltételezésével

¹ Ami az analitikai elemzést teszi lehetővé.

oldjuk meg, akkor az általános reológiai közegre történő áttérés szintén megoldható alkalmas operátor-transzformációval [ASSZONYI (2007)], s ez a zárt alakú megoldást a

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d \\ \boldsymbol{\sigma}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o, \end{cases}$$

átmenet alapján állítja elő, ahol, mint már láttuk

$$(3) \quad \left\{ 2\tilde{G} := 2G \frac{\left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}{\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)}, \quad 3\tilde{K} := 3K \frac{\left(1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}{\left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right)} \right\}.$$

Nem fogjuk tárgyalni a következőkben az anizotrop közegben történő alagútépítés esetét, bár nem lenne akadály, mert nem kívánjuk a már amúgy is bonyolult összefüggéseket még bonyolultabbá tenni. Az *izotropiáról* anizotropiára történő áttérés ugyanis a két skaláris operátorfüggvény helyett több vezetési függvény bevezetését teszi szükségessé (általános esetben az $\mathbf{L}$ negyedrendű impulzus-vezetési tenzor 21 független skalár, transzverzálisan izotrop esetben 5 skalár, ortotrop esetben: 9 skalár, stb. komponenssel, vezetési függvénnyel jellemezhető).

Ez azt jelenti, hogy általános – nem izotrop – esetben az anyagtörvény az

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \mathbf{L}^d \boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^o = \mathbf{L}^o \boldsymbol{\varepsilon}^o$$

összefüggéssel írható le, ahol $\mathbf{L}^d$ és $\mathbf{L}^o$ negyedrendű tenzorok az $\mathbf{L}$ tenzor deviatorikus és gömbi felbontása, és

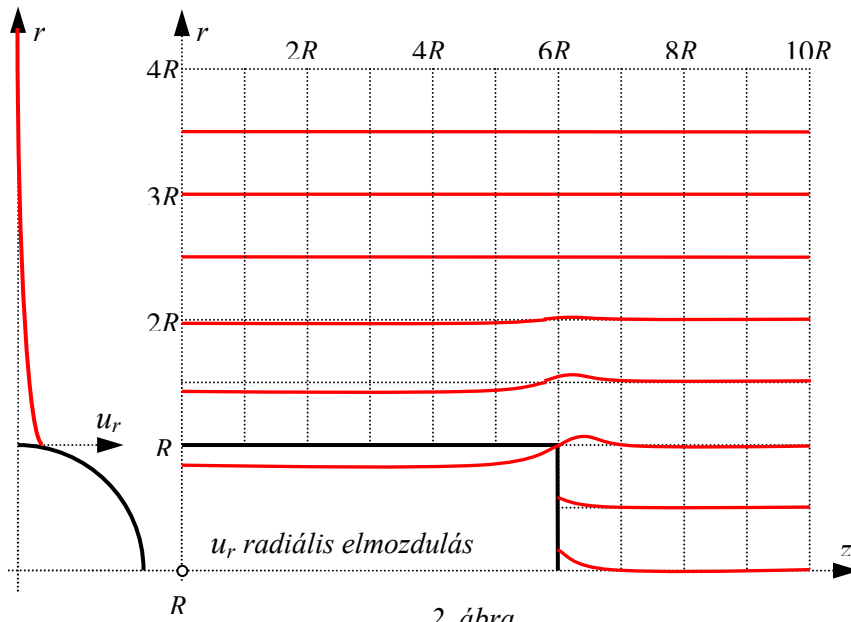
- izotrop anyagok esetén az anyagtörvényben az $\mathbf{L}^d$ és $\mathbf{L}^o$ negyedrendű tenzorok $L^d = 2\tilde{G}$ és $L^o = 3\tilde{K}$ skalár függvényekkel helyettesíthetők, viszont
- anizotrop esetekben már a két $\mathbf{L}^d$ és $\mathbf{L}^o$ tenzorral kell dolgozni, amelyeknek együttesen és összesen választott modelltypustól függően 5, 9, ..., 21 független skalár komponense (vezetési függvénye, anyagoperátora) van.

A VÁJVÉGHATÁS. Mivel cikkünknek nem tárgya, ezért a folyosó tengelyirányában most nem végzünk vizsgálatokat (*l.b. ábra*), s nem elemezzük a homlok előrehaladásának hatását a mechanikai mezőre.

Az egyszerűség kedvéért szimmetrikus hidrosztatikai primér mezőben kihajtott vágatot modelleztünk, végeselemes² programmal, a legegyszerűbb lineárisan rugalmas anyagtulajdonsággal. Ebből csupán egyetlen összefüggést mutatunk be (*2. ábra*) illusztrációként. A rendszerben az egyetlen távolság dimenziójú paraméter az R sugár, így a távolságjellegű hatások a vájvég környezetében nem függenek a rugalmasságtani együtthatók nagyságától (valószínűleg arányuktól sem, mert a két szélen sem).

² A számításokat NASZTANOVICS FERENC doktorandusz végezte a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Tartószerkezetek Mechanikája Tanszékén.

Úgy érezzük, hogy a zavaró hatás gyorsan lecseng, így a homloktól 2-3 R sugárnyi távolságon túlra, illetve a szelvény-kontúrtól vett 2-3 R -en túl már nem terjed.



2. ábra

Ebben a részben elmondottak indokolják összességükben a feladat (2) alattira történő szűkítését.

A következőkben – mielőtt hozzáfognánk a feladat megoldásához – előbb még áttekintjük a primer mezőt és az üregnyitás időkaraktisztikáját.

2. FEJEZET

A PRIMER ÁLLAPOT

Az üregnyitás előtt a földkéregben uralkodó feszültségmezőt (az ún. ösfeszültségi állapotot) nevezzük $[\sigma^{primer} := \sigma^p(\mathbf{r})]$ *primer feszültségállapotnak*, az üregnyitás hatására megváltozott feszültségállapotot pedig $[\sigma^{szekunder} := \sigma(\mathbf{r}, t)]$ *szekunder feszültségmezőnek*. A kettő közötti különbséget *kiegészítő feszültségmezőnek* $[\sigma^{kiegészítő} := \hat{\sigma}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r}, t) - \sigma^p(\mathbf{r})]$ hívjuk. Ha a vágat (vagy folyosó) kerületén biztosítószerkezetet építünk be, akkor a biztosítás hatására kialakuló feszültségállapot pedig az ún. *tercier feszültségmező* $[\sigma^{tercier} = \sigma^t(\mathbf{r}, t)]$, amely már magába foglalja az előzőket is. A terciér és primer állapotok különbségét $\sigma^{üregnyitási} := \hat{\hat{\sigma}}(\mathbf{r}, t)$ *üregnyitási feszültségmezőnek* nevezünk, a terciér és szekunder különbségét pedig $\sigma^{biztosítási} := \hat{\hat{\hat{\sigma}}}(\mathbf{r}, t)$ *biztosítási feszültségmezőnek*:

$$\sigma^p(\mathbf{r}),$$

$$\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma^p(\mathbf{r}) + \hat{\sigma}(\mathbf{r}, t),$$

$$\sigma^t(\mathbf{r}, t) = \sigma^p(\mathbf{r}) + \hat{\hat{\sigma}}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r}, t) + \hat{\hat{\hat{\sigma}}}(\mathbf{r}, t).$$

A primer állapot az üregnyitási feladatnál, mint kerületi feltétel jelentkezik. A primer feszültségállapotot az *időtől függetlennek tekintjük*, ui. már évmilliók álltak rendelkezésre a szükséges relaxációk lejátszódására. Ha nem jelentkeznek földrengések az üregnyitás közelében és időszakában, akkor nincs indok a primer feszültségek időbeli változásának feltételezésére. Tehát

$$(4) \quad \sigma^{primer}(\mathbf{r}, t) = \sigma^P(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} p_x(\mathbf{r}) & t_{xy}(\mathbf{r}) & t_{xz}(\mathbf{r}) \\ t_{yx}(\mathbf{r}) & p_y(\mathbf{r}) & t_{yz}(\mathbf{r}) \\ t_{zx}(\mathbf{r}) & t_{zy}(\mathbf{r}) & p_z(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad \sigma^P = (\sigma^P)^T, \quad \Rightarrow [t_{ij} = t_{ji}],$$

vagyis a feszültségek csupán a hely függvényei.

A PRIMER ÁLLAPOT FELFOGÁSAI. Az irodalomban a legkorábbi módszer a zavartalan településű földkéreg önsúlyos állapotából indult ki. Anyagi önsúlyos, izotrop féltér egyensúlyi állapotát kifejező differenciálegyenletből (impulzusmérlegből, vagy más néven impulzus-megmaradási tételből) következik, hogy ha szintes irányban változatlanságot tételezünk fel, akkor a féltér függőleges normálisú felületelemeinek primer feszültségállapotát a

$$\sigma_y^{primer} = \rho g y$$

önsúly határozza meg, ahol y a külszíntől számított mélység, ρg pedig a takarórétegek átlagos térfogatsúlya. Ez kifejezésre juttatja, hogy szintes irányú változatlanság esetén egy y mélységben elképzelt szintes felületelem a föltte elhelyezkedő közetoszlop önsúlyával terhelt.

Teljesen „szabályos” esetben, ha a földkéreg anyagi pontjai vízszintes irányban mozgást nem szenvedtek, tehát a mai primer mező kialakulása során az anyagi pontok csak függőlegesen mozogtak, a kőzetek így tömörödtek, akkor

$$\varepsilon_{v\acute{e}szint es} = \varepsilon_x = \varepsilon_z = 0.$$

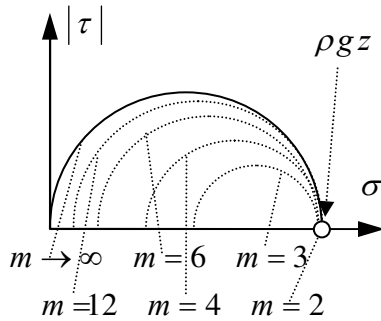
Mivel az anyagviselkedés aszimptotikus alakja a HOOKE-törvény, vagyis a földkéreg kialakulásától már eltelt annyi idő, hogy a deformációk lejátszódjanak, az anyagi féltér szintes normálisú felületelemeinek primer feszültsége:

$$\sigma_x^{primer} = \sigma_z^{primer} = \frac{\rho g}{m-1} y = \rho g \frac{\nu}{\nu-1} y,$$

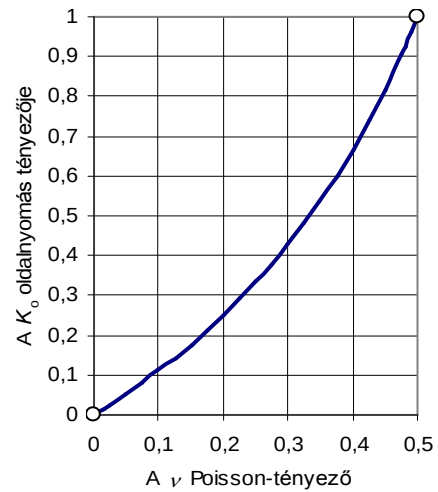
ahol m a POISSON-szám, s ν ennek reciproka a POISSON-tényező.

Ekkor a függőleges irány és minden vízszintes irány főirány. Konszolidált esetben – mikor nincsenek tranziens változások – az m értéke a $2 \dots \infty$ (ill. ν értéke a $0 \dots 0,5$) értéktartományban változhat, így a főfeszültségek mind nyomófeszültségek, továbbá a függőleges főfeszültség a nagyobb:

$$\rho g y \geq \frac{\rho g}{m-1} y.$$



2. ábra



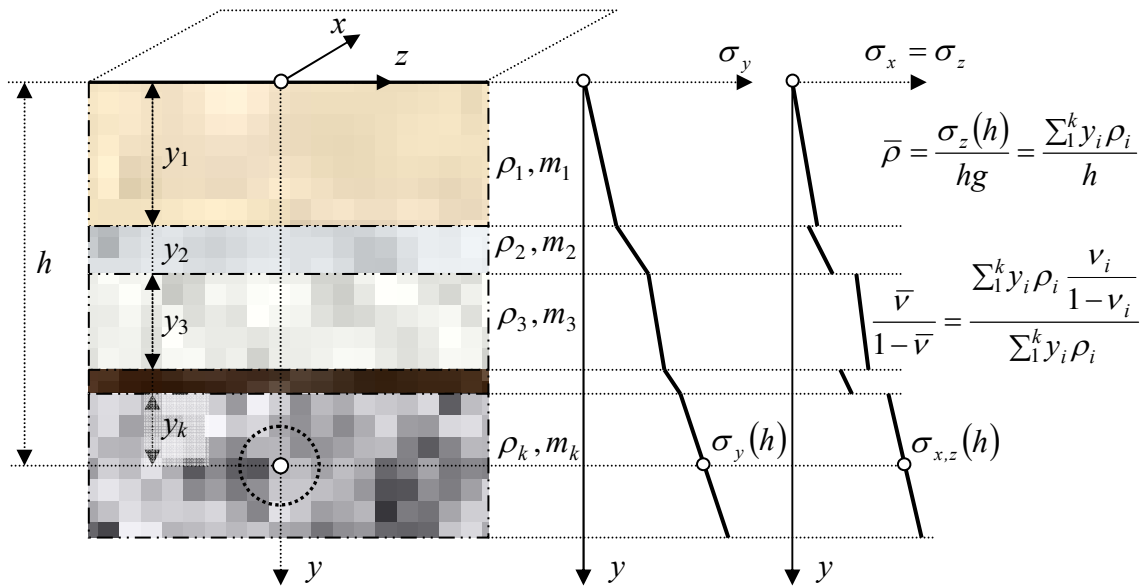
3. ábra

A 2. ábra ezt a szituációt MOHR-körökkel ábrázolja. Ennek megfelelően a TERZAGHI és RICHART által bevezetett „oldalnyomási tényező”:

$$K_o = \frac{\sigma_{x,z}^{primer}}{\sigma_y^{primer}} = \frac{1}{m-1} = \frac{\nu}{1-\nu},$$

amelynek változása a 3. ábrán látható.

A 4. ábra a különböző – változó sűrűségű – anyagrétegek esetén mutatja be – ezen feltételezésnél – a primer főfeszültségek változását.



$$\sigma_z(h) = \sum_1^k y_i \rho_i g = h \bar{\rho} g, \quad \sigma_x(h) = \sigma_y(h) = \sum_1^k y_i \rho_i \frac{\nu_i}{1-\nu_i} g = \sigma_z(h) \frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}, \quad \text{ahol } h = \sum_1^k y_i,$$

4. ábra

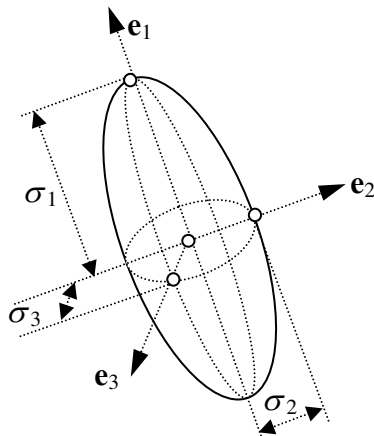
Ebben az összefüggésben – mivel a nyugalmi földnyomás egy konszolidált állapot, s az gyakorlatilag (évmilliók) $t \rightarrow \infty$ idő alatt alakult ki, az itt szereplő m a „statikai” POISSON-szám (vagyis az $m(t)$ függvény értéke $t \rightarrow \infty$ esetén).

Ezen idealizált állapot feltételei összefoglalva:

- szintes irányokban változatlanóság (anyagban, feszültségben, geometriában),
- geológiai és tektonikai hatások hiánya,
- kizárólag függőleges mozgások a primér állapot kialakulása során.

A földkéreg ezen idealizált állapotának feltételei közül általában egyik sem áll fenn. Üledékek keletkezése során pl. a vízmozgások főirányai szerint fajsúly-, és anyagminőség változással kell számolnunk. Ez a változás módosítja a szintes síkokon jelentkező önsúlyeloszlást, megszünteti a vízszintes sík főfeszültségi jellegét. Lehetővé tesz a tömörödés során szintes irányú mozgásokat, s így a szintes síkban is fellépnek helyi rövidülések, illetve megnyúlások, tehát $\varepsilon_{\text{vízszintes}} \neq 0$.

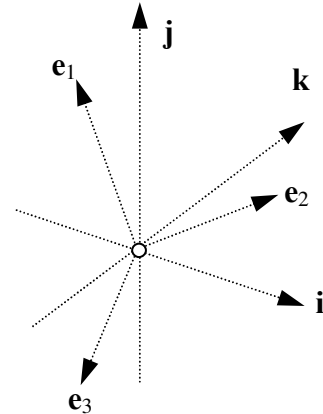
A földkéreg feszültségállapotát a legintenzívebben a geológiai erőhatások zavarták meg. Ezek hatásai szemmel látható rétegdeformációkban, anyagi tönkremenetelben, vetődésekben stb. jelennek meg.



5. ábra

Ezért általában a primér mező a tér *adott* pontjában egy általános orientációjú feszültségtenzorral jellemezhető (5. ábra), amelynek főirányai (e_1 , e_2 , e_3) általában sem a vízszintessel, sem a függőlegessel nem esnek egybe.

Így a primer feszültségállapotot csak *in situ* mérésekkel tudjuk meghatározni (ld. ASZ-



6. ábra

SZONYI és RICHTER). Ebből – az izotropia feltételezésével – a primer főirányok előállíthatók:

$$\sigma^{primér}|_{\langle x,y,z \rangle} = \begin{bmatrix} p_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & p_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & p_z \end{bmatrix}, \quad \sigma^{primér}|_{\langle 1,2,3 \rangle} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}.$$

ASSZONYI és RICHTER [1964] annak idején bevezette a k kvázi-Poisson szám fogalmát, hogy a felírás a konvencionális felfogásra emlékeztessen:

$$\boldsymbol{\sigma}^{prímér} \Big|_{\langle 1,2,3 \rangle} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{p}{k_1-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{k_2-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{k_3-1} \end{array} \right\|,$$

s ezeknek a k_i kvázi-Poisson számoknak az értéke már nem a $2 \dots \infty$ értéktartományban változhat, hanem tetszőleges lehet:

$$-\infty < k_i < +\infty.$$

Mi a következőkben a primer feszültségállapotot a teljesen általános

$$(4) \quad \boldsymbol{\sigma}^p = \left\| \begin{array}{ccc} p_x(\mathbf{r}) & t_{xy}(\mathbf{r}) & t_{xz}(\mathbf{r}) \\ t_{yx}(\mathbf{r}) & p_y(\mathbf{r}) & t_{yz}(\mathbf{r}) \\ t_{zx}(\mathbf{r}) & t_{zy}(\mathbf{r}) & p_z(\mathbf{r}) \end{array} \right\|$$

feszültségtenzorral fogjuk jellemezni, s az x , y és z egymásra merőleges irányokat a létesítendő alagúthoz kötjük oly módon, hogy a z tengely az alagút tengelyével esik egybe, az x és y pedig a tengelyre merőleges síkban – az alagút szelvényében helyezkedik el.

PRIMER ALAKVÁLTOZÁSI MEZŐ. Mivel a végtelen félteret kitöltő közetanyagot – első közelítésben – izotropnak tekintjük, és a standard modellel leírhatónak vesszük, ezért mindaddig, amíg az üregnyitással a nyugalmi állapotot meg nem zavarjuk, a HOOKE-törvény érvényes rá, azaz a primer deformációmező:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^p &= \left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_x^p(\mathbf{r}) & \frac{1}{2}\gamma_{xy}^p(\mathbf{r}) & \frac{1}{2}\gamma_{xz}^p(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx}^p(\mathbf{r}) & \varepsilon_y^p(\mathbf{r}) & \frac{1}{2}\gamma_{yz}^p(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx}^p(\mathbf{r}) & \frac{1}{2}\gamma_{zy}^p(\mathbf{r}) & \varepsilon_z^p(\mathbf{r}) \end{array} \right\| = \frac{1}{2G}\boldsymbol{\sigma}^p + \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2G}\right)\frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^p)\mathbf{I} = \\ &= \left\| \begin{array}{ccc} \frac{p_x}{2G} - \beta(p_x + p_y + p_z) & \frac{t_{xy}}{G} & \frac{t_{xz}}{G} \\ \frac{t_{yx}}{G} & \frac{p_y}{2G} - \beta(p_x + p_y + p_z) & \frac{t_{yz}}{G} \\ \frac{t_{zx}}{G} & \frac{t_{zy}}{G} & \frac{p_z}{2G} - \beta(p_x + p_y + p_z) \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{ccc} \alpha p_x - \beta(p_y + p_z) & \frac{t_{xy}}{G} & \frac{t_{xz}}{G} \\ \frac{t_{yx}}{G} & \alpha p_y - \beta(p_x + p_z) & \frac{t_{yz}}{G} \\ \frac{t_{zx}}{G} & \frac{t_{zy}}{G} & \alpha p_z - \beta(p_x + p_y) \end{array} \right\|, \end{aligned}$$

ahol

$$\alpha := \frac{G + 3K}{9GK}, \quad \beta := \frac{3K - 2G}{18GK}.$$

Ez a kép azt mutatja, hogy miközben a primér feszültségmező kialakult, az anyagi tér – az elmúlt időszak során – milyen deformáltsági állapotba került. Mélni nem tudjuk, ezért gyakorlatilag eltekintünk tőle.

PRIMER ELMOZDULÁSMEZŐ. Formálisan a deformációmező integrálásával felírható. Értelme azonban nincs, mert üregnyitás hatására a primer feszültségekhez tartozó elmozdulások – mivel már lejátszódtak, – ezért már nem jelentkeznek.

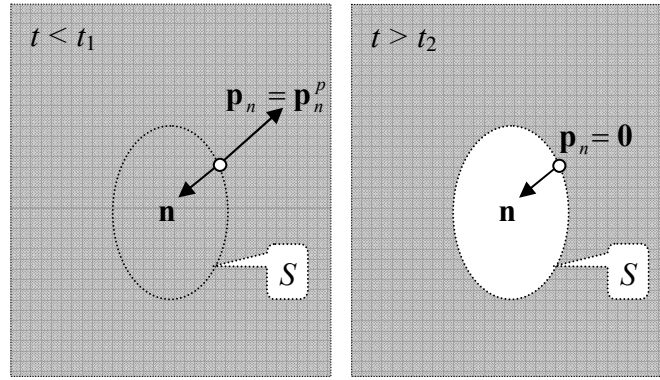
3. FEJEZET

AZ ÜREGNYITÁS IDŐTARTAMÁNAK HATÁSA

Az eddigi analitikai vizsgálatoknál az alagút létesítésének időtartamával nem tudtak mit kezdeni. Ennek számos oka van:

- Mindaddig, míg a kérdést szigorúan a rugalmasságtan statikai feladatként kezelték, tehát nem vették figyelembe, hogy minden anyag „reológiai”, nem is jelentkező problémaként, ui. a feszültségváltozás és a hatására kialakuló deformálódás egyidejű volt. Ekkor az időtartamnak nem lehetett szerepe. Addig is gyanús lehetett a dolog, mert a bányászok és alagútépítők tudták, hogy milyen fontos, hogy milyen gyors a kihajtás, milyen gyorsan kerül be az ideiglenes, majd végleges biztosítás, mert a deformációk és mozgások időben eltolva jelentkeznek, és ezen emberek sorsa, a létesítmény épsége múlik. Azonban a „nem-reológiai” számítások erről semmit sem tudtak mondani, csupán a gyakorlati tapasztalatokat – méretezések nélkül – beépítették a technológiai utasításokba.
- Amikor megjelentek a korszerű reológiai alapokon nyugvó vizsgálatok, akkor azért tekintettek el az üregnyitás időtartamának figyelembe vételétől, mivel nem hitték, hogy kezelni tudják a kérdést, ugyanis az üreg felülete kerületi feltételként szerepel, s az időtől függő kerületi feltételt a kontinuummechanikában még eddig nem kezelték. Emiatt minden szerző úgy tekintette, hogy az üregnyitás „végtelen” gyorsan, „egyik pillanatról a másikra” megtörténik, s a reológiai vizsgálatok már csak ezután kezdődtek. Az időbeli fejlődés egy részét elhagyták, s az idő $t = 0$ kezdetét az üregnyitás elkészültének „időpontjára” tették.

A korrekt megoldás megkeresését FÜLÖP TAMÁS vetette fel és ez a [FÜLÖP–BÉDA (2009)] tanulmányban került leközlésre. Ennek fontosabb gondolatait a következőkben összefoglaljuk, s így az is megállapítható lesz, hogy a különböző egyszerűsítő feltevések mikor, milyen reológiai időskálák esetén engedhetők meg.



7. ábra

Vizsgálatainknál az alagútnyitást úgy fogalmazzuk meg (7. ábra), hogy a szelvény kontúrján ébredő

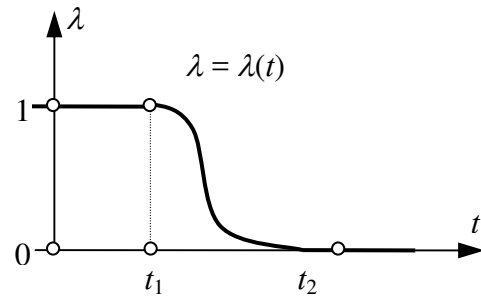
$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}|_S = \begin{pmatrix} \sigma_n^S(t) \\ \tau_{nm}^S(t) \\ \tau_{nz}^S(t) \end{pmatrix} := \mathbf{p}_n \text{ feszültségvektor}$$

- az üregnyitás kezdő időpontját jellemző t_1 időpillanatban még az eredeti primér feszültségvektorral egyezik meg, majd

- egy későbbi t_2 időpontra pedig értéke nullára csökken. Ennek a változásnak a részleteit nem szükséges konkretizálni. Csak annyit követelünk meg, hogy a változás az idő függvényében elegendően simán történjen, vagyis az összes szükséges időderivált létezzen és folytonos legyen.

Különösen az a már említett határeset érdekel bennünket, amikor a nyitás időprofiljának alakját megtartva a t_1 -et fokozatosan t_2 -höz tartatjuk, így megvalósítva a „végtelen gyors” üregnyitást.

Jelölje a z tengelyű, adott zárt görbével jellemzett szelvény S felületének normálisát: $\mathbf{n}$, s ekkor a kerületi feltétel az alábbiak szerint írható fel:



8. ábra

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}|_S = \begin{pmatrix} \sigma_n^S(t) \\ \tau_{nm}^S(t) \\ \tau_{nz}^S(t) \end{pmatrix}, \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{r}) \mathbf{n}|_S = \boldsymbol{\sigma}^p \mathbf{n} = \begin{pmatrix} p_n \\ t_{nm} \\ t_{nz} \end{pmatrix} := \mathbf{p}_n^p = \text{const}, \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_n^S(t) \\ \tau_{nm}^S(t) \\ \tau_{nz}^S(t) \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} p_n \\ t_{nm} \\ t_{nz} \end{pmatrix},$$

ahol

$$(5) \quad \lambda(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -\infty < t \leq t_1, \\ \text{sima}, & \text{ha } t_1 \leq t \leq t_2, \\ 0, & \text{ha } t_2 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

a $[t_1, t_2]$ intervallumon pedig olyan csökkenő és elég sima függvény, amelynek deriváltja a t_1 és t_2 helyen nulla.

Az $\lambda = \lambda(t)$ függvény változása a t_1 időpontban vízszintes érintővel indul az $\lambda = 1$ értéktől, és a t_2 időpillanatban vízszintes érintővel csatlakozik a $\lambda = 0$ értékhez (8. ábra).

A primer feszültségállapothoz tartozó primer deformációállapot:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{r})\mathbf{n}|_S = \boldsymbol{\varepsilon}^p\mathbf{n} = \left\| \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}_n^S \\ \frac{1}{2}\gamma_{nm}^S \\ \frac{1}{2}\gamma_{nz}^S \end{array} \right\| := \mathbf{d}_n^p = \frac{1}{2G}\boldsymbol{\sigma}^p\mathbf{n} - \frac{3K-2G}{18GK}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^p)\mathbf{n}.$$

A kezdeti feltétel úgy is megfogalmazható, hogy a kerületen a $\mathbf{p}_n|_S$ radiális feszültségvektor a $t_1 < t < t_2$ időszakban a

$$\mathbf{p}_n|_S = \left\| \begin{array}{c} \sigma_n^S(t) \\ \tau_{nm}^S(t) \\ \tau_{nz}^S(t) \end{array} \right\| = \lambda(t) \left\| \begin{array}{c} p_n \\ t_{nm} \\ t_{nz} \end{array} \right\| = \lambda(t)\mathbf{p}_n^p|_S$$

összefüggésnek megfelelően $\mathbf{p}_n^p$ -ről $\mathbf{0}$ -ra csökken.

A radiális deformációvektor azonban már nem írható fel egyszerűen, mivel abban nemcsak a $\lambda = \lambda(t)$ üregnyitási időhatás, hanem az anyagtörvény által megtestesített reológiai hatás is jelentkezik. Tehát a

$$\mathbf{d}_n|_S = \left\| \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}_n^S(t) \\ \frac{1}{2}\gamma_{nm}^S(t) \\ \frac{1}{2}\gamma_{nz}^S(t) \end{array} \right\| = \lambda(t) \left\| \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ \frac{1}{2}\gamma_{nm}^p \\ \frac{1}{2}\gamma_{nz}^p \end{array} \right\| = \lambda(t)\mathbf{d}_n^p|_S$$

összefüggés már nem áll fenn, hanem ehhez járul még a reológiai

$$\mathbf{d}_n|_S = \frac{1}{2\tilde{G}}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} - \frac{3\tilde{K}-2\tilde{G}}{18\tilde{G}\tilde{K}}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} := \left\| \begin{array}{c} d_n(t) \\ d_{nm}(t) \\ d_{nz}(t) \end{array} \right\|$$

összefüggésből adódó időfüggés is:

$$\mathbf{d}_n|_S = \left\| \begin{array}{c} \varepsilon_n^S(t) \\ \frac{1}{2}\gamma_{nm}^S(t) \\ \frac{1}{2}\gamma_{nz}^S(t) \end{array} \right\| = \lambda(t) \left\| \begin{array}{c} d_n(t) \\ d_{nm}(t) \\ d_{nz}(t) \end{array} \right\| = \lambda(t) \mathbf{d}_n(t)|_S,$$

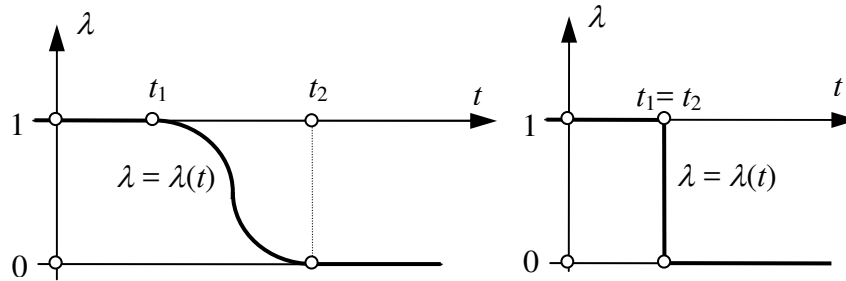
amely már nehezen kezelhető és bonyolult is.

Emiatt reológiai feladatnál általában, ha a kerületi feltétel pl. terhelésekkel adott, az nem írható át deformációkra vagy elmozdulásokra, mint azt a klasszikus rugalmasságtan statikai feladatainál megszoktuk.

A már hivatkozott [FÜLÖP–BÉDA (2009)] tanulmány hidrosztatikus esetre megállapította, hogy az üregnyitás folyamata „feszültségvezérelt”. A kerületi feltételek feszültségekkel adottak, s a határfeltételek és a statikai egyensúlyi egyenlet $[\boldsymbol{\sigma} \nabla = \mathbf{0}]$ minden időpillanatban egyértelműen meghatározzák a feszültséget, és a reológia – az időben változó deformáció – mindig ennek engedelmeskedik.

Eddig a „végtelen gyors” szekunder állapotra vonatkozó, a $t > t_2$ időtartamra kapott megoldásban a *primér feszültségmező* komponensei mindig szerepeltek. Most viszont megjelenik egy $\lambda = \lambda(t)$ függvény, amely módosíthatja az eredményt.

A hidrosztatikus primer mezőben kihajtott vágat esetére a levezetést részletesen FÜLÖP–BÉDA cikke közölte.



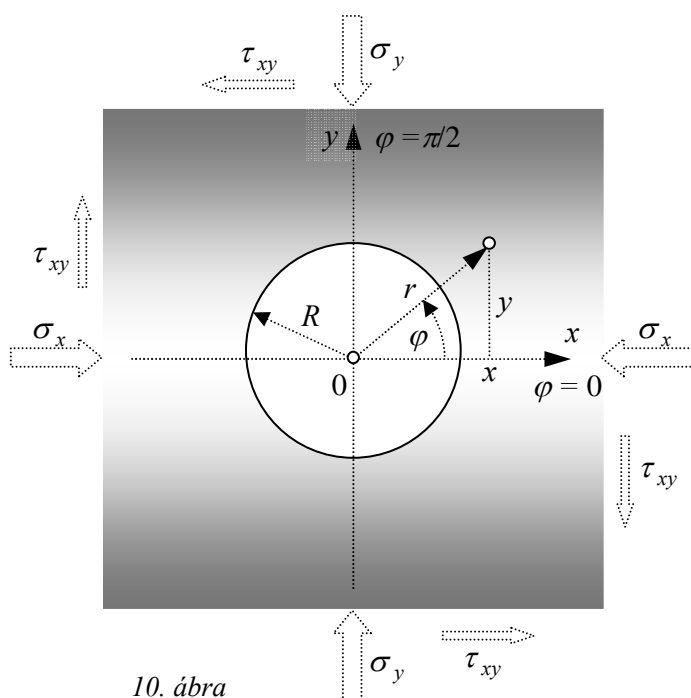
9. ábra

Bennünket a továbbiakban a mechanikai mező eloszlása a $t_2 \leq t < \infty$ időtartamra érdekel csupán, ui. csak a fizikai korrektség kívánta meg a $t \leq t_2$ levezetést, hiszen gyakorlatilag csupán a „végtelen gyors” üregnyitást $[t_1 \leftarrow t_2]$ vehetjük alapul, amelyet a 9. ábra jobboldali része tüntet fel. Valójában ez valósul meg fúrólukak fúrásánál, robbantásos jövesztésnél, vagy amikor a kontúrtól kiindulva végezzük a gépi jövesztést. Amikor a kontúr hosszabb idő múltán nyeri el végleges alakját, akkor matematikailag nem kezelhető a feladat, mert újabb változók bevezetését kívánná meg, pl. az üreg kialakításánál hogyan változik az üreg sugara. Ezért a megoldásoknál – bár felírjuk az összes lehetséges kezdeti feltételt – a mezőfüggvényeket mégis a „végtelen gyors” esetre részletezzük.

JELÖLÉSEK. Tételezzük fel, hogy a homogén, izotrop közzetömegre a végtelenben a DESCARTES-féle koordináta-rendszer tengelyeivel rendre megegyező irányú, p_x, p_y, p_z

intenzitású megoszló normál, és t_{xy}, t_{xz}, t_{yz} csúsztató terhelés hat:

$$(4) \quad \sigma_{<x,y,z>}^p = \begin{pmatrix} p_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & p_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & p_z \end{pmatrix},$$



10. ábra

Ebbe a közegbe a z tengellyel párhuzamos tengelyű, R sugarú körszelvényű vágatot (alagutat) nyitunk. A tengelyre merőleges metszet, az x és y irányú terhelésekkel a 10. ábrán látható.

A kör alakú vágatnyitás miatt célszerű hengerkoordináta-rendszert használni. Jelölje a DESCARTES-féle koordináta-rendszer

tengelyirányú egységvektorát rendre $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, a hengerkoordináta-rendszer r, φ , ill. z irányú egységvektorait pedig $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$, ill. $\mathbf{e}_z$. Ismert, hogy az x, y, z DESCARTES-féle koordináták és az r, φ, z hengerkoordináták között az

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \\ \varphi &= \arctg \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \right\}$$

összefüggések állnak fenn. Ennek következtében az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ és $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ bázisvektorok

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_r - \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{j} &= \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_r + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{k} &= \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\}$$

módon fejezhetők ki egymással. Hasznos lehet számunkra a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} &= \frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} = -\sin \varphi \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi \cdot \mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi} = -\cos \varphi \cdot \mathbf{i} - \sin \varphi \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{e}_r\end{aligned}$$

összefüggések ismerete is.

A mechanikai alapismeretek felírásánál a hagyományos jelölési módokat és elnevezéseket igyekszünk követni. Zömében a következőkben felsorolt egyenleteket használjuk.

KONTINUUMMECHANIKAI ALAPEGYENLETEK. A mechanikai feladatok megoldásának meghatározásakor rendelkezésünkre álló alapegyenletek a következők:

EGYENSÚLYI EGYENLETEK: $\boldsymbol{\sigma} \nabla = \mathbf{0}$. Mivel a primer állapot egyensúlyi állapot, a szekunder állapotnak egyensúlyinak kell lennie, így a kiegészítő feszültségmezőnek is annak kell lennie, vagyis az $\boldsymbol{\sigma} \nabla = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{\sigma}^p \nabla = \mathbf{0}$ egyenletekből következően: $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \nabla = \mathbf{0}$.

Ennek komponensegyenletei hengerkoordinátákban:

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{\tau}_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \widehat{\tau}_{rz}}{\partial z} + \frac{\widehat{\sigma}_r - \widehat{\sigma}_\varphi}{r} = 0, \\ \frac{\partial \widehat{\tau}_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{\sigma}_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \widehat{\tau}_{\varphi z}}{\partial z} + 2 \frac{\widehat{\tau}_{r\varphi}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \widehat{\tau}_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{\tau}_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \widehat{\sigma}_z}{\partial z} + \frac{\widehat{\tau}_{rz}}{r} = 0, \end{cases}$$

GEOMETRIAI EGYENLETEK: $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [\widehat{\mathbf{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \widehat{\mathbf{u}}]$, amelynek komponensegyenletei hengerkoordinátákban:

$$\begin{cases} \widehat{\varepsilon}_r = \frac{\partial \widehat{u}_r}{\partial r}, & \widehat{\gamma}_{r\varphi} = \frac{\partial \widehat{u}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{u}_r}{\partial \varphi} - \frac{\widehat{u}_\varphi}{r}, \\ \widehat{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\widehat{u}_r}{r}, & \widehat{\gamma}_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{u}_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \widehat{u}_\varphi}{\partial z}, \\ \widehat{\varepsilon}_z = \frac{\partial \widehat{u}_z}{\partial z}, & \widehat{\gamma}_{zr} = \frac{\partial \widehat{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \widehat{u}_z}{\partial r}. \end{cases}$$

Az egyensúlyi és a geometriai egyenletek (a végtelen hosszúnak tekintett vágat miatt), az $\widehat{\varepsilon}_z = 0$ *sík alakváltozási állapot* feltételezésével, vagyis a z koordinátától való függetlenség révén egyszerűsödik:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\tau}_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_\varphi}{r} = 0, \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\sigma}_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \frac{\hat{\tau}_{r\varphi}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\tau}_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\hat{\tau}_{rz}}{r} = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\varepsilon}_r = \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r}, \quad \hat{\gamma}_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} - \frac{\hat{u}_\varphi}{r}, \\ \hat{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\hat{u}_r}{r}, \quad \hat{\gamma}_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \varphi}, \\ \hat{\varepsilon}_z = 0, \quad \hat{\gamma}_{zr} = \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial r}. \end{array} \right.$$

ANYAGEGYENLETEK: amelynek alkalmazott formái

deviatorikus alakban:

$$\boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d \text{ és } \boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o,$$

feszültségre feloldott alakban:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\tilde{G} \left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{2G} \boldsymbol{\varepsilon}^o \right], \quad \boldsymbol{\varepsilon}^o := \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}),$$

deformációra feloldott alakban:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\tilde{G}} \left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{3\tilde{K}} \boldsymbol{\sigma}^o \right], \quad \boldsymbol{\sigma}^o := \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}),$$

ahol

a HOOKE-test esetén:

$$2\tilde{G} := 2G,$$

$$3\tilde{K} := 3K,$$

a *standard* test esetén:

$$2\tilde{G} := \frac{2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}},$$

$$3\tilde{K} := \frac{3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}},$$

a *tehetetlenségi standard* testnél: $2\tilde{G} := \frac{2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 3\tilde{K} := \frac{3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}}.$

Ezek skaláris komponensegyenletei a következők:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_r &= 2\tilde{G} \left[\hat{\varepsilon}_r + \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{6G} (\hat{\varepsilon}_r + \hat{\varepsilon}_\varphi + \hat{\varepsilon}_z) \right], \quad \hat{\varepsilon}_r = \frac{1}{2\tilde{G}} \left[\hat{\sigma}_r - \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{9\tilde{K}} (\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_\varphi + \hat{\sigma}_z) \right], \\ \hat{\sigma}_\varphi &= 2\tilde{G} \left[\hat{\varepsilon}_\varphi + \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{6G} (\hat{\varepsilon}_r + \hat{\varepsilon}_\varphi + \hat{\varepsilon}_z) \right], \quad \hat{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{2\tilde{G}} \left[\hat{\sigma}_\varphi - \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{9\tilde{K}} (\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_\varphi + \hat{\sigma}_z) \right], \\ \hat{\sigma}_z &= 2\tilde{G} \left[\hat{\varepsilon}_z + \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{6G} (\hat{\varepsilon}_r + \hat{\varepsilon}_\varphi + \hat{\varepsilon}_z) \right], \quad \hat{\varepsilon}_z = \frac{1}{2\tilde{G}} \left[\hat{\sigma}_z - \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{9\tilde{K}} (\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_\varphi + \hat{\sigma}_z) \right], \\ \hat{\tau}_{r\varphi} &= \tilde{G} \hat{\gamma}_{r\varphi}, \quad \hat{\tau}_{\varphi z} = \tilde{G} \hat{\gamma}_{\varphi z}, \quad \hat{\tau}_{zr} = \tilde{G} \hat{\gamma}_{zr}, \quad \hat{\gamma}_{r\varphi} = \frac{1}{\tilde{G}} \hat{\tau}_{r\varphi}, \quad \hat{\gamma}_{\varphi z} = \frac{1}{\tilde{G}} \hat{\tau}_{\varphi z}, \quad \hat{\gamma}_{zr} = \frac{1}{\tilde{G}} \hat{\tau}_{zr}, \end{aligned}$$

illetve a standard modell deviatorikus felbontásban:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_0) + \tau(\dot{\hat{\sigma}}_r - \dot{\hat{\sigma}}_0) = 2G(\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_0) + 2\eta(\dot{\hat{\varepsilon}}_r - \dot{\hat{\varepsilon}}_0), \\ (\hat{\sigma}_\varphi - \hat{\sigma}_0) + \tau(\dot{\hat{\sigma}}_\varphi - \dot{\hat{\sigma}}_0) = 2G(\hat{\varepsilon}_\varphi - \hat{\varepsilon}_0) + 2\eta(\dot{\hat{\varepsilon}}_\varphi - \dot{\hat{\varepsilon}}_0), \\ (\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_0) + \tau(\dot{\hat{\sigma}}_z - \dot{\hat{\sigma}}_0) = 2G(\hat{\varepsilon}_z - \hat{\varepsilon}_0) + 2\eta(\dot{\hat{\varepsilon}}_z - \dot{\hat{\varepsilon}}_0), \\ \hat{\tau}_{r\varphi} + \tau \dot{\hat{\tau}}_{r\varphi} = G\hat{\gamma}_{r\varphi} + \eta\dot{\hat{\gamma}}_{r\varphi}, \\ \hat{\tau}_{\varphi z} + \tau \dot{\hat{\tau}}_{\varphi z} = G\hat{\gamma}_{\varphi z} + \eta\dot{\hat{\gamma}}_{\varphi z}, \quad \hat{\sigma}_0 + \tau_0 \dot{\hat{\sigma}}_0 = 3K\hat{\varepsilon}_0 + 3K_v \dot{\hat{\varepsilon}}_0, \\ \hat{\tau}_{zr} + \tau \dot{\hat{\tau}}_{zr} = G\hat{\gamma}_{zr} + \eta\dot{\hat{\gamma}}_{zr}, \end{array} \right.$$

ahol

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{3}(\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_\varphi + \hat{\sigma}_z), \quad \hat{\varepsilon}_0 = \frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r + \hat{\varepsilon}_\varphi + \hat{\varepsilon}_z).$$

A függvény fölötti pont (pl. $\dot{\hat{\sigma}}_r$) a függvény t idő szerinti deriváltját jelöli.

A későbbiekben felhasználjuk a következő nábla- és LAPLACE-differenciáloperátorok hengerkoordinátás alakját:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{nábla operátor}),$$

$$\nabla \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{LAPLACE - operátor}).$$

Síkbeli feladat esetén

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

és ekkor

$$\begin{aligned} \Delta \Delta = & \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \varphi^2} - \\ & - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (\text{biharmonikus operátor}).$$

A PRIMER ÁLLAPOT. A közeg vágatnyitás előtti, ún. primer állapotát egy általános, térbeli orientációjú feszültségállapot jellemez. Legyen ennek tenzora DESCARTES-féle koordinátarendszerben

$$\boldsymbol{\sigma}_{<x,y,z>}^p = \begin{vmatrix} p_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & p_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & p_z \end{vmatrix}$$

ahol p_x, p_y, p_z a már említett tengelyirányú terhelések, t_{xy}, t_{xz}, t_{yz} pedig a csúsztató feszültségek. Ezek a feszültségek a közeg minden egyes pontjában érvényesek, tehát adott állandók. Ugyanez a tenzor henger-koordinátarendszerben

$$\begin{aligned}\sigma^p &:= \sigma_{<x,\varphi,z>}^p = \begin{vmatrix} p_r & t_{r\varphi} & t_{rz} \\ t_{\varphi r} & p_\varphi & t_{\varphi z} \\ t_{zr} & t_{z\varphi} & p_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r \sigma_{<x,y,z>}^p \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_r \sigma_{<x,y,z>}^p \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_r \sigma_{<x,y,z>}^p \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi \sigma_{<x,y,z>}^p \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi \sigma_{<x,y,z>}^p \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_\varphi \sigma_{<x,y,z>}^p \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_z \sigma_{<x,y,z>}^p \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_z \sigma_{<x,y,z>}^p \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \sigma_{<x,y,z>}^p \mathbf{e}_z \end{vmatrix},\end{aligned}$$

ahol például

$$\begin{aligned}p_r &= \mathbf{e}_r \sigma_{<x,y,z>}^p \mathbf{e}_r = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ t_{yx} & p_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & p_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix} = \\ &= p_x \cos^2\varphi + p_y \sin^2\varphi + 2t_{xy} \sin\varphi \cos\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(p_x + p_y) + \frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi.\end{aligned}$$

Hasonló módon írható fel a többi feszültségkomponens. Összefoglalva:

$$\begin{aligned}p_r &= p_x \cos^2\varphi + p_y \sin^2\varphi + 2t_{xy} \sin\varphi \cos\varphi, & t_{r\varphi} &= (p_x - p_y) \sin\varphi \cos\varphi + t_{xy} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \\ p_\varphi &= p_x \sin^2\varphi + p_y \cos^2\varphi - 2t_{xy} \sin\varphi \cos\varphi, & t_{\varphi z} &= t_{yz} \cos\varphi - t_{zx} \sin\varphi, \\ p_z &= p_z, & t_{zr} &= t_{yz} \sin\varphi - t_{zx} \cos\varphi.\end{aligned}$$

Az egyszerűbb áttekinthetőség érdekében vezessük be az

$$\begin{aligned}(6) \quad a &:= +\frac{1}{2}(p_x + p_y), \\ b(\varphi) &:= +\frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi, \\ c(\varphi) &:= -\frac{1}{2}(p_x - p_y) \sin 2\varphi + t_{xy} \cos 2\varphi, \\ d(\varphi) &:= t_{yz} \cos\varphi - t_{zx} \sin\varphi, \\ e(\varphi) &:= t_{yz} \sin\varphi + t_{zx} \cos\varphi\end{aligned}$$

jelöléseket. A későbbiekben hasznosítjuk még a

$$\frac{db(\varphi)}{d\varphi} = 2c(\varphi), \quad \frac{d^2b(\varphi)}{d\varphi^2} = -4b(\varphi), \quad \frac{dc(\varphi)}{d\varphi} = -2b(\varphi), \quad \frac{de(\varphi)}{d\varphi} = d(\varphi), \quad \frac{dd(\varphi)}{d\varphi} = d' = -e(\varphi)$$

összefüggéseket. Ezekkel a jelölésekkel a hengerkoordináta rendszerbeli primer feszültségtenzor:

$$(7) \quad \sigma^p = \begin{vmatrix} a+b(\varphi) & c(\varphi) & e(\varphi) \\ c(\varphi) & a-b(\varphi) & d(\varphi) \\ e(\varphi) & d(\varphi) & p_z \end{vmatrix}.$$

Ez a tenzor tehát a közeg vágatnyitás előtti feszültségállapotát jellemzi. Az itt szereplő primer feszültségekre rakódnak (szuperponálódnak) rá a nyitás következtében fellépő, ún. *kiegészítő feszültségek*. Ezek tenzorát $\widehat{\mathbf{F}}$ jelöli:

$$\widehat{\mathbf{\sigma}} = \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_r & \widehat{\tau}_{r\varphi} & \widehat{\tau}_{rz} \\ \widehat{\tau}_{\varphi r} & \widehat{\sigma}_\varphi & \widehat{\tau}_{\varphi z} \\ \widehat{\tau}_{zr} & \widehat{\tau}_{z\varphi} & \widehat{\sigma}_z \end{pmatrix},$$

s ennek megfelelően a közeg vágatnyitás utáni szekunder feszültség állapotát leíró tenzor

$$(8) \quad \mathbf{\sigma} = \mathbf{\sigma}^p + \widehat{\mathbf{\sigma}} = \begin{pmatrix} a + b(\varphi) + \widehat{\sigma}_r & c(\varphi) + \widehat{\tau}_{r\varphi} & e(\varphi) + \widehat{\tau}_{rz} \\ c(\varphi) + \widehat{\tau}_{\varphi r} & a - b(\varphi) + \widehat{\sigma}_\varphi & d(\varphi) + \widehat{\tau}_{\varphi z} \\ e(\varphi) + \widehat{\tau}_{zr} & d(\varphi) + \widehat{\tau}_{z\varphi} & p_z + \widehat{\sigma}_z \end{pmatrix}.$$

Hasonlóképpen felírhatnánk a primer alakváltozások tenzorát és a primer elmozdulások vektorát is, hengerkoordinátákat használva. Azonban a vágatnyitás előtti alakváltozások ill. elmozdulások, amelyek az ősidők folyamán lejátszódtak, érdektelenek számunkra, semmi jelentőségük nincs.

Axiómaként elfogadhatjuk azt, hogy a primer alakváltozások és elmozdulások nem befolyásolják a nyitás utáni alakváltozásokat ill. elmozdulásokat. Ezért tekinthetjük úgy, mintha azok mindegyike nulla lenne. Mindezt az is indokolja, hogy csak a meglévő, régen stabilizálódott állapottól eltérő, a vágatnyitás következtében fellépő elmozdulásokra ill. alakváltozásokra van szükségünk. Fogalmazhatunk úgy is, hogy a vágatnyitás miatt fellépő zavarok ismeretére vagyunk kíváncsiak. Ellenkező esetben nem kellően tisztázott elvi problémák is felléphetnek.

Megjegyezzük, hogy hasonló elvet elfogadhatnánk a feszültségeknél is. Ott azonban a primer feszültségek, pontosabban mondva a kezdeti terhelések ismerete elengedhetetlen a feladat megoldásához.

5. FEJEZET

KERÜLETI ÉS KEZDETI FELTÉTELEK

A mechanikai alapegyenleteket tekintve látható, hogy a feszültségek, alakváltozások és elmozdulások meghatározása differenciálegyenletek megoldásán keresztül történhet. Ehhez bizonyos kerületi és kezdeti feltételek ismerete szükséges.

5.1. A KERÜLETI FELTÉTELEK

A *kerületi feltételek* egyrészt abból adódnak, hogy

- (a) vágatnyitás után a vágat pereme ($r = R$) terheletlen lesz, másrészt abból, hogy
 (b) a végtelenben ($r = \infty$ -nél) a primer feszültségi állapot uralkodik.

Ez következik abból, hogy a vágatnyitás során a peremen, csupán egy véges hosszúságú görbén, megváltoztatva a terhelést (a feszültséget), annak hatása a végtelenben már nem érzékelhető. Ezeket a fizikai feltételeket kell „lefordítani” az aktuális feladat nyelvére, azaz matematikailag hasznosítható összefüggésekre, egyenletekre.

(a.1 eset) Legyen a vágat peremének normális egységvektora $\mathbf{n}$. Ez a normálvektor megegyezik az $\mathbf{e}_r$ egységvektorral. Mivel a vágatnyitás után a szekunder feszültségi állapot érvényes, ezért annak feltétele, hogy a perem terheletlen, az $\boldsymbol{\sigma}|_{r=R} \mathbf{n} = \mathbf{0}$, azaz a kerületen ébredő normális irányú feszültségek zérusértékűek:

$$(9) \quad \sigma_r|_R = 0, \quad \tau_{r\varphi}|_R = 0, \quad \tau_{rz}|_R = 0,$$

Ez nem más, mint az $\boldsymbol{\sigma}|_{r=R}$ tenzor mátrixának első oszlopvektora (a tenzor első vektorkoordinátája).

$$(9a) \quad \boldsymbol{\sigma}|_{r=R} \mathbf{n} = [\boldsymbol{\sigma}^p + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}]_{r=R} \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} a + b(\varphi) + \widehat{\sigma}_r \\ c(\varphi) + \widehat{\tau}_{r\varphi} \\ e(\varphi) + \widehat{\tau}_{rz} \end{Bmatrix}_{r=R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ ill. } \boldsymbol{\sigma}|_{r=R} \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} \widehat{\sigma}_r \\ \widehat{\tau}_{r\varphi} \\ \widehat{\tau}_{rz} \end{Bmatrix}_{r=R} = \begin{Bmatrix} -a + b(\varphi) \\ -c(\varphi) \\ -c(\varphi) \end{Bmatrix}.$$

(a.2 eset) Ha az üreg kontúrjára falazat, biztosítás kerül beépítésre, akkor e feltétel helyett az

$$(10) \quad \boldsymbol{\sigma}|_{r=R} \mathbf{n} = \mathbf{p}^b \Leftrightarrow \sigma_r|_R = \sigma_r^b, \quad \tau_{r\varphi}|_R = \tau_{r\varphi}^b, \quad \tau_{rz}|_R = \tau_{rz}^b$$

összefüggést kell alapul vennünk, ahol $\mathbf{p}^b$ a kerületre ható biztosítási „erő”, amelyet a biztosítás karakterisztikájának neveznek.

Amennyiben az üregnyitás időkarakterisztikájától eltekintünk – pl. a reológiai időkhöz képest az üregnyitás gyors (helyesebben az üreg felületének elszakítása a környezettől gyors), – akkor ebben az esetben a kerületi feltételek még időfüggetlennek is tekinthetők.

A peremfeltételek másik (b) csoportja kimondja, hogy a végtelen távolban a primer állapot uralkodik:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^p, \text{ azaz } \lim_{r \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}.$$

Jelen feladat kerületi feltételei terhelésekkel adottak, tehát azok *feszültségi* peremfeltételek.

Az elmondottak a kiegészítő feszültségekre vonatkozóan – figyelembe véve az $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^p + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ összefüggést, – a következők:

$$\begin{aligned}
(11) \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}}|_{r=R} \mathbf{n} &= -\boldsymbol{\sigma}^p \mathbf{n}, \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\sigma}_r|_R = -p_r, \quad \widehat{\tau}_{r\varphi}|_R = -t_{r\varphi}, \quad \widehat{\tau}_{rz}|_R = -t_{rz}, \\
(12) \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}}|_{r=R} \mathbf{n} &= \mathbf{p}^b - \boldsymbol{\sigma}^p \mathbf{n}, \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\sigma}_r|_R = \sigma_r^b - p_r, \quad \widehat{\tau}_{r\varphi}|_R = \tau_{r\varphi}^b - t_{r\varphi}, \quad \widehat{\tau}_{rz}|_R = \tau_{rz}^b - t_{rz}, \\
(13) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{0}, \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\sigma}_r|_{r \rightarrow \infty} = \widehat{\sigma}_\varphi|_{r \rightarrow \infty} = \widehat{\sigma}_z|_{r \rightarrow \infty} = \widehat{\tau}_{r\varphi}|_{r \rightarrow \infty} = \widehat{\tau}_{\varphi z}|_{r \rightarrow \infty} = \widehat{\tau}_{zr}|_{r \rightarrow \infty} = 0.
\end{aligned}$$

5.2. A KEZDETI FELTÉTELEK

A mechanikai alapegyenletek megoldásához kezdeti feltételeket is meg kell adni, mivel a mechanikai mezőfüggvények a t időtől is függenek, vagyis

$$\widehat{\sigma}_r(r, \varphi, t), \dots, \widehat{\varepsilon}_\varphi(r, \varphi, t), \dots, \widehat{u}_z(r, \varphi, t) \text{ stb.}$$

alakúak. Attól függően, hogy a mechanikai alapegyenletek – az anyagtörvény reológiai formájából következően – időbeli változóra vonatkozóan hányadrendű differenciálegyenletet eredményeznek, annak megfelelően kell megadni a $t = 0$ időpillanatban érvényes mezőfüggvényeket (elsőrendű), azok első időderiváltját (másodrendű), második időderiváltját (harmadrendű egyenleteknél) és így tovább.

„Végtelen gyors” vágatnyitás esetére a kezdeti feltételek meghatározásának egyik lehetséges módja a következő:

A standard modell anyagegyenlete kiírva az időderiváltakkal:

TORZULÁSI EGYENLET	TÉRFOGATVÁLTOZÁSI EGYENLET
$\boldsymbol{\sigma}^d + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$	$\boldsymbol{\sigma}^o + \tau_o \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o$

formájú. Ha az egyenleteket integráljuk a t_1 és t_2 üregnyitási időhatárok között:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\sigma}^d dt + \tau \int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d dt = 2G \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\varepsilon}^d dt + 2\eta \int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d dt \quad \left| \quad \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\sigma}^o dt + \tau_o \int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o dt = 3K \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\varepsilon}^o dt + 3K_v \int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o dt,
\right.$$

és t_2 -t minden határon túl közelítjük a t_1 -hez, akkor

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\sigma}^d dt}_{=0} + \tau \int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d dt = 2G \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\varepsilon}^d dt}_{=0} + 2\eta \int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d dt \quad \left| \quad \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\sigma}^o dt}_{=0} + \tau_o \int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o dt = 3K \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\varepsilon}^o dt}_{=0} + 3K_v \int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o dt,
\right.$$

illetve

$$\tau \Delta \boldsymbol{\sigma}^d = 2\eta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad \left| \quad \tau_o \Delta \boldsymbol{\sigma}^o = 3K \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^o,
\right.$$

s ekkor $t_2(=t_1)$ időpontot tekintjük az üregnyitás időpontjának, vagyis a „0” időpontnak, így az első kezdeti feltétel:

$$\tau \boldsymbol{\sigma}^d(0) = 2\eta \boldsymbol{\varepsilon}^d(0), \quad \left| \quad \tau_o \boldsymbol{\sigma}^o(0) = 3K \boldsymbol{\varepsilon}^o(0),
\right.$$

azaz

$$(14) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^d(0) = \frac{\tau}{2\eta} \boldsymbol{\sigma}^d(0), & \boldsymbol{\varepsilon}^o(0) = \frac{\tau_o}{3K_v} \boldsymbol{\sigma}^o(0), \quad \left(\varepsilon_o(0) = \frac{\tau_o}{3K_v} \sigma_o(0) \right), \\ \boldsymbol{\varepsilon}(0) = \boldsymbol{\varepsilon}^d(0) + \boldsymbol{\varepsilon}^o(0) = \frac{\tau}{2\eta} \boldsymbol{\sigma}^d(0) + \frac{\tau_o}{3K_v} \boldsymbol{\sigma}^o(0) = \frac{\tau}{2\eta} \boldsymbol{\sigma}(0) + \left(\frac{\tau_o}{3K_v} - \frac{\tau}{2\eta} \right) \boldsymbol{\sigma}^o(0). \end{cases}$$

Innen jól látható, hogy a gyors nyitás esetén az anyagtörvény formája

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \frac{2\eta}{\tau} \boldsymbol{\varepsilon}^d \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\sigma}^o = \frac{3K_v}{\tau_o} \boldsymbol{\varepsilon}^o$$

az ún. „dinamikai” HOOKE-törvénnyel egyezik meg a $t = 0$ időpillanatban.

A „magasabbrendű” kezdeti feltételhez vegyük alapul az anyagegyenlet idő szerinti deriváltját:

TORZULÁSI EGYENLET	TÉRFOGATVÁLTOZÁSI EGYENLET
$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d + \tau \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^d = 2G\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + 2\eta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d,$	$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o + \tau_o \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^o = 3K\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + 3K_v\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o,$

s az előzőhöz hasonlóan eljárva:

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d dt}_{=\Delta\boldsymbol{\sigma}^d} + \tau \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^d dt}_{=0} = 2G \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d dt}_{=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^d} + 2\eta \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d dt}_{=\Delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d} \quad \left| \quad \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o dt}_{=0} + \tau_o \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^o dt}_{=0} = 3K \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o dt}_{=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^o} + 3K_v \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o dt}_{=\Delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o} \right.$$

illetve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d(0) &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d(0) + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(0) = \\ &= 2G\frac{\tau}{2\eta}\boldsymbol{\sigma}^d(0) + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(0), \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(0) &= \frac{1}{2\eta}\mathbf{T}(0) - \frac{\eta}{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d(0) = \\ &= \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{G\tau}{\eta}\right)\boldsymbol{\sigma}^d(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^o(0) &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o(0) + 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o(0) = \\ &= 3K\frac{\tau_o}{3K_v}\boldsymbol{\sigma}^o(0) + 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o(0), \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o(0) &= \frac{1}{3K_v}\boldsymbol{\sigma}^o(0) - \frac{K}{K_v}\boldsymbol{\varepsilon}^o(0) = \\ &= \frac{1}{3K_v}\left(1 - \frac{K\tau_o}{K_v}\right)\boldsymbol{\sigma}^o(0), \end{aligned}$$

s a „második” kezdeti feltétel:

$$(15) \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(0) = \frac{\eta - G\tau}{2\eta^2} \boldsymbol{\sigma}^d(0), & \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o(0) = \frac{K_v - K\tau_o}{3K_v^2} \boldsymbol{\sigma}^o(0), \quad \left(\dot{\varepsilon}_o(0) = \frac{K_v - K\tau_o}{3K_v^2} \sigma_o(0) \right), \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(0) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(0) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o(0) = \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{G\tau}{\eta}\right)\boldsymbol{\sigma}^d(0) + \left[\frac{1}{3K_v}\left(1 - \frac{K\tau_o}{K_v}\right) - \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{G\tau}{\eta}\right) \right] \boldsymbol{\sigma}^o(0). \end{cases}$$

Hasonlóképpen eljárva:

$$\ddot{\boldsymbol{\sigma}}^d + \tau \dddot{\boldsymbol{\sigma}}^d = 2G\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + 2\eta\dddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d, \quad \left| \quad \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^o + \tau_o \dddot{\boldsymbol{\sigma}}^o = 3K\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + 3K_v\dddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o, \right.$$

TORZULÁSI EGYENLET	TÉRFOGATVÁLTOZÁSI EGYENLET
$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^d dt}_{=0} + \tau \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^d dt}_{=0} = 2G \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d dt}_{=\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d} + 2\eta \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d dt}_{=\Delta \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d}$ $\mathbf{0} = 2G\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(0) + 2\eta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(0),$ $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(0) = -\frac{G}{\eta}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(0) = -\frac{G}{2\eta^2}\left(1 - \frac{G\tau}{\eta}\right)\boldsymbol{\sigma}^d(0),$	$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^o dt}_{=0} + \tau_o \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^o dt}_{=0} = 3K \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o dt}_{=\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o} + 3K_v \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o dt}_{=\Delta \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o},$ $\mathbf{0} = 3K\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o(0) + 3K_v\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o(0),$ $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o(0) = -\frac{K}{K_v}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o(0) = -\frac{K}{3K_v^2}\left(1 - \frac{K\tau_o}{K_v}\right)\boldsymbol{\sigma}^o(0),$

a „harmadik” kezdeti feltétel:

$$(16) \quad \begin{cases} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(0) = -\frac{G}{2\eta^2}\left(1 - \frac{G\tau}{\eta}\right)\boldsymbol{\sigma}^d(0), & \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o(0) = -\frac{K}{3K_v^2}\left(1 - \frac{K\tau_o}{K_v}\right)\boldsymbol{\sigma}^o(0), \\ \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}(0) = \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d(0) + \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o(0) = -\frac{G - G^2\tau}{2\eta^3}\boldsymbol{\sigma}(0) - \left(\frac{KK_v - K^2\tau_o}{3K_v^3} - \frac{G - G^2\tau}{2\eta^3}\right)\boldsymbol{\sigma}^o(0). \end{cases}$$

és így tovább... Ezek a deformációkra vonatkozó kezdeti feltételek.

A feszültségekre vonatkozó kezdeti feltételek jóval egyszerűbben adódnak. Ugyanis a feszültségek értéke értelemszerűen következik a (14)-ből:

$$(14a) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^d(0) = \frac{2\eta}{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}^d(0), & \boldsymbol{\sigma}^o(0) = \frac{3K_v}{\tau_o}\boldsymbol{\varepsilon}^o(0), \\ \boldsymbol{\sigma}(0) = \frac{2\eta}{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}(0) + \left(\frac{3K_v}{\tau_o} - \frac{2\eta}{\tau}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^o(0). \end{cases}$$

A magasabbrendű időderiváltak egyszerűen

$$(14b) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d(0) = \mathbf{0}, \quad \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^d(0) = \mathbf{0}, \dots \text{ és } \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o(0) = \mathbf{0}, \quad \ddot{\boldsymbol{\sigma}}^o(0) = \mathbf{0}, \dots$$

értékűek, mivel a $\lambda = \lambda(t)$ függvényt úgy választottuk (8. ábra), hogy az időderiváltak tetszőleges rendig zérusértékűek legyenek.

6. FEJEZET

HIDROSZTATIKUS PRIMER MEZŐBEN KIHAJTOTT VÁGAT

Azonban mielőtt a teljes feladat megoldásához hozzáfognánk, említést teszünk az

$$(17) \quad \mathbf{F}^p = \begin{Bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}^p = \frac{p}{3K} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

hidrosztatikus primer mezőben kihajtott végtelen hosszú körszelvényű folyosó esetéről.

A kiegészítő feszültségekkel és deformációkkal célszerű dolgozni, ugyanis a szekunder mezők a primer- és a kiegészítő mezők összegeként előállíthatók. A kiegészítő mezőfüggvények a következők:

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \widehat{\sigma}_r & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\sigma}_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\sigma}_z \end{bmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \widehat{\varepsilon}_r & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\varepsilon}_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \widehat{u}_r := \widehat{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel ebben az esetben a primer mező jellegzetességéből, az egyensúlyi és geometriai egyenletből következően a mezőfüggvények csak az r változótól függenek, ezért elegendő csupán a $\widehat{\sigma}_r$ értékét meghatározni, ui.

$$\widehat{\sigma}_\varphi = -\widehat{\sigma}_r, \quad \widehat{\varepsilon}_r = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial r}, \quad \widehat{\varepsilon}_\varphi = \frac{\widehat{u}}{r}, \quad \widehat{\varepsilon}_z = -\widehat{\varepsilon}_\varphi,$$

így probléma egy *egyváltozós feladatra* vezethető vissza.

Reológiai anyagtörvények esetére az irodalomban számos megoldás ismeretes, a hatvanas évektől napjainkig. A legutóbbi, és egyúttal a legteljesebb és legkorrektebb elméleti kifejtést FÜLÖP és BÉDA közölte, jelen kötetben is megjelenő cikkében. Ez a tanulmány nem kerülhető meg, de lehetővé teszi, hogy a fizikailag és matematikailag tiszta, de meglehetősen bonyolult levezetés ismeretében, a végeredményt egyszerűen állítsuk elő.

A HOOKE-FÉLE ANYAGMODELL esetén a közismert matematikai megoldás:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_r &= -p \left(\frac{R}{r} \right)^2, & \widehat{\sigma}_\varphi &= +p \left(\frac{R}{r} \right)^2, & \widehat{\sigma}_z &= 0, & \widehat{\tau}_{r\varphi} &= \widehat{\tau}_{\varphi z} = \widehat{\tau}_{zr} = 0, \\ (18) \quad \widehat{\varepsilon}_r &= -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2, & \widehat{\varepsilon}_\varphi &= +\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2, & \widehat{\varepsilon}_z &= 0, & \widehat{\gamma}_{r\varphi} &= \widehat{\gamma}_{\varphi z} = \widehat{\gamma}_{zr} = 0, \\ \widehat{u}_r &= +\frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right), & \widehat{u}_\varphi &= \widehat{u}_z = 0. \end{aligned}$$

A POYNTING-THOMSON-FÉLE STANDARD MODELL esetén a megoldás formálisan a $2G \Rightarrow 2\widetilde{G}$ cserével, a

$$2\widetilde{G} := \frac{\left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} \right)}{\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right)}$$

differenciáloperátor standard modellnél érvényes formájával és alkalmazásával adható meg. Vegyük az $\widehat{\varepsilon}_r$ összefüggést, s elvégezve a behelyettesítést majd az átszorzásokat:

$$\widehat{\varepsilon}_r = \frac{p}{2\widetilde{G}} \left(\frac{R}{r} \right)^2, \Rightarrow \widehat{\varepsilon}_r = p \frac{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}{2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t}} \left(\frac{R}{r} \right)^2, \Rightarrow \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \widehat{\varepsilon}_r = p \left(\frac{R}{r} \right)^2.$$

Figyelembe véve, hogy $\widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} = \frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2$, az

$$\eta \dot{\widehat{\varepsilon}}_r + G\widehat{\varepsilon}_r = G\widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}$$

elsőrendű differenciálegyenletet kapjuk. Ennek általános megoldása

$$\widehat{\varepsilon}_r = C e^{-\frac{G}{\eta}t} + \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke},$$

ahol C integrációs állandó, amelyet a kezdeti feltételből határozhatunk meg.

KEZDETI FELTÉTEL: Mivel az $\widehat{\varepsilon}_r$ értéke a $t = 0$ időpillanatban csak 0 és $\widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}$ közé eshet, ezért célravezető az

$$(19) \quad \widehat{\varepsilon}_r(0) = k \cdot \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}$$

választás, ahol

$$0 \leq k \leq 1.$$

Ennek megfelelően a megoldás $\widehat{\varepsilon}_r(0)$ kezdeti feltétel esetén:

$$\widehat{\varepsilon}_r(r, t) = \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} \left[1 - (1 - k) e^{-\frac{G}{\eta}t} \right], \text{ azaz } \widehat{\varepsilon}_r = \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} \alpha_1(t),$$

ahol $\alpha_1(t) = 1 - (1 - k) e^{-\frac{G}{\eta}t}$, s így $\alpha(0) = k$.

MEGJEGYZÉSEK. Ha $k = 0$, akkor $\widehat{\varepsilon}_r$ a 0 értékről indul:

$$\widehat{\varepsilon}_r = \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} \left[1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right].$$

Ha $k = 1$, akkor nincs időbeli változás, rögtön a HOOKE-szerinti megoldás adódik.

Külön jelentősége van az ún. „végtelen gyors” vágatnyításnak, ekkor ugyanis a $t = 0$ időpillanatban a „dinamikai” HOOKE-törvénynek megfelelő $\widehat{\varepsilon}_r$ értékről indul a függvény, vagyis a $2G$ statikai modulus helyett, a $2\eta/\tau$ dinamikai modulus érvényesül:

$$\sigma_r = \frac{2\eta}{\tau} \varepsilon_r(0), \Rightarrow \varepsilon_r(0) = \frac{\tau}{2\eta} \sigma(0) = k \varepsilon_r^{Hooke} = k \frac{1}{2G} \sigma(0) \Rightarrow k = G\tau/\eta,$$

s így

$$(20) \quad \widehat{\varepsilon}_r = \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} \left[1 - \frac{\eta - G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right].$$

Általában

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}, & \text{ha } k = 0, \\ 1 - \frac{\eta - G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t}, & \text{ha } k = \frac{G\tau}{\eta}, \\ 1, & \text{ha } k = 1. \end{cases}$$

„Végtelen gyors” vágatnyitás esetére a

$$(21) \quad \begin{aligned} \hat{\sigma}_r &= -p \left(\frac{R}{r} \right)^2, & \hat{\sigma}_\varphi &= p \left(\frac{R}{r} \right)^2, \\ \hat{\varepsilon}_r &= -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - \frac{\eta - G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right], & \hat{\varepsilon}_\varphi &= \frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - \frac{\eta - G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right], \\ \hat{u}_r &= \frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right) \left[1 - \frac{\eta - G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right], \end{aligned}$$

összefüggéseket kapjuk, amelyek pontosan megegyeznek a FÜLÖP–BÉDA 99. oldalon kezdődő cikkében lévő képletekkel.

A POYNTING-THOMSON-FÉLE TEHETETLENSÉGI STANDARD MODELL esetén a differenciáloperátor

$$2\tilde{G} := \frac{2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}$$

érvényes formájával, a

$$\theta \ddot{\hat{\varepsilon}}_r + 2\eta \dot{\hat{\varepsilon}}_r + 2G \hat{\varepsilon}_r = 2G \hat{\varepsilon}^{Hooke}$$

másodrendű differenciálegyenletet kapjuk, amelynek általános megoldása [ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$]:

$$\hat{\varepsilon}_r = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \hat{\varepsilon}_r^{Hooke},$$

illetve $\lambda_1 = \lambda_2$ esetén:

$$\hat{\varepsilon}_r = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t} + \hat{\varepsilon}_r^{Hooke}.$$

ahol C_1 és C_2 integrációs állandók, amelyeket a kezdeti feltételekből határozhatunk meg. A λ_1 és λ_2 az $\theta \lambda^2 + 2\eta \lambda + 2G = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda_1 = -\frac{\eta}{\theta} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}, \quad \lambda_2 = -\frac{\eta}{\theta} - \sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}.$$

Mivel az egyenlet $\theta, 2\eta, 2G$ együtthatói pozitívak, ezért λ_1 és λ_2 gyökök negatívak. Komplex gyökök esetén a gyökök valós része negatív. E miatt minden esetben

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{\varepsilon}_r = \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}.$$

A diszkrimináns $\eta^2 - 2G\theta$ értékét a konkrét anyagállandó-értékek határozzák meg. [ASSZONYI–FÜLÖP–VÁN–SZARKA–HORVÁTH (2008)] alatti vizsgálatokból tudjuk, hogy

$\eta^2 - 2G\theta > 0$ esetben az anyagot „túlcsillapított”-nak nevezzük, mikor is a zavarok gyorsan elülnek,

$\eta^2 - 2G\theta < 0$ esetben pedig „alulcsillapított”-nak, mikor is a zavarok lassan csillapodnak (az anyagi tehetetlenség nagy),

$\eta^2 - 2G\theta = 0$ eset választja el egymástól a két anyagtulajdonság-tartományt, s ezt akár „közömbös” jelzővel is illethetnénk.

Ha az összes lehetőséget, – amikor a diszkrimináns pozitív, negatív, vagy zérus – egyetlen egyenletbe akarjuk összefoglalni, akkor azonos átalakításokat figyelembe véve,

$$\widehat{\varepsilon}_r = \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} + \left[(C_1 + C_2) \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} t + (C_1 - C_2) \operatorname{sh} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} t \right] e^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} t}, \quad \text{ha } \eta^2 > 2G\theta,$$

$$\widehat{\varepsilon}_r = \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} + [(C_1 + C_2) + (C_1 - C_2)t] e^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} t}, \quad \text{ha } \eta^2 = 2G\theta,$$

$$\widehat{\varepsilon}_r = \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} + \left[(C_1 + C_2) \cos \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} t + (C_1 - C_2) \sin \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} t \right] e^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} t}, \quad \text{ha } \eta^2 < 2G\theta,$$

vagyis a [SZARKA–ASSZONYI–FÜLÖP (2009) 189. old.] alapján:

$$(22) \quad \widehat{\varepsilon}_r = \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} + [S \cdot s(t) + C \cdot c(t)] e^{-\frac{\eta}{\theta} t},$$

ahol S és C integrációs állandók, amelyek értékét – az előzőhöz hasonlóan – a kezdeti feltételekből határozzuk meg, s az $s(t)$ és $c(t)$ függvények formája a diszkrimináns előjelétől függően:

$$(23) \quad s(t) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\frac{2G}{\theta} - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2} t}{\sqrt{\frac{2G}{\theta} - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2}}, & \text{ha } \eta^2 < 2G\theta, \\ t, & \text{ha } \eta^2 = 2G\theta, \\ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}} t}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}}}, & \text{ha } \eta^2 > 2G\theta. \end{cases} \quad c(t) = \begin{cases} \cos \sqrt{\frac{2G}{\theta} - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2} t, & \text{ha } \eta^2 < 2G\theta, \\ 1, & \text{ha } \eta^2 = 2G\theta, \\ \operatorname{ch} \sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - \frac{2G}{\theta}} t, & \text{ha } \eta^2 > 2G\theta. \end{cases}$$

Az $\widehat{\varepsilon}_r = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}$ összefüggés

$$(24) \quad \widehat{\varepsilon}_r = C_1 c_1(t) + C_2 c_2(t) + \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}$$

formában is felírható, ahol

$$(25) \quad c_1(t) = \begin{cases} e^{\lambda_1 t}, & \text{ha } \eta^2 > 2\theta, \\ e^{\lambda t}, \lambda = \lambda_1 = \lambda_2, & \text{ha } \eta^2 = 2\theta, \\ e^{-\frac{\eta}{\theta} t} \cos \sqrt{\frac{2G}{\theta} - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2}, & \text{ha } \eta^2 < 2\theta. \end{cases} \quad c_2(t) = \begin{cases} e^{\lambda_2 t}, & \text{ha } \eta^2 > 2\theta, \\ t e^{\lambda t}, \lambda = \lambda_1 = \lambda_2, & \text{ha } \eta^2 = 2\theta, \\ e^{-\frac{\eta}{\theta} t} \sin \sqrt{\frac{2G}{\theta} - \left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2}, & \text{ha } \eta^2 < 2\theta. \end{cases}$$

KEZDETI FELTÉTELEK: Az előzőkhöz hasonlóan, mivel az $\widehat{\varepsilon}_r$ értéke a $t = 0$ időpillanatban csak 0 és $\widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}$ közé eshet [$0 \leq \widehat{\varepsilon}_r \leq \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}$], ezért célravezető az

$$\widehat{\varepsilon}_r(0) = k \cdot \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}, \quad [0 \leq k \leq 1]$$

választás. Viszont a $t = 0$ időpontbeli deriváltat célszerű

$$\dot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) = l \cdot \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}, \quad [l \text{ tetszőleges szám}]$$

formában felírni.

„Végtelen gyors” üregnyitás esetén a tehetetlenségi standard testnél $\widehat{\varepsilon}_r(0) = 0$, valamint $\dot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) = \frac{\tau}{\theta} \sigma_r(0) = l \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} = l \frac{1}{2G} \sigma_r(0)$, $\Rightarrow l = \frac{2G\tau}{\theta}$. Ezt felhasználva, az összefüggések:

$$(26) \quad \begin{aligned} \widehat{\sigma}_r &= -p \left(\frac{R}{r} \right)^2, & \widehat{\sigma}_\varphi &= +p \left(\frac{R}{r} \right)^2, \\ \widehat{\varepsilon}_r &= -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left\{ 1 + \left[\frac{2G\tau - \eta}{\theta} s(t) - c(t) \right] e^{-\frac{\eta}{\theta} t} \right\}, \\ \widehat{\varepsilon}_\varphi &= +\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left\{ 1 + \left[\frac{2G\tau - \eta}{\theta} s(t) - c(t) \right] e^{-\frac{\eta}{\theta} t} \right\}, \\ \widehat{u}_\varphi &= \frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right) \left\{ 1 + \left[\frac{2G\tau - \eta}{\theta} s(t) - c(t) \right] e^{-\frac{\eta}{\theta} t} \right\}, \end{aligned}$$

A már ismert összefüggéseket azért vezettük le ismételtén, hogy látható legyen egy sokkal egyszerűbb út, az anyagállandó-differenciáloperátorok használatával.

ÁLTALÁNOS ORIENTÁCIÓJÚ PRIMER MEZŐBEN KIHAJTOTT VÁGAT HOOKE-MODELL ESETÉN

A MEGOLDÁS ELVI VÁZLATA. Az általános reológiai eset megoldását több lépésben állítjuk elő. Először megoldjuk a feladatot a HOOKE-modell szerint, vagyis a mezőfüggvényeket az időtől függetlennek tekintve, s ennek ismeretében keressük meg a reológiai megoldást.

Az általános orientációjú primer mezőben kihajtott vágat esetét két eset szuperpozíciójaként építjük fel:

$$\boldsymbol{\sigma}^{primér} = \begin{bmatrix} p_r & t_{r\varphi} & t_{rz} \\ t_{\varphi r} & p_\varphi & t_{\varphi z} \\ t_{zr} & t_{z\varphi} & p_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_r & t_{r\varphi} & 0 \\ t_{\varphi r} & p_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & p_z \end{bmatrix}}_{\text{a keresztmetszet síkjában}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & t_{rz} \\ 0 & 0 & t_{\varphi z} \\ t_{zr} & t_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{a tengelyre fektetett síkban}}.$$

Ezáltal az általános feladatot egy *kétváltozós* és egy *egyváltozós* feladat megoldására egyszerűsítettük. Ezt azért tehetjük meg, mert a primer mező felbontásának megfelelően, az egyensúlyi egyenlet is

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ \tau_{\varphi r} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} \nabla = \mathbf{0}, \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \end{array} \right.$$

lehetővé teszi az $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{F}^{(2)}$ szeparálást.³

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\varphi} & 0 \\ \tau_{\varphi r} & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \nabla = \mathbf{0}, \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} = 0. \end{array} \right. \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \nabla = \mathbf{0}, \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

³ Megjegyzendő, a szeparálás a megszokott $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^o$ deviatorikus és gömbi felbontásnak megfelelően *nem lehetséges*, mivel az egyensúlyi egyenlet kizárja, ugyanis a $(\boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^o) \nabla = \mathbf{0}$ egyenletből nem a $\boldsymbol{\sigma}^d \nabla = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{\sigma}^o \nabla = \mathbf{0}$ következik, hanem a $\boldsymbol{\sigma}^d \nabla = -\boldsymbol{\sigma}^o \nabla$.

miközben a kezdeti feltételek is szeparálódnak:

$$\boldsymbol{\sigma}|_R \mathbf{n} = \left(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}|_R + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}|_R \right) \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)}|_R \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}|_R \mathbf{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}^{(1)}|_R \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(2)}|_R \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Vagyis a feladat tekinthető úgy, mintha két különböző terhelés hatna a közegre, s a két terhelésre a feladatot külön-külön megoldjuk, majd a megoldásokat összegezzük.

Fogalmazhatunk úgy is, hogy megoldjuk a feladatot *síkalakváltozási* mezőben, illetve *torzulási* mezőben kihajtott vágat esetére, majd alkalmazzuk a szuperpozíció elvét. A két megoldás „összege” megadja a kiegészítő feszültségeket, a kiegészítő deformációkat és a kiegészítő elmozdulásokat. Ez utóbbi kettő „kiegészítő” elnevezésének, mint láttuk nincs semmi értelme, mert üregnyitás után nem jelentkeznek a primer deformációk és elmozdulások, ezért gyakorlatilag zérusnak is tekinthetnénk őket. Az elnevezéssel arra kívántunk utalni, hogy a kiegészítő feszültségekhez rendelt deformációkról és elmozdulásokról van szó.

7.1. SÍKALAKVÁLTOZÁSI MEZŐBEN KIHAJTOTT VÁGAT

Ekkor az egyensúlyi és geometriai egyenletek – a z koordinátától való függetlenség következtében – a következők:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\tau}_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\varphi}{r} &= 0 & \bar{\varepsilon}_r &= \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}, \quad \bar{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\bar{u}_r}{r}, \quad \bar{\varepsilon}_z = 0, \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \frac{\bar{\tau}_{r\varphi}}{r} &= 0 & \bar{\gamma}_{r\varphi} &= \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \varphi} - \frac{\bar{u}_\varphi}{r}. \end{aligned}$$

A feladatot az ún. *erőműdszerrel* (BELTRAMI-egyenlet), vagyis csak a feszültségekre visszavezetve oldjuk meg. Ekkor a feszültségtenzor skalár koordinátáinak meghatározása az

$$F = F(r, \varphi)$$

feszültségfüggvény felhasználásával történhet, a

$$(27) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right), & \bar{\sigma}_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \bar{\tau}_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} \end{aligned}$$

képletek alapján. Az F függvény meghatározása érdekében vegyük figyelembe, hogy

$$\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = \Delta F.$$

Ugyanakkor ismert, hogy $(\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_\varphi)$ harmonikus függvény, vagyis

$$\Delta(\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_\varphi) = 0, \quad \Rightarrow \quad \Delta(\Delta F) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\Delta F = 0,$$

tehát az F kielégíti

$$(28) \quad \begin{aligned} \Delta\Delta F \equiv & \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \varphi^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0 \end{aligned}$$

biharmonikus differenciálegyenletet.

Szemügyre véve ezt a differenciálegyenletet, látható, hogy abban a φ szerinti deriváltak másodrendben és negyedrendben fordulnak elő. Ez azt sugallja, hogy az F függvényt célszerű lenne

$$F(r, \varphi) \equiv F_1(r) + F_2(r, \varphi)$$

alakban megválasztani úgy, hogy F_2 -nek a φ szerinti második és negyedik deriváltja legfeljebb csak állandó szorzóban különbözzék F_2 -től. Ekkor ugyanis a (28) egyenlet bal oldalának egyik része csak r -től függ, másik része pedig $g(r) \cdot b(\varphi)$ alakú. Ez megkönnyítheti a differenciálegyenlet megoldását.

Ennek megfelelően a (28) differenciálegyenlet megoldását

$$F(r, \varphi) = f(r) + g(r)b(\varphi)$$

alakban keressük, ahol $b(\varphi) = \frac{1}{2}(p_x - p_y)\cos 2\varphi + t_{xy}\sin 2\varphi$.

Ebben az esetben

$$\frac{d^2 b(\varphi)}{d\varphi^2} = -4b(\varphi), \quad \frac{d^4 b(\varphi)}{d\varphi^4} = 16b(\varphi),$$

és az f és g függvényekre a következő két kifejezés adódik:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta f(r) & \equiv \frac{\partial^4 f}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial f}{\partial r}, \\ \Delta\Delta g(r)b & \equiv \left(\frac{\partial^4 g}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 g}{\partial r^3} - \frac{9}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{9}{r^3} \frac{\partial g}{\partial r} \right) b. \end{aligned}$$

Ezek után felhasználva a $\Delta\Delta$ operátor linearitását, vagyis azt, hogy

$$\Delta\Delta F = \Delta\Delta(f + gb) = \Delta\Delta f + \Delta\Delta gb,$$

a (28) alatti $\Delta\Delta F = 0$ differenciálegyenlet alakja:

$$\frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{df}{dr} + \left(\frac{d^4 g}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 g}{dr^3} - \frac{9}{r^2} \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{9}{r^3} \frac{dg}{dr} \right) b = 0.$$

Ez az egyenlet minden φ esetén fennáll, tehát φ -re nézve azonosság. Minden φ -re csak úgy teljesülhet, ha

$$(29) \quad \frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{df}{dr} = 0,$$

$$(30) \quad \frac{d^4 g}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 g}{dr^3} - \frac{9}{r^2} \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{9}{r^3} \frac{dg}{dr} = 0.$$

Végeredményben két negyedrendű, közönséges, EULER-féle differenciálegyenletet kaptunk.

A (29) differenciálegyenlet partikuláris megoldásait $f = r^\lambda$ alakban keressük. Ezt a feltételezett megoldást a (29)-be helyettesítve, a $\lambda^2(\lambda - 2)^2 = 0$ karakterisztikus egyenletet kapjuk, amelynek gyökei: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 2$. Tehát a differenciálegyenlet alaprendszer $f_1 = 1, f_2 = \ln r, f_3 = r^2, f_4 = r^2 \ln r$, így az általános megoldás:

$$f(r) = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D.$$

A (30) egyenlet esetében hasonló módon eljárva: $\lambda^4 - 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 16\lambda = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2, \lambda_5 = 4, \Rightarrow g_1 = 1, g_2 = r^2, g_3 = r^{-2}, g_4 = r^4$, az általános megoldás:

$$g(r) = E r^2 + 2G + \frac{H}{r^2} + J r^4,$$

Ennek megfelelően a $\Delta \Delta F = 0$ bennünket érdeklő megoldása:

$$(31) \quad F(r, \varphi) = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D + \left(E r^2 + 2G + \frac{H}{r^2} + J r^4 \right) b(\varphi),$$

ahol $A, B, \dots, J$ tetszőleges állandók.

Az $F(r, \varphi)$ feszültségfüggvény ismeretében a feszültségek (27) képletekkel számíthatók:

$$\bar{\sigma}_r \equiv \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C - \left(2E + \frac{8G}{r^2} + \frac{6H}{r^4} \right) b(\varphi),$$

$$\bar{\sigma}_\varphi \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C + \left(2E + \frac{6H}{r^4} + 12J r^4 \right) b(\varphi),$$

$$\bar{\tau}_{r\varphi} \equiv -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = -\left(E - \frac{G}{r^2} - \frac{3H}{r^4} + 3J r^2 \right) c(\varphi),$$

Ez utóbbi esetben kihasználtuk, hogy $\frac{db(\varphi)}{d\varphi} = 2c(\varphi)$.

Ismételten felhívjuk a figyelmet arra, hogy a most kiszámított feszültségek a kiegészítő feszültségek, melyek értéke nullához tart, ha r tart a végtelenhez. Ennek következtében $B = 0$, $C = 0$, $E = 0$, $J = 0$, ezért

$$(32) \quad \bar{\sigma}_r = \frac{A}{r^2} - \left(\frac{4G}{r^2} + \frac{6H}{r^4} \right) b(\varphi), \quad \bar{\sigma}_\varphi = -\frac{A}{r^2} + \frac{6H}{r^4} b(\varphi), \quad \bar{\tau}_{r\varphi} = \left(\frac{2G}{r^2} + \frac{6H}{r^4} \right) c(\varphi).$$

Az A , G és H állandók meghatározásához azt a peremfeltételt használjuk fel, hogy a vágatnyitás után a vágat pereme terheletlen. A (9a)-ból látható, hogy ez a kiegészítő feszültségekre akkor teljesül, ha

$$a + b(\varphi) + \bar{\sigma}_r(R, \varphi) \equiv 0 \quad \text{és} \quad c(\varphi) + \bar{\tau}_{r\varphi}(R, \varphi) \equiv 0.$$

Fogalmazhatunk úgy, hogy a perem akkor terheletlen, ha a kiegészítő feszültségek értéke a peremen a primer mező negatív értékeivel egyezik meg:

$$\bar{\sigma}_r(R, \varphi) \equiv -a - b(\varphi), \quad \bar{\tau}_{r\varphi}(R, \varphi) \equiv -c(\varphi).$$

A $\bar{\sigma}_r$ és $\bar{\tau}_{r\varphi}$ feszültségek (32)-ben felírt kifejezéseit felhasználva, ez utóbbi két azonosság

$$\frac{A}{R^2} - \left(\frac{4G}{R^2} + \frac{6H}{R^4} \right) b(\varphi) \equiv -a - b(\varphi), \quad \left(\frac{2G}{R^2} + \frac{6H}{R^4} \right) c(\varphi) \equiv -c(\varphi)$$

alakú lesz, amelyek csak úgy teljesülhetnek, ha

$$\frac{A}{R^2} = -a \quad \text{és} \quad \frac{4G}{R^2} + \frac{6H}{R^4} = 1, \quad \text{valamint} \quad \frac{2G}{R^2} + \frac{6H}{R^4} = -1.$$

Innen

$$A = -aR^2, \quad G = R^2, \quad 6H = -3R^4.$$

Ezeket az állandókat a (32)-be helyettesítve, a keresett *kiegészítő* feszültségek:

$$(33) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_r(r, \varphi) &= -a \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \left[4 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] b(\varphi), & \bar{\tau}_{r\varphi} &= \left[2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] c(\varphi), \\ \bar{\sigma}_\varphi(r, \varphi) &= +a \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 b(\varphi), & \bar{\tau}_{\varphi z} &= 0, \\ \bar{\sigma}_z(r, \varphi) &= p_z - 4 \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 b(\varphi), & \bar{\tau}_{zr} &= 0. \end{aligned}$$

illetve⁴ a *szekunder feszültségi állapot*:

⁴ nem a teljes feladathoz, hanem csak a sicalakváltozási részéhez tartozó

$$\begin{aligned}
\sigma_r(r, \varphi) &= a \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] + \left[1 - 4 \left(\frac{R}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] b(\varphi), & \tau_{r\varphi} &= \left[1 + 2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] b(\varphi), \\
\sigma_\varphi(r, \varphi) &= a \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] - \left[1 + 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] b(\varphi), & \tau_{\varphi z} &= 0, \\
\sigma_z(r, \varphi) &= p_z - 4 \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 b(\varphi), & \tau_{zr} &= 0.
\end{aligned}$$

A tengelyirányú feszültséget az

$$\hat{\varepsilon}_z = \frac{1}{2G} \hat{\sigma}_z - \frac{3K - 2G}{18KG} (\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_\varphi + \hat{\sigma}_z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\sigma}_z = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} (\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_\varphi)$$

feltételből határoztuk meg.

Az anyagtörvény

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_r &= \frac{1}{2G} \hat{\sigma}_r - \frac{3K - 2G}{18KG} (\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_\varphi + \hat{\sigma}_z), \\
\hat{\varepsilon}_\varphi &= \frac{1}{2G} \hat{\sigma}_\varphi - \frac{3K - 2G}{18KG} (\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_\varphi + \hat{\sigma}_z), \\
\gamma_{r\varphi} &= \frac{\hat{\tau}_{r\varphi}}{G}
\end{aligned}$$

komponensegyenleteiből kiadódik

az alakváltozási állapot:

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_r(r, \varphi) &= -\frac{a}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{1}{2G} \left[4 \frac{3K + 4G}{6K + 2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] b(\varphi), \\
\hat{\varepsilon}_\varphi(r, \varphi) &= +\frac{a}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \frac{1}{2G} \left[4 \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] b(\varphi), \\
\hat{\varepsilon}_z(r, \varphi) &= 0, \\
\hat{\gamma}_{r\varphi}(r, \varphi) &= \frac{1}{G} \left[2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] b(\varphi), \\
\hat{\gamma}_{\varphi z}(r, \varphi) &= 0, \\
\hat{\gamma}_{zr}(r, \varphi) &= 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Az elmozdulások számításához a geometriai egyenleteket használjuk fel.

Az $\hat{\varepsilon}_r = \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r}$ egyenlet integrálásával megkapjuk az $\hat{u}_r = \int \hat{\varepsilon}_r dr$ sugárirányú elmozdulást, ha kihasználjuk azt, hogy $\hat{u}_r$ értéke a végtelenben nulla, aminek következtében a φ -től függő integrálási állandó nulla.⁵

⁵ Ez egyenértékű azzal, mintha az $\hat{u}_r = \int_{\infty}^r \hat{\varepsilon}_r dr'$ improprius integrált számítottuk volna.

Az $\hat{u}_r$ ismeretében meghatározható az $\hat{u}_\varphi$ tangenciális elmozdulás

- vagy az $\hat{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\hat{u}_r}{r}$ integrálása útján: $\hat{u}_\varphi = \int (r \hat{\varepsilon}_\varphi - \hat{u}_r) d\varphi$,
- vagy a $\hat{\gamma}_{r\varphi} = \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} - \frac{\hat{u}_\varphi}{r}$ egyenlet felhasználásával.

Ez utóbbi esetben $\hat{u}_\varphi$ egy elsőrendű differenciálegyenlet megoldásaként kapható.⁶

Ennek megfelelően – mivel sík alakváltozásról van szó –

az *elmozdulás állapot*:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_r(r, \varphi) &= \frac{aR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{R}{2G} \left[4 \frac{3K+4G}{6K+2G} \left(\frac{R}{r} \right) - \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] b(\varphi), \\
 \hat{u}_\varphi(r, \varphi) &= + \frac{R}{2G} \left[2 \frac{6G}{6K+2G} \left(\frac{R}{r} \right) + \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] c(\varphi), \\
 \hat{u}_z(r, \varphi) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

7.2. TORZULÁSI MEZŐBEN KIHAJTOTT VÁGAT

Most a feladatot arra az esetre oldjuk meg, amikor a primer állapotot az

$$\mathbf{F}_2^p = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & t_{rz} \\ 0 & 0 & t_{\varphi z} \\ t_{zr} & t_{z\varphi} & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & e(\varphi) \\ 0 & 0 & d(\varphi) \\ e(\varphi) & d(\varphi) & 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} t_{\varphi z} &= t_{yz} \cos \varphi - t_{zx} \sin \varphi := d(\varphi) = \frac{\partial e}{\partial \varphi}, \\ t_{zr} &= t_{yz} \sin \varphi + t_{zx} \cos \varphi := e(\varphi) = -\frac{\partial d}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

feszültségtenzor esetére keressük.

Az előző megoldási módszertől eltérően, ebben az esetben a LAMÉ-egyenletek u_z elmozdulásra vonatkozó alakját fogjuk felhasználni, figyelembe véve azt, hogy a meghatározandó ismeretlenek z -től függetlenek. Ekkor

$$\Delta \hat{u}_z(r, \varphi) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \hat{u}_z = 0.
 \tag{36}$$

Keressük ennek megoldását

$$(*) \quad \hat{u}_z \equiv f(r) + h(r)e(\varphi)$$

alakban.

⁶ A kétféle megoldás természetesen ugyanazt az eredményt adja.

Behelyettesítve ezt a (36) differenciálegyenletbe, a

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} h \right) e(\varphi) \equiv 0$$

egyenletet kapjuk, kihasználva, hogy $\frac{d^2}{d\varphi^2} e(\varphi) = -e(\varphi)$. Ennek az egyenletnek minden

φ -re teljesülnie kell, tehát φ -re nézve azonosság. Ez csak akkor lehetséges, ha

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} h = 0.$$

E két közönséges, lineáris differenciálegyenlet megoldásait $f = r^\lambda$, illetve $h = r^\lambda$ alakban keresve, az általános megoldás

$$f(r) = A \ln r + B, \quad h(r) \equiv \frac{C}{r} + Dr,$$

$$\hat{u}_z = \hat{u}_z(r, \varphi) = A \ln r + B + \left(\frac{C}{r} + Dr \right) e(\varphi).$$

Tekintettel arra, hogy az elmozdulás korlátos és határértéke a végtelenben zérus, következik, hogy $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$, s így a végeredmény

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{z\varphi} &= \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] d(\varphi), & \hat{\tau}_{z\varphi} &= + \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi), & \hat{\gamma}_{z\varphi} &= + \frac{1}{G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi), \\ \hat{\tau}_{zr} &= \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] e(\varphi), & \hat{\tau}_{zr} &= - \left(\frac{R}{r} \right)^2 e(\varphi), & \hat{\gamma}_{zr} &= - \frac{1}{G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 e(\varphi), \\ \hat{u}_z &= \frac{R}{G} \left(\frac{R}{r} \right) e(\varphi), \end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}_r = 0, \quad \hat{\sigma}_\varphi = 0, \quad \hat{\sigma}_z = 0, \quad \hat{\varepsilon}_r = 0, \quad \hat{\varepsilon}_\varphi = 0, \quad \hat{\varepsilon}_z = 0, \quad \hat{u}_r = 0, \quad \hat{u}_\varphi = 0.$$

Említésre méltó még, hogy az u_z hosszirányú (axiális) elmozdulás nem függ z -től, de függ r -től és φ -től. Annak r szerinti változását tekintve látható, hogy u_z legnagyobb értéke

$$\max |\hat{u}_z| = |\hat{u}_z(R, \varphi)| \quad \text{és} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{u}_z = 0.$$

Az

$$(37) \quad \hat{u}_z(r, \varphi) = \frac{R}{G} \frac{R}{r} e(\varphi) = \frac{R}{G} \left(\frac{R}{r} \right) (t_{yz} \sin \varphi + t_{zx} \cos \varphi) = \frac{R}{G} \left(\frac{R}{r} \right) A \sin(\varphi + \alpha),$$

$$A = \sqrt{t_{yz}^2 + t_{zx}^2}, \quad \cos \alpha = \frac{t_{yz}}{A}, \quad \sin \alpha = \frac{t_{zx}}{A}$$

összefüggésből az látható, hogy adott r érték esetén $\hat{u}_z$ akkor lesz maximális, ha $\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}$, azaz ha $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$; és akkor minimális, ha $\varphi = \frac{3\pi}{2} - \alpha$,

$$\max \hat{u}_z = \frac{R}{G} \left(\frac{R}{r} \right) A, \quad \min \hat{u}_z = -\frac{R}{G} \left(\frac{R}{r} \right) A.$$

7.3. A TELJES MEGOLDÁS

Az előző két eset (7.1 és 7.2) szuperpozíciójaként:

a szekunder feszültségi állapot:

$$(38) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= a \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] + \left[1 - 4 \left(\frac{R}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] b(\varphi), & \tau_{r\varphi} &= \left[1 + 2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] c(\varphi), \\ \sigma_\varphi &= a \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] - \left[1 + 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] b(\varphi), & \tau_{\varphi z} &= \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] d(\varphi), \\ \sigma_z &= p_z - 4 \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 b(\varphi), & \tau_{zr} &= \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] b(\varphi), \end{aligned}$$

és
$$\hat{\sigma}_o = -4 \frac{3K}{6K + 2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 b(\varphi),$$

az alakváltozási állapot:

$$(39) \quad \begin{aligned} \hat{\varepsilon}_r &= -\frac{a}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{1}{2G} \left[4 \frac{3K + 4G}{6K + 2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] b(\varphi), \\ \hat{\varepsilon}_\varphi &= +\frac{a}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \frac{1}{2G} \left[4 \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] b(\varphi), \\ \hat{\varepsilon}_z &= 0, \\ \hat{\gamma}_{r\varphi} &= +\frac{1}{G} \left[2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] c(\varphi), \\ \hat{\gamma}_{\varphi z} &= +\frac{1}{G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi), \\ \hat{\gamma}_{zr} &= -\frac{1}{G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 e(\varphi), \end{aligned}$$

és
$$\hat{\varepsilon}_o = -4 \frac{2G}{6K + 2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 b(\varphi),$$

az elmozdulási állapot:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_r(r, \varphi) &= \frac{aR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{R}{2G} \left[4 \frac{3K+4G}{6K+2G} \left(\frac{R}{r} \right) - \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] b(\varphi), \\
 \hat{u}_\varphi(r, \varphi) &= -\frac{R}{2G} \left[2 \frac{6G}{6K+2G} \left(\frac{R}{r} \right) + \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] c(\varphi), \\
 \hat{u}_z(r, \varphi) &= \frac{1}{G} \left(\frac{R}{r} \right) e(\varphi).
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

7.4. A VÁGAT ALAKJÁNAK MEGVÁLTOZÁSA

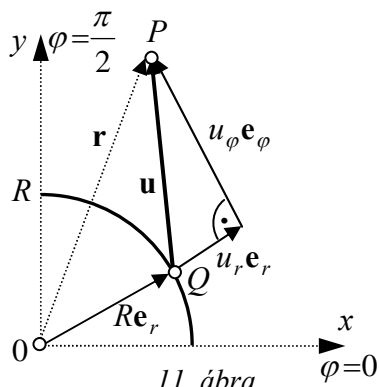
A vágatnyitás során a közetből körszelvényű hengert emelünk ki. A külső erőhatások miatt bekövetkező elmozdulások miatt azonban a nyitás után a körszelvény alakja megváltozik. Mivel az elmozdulások a z koordinátától nem függenek, ezért elegendő a $z = 0$ síkban lévő peremgörbe, azaz R sugarú kör alakjáról tájékozódni. Ezért most azt vizsgáljuk meg, hogy ez a kör a nyitás következtében milyen görbévé torzult.

A vágat peremének elmozdulását nyilván az $r = R$ helyettesítéssel kapjuk a (40) képletekből. E szerint

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{aligned} u_r(R, \varphi) &= \frac{aR}{2G} + \frac{R}{2G} k b(\varphi), & a &= \frac{1}{2}(p_x - p_y), & b(\varphi) &= \frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi, \\ u_\varphi(R, \varphi) &= -\frac{R}{2G} k c(\varphi), & c(\varphi) &= -\frac{1}{2}(p_x - p_y) \sin 2\varphi + t_{xy} \cos 2\varphi, \\ u_z(R, \varphi) &= \frac{R}{G} e(\varphi), & e(\varphi) &= t_{yz} \sin \varphi + t_{xz} \cos \varphi, & k &= \frac{6K+14G}{6K+2G}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

A hengerpalást, egyúttal az R sugarú kör $Q(R, \varphi, 0)$ pontjának elmozdulása

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\varphi \mathbf{e}_\varphi + u_z \mathbf{e}_z = \left\| u_r \ u_\varphi \ u_z \right\|.$$



A 11. ábrán természetesen az $\mathbf{u}$ vektornak csak a $z = 0$ síkbeli vetülete látszik, erősen torzítva, amikor az elmozdulás a vágatból kifelé mutat.

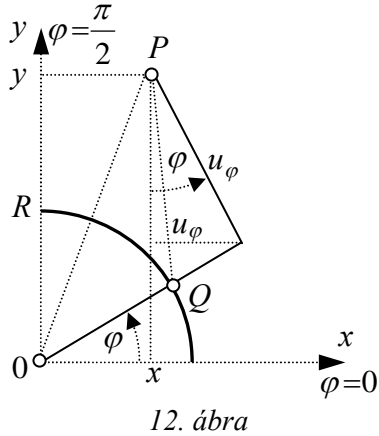
Az R sugarú kör minden egyes Q pontjához így hozzárendelhető egy-egy P pont. Ha Q végighalad az R sugarú körön, akkor a P pont végighalad egy térgörbén. A továbbiakban hagyjuk figyelmen kívül az $\mathbf{u}$ vektor $\hat{u}_z$ koordinátáját. Ekkor megkapjuk a térgörbe $z = 0$ síkra vetített képét.

Legyen az 0 és Q pontokat összekötő vektor $R\mathbf{e}_r$, és jelölje $\mathbf{r}$ az origóból a P pontba mutató vektort, amely egyúttal az említett síkgörbe általános pontjának helyvektora. Ekkor ennek a síkgörbének, vagyis a torzult kör vetületének a vektoregyenlete:

$$(42) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi) = [R + \hat{u}_r(R, \varphi)]\mathbf{e}_r + \hat{u}_\varphi(R, \varphi)\mathbf{e}_\varphi.$$

Ebben a vektor–skalár függvényben φ a változó paraméter, $\mathbf{r}$ a P futópont helyvektora, $\mathbf{e}_r$ és $\mathbf{e}_\varphi$ pedig φ szöghöz tartozó bázisvektorok. Elsősorban ennek a vetületi görbének a jellegét próbáljuk körülírni.

Bebizonyítjuk, hogy ez a görbe ellipszis. A P pont DESCARTES-féle koordinátái legyenek x, y , így $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Ekkor a (42) görbe skaláris egyenletrendszere a 12. ábra alapján könnyen felírható:



12. ábra

$$(43) \quad \begin{cases} x = (R + \hat{u}_r)\cos\varphi - \hat{u}_\varphi\sin\varphi, \\ y = (R + \hat{u}_r)\sin\varphi + \hat{u}_\varphi\cos\varphi, \end{cases}$$

ahol $\hat{u}_r$ és $\hat{u}_\varphi$ a (41) képletekkel adóttak.

Ezeket felhasználva, kissé hosszadalmas átalakítások után a (43) egyenletrendszer alakja:

$$(44) \quad \begin{cases} x = R\left[1 + \frac{a}{2G} + \frac{k}{2G}\frac{1}{2}(p_x - p_y)\right]\cos\varphi + \frac{Rk}{2G}t_{xy}\sin\varphi, \\ y = R\left[1 + \frac{a}{2G} - \frac{k}{2G}\frac{1}{2}(p_x - p_y)\right]\sin\varphi + \frac{Rk}{2G}t_{xy}\cos\varphi. \end{cases}$$

A további könnyebb kezelhetőség érdekében vezessük be az

$$(45) \quad A := R\left[1 + \frac{a}{2G} + \frac{k}{2G}\frac{1}{2}(p_x - p_y)\right], \quad B := R\left[1 + \frac{a}{2G} - \frac{k}{2G}\frac{1}{2}(p_x - p_y)\right], \quad C := \frac{Rk}{2G}t_{xy}$$

jelöléseket. Így a (44) rendszer alakja:

$$(46) \quad x = A\cos\varphi + C\sin\varphi, \quad y = B\sin\varphi + C\cos\varphi.$$

Ebből a paraméteres egyenletrendszerből kiküszöböljük a φ paramétert. Ennek során azt kapjuk, hogy

$$\cos\varphi = \frac{Bx - Cy}{AB - C^2}, \quad \sin\varphi = \frac{Ay - Cx}{AB - C^2}.$$

Ezeket behelyettesítve a (46) egyenletekből kapott

$$x^2 + y^2 = A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi + (2BC + 2AC) \sin \varphi \cos \varphi + C^2$$

összefüggésbe, a vetületi görbe DESCARTES-koordinátás egyenlete:

$$(47) \quad (B^2 + C^2)x^2 + (A^2 + C^2)y^2 - (2AC + 2BC)xy = (AB - C^2)^2.$$

A bizonyítást ezzel befejezettnek is tekinthetjük, ugyanis egyrészt a (47) egyenlet x -ben és y -ban másodfokú, tehát ez egy másodrendű görbe egyenlete, másrészt a (46) egyenletekből látszik, hogy a görbének nincs végtelen távoli pontja (x és y korlátos), tehát az csak ellipszis lehet.

Viszont további információk nyerhetők az ellipszis jellemző adatairól, ha a (47) görbénél elvégezzük a főtengely transzformációt. Legyenek ekkor az új koordinátarendszer tengelyei ξ és η . A koordinátarendszert δ szöggel elforgatjuk az origó körül úgy, hogy a görbe egyenletében a $\xi \eta$ tag együtthatója nulla legyen. Ehhez oldjuk meg a

$$\begin{vmatrix} B^2 + C^2 - \lambda & -AC - BC \\ -AC - BC & A^2 + C^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

karakterisztikus egyenletet.

Ennek gyökei (a sajátértékek) legyenek λ_1 és λ_2 .

Így az ellipszis kanonikus egyenlete

$$(48) \quad \frac{\xi^2}{\frac{(AB-C^2)^2}{\lambda_1}} + \frac{\eta^2}{\frac{(AB-C^2)^2}{\lambda_2}} = 1.$$

A féltengelyek hossza:

$$a' = \frac{AB - C^2}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \text{ill.} \quad b' = \frac{AB - C^2}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

Ha $t_{xy} = 0$, akkor az elforgatás szöge 0, továbbá $C = 0$ és így a féltengelyek hossza A , ill. B . Ebben a speciális esetben az ellipszis DESCARTES-koordinátás egyenlete:

$$(49) \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

A koordinátarendszer elforgatásának δ szögére a

$$(50) \quad \operatorname{tg} 2\delta = -\frac{(2AC + 2BC)}{B^2 - A^2} = \frac{2C}{A - B} = \frac{2t_{xy}}{p_x - p_y}$$

összefüggés érvényes. Innen látszik, hogy δ értéke egyrészt függ t_{xy} -től, másrészt $(p_x - p_y)$ -től. Ha $t_{xy} = 0$, akkor $\delta = 0$, ha pedig $p_x = p_y$ akkor $\delta = \pi/4$.

A fenti összefüggések levezetésénél követtük azt, a szilárdságtanban alkalmazott megállapodást, mely szerint a pozitív feszültség húzást, a negatív nyomást jelent. A közetmechanikában ezt fordítva alkalmazzák. Ha mi is ez utóbbi megállapodással élünk, akkor az azt jelenti, hogy pozitív $\hat{u}_r$ esetén a vágat peremének pontja befelé, a vágat belsejébe mozdul el. Ekkor a (42) és (43) képletek annyiban módosulnak, hogy $\hat{u}_r$ helyére $-\hat{u}_r$, $\hat{u}_\varphi$ helyére $-u_\varphi$ kerül. Ebből kifolyólag az (45)-ben szereplő együtthatók:

$$(51) \quad A = R \left[1 - \frac{a}{2G} - \frac{k}{2G} \frac{1}{2} (p_x - p_y) \right], B = R \left[1 - \frac{a}{2G} + \frac{k}{2G} \frac{1}{2} (p_x - p_y) \right], C = \frac{-Rk}{2G} t_{xy}.$$

A többi képlet formailag változatlan. Az elmozdulások tehát ekkor is változatlanul a (41) képletekkel számíthatók, de a torzult peremgörbe vetületének egyenletrendszere:

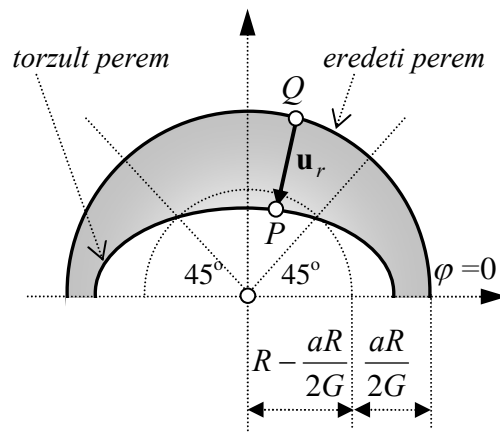
$$(52) \quad x = (R - \hat{u}_r) \cos \varphi + \hat{u}_\varphi \sin \varphi, \quad y = (R - \hat{u}_r) \sin \varphi - \hat{u}_\varphi \cos \varphi.$$

1. PÉLDA. Ábrázoljuk poláris koordináta-rendszerben az $r(\varphi) = R - \hat{u}_r(R, \varphi)$ függvényt, ha $t_{xy} = 0$ és $p_y > p_x > 0$.

MEGOLDÁS. Ebben az esetben $b(\varphi) = \frac{1}{2} (p_x - p_y) \cos 2\varphi$, és így

$$r(\varphi) = R - \frac{aR}{2G} - \frac{R}{2G} \frac{k}{2} (p_x - p_y) \cos 2\varphi, \quad k = \frac{6K + 14G}{6K + 2G}, \quad a = \frac{1}{2} (p_x + p_y).$$

Innen látható, hogy $r(\varphi)$ értékei úgy származnak, hogy az R sugarú kör pontjaitól kiindulva sugárirányba kell felmérni $\hat{u}_r$ értékeit a vágat belseje felé irányítva.



13. ábra

Eljárhatunk úgy is, hogy az $R - \frac{aR}{2G}$ sugarú kör pontjaiból kiindulva sugárirányban előjel-helyesen felmérjük $\frac{R}{2G} \frac{k}{2} (p_x - p_y) \cos 2\varphi$ értékét (ne feledjük, hogy $p_y > p_x$). Ez utóbbi függvény π szerint periodikus, és előjelet vált a $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ helyeken (13. ábra). Az ábrán $\hat{u}_r$ értékei erősen felnagyítottak, melyeket szürke árnyalás szemléltet.

Az $r(\varphi)$ görbének csak a felső (a $0 \leq \varphi \leq \pi$ intervallumra eső) felét ábrázoltuk. A görbe nem ellipszis annak ellenére, hogy tengelymetszetei (A és B) a (49) képlettel adott ellipszis féltengelyeivel egyeznek meg. Ennek az egyezésnek az az oka, hogy a tengelymetszeteknek megfelelő pontokban $\hat{u}_\varphi = 0$, részletesebben:

$$\hat{u}_\varphi(R, 0) = \hat{u}_\varphi(R, \pi/2) = \hat{u}_\varphi(R, \pi) = \hat{u}_\varphi(R, 3\pi/2) = 0.$$

Az ábrán szépen látszik, hogy a perem radiális elmozdulása $x = 0$ -nál, azaz $\varphi = \pi/2$ -nél és $\varphi = 3\pi/2$ -nél a legnagyobb, összhangban azzal, hogy $p_y > p_x$. A perem kissé belapul.

2. PÉLDA. Számítsuk ki a peremgörbéhez tartozó $\hat{u}_r(R, \varphi)$, $\hat{u}_\varphi(R, \varphi)$ elmozdulás-komponenseket, ha $p_x = 30$ MPa, $p_y = 50$ MPa, $t_{xy} = t_{xz} = t_{yz} = 20$ MPa, $2G = 4.000$ MPa, $3K = 20.000$ MPa, $R = 200$ cm.

MEGOLDÁS. A (41) képleteket használva,

$$\begin{aligned} \hat{u}_r(R, \varphi) &= \frac{Ra}{2G} + \frac{Rk}{2G} \left[\frac{1}{2} (p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] = 2 + \frac{17}{22} (-\cos 2\varphi + 2 \sin 2\varphi) = \\ &= 2 + 1,73 \sin(2\varphi - 2\varphi_1), \quad \varphi_1 = 0,2318 \text{ Rad} = 13,28^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_\varphi(R, \varphi) &= \frac{Rk}{2G} \left[-\frac{1}{2} (p_x - p_y) \sin 2\varphi + t_{xy} \cos 2\varphi \right] = \frac{17}{22} (+\sin 2\varphi + 2 \cos 2\varphi) = \\ &= 1,73 \sin(2\varphi + 2\varphi_2), \quad \varphi_2 = 0,5536 \text{ Rad} = 31,719^\circ. \end{aligned}$$

$$\hat{u}_z(R, \varphi) = \frac{R}{G} (t_{yz} \sin \varphi + t_{xz} \cos \varphi) = \sin \varphi + \cos \varphi = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4).$$

Figyelembe véve azt, hogy

$$\frac{d\hat{u}_r}{d\varphi} = \frac{Rk}{2G} [-(p_x - p_y) \sin 2\varphi + 2t_{xy} \cos 2\varphi] = 2\hat{u}_\varphi,$$

látható, hogy $\hat{u}_r$ -nek ott van szélsőértéke, ahol $\hat{u}_\varphi$ -nek zérus helye van. Az $\hat{u}_r$ és $\hat{u}_\varphi$ elmozdulások π szerint, $\hat{u}_z$ pedig 2π szerint periodikusak. Az $\hat{u}_r$ ebben az esetben negatív

értéket nem vesz fel. Ez azt jelenti, hogy a vágat peremének minden pontja a vágat belseje felé mozdul el.

3. PÉLDA. Bizonyítsuk be, hogy a torzult peremgörbe síkgörbe.

MEGOLDÁS. A (46) képletekből és az $\hat{u}_z(R, \varphi) = \frac{R}{G} e(\varphi)$ összefüggésből a torzult perem-görbe DESCARTES-koordinátás, paraméteres egyenletrendszerre

$$(*) \quad \begin{cases} x = A \cos \varphi + C \sin \varphi, \\ y = C \cos \varphi + B \sin \varphi, \\ z = D \cos \varphi + E \sin \varphi, \end{cases} \quad D = \frac{R}{G} t_{xz}, \quad E = \frac{R}{G} t_{yz}$$

alakú. A paraméteres vektoregyenlete

$$\mathbf{r} = (A \cos \varphi + C \sin \varphi) \mathbf{i} + (C \cos \varphi + B \sin \varphi) \mathbf{j} + (D \cos \varphi + E \sin \varphi) \mathbf{k}.$$

A differenciálgeometriából ismert, hogy a térgörbe torziója, azaz a síkból való kicsavarodásának mértéke arányos az $\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}$ vegyes szorzattal. Egyszerűen belátható, hogy jelen esetben $\ddot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{r}}$, így az $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$ vektorok lineárisan függők, ezért $\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \equiv 0$. Ekkor pedig a görbe torziója zérus, így a görbe síkgörbe, vagyis benne fekszik a simulósíkjában. Ez a sík a $z = 0$ síkkal γ szöget zár be, ahol

$$\cos \gamma = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \mathbf{k}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|} = \frac{AB - C^2}{\sqrt{(CE - BD)^2 + (CD - AE)^2 + (AB - C^2)^2}}.$$

Mindebből következik, hogy a torzult peremgörbe (mint térgörbe) is ellipszis. Ugyanis mivel annak a $z = 0$ síkon vett vetülete ellipszis, ezért az rajta fekszik azon az elliptikus hengeren, vagyis másodrendű felületen, amelynek vezérgörbéje ez a vetületi ellipszis. Másrészt az előbb igazoltuk, hogy a torzult peremgörbe síkgörbe. Ez azt jelenti, hogy ez utóbbi görbe egy másodrendű felület és egy sík metszésgörbéje. Az analitikus geometria egyik nevezetes tétele szerint a másodrendű felület síkmetszete másodrendű görbe. Mivel a görbe (*) egyenletrendszeréből látszik, hogy nincs végtelen távoli pontja, hiszen az x, y, z koordináták mindegyike korlátos, így a görbe csak ellipszis lehet (ideszámítva a kört is).

8. FEJEZET

AZ ÁLTALÁNOS REOLÓGIAI MEGOLDÁS A STANDARD MODELL ESETÉN

A kötetben lévő első cikkünkben, és itt a *Bevezetés*ben már említést tettünk arról, hogy az anyagtörvény reológiai modelljei formailag egységesen, a HOOKE-testnél megszokott módon a

$$(53) \quad \boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d \text{ és } \boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o$$

alakban írhatók fel, ahol $\tilde{G}$ és $\tilde{K}$ alkalmas módon megválasztott differenciáloperátorok (anyagoperátorok). A 4. fejezetben az anyagegyenletek felsorolásánál a t idő szerinti deriváltakat is tartalmazó egyenleteket az (53) egyenletekből származtattuk, mégpedig a *standard test* esetében a

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\tilde{G} := 2G \frac{\left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t}\right)}{\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)}, \quad 3\tilde{K} := 3K \frac{\left(1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t}\right)}{\left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right)} \end{array} \right\}.$$

anyagoperátor alkalmazásával. Ekkor a

$$(55) \quad \boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\epsilon}^d + 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d - \tau\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\sigma}^o = 3K\boldsymbol{\epsilon}^o + 3K_v\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o - \tau_o\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o$$

képletet kapjuk. Az (55) első egyenletét

$$\left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{\epsilon}^d = \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{\sigma}^d \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}^d = \frac{2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}\boldsymbol{\epsilon}^d$$

módon átrendezve, a $\boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\epsilon}^d$ alakú formális egyenlőséghez jutunk. Mint látható, a $2\tilde{G}$ operátort úgy használjuk, hogy például $2\tilde{G}u = v$ esetén teljesüljön a

$$\left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t}\right)u = \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)v$$

egyenlőség. Innen látszik, hogy ha $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, vagyis $\dot{u} = \dot{v} = 0$, akkor $2\tilde{G} = 2G$, ha pe-

dig $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} = \infty$, vagyis $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u} = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{v} = \infty$, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} 2\tilde{G} = \frac{2\eta}{\tau}$.

Ezek után a reológiai megoldások a HOOKE-féle megoldásokból formálisan úgy kaphatók meg, hogy a HOOKE-törvény esetére kapott megoldásokba G helyére a $\tilde{G}$, K helyére a $\tilde{K}$ operátort kell beírni. Ezzel a feladat persze még nincs megoldva, hiszen ezeknek az operátoroknak az alkalmazásával a HOOKE-féle megoldások differenciál-egyenletekké válnak, amelyeket még meg kell oldani.

ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETRE VEZETŐ ESET. Ezek után példaként nézzük meg, hogyan használható fel a $2\tilde{G}$ operátor, a formális jelölésen túl, a szögtorzulás $\hat{\gamma}_{z\varphi}(r, \varphi, t)$ reológiai változatának meghatározására, ha ismerjük a

$$\hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke} = \frac{1}{G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi)$$

HOOKE-féle változatot. Ekkor

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{z\varphi}(r, \varphi, t) &= \frac{1}{\bar{G}} \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi) \Rightarrow \tilde{G} \hat{\gamma}_{z\varphi} = \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{\gamma}_{z\varphi} = \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi) \Rightarrow \eta \dot{\hat{\gamma}}_{z\varphi} + G \hat{\gamma}_{z\varphi} = \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi).\end{aligned}$$

Kihasználtuk, hogy az egyenlet jobb oldalán szereplő $\left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi)$ nem függ t -től, ezért

$$\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi) = \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi).$$

Végül egy elsőrendű differenciálegyenletet kaptunk, amely

$$\eta \dot{\hat{\gamma}}_{z\varphi} + G \hat{\gamma}_{z\varphi} = G \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}$$

alakban is felírható. Általános megoldása $\hat{\gamma}_{z\varphi} = C e^{-\frac{G}{\eta}t} + \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}$. Innen látható, hogy ha $t \rightarrow \infty$, akkor $\hat{\gamma}_{z\varphi} \rightarrow \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}$, vagyis a reológiai megoldás $t \rightarrow \infty$ esetén tart a HOOKE-féle megoldáshoz (G és η pozitív állandók). A C integrálási állandó meghatározásához meg kell adni $\hat{\gamma}_{z\varphi}$ kezdeti, azaz $t=0$ -nál felvett értékét. Ez nyilván csak 0 és $\hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}$ közé eshet, hiszen $\hat{\gamma}_{z\varphi}$ növekvő függvény. Ezért célszerűnek látszik a $\hat{\gamma}_{z\varphi}(r, \varphi, 0) = k \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}(r, \varphi)$ választás, ahol $0 \leq k \leq 1$. Ekkor $C = (k-1) \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}$, így

$$(56) \quad \hat{\gamma}_{z\varphi} = \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke} \left[1 - (1-k) e^{-\frac{G}{\eta}t} \right] = \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke} \cdot \alpha(t), \quad \alpha(t) = 1 - (1-k) e^{-\frac{G}{\eta}t}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ebben az esetben a $\hat{\gamma}_{z\varphi}$ reológiai megoldás a $\hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}$ HOOKE-féle megoldásból egy $\alpha(t)$ tényezővel való szorzással kapható. Ha $k=0$, akkor $\hat{\gamma}_{z\varphi}$ a vágatnyitás pillanatában 0 -ról indul. Ha $k=1$, akkor $\hat{\gamma}_{z\varphi} = \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}$ már a vágatnyitás pillanatában. A gyakorlat számára fontos lehet a $k = \frac{G\tau}{\eta}$ választás. Ekkor

$$\hat{\gamma}_{z\varphi}(r, \varphi, 0) = \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke} \frac{G\tau}{\eta}, \text{ vagyis a vágatnyitás pillanatában a végtelen gyors nyitásnak}$$

megfelelő szögtorzulás érvényes. Ebben az esetben

$$\hat{\gamma}_{z\varphi} = \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke} \left[1 - \frac{\eta - G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right].$$

Megjegyezzük, hogy ezek az eredmények matematikailag annak következményei, hogy bármely

$$ay + by = f, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0 \text{ állandók, } f \text{ nem függ } t\text{-től}$$

alakú differenciálegyenlet olyan megoldása, amely kielégíti az $y(0) = kf$ kezdeti feltételt (k valós szám),

$$y = y(t) = f \cdot \left[\frac{1}{b} + \left(k - \frac{1}{b} \right) e^{-\frac{b}{a}t} \right] = f \cdot \alpha(t), \quad \alpha(t) = \frac{1}{b} + \left(k - \frac{1}{b} \right) e^{-\frac{b}{a}t}.$$

MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETRE VEZETŐ ESET. Következő példaként állítsuk elő a

$$(57) \quad \hat{\sigma}_z^{Hooke} = -4 \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 b(\varphi)$$

feszültség reológiai megfelelőjét.

Első lépésként $2G$ és $3K$ helyére írjuk be a $2\tilde{G}$ és $3\tilde{K}$ operátorokat:

$$\hat{\sigma}_z = -4 \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{6\tilde{K} + 2\tilde{G}} \left(\frac{R}{r} \right)^2 b(\varphi), \quad \Leftrightarrow \quad (6\tilde{K} + 2\tilde{G})\tilde{\sigma}_z = -4(3\tilde{K} - 2\tilde{G}) \left[\left(\frac{R}{r} \right)^2 b(\varphi) \right].$$

Felhasználva $2\tilde{G}$ és $3\tilde{K}$ (54)–beli értelmezését, rendezések és átalakítások után az

$$(58) \quad a\ddot{\sigma}_z + b\dot{\sigma}_z + c\hat{\sigma}_z = -4b(\varphi)(3K - 2G) \left(\frac{R}{r} \right)^2 = (6K + 2G)\hat{\sigma}_z^{Hooke},$$

$$a = 6K_v\tau + 2\eta\tau_0, \quad b = 6K\tau + 6K_v + 2G\tau_0 + 2\eta, \quad c = 6K + 2G$$

másodrendű differenciálegyenletet kapjuk. Általános megoldása

$$(59) \quad \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z(r, \varphi, t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \underbrace{\hat{\sigma}_z^{Hooke}}_{\hat{\sigma}_z(r, \varphi, \infty)},$$

ahol λ_1 és λ_2 az $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei. Mivel az a, b, c együtthatók pozitívak, ezért λ_1 és λ_2 negatív. Komplex gyökök esetén a gyökök valós része negatív. E miatt $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z^{Hooke} := \hat{\sigma}_z(r, \varphi, \infty)$.

A C_1 és C_2 állandókat a $\hat{\sigma}_z(0) = k\hat{\sigma}_z(\infty) = k\hat{\sigma}_z^{Hooke}$ és $\dot{\hat{\sigma}}_z(0) = 0$ kezdeti feltételek felhasználásával határozzuk meg ($0 \leq k \leq 1$). Az első feltétel abból a megfontolásból írható fel, hogy $\hat{\sigma}_z$ kezdeti értéke 0 és $\hat{\sigma}_z^{Hooke}$ közé esik, a másik az 5.2 pontban levezetett összefüggésből. Mindezek után

$$(60) \quad \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z(r, \varphi, t) = \hat{\sigma}_z^{Hooke}(r, \varphi) \left[1 + \frac{\lambda_2(k-1)}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1(k-1)}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \right] = \hat{\sigma}_z^{Hooke} \cdot \alpha(t),$$

ahol $\alpha(t)$ a szögletes zárójelben lévő függvény.

Itt feltételeztük azt, hogy a karakterisztikus egyenlet gyökei valós számok és különböznek egymástól.

Ha azonban $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor

$$\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z(r, \varphi, t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} + \hat{\sigma}_z(\infty).$$

A $\hat{\sigma}_z(0) = k \hat{\sigma}_z^{Hooke}$, $\dot{\hat{\sigma}}_z(0) = 0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldás pedig

$$(60a) \quad \hat{\sigma}_z = \underbrace{\left\{ 1 + ((k-1) - \lambda(k-1)t) e^{\lambda t} \right\}}_{\alpha(t)} \cdot \hat{\sigma}_z^{Hooke} = \alpha(t) \cdot \hat{\sigma}_z^{Hooke} = \alpha(t) \cdot \hat{\sigma}_z(r, \varphi, \infty).$$

Ehhez a megoldáshoz úgy is eljuthatunk, hogy a különböző valós gyökök esetén kapott $\hat{\sigma}_z$ megoldás határértékét képezzük $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = \lambda$ esetén.

Ha a karakterisztikus egyenlet gyökei komplex számok, legyenek ezek

$$\lambda_1 = q + i\omega, \quad \lambda_2 = q - i\omega, \quad q = \frac{-b}{2a}, \quad \omega = \sqrt{4ac - b^2},$$

akkor $\hat{\sigma}_z$ felírható

$$(60b) \quad \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z(r, \varphi, t) = (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) e^{qt} + \hat{\sigma}_z^{Hooke}$$

alakban is. A $\hat{\sigma}_z(0)$, $\dot{\hat{\sigma}}_z(0) = 0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldás

$$\hat{\sigma}_z = \left\{ 1 + \left((k-1) \cos \omega t - \frac{1}{\omega} q(k-1) \sin \omega t \right) e^{qt} \right\} \cdot \hat{\sigma}_z^{Hooke} = \alpha(t) \cdot \hat{\sigma}_z^{Hooke}.$$

Ehhez a megoldáshoz a különböző valós gyökök esetén kapott $\hat{\sigma}_z$ megoldás átalakításával is el lehet jutni. Ekkor azt kell felhasználni, hogy

$$\lambda_1 = q + i\omega, \quad \Rightarrow e^{\lambda_1 t} = e^{qt} (\cos \omega t + i \sin \omega t),$$

$$\lambda_2 = q - i\omega, \quad \Rightarrow e^{\lambda_2 t} = e^{qt} (\cos \omega t - i \sin \omega t),$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -2i\omega.$$

Végtelen gyors üregnyitás esetén változatlanul érvényes a

$$\hat{\sigma}_z(r, \varphi, 0) = \hat{\sigma}_z(0) = k \hat{\sigma}_z^{Hooke},$$

azaz

$$-4 \frac{3K_v \tau - 2\eta \tau_0}{6K_v \tau + 2\eta \tau_0} \left(\frac{R}{r} \right)^2 b(\varphi) \equiv -k 4 \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 b(\varphi)$$

azonosság. Innen

$$k = \frac{3K_v \tau - 2\eta \tau_0}{6K_v \tau + 2\eta \tau_0} \cdot \frac{6K + 2G}{3K - 2G}.$$

Ezt behelyettesítve a (60), (60a), (60b) formulákba, az igen gyors nyitáshoz tartozó megoldásokat nyerjük, amelyek kielégítik a kezdeti feltételeket.

HARMADRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETRE VEZETŐ ESET. A levezetést csak az $\tilde{\varepsilon}_r$ esetére mutatjuk be:

$$(61) \quad \hat{\varepsilon}_r(r, \varphi, t) = -\frac{a}{2\tilde{G}}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{b(\varphi)}{2\tilde{G}}\left[4\frac{3\tilde{K} + 4\tilde{G}}{6\tilde{K} + 2\tilde{G}}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right],$$

amely átszorozva

$$(62) \quad 2\tilde{G}(6\tilde{K} + 2\tilde{G})\hat{\varepsilon}_r = -a(6\tilde{K} + 2\tilde{G})\left(\frac{R}{r}\right)^2 - b(\varphi)\left[4(3\tilde{K} + 4\tilde{G})\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3(6\tilde{K} + 2\tilde{G})\left(\frac{R}{r}\right)^4\right].$$

Figyelembe véve, hogy

$$2\tilde{G} = \frac{2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 3\tilde{K} = \frac{3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}},$$

a kijelölt műveletek és átalakítások után a (62) egyenlőség az

$$(63) \quad A\ddot{\hat{\varepsilon}}_r + B\dot{\hat{\varepsilon}}_r + C\hat{\varepsilon}_r + D\hat{\varepsilon}_r = D\hat{\varepsilon}_r^{Hooke}$$

állandó együtthatós, harmadrendű differenciálegyenletbe megy át, ahol

$$(64) \quad \begin{aligned} A &= 2\eta(6K_v\tau + 2\eta\tau_o), \\ B &= 2G(6K_v\tau + 2\eta\tau_o) + 2\eta(6K\tau + 6K_v + 2G\tau_o + 2\eta), \\ C &= 2\eta(6K + 2G) + 2G(6K\tau + 6K_v + 2G\tau_o + 2\eta), \\ D &= 2G(6K + 2G). \end{aligned}$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0,$$

melynek gyökei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Mivel az A, B, C, D együtthatók mindegyike pozitív, ezért a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gyökök mindegyike negatív, ill. az esetleges komplex gyökök valós része esetünkben negatív. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$(65) \quad \hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon}_r(r, \varphi, t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + \hat{\varepsilon}_r^{Hooke}(r, \varphi).$$

Mivel a gyökök mindegyike (ill. azok valós része) negatív, ezért

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\varepsilon}_r(r, \varphi, t) = \hat{\varepsilon}_r^{Hooke}(r, \varphi) := \hat{\varepsilon}_r(r, \varphi, \infty).$$

A másodrendű differenciálegyenlet együtthatóinak (58) alatti és a harmadrendű (64) alatti formáját összehasonlítjuk, akkor

$$\begin{aligned}
(66) \quad & A = 2\eta a, \\
& B = 2Ga + 2\eta b, \\
& C = 2\eta c + 2Gb, \\
& D = 2Gc.
\end{aligned}$$

vagyis a (63) alatti differenciálegyenlet felírható

$$\begin{aligned}
\left(A \frac{\partial^3}{\partial t^3} + B \frac{\partial^2}{\partial t^2} + C \frac{\partial}{\partial t} + D \right) \widehat{\varepsilon}_r &= D \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(a \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} + c \right) \widehat{\varepsilon}_r = c \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}
\end{aligned}$$

formában – a bal oldalon egy elsőrendű és egy másodrendű differenciáloperátor szorzataként – is.

E miatt a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gyökök a már az előzőekben levezetettek:

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}, \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}, \quad \lambda_3 = -\frac{G}{\eta}.$$

A C_1, C_2, C_3 együtthatók meghatározása érdekében három kezdeti feltételre van szükségünk. Akárhogy is adjuk meg azokat, értékük t -től nem függhet (azok t szempontjából állandók). Ezek az 5.2 pontban levezetett (14)-(16) képletek alapján – végtelen gyors üregnyitás esetére – megadhatók. Jelölje ezeket $\widehat{\varepsilon}_r(0)$, $\dot{\widehat{\varepsilon}}_r(0)$, $\ddot{\widehat{\varepsilon}}_r(0)$.

Ennek megfelelően a C_1, C_2, C_3 együtthatók a

$$\begin{aligned}
(67) \quad & \widehat{\varepsilon}_r(0) = C_1 + C_2 + C_3 + \widehat{\varepsilon}_r(\infty), \quad (\widehat{\varepsilon}_r(\infty) = \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke}), \\
& \dot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + C_3 \lambda_3, \\
& \ddot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) = C_1 \lambda_1^2 + C_2 \lambda_2^2 + C_3 \lambda_3^2
\end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerből határozhatók meg:

$$(68) \quad C_1 = \frac{D_1}{D}, \quad C_2 = \frac{D_2}{D}, \quad C_3 = \frac{D_3}{D},$$

ahol

$$\begin{aligned}
D &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2), \\
D_1 &= \begin{vmatrix} \widehat{\varepsilon}_r(0) - \widehat{\varepsilon}_r(\infty) & 1 & 1 \\ \dot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \ddot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = +(\lambda_3 - \lambda_2) \{ \lambda_3 \lambda_2 [\widehat{\varepsilon}_r(0) - \widehat{\varepsilon}_r(\infty)] - (\lambda_3 + \lambda_2) \dot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) + \ddot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) \},
\end{aligned}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \widehat{\varepsilon}_r(0) - \widehat{\varepsilon}_r(\infty) & 1 \\ \lambda_1 & \dot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \ddot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = -(\lambda_3 - \lambda_1) \{ \lambda_1 \lambda_3 [\widehat{\varepsilon}_r(0) - \widehat{\varepsilon}_r(\infty)] - (\lambda_1 + \lambda_3) \dot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) + \ddot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) \},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \widehat{\varepsilon}_r(0) - \widehat{\varepsilon}_r(\infty) \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ddot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) \end{vmatrix} = +(\lambda_2 - \lambda_1) \{ \lambda_1 \lambda_2 [\widehat{\varepsilon}_r(0) - \widehat{\varepsilon}_r(\infty)] - (\lambda_1 + \lambda_2) \dot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) + \ddot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) \}.$$

és a benne szereplő kezdeti értékek:

$$\widehat{\varepsilon}_r(0) = \widehat{\varepsilon}_r^{din-H} = -a \frac{\tau}{2\eta} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - b(\varphi) \frac{\tau}{2\eta} \left[4 \frac{3K_v \tau + 4\eta \tau_0}{6K_v \tau + 2\eta \tau_0} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right],$$

$$\dot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) = \frac{1}{2\eta} \left(1 - \frac{G\tau}{\eta} \right) \widehat{\sigma}_r(0) + \left[\frac{1}{3K_v} \left(1 - \frac{K\tau_0}{K_v} \right) - \frac{1}{2\eta} \left(1 - \frac{G\tau}{\eta} \right) \right] \widehat{\sigma}_0(0) = -\frac{a}{2\eta} \left(1 - \frac{G\tau}{\eta} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^2 - b(\varphi) \left\{ \left[\frac{1}{2\eta} \left(1 - \frac{G\tau}{\eta} \right) + \left[\frac{1}{3K_v} \left(1 - \frac{K\tau_0}{K_v} \right) - \frac{1}{2\eta} \left(1 - \frac{G\tau}{\eta} \right) \right] \frac{3K_v \tau}{6K_v \tau + 2\eta \tau_0} \right] 4 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right\},$$

$$\ddot{\widehat{\varepsilon}}_r(0) = -\frac{G - G^2 \tau}{2\eta^3} \widehat{\sigma}_r(0) - \left(\frac{KK_v - K^2 \tau_0}{3K_v^3} - \frac{G - G^2 \tau}{2\eta^3} \right) \widehat{\sigma}_0(0) = \frac{G - G^2 \tau}{2\eta^3} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + b(\varphi) \left\{ \left(\frac{KK_v - K^2 \tau_0}{3K_v^3} - \frac{G - G^2 \tau}{2\eta^3} \right) \frac{3K_v \tau}{6K_v \tau + 2\eta \tau_0} 4 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right\}.$$

A REOLÓGIAI MEGOLDÁS ÖSSZEFOGLALÁSA. Az elmondottak alapján, az általános térbeli orientációjú primer mezőben kihajtott vágat körüli mechanikai mezők:

Időtől független komponensek:

$$\widehat{\sigma}_r = \widehat{\sigma}_r^{Hooke}, \quad \widehat{\sigma}_\varphi = \widehat{\sigma}_\varphi^{Hooke}, \quad \widehat{\tau}_{r\varphi} = \widehat{\tau}_{r\varphi}^{Hooke}, \quad \widehat{\tau}_{\varphi z} = \widehat{\tau}_{\varphi z}^{Hooke}, \quad \widehat{\tau}_{zr} = \widehat{\tau}_{zr}^{Hooke}, \quad \widehat{\varepsilon}_z = 0.$$

Időtől függő komponensek:

- elsőrendben:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_{r\varphi} \\ \widehat{\gamma}_{\varphi z} \\ \widehat{\gamma}_{zr} \\ \widehat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_{r\varphi}^{Hooke} \\ \widehat{\gamma}_{\varphi z}^{Hooke} \\ \widehat{\gamma}_{zr}^{Hooke} \\ \widehat{u}_z^{Hooke} \end{pmatrix} + C e^{\lambda t}, \quad \text{ahol } C = -\widehat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke} \left(1 - \frac{G\tau}{\eta} \right), \quad \lambda = -\frac{G}{\eta} t,$$

- másodrendben:

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_z \\ \hat{\sigma}_o \\ \hat{\varepsilon}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_z^{Hooke} \\ \hat{\sigma}_o^{Hooke} \\ \hat{\varepsilon}_o^{Hooke} \end{pmatrix} + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

ahol

$$C_1 = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_z^{Hooke} \\ \hat{\sigma}_o^{Hooke} \\ \hat{\varepsilon}_o^{Hooke} \end{pmatrix} \frac{\lambda_2(k-1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = - \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_z^{Hooke} \\ \hat{\sigma}_o^{Hooke} \\ \hat{\varepsilon}_o^{Hooke} \end{pmatrix} \frac{\lambda_1(k-1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad k = \frac{6K + 2G}{6K_v \tau + 2\eta \tau_o} \begin{pmatrix} \frac{3K_v \tau - 2\eta \tau_o}{3K - 2G} \\ \frac{3K_v \tau}{3K} \\ \frac{2\eta \tau_o}{2G} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$a = 6K_v \tau + 2\eta \tau_o, \quad b = 6K \tau + 6K_v + 2G \tau_o + 2\eta, \quad c = 6K + 2G,$$

- harmadrendben:

$$\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_r \\ \hat{\varepsilon}_\varphi \\ \hat{u}_r \\ \hat{u}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_r^{Hooke} \\ \hat{\varepsilon}_\varphi^{Hooke} \\ \hat{u}_r^{Hooke} \\ \hat{u}_\varphi^{Hooke} \end{pmatrix} + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t},$$

ahol

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}, \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}, \quad \lambda_3 = -\frac{G}{\eta},$$

$$D = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2),$$

$$C_1 = +\frac{1}{D} \left\{ (\lambda_2 \lambda_3) \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_r(0) - \hat{\varepsilon}_r(\infty) \\ \hat{\varepsilon}_\varphi(0) - \hat{\varepsilon}_\varphi(\infty) \\ \hat{u}_r(0) - \hat{u}_r(\infty) \\ \hat{u}_\varphi(0) - \hat{u}_\varphi(\infty) \end{pmatrix} - (\lambda_2 + \lambda_3) \begin{pmatrix} \dot{\hat{\varepsilon}}_r(0) \\ \dot{\hat{\varepsilon}}_\varphi(0) \\ \dot{\hat{u}}_r(0) \\ \dot{\hat{u}}_\varphi(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{\hat{\varepsilon}}_r(0) \\ \ddot{\hat{\varepsilon}}_\varphi(0) \\ \ddot{\hat{u}}_r(0) \\ \ddot{\hat{u}}_\varphi(0) \end{pmatrix} \right\},$$

$$C_2 = -\frac{1}{D} \left\{ (\lambda_1 \lambda_3) \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_r(0) - \hat{\varepsilon}_r(\infty) \\ \hat{\varepsilon}_\varphi(0) - \hat{\varepsilon}_\varphi(\infty) \\ \hat{u}_r(0) - \hat{u}_r(\infty) \\ \hat{u}_\varphi(0) - \hat{u}_\varphi(\infty) \end{pmatrix} - (\lambda_1 + \lambda_3) \begin{pmatrix} \dot{\hat{\varepsilon}}_r(0) \\ \dot{\hat{\varepsilon}}_\varphi(0) \\ \dot{\hat{u}}_r(0) \\ \dot{\hat{u}}_\varphi(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{\hat{\varepsilon}}_r(0) \\ \ddot{\hat{\varepsilon}}_\varphi(0) \\ \ddot{\hat{u}}_r(0) \\ \ddot{\hat{u}}_\varphi(0) \end{pmatrix} \right\},$$

$$C_3 = +\frac{1}{D} \left\{ (\lambda_1 \lambda_2) \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_r(0) - \hat{\varepsilon}_r(\infty) \\ \hat{\varepsilon}_\varphi(0) - \hat{\varepsilon}_\varphi(\infty) \\ \hat{u}_r(0) - \hat{u}_r(\infty) \\ \hat{u}_\varphi(0) - \hat{u}_\varphi(\infty) \end{pmatrix} - (\lambda_1 + \lambda_2) \begin{pmatrix} \dot{\hat{\varepsilon}}_r(0) \\ \dot{\hat{\varepsilon}}_\varphi(0) \\ \dot{\hat{u}}_r(0) \\ \dot{\hat{u}}_\varphi(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{\hat{\varepsilon}}_r(0) \\ \ddot{\hat{\varepsilon}}_\varphi(0) \\ \ddot{\hat{u}}_r(0) \\ \ddot{\hat{u}}_\varphi(0) \end{pmatrix} \right\}.$$

REOLÓGIAI MEGOLDÁS TEHETETLENSÉGI STANDARD MODELL ESETÉN

A 2.1. szakasz 2. táblázatában látható, hogy a tehetetlenségi testhez tartozó anyagegyenletekben

$$2\tilde{G} = \frac{2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 3\tilde{K} = \frac{3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}}$$

Ezt felhasználandó, példaként nézzük meg, hogy hogyan írható fel a HOOKE-törvény szerinti $\hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke} = \frac{1}{G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi)$ szögtorzulás reológiai megfelelője, ha figyelembe vesszük a torzulási és a térfogati tehetetlenségi tényező szerepét is.

Cseréljük ki a G együtthatót a $\tilde{G}$ operátorra:

$$\begin{aligned} G\hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke} &= \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi) \Rightarrow \tilde{G}\hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke} = \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi) \Rightarrow \\ (69) \quad &\Rightarrow \left(G + \eta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{\gamma}_{z\varphi} = \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Elvégezve a kijelölt deriválásokat, a

$$(70) \quad \frac{\theta}{2} \ddot{\gamma}_{z\varphi} + \eta \dot{\gamma}_{z\varphi} + G\gamma_{z\varphi} = \left(\frac{R}{r} \right)^2 d(\varphi) = G\hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}$$

másodrendű differenciálegyenletet kapjuk. Általános megoldása

$$\hat{\gamma}_{z\varphi} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke},$$

ahol λ_1 és λ_2 a $\frac{\theta}{2} \lambda^2 + \eta \lambda + G = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 2G\theta}}{\theta}, \\ \lambda_2 &= \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 2G\theta}}{\theta}. \end{aligned}$$

Mivel θ, η, G pozitívak, ezért λ_1 és λ_2 egyaránt negatív, így $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_{z\varphi} = \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}$.

A C_1 és C_2 állandók meghatározásához adjunk meg két kezdeti feltételt. Legyenek ezek $\hat{\gamma}_{z\varphi}(r, \varphi, 0) = k\hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}(r, \varphi)$, $\dot{\hat{\gamma}}_{z\varphi}(r, \varphi, 0) = l\dot{\hat{\gamma}}_{z\varphi}^{Hooke}(r, \varphi)$, $0 \leq k \leq 1$, l tetszőleges valós szám.

A két feltételt kielégítő partikuláris megoldás

$$(71) \quad \begin{aligned} \hat{\gamma}_{z\varphi} &= \tilde{\gamma}_{z\varphi}(r, \varphi, t) = \\ &= \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}(r, \varphi) \left[1 - \frac{\lambda_2(1-k)+l}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1(1-k)+l}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \right] = \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke} \cdot \alpha(t). \end{aligned}$$

Érdekes lehet, és ellenőrzési célt is szolgálhat az az eset, amikor $\theta \rightarrow 0$. Ennek vizsgálatához először számítsuk ki λ_1 és λ_2 határértékét, ha θ tart nullához:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \lambda_1 = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{-1 + \sqrt{\eta^2 - 2G\theta}}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{-2G}{2\sqrt{\eta^2 - 2G\theta}} = -\frac{G}{\eta}$$

(A L'HOSPITAL – szabályt alkalmaztuk).

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \lambda_2 = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 2G\theta}}{\theta} = -\infty,$$

ugyanis a számláló tart -2η -hoz, a nevező pedig nullához ($\eta > 0$, $G > 0$).

$$\text{Továbbá } \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{-2\sqrt{\eta^2 - 2G\theta}}{\theta},$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\lambda_2(1-k)+l}{\lambda_2 - \lambda_1} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(-\eta - \sqrt{\eta^2 - 2G\theta})(1-k) + l\theta}{-2\sqrt{\eta^2 - 2G\theta}} = 1-k,$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\lambda_1(1-k)+l}{\lambda_2 - \lambda_1} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(-\eta + \sqrt{\eta^2 - 2G\theta})(1-k) + l\theta}{-2\sqrt{\eta^2 - 2G\theta}} = 0.$$

Ezeket felhasználva, a (71) határértéke

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \hat{\gamma}_{z\varphi} &= \hat{\gamma}(r, \varphi) = \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}(r, \varphi) \left[1 - (1-k)e^{-\frac{G}{\eta}t} \right] = \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke} \cdot \alpha(t), \\ \alpha(t) &= 1 - (1-k)e^{-\frac{G}{\eta}t}, \end{aligned}$$

amely egyezik a klasszikus standard modell esetére levezetett alatti eredménnyel.

Végeredményben tehát itt is igazolódott, hogy a reológiai megoldás a HOOKE-féle megoldásból egy t -től függő tényezővel való szorzással kapható.

Megjegyezzük, hogy az $\alpha(t)$ függvény a következőképpen is meghatározható. Ugyanis keressük például a reológiai függvényt

$$\hat{\gamma}_{z\varphi}(r, \varphi, t) = \hat{\gamma}_{z\varphi}^{Hooke}(r, \varphi) \cdot \alpha(t)$$

kétféle szorzat alakjában. Helyettesítsük be ezt a szorzat alakú feltételezett megoldást a (70) differenciálegyenletbe. Ekkor az

$$\frac{1}{2}\theta\ddot{\alpha} + \eta\dot{\alpha} + G\alpha = G$$

állandó együtthatójú differenciálegyenletet kapjuk. Általános megoldása

$$\alpha = \alpha(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + 1,$$

ahol λ_1 és λ_2 az $\frac{1}{2}\theta\lambda^2 + \eta\lambda + G = 0$ másodfokú karakterisztikus egyenlet két gyöke.

Az $\alpha(0) = k$, $\dot{\alpha}(0) = l$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás

$$\alpha = \alpha(t) = 1 - \frac{\lambda_2(1-k) + l}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1(1-k) + l}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t},$$

amely egyezik a (71)-ben szereplő $\alpha(t)$ -vel.

Következő példaként határozzuk meg a

$$(72) \quad \hat{\sigma}_z = -4 \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{6\tilde{K} + 2\tilde{G}} \left(\frac{R}{r} \right)^2 b(\varphi)$$

egyenlet megoldását, amely átalakítás és rendezés után az

$$(73) \quad a_3 \ddot{\hat{\sigma}}_z + a_2 \dot{\hat{\sigma}}_z + a_1 \hat{\sigma}_z + a_0 \hat{\sigma}_z = a_0 \hat{\sigma}_z^{Hooke},$$

harmadrendű differenciálegyenletbe megy át, ahol

$$(73/a) \quad \begin{aligned} a_3 &= 2\theta_0 \tau + \theta \tau_0, \\ a_2 &= 2\theta_0 + \theta + 6K_v \tau + 2\eta \tau_0 = 2\theta_0 + \theta + a, \\ a_1 &= 6K \tau + 6K_v + 2G \tau_0 + 2\eta = b, \\ a_0 &= 6K + 2G = c. \end{aligned}$$

Az itt szereplő a , b , c együtthatók már az (58) képletekkel is adottak, amelyek a standard modell esetén kapott másodrendű differenciálegyenlet együtthatói. Ezeket a (73/a)-ból $\theta = 0$ és $\theta_0 = 0$ helyettesítéssel is megkapjuk.

A (73) differenciálegyenlet általános megoldása:

$$(74) \quad \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z(r, \varphi, t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + \hat{\sigma}_z^{Hooke},$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ az $a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei (ha azok különböző valós számok).

Az előző példához hasonlóan

$$(75) \quad \hat{\varepsilon}_r(r, \varphi, t) = -\frac{a}{2\tilde{G}} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{b(\varphi)}{2\tilde{G}} \left[4 \frac{3\tilde{K} + 4\tilde{G}}{6\tilde{K} + 2\tilde{G}} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right].$$

A részleteket mellőzve az

$$(76) \quad a_5 \hat{\varepsilon}_r^{(5)} + a_4 \hat{\varepsilon}_r^{(4)} + a_3 \hat{\varepsilon}_r^{(3)} + a_2 \hat{\varepsilon}_r^{(2)} + a_1 \hat{\varepsilon}_r^{(1)} + a_0 \hat{\varepsilon}_r = a_0 \hat{\varepsilon}_r^{Hooke}$$

ötödrendű differenciálegyenletet kapjuk.

Az együtthatók:

$$(76/a) \quad a_5 = \theta(2\theta_0 \tau + \theta \tau_0),$$

$$(76/b) \quad a_4 = \theta(2\theta_0 \tau + \theta \tau_0 + 4\eta \tau_0) + (4\eta \theta_0 + 6K_v \theta) \tau,$$

$$(76/c) \quad a_3 = 4\eta \theta_0 + 6K_v \theta + 4G \theta_0 + 6K \theta \tau + 4G \theta \tau_0 + A,$$

$$(76/c) \quad a_2 = 4G \theta_0 + 6K \theta + 4G \theta + B,$$

$$(76/d) \quad a_1 = C,$$

$$(76/e) \quad a_0 = D.$$

Az itt szereplő A, B, C, D állandók ugyanazok mint a (64) képletekkel megadottak, vagyis a standard modellhez tartozó differenciálegyenlet együtthatói. Ezeket a (76/a)-ból $\theta = 0$ és $\theta_0 = 0$ helyettesítéssel is megkaphatjuk.

A (76) differenciálegyenlet általános megoldása:

$$(77) \quad \hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon}_r(r, \varphi, t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t} + C_5 e^{\lambda_5 t} + \hat{\varepsilon}_r^{Hooke}(r, \varphi),$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ az $a_5 \lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ ötödrendű karakterisztikus egyenlet gyökei.

A REOLÓGIAI MEGOLDÁS ÖSSZEFOGLALÁSA. Az elmondottak alapján, az általános térbeli orientációjú primer mezőben hajtott vágat körüli mechanikai mezők:

Időtől független komponensek:

$$\hat{\sigma}_r = \hat{\sigma}_r^{Hooke}, \quad \hat{\sigma}_\varphi = \hat{\sigma}_\varphi^{Hooke}, \quad \hat{\tau}_{r\varphi} = \hat{\tau}_{r\varphi}^{Hooke}, \quad \hat{\tau}_{\varphi z} = \hat{\tau}_{\varphi z}^{Hooke}, \quad \hat{\tau}_{zr} = \hat{\tau}_{zr}^{Hooke}, \quad \hat{\varepsilon}_z = 0.$$

Időtől függő komponensek:

- *másodrendben:*

$$\begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_{r\varphi} \\ \widehat{\gamma}_{\varphi z} \\ \widehat{\gamma}_{zr} \\ \widehat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_{r\varphi}^{Hooke} \\ \widehat{\gamma}_{\varphi z}^{Hooke} \\ \widehat{\gamma}_{zr}^{Hooke} \\ \widehat{u}_z^{Hooke} \end{pmatrix} + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

- *harmadrendben:*

$$\begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_z \\ \widehat{\sigma}_o \\ \widehat{\varepsilon}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_z^{Hooke} \\ \widehat{\sigma}_o^{Hooke} \\ \widehat{\varepsilon}_o^{Hooke} \end{pmatrix} + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t},$$

- *ötödrendben:*

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varepsilon}_r \\ \widehat{\varepsilon}_\varphi \\ \widehat{u}_r \\ \widehat{u}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\varepsilon}_r^{Hooke} \\ \widehat{\varepsilon}_\varphi^{Hooke} \\ \widehat{u}_r^{Hooke} \\ \widehat{u}_\varphi^{Hooke} \end{pmatrix} + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t} + C_5 e^{\lambda_5 t}.$$

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerzők ezúton fejezik ki köszönetüket FÜLÖP TAMÁSnak új felvetéseiért és az érdemi probléma-megoldáshoz nyújtott értékes közreműködéséért, VÁN PÉTERnek önzetlen segítségéért, valamint OBÁDOVICS J. GYULA professzornak érdemi javaslataiért.

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. – KAPOLYI, L. (1968): Über einen Specialfall der Zusammenarbeit von Gestein und Ausbau. *Proceedings 3rd Budapest Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Section IV. October 15-18, Akadémiai Kiadó, Budapest (1968.) p. 5-20.
- ASSZONYI, CS. (1969): Általános, homogén-lineáris tulajdonságokkal rendelkező közetekben kihajtott, mereven biztosított körszelvényű vágat körül kialakuló feszültségi és alakváltozási állapot vizsgálata. *Bányászati Kutató Intézet*, kutatási zárójelentés, Budapest p. 102.

- ASSZONYI, CS.- RICHTER, R. (1979): The Continuum Theory of Rock Mechanics. *Trans. Techn. Publications*, Clausthal-Zellerfeld, p.332.
- ASSZONYI, CS. et al. (1980): A bányászat fizikai rendszere I. kötet. A közetmechanika anyag-szerkezeti és reológiai alapjai. *MTA Veszprémi Akadémiai Bizottság*. Veszprém p. 340.
- ASSZONYI, CS. et al.: Izotrop kontinuumok anyagtörvénye. *Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár* **3** (2006), Izotrop kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota **5** (2007), Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai **6** (2008).
- FENNER, R. (1938): Untersuchungen zur Erkenntnis des Gebirgsdruckes. *Glückauf* **74**.
- FÜLÖP, T.– BÉDA, GY. (2009): Rheological Dynamics of Tunnels - An Analytical Investigation. „ISRM Symposium EUROCK 2009” Dubrovnik, 2009. október 29-31.
- OBÁDOVICS, J. GY. – SZARKA, Z. (2009): Felsőbb matematika. *SCOLAR Kiadó*, Budapest.
- SZARKA, Z. (1991): Alkalmazott matematika (Parciális differenciálegyenletek). Egyetemi jegyzet. *Tankönyvkiadó*, Budapest.
- VÁN, P. (2001): Internal thermodynamic variables and the failure of microcracked materials, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **26/2**, 167-189.
- VÁN P.– VÁSÁRHELYI B. (2001): Second Law of thermodynamics and the failure of rock materials, in *Rock Mechanics in the National Interest VI*, ed. D. Elsworth, J. P. Tinucci and K. A. Heasley, Balkema Publishers, Lisse-Abingdon-Exton(PA)-Tokyo, p767-773, (Proceedings of the 9th North American Rock Mechanics Symposium, Washington, USA,
- VÁN P.– VÁSÁRHELYI, B. (2001): Relation of rock mass characterization and damage, in *Rock engineering in difficult Ground conditions (Soft Rock and Karst, 2010*, ed. Ivan Vrkljan, Balkema, p.399-404 (Proceedings of Eurock 2009 Cavtat, Croatia).
- VÁSÁRHELYI, B. . DELI, Á. . GÁLOS, M. . VÁN, P. (2000): Relationship between the critical dissipated energy per unit volume and the mechanical properties of different rocks. *Pacific Rocks 2000*, Girard, Liebman and Breeds (ed.) *Proceedings of the 8th North American Rock Mechanics Symposium*, Seattle, USA, pp. 1289-1293.
- VÁN P. (2007): Objektív anyagfüggvények felé a reológiában. *Mérnökgeológia-Közetmechanika 2007 ISRM Konferencia. Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár* **4**.p.327-332.
- VÁN P.–SZARKA, Z. (2006): Rock Rheology . Time Dependence of Dilatation and Stress Around a Tunnel. EUROROCK 2006. Multiphysics Coupling and Long Term Behavior in Rock Mechanics. *Proceedings of the International Symposium of the International Society. Liege*
- VÁN, P. – FÜLÖP T. – ASSZONYI, CS. (2009): Objectivity and Continuum Mechanics. 7TH EUROMECH Solid Mechanics Conference (ESMC), Lisszabon.
- VLAGYIMIROV, V. SZ. (1979): Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe. *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.

SZERZŐK

ASSZONYI CSABA DR. (1941) okl. gépészmérnök (NME, 1964), műszaki doktor (NME, 1965), a műszaki tud. kandidátusa (1972), a műszaki tud. doktora (1976). Kutatási területe: a kontinuumok mechanikája és az irreverzibilis termodinamika. Eredményeit 200 publikációban és 13 könyvben tette közre. Főbb mérnöki eredményei és szabadalmai az alagút- és épület-rekonstrukciók, víz- és környezetvédelem területén találhatók. A bányászatban volt kutatómérnök, osztályvezető, gazdasági igazgató, tröshti főosztályvezető, kutatóintézeti igazgató. 1988-as megalakulásától kezdve a MONTAVID Csoport vezetője, s a MONTAVID INVESTMENT TECHNOLOGIES TRUST elnök-vezérigazgatója 2006-ig. Jelenleg kutatással, műszaki fejlesztéssel foglalkozik a MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT keretei között.

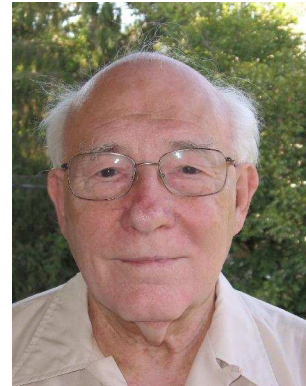


1112 Budapest, Táncos u. 6. Telefon: (06) 309 215 684, (1) 215 8463,
asszonyi@gmail.com

BÉDA GYULA DR. (1931) okl. gépészmérnök (NME, 1953), a műszaki tudomány kandidátusa (1961), a műszaki tudomány doktora (1983). 1953-56 aspiráns, 1956-61 egyetemi adjunktus, 1961-67 egyetemi docens az NME Mechanikai Tanszékén, majd a BME Gépészmérnöki Kar Műszaki Mechanikai Tanszékén, ahol 1968-2001 egyetemi tanár, 1970-1995 között tanszékvezető volt. 2001-től professzor emeritus. Fő kutatási témái: kontinuummechanika, az anyagtörvény elméleti és kísérleti vizsgálata, a szilárd testben keltett hullámok, képlékenységtan, biomechanika a mechanika általános egyenletei.

Kutatási eredményeiből 5 szakkönyv, 10 jegyzet, és több mint 80 publikáció jelent meg.

1530 Budapest, Pf. 18. Telefon: (1) 463 1369, beda@mm.bme.hu



FÜLÖP TAMÁS DR. (1967). okl. fizikus (ELTE, 1991), egyetemi doktor (ELTE, 1996), PhD. (University of Tokyo, Japán, 2006). 1999-ig az ELTE Elméleti Fizika Tanszéken oktat fizika és matematika tárgyakat, az 1997-99 és 2002-06 években Japánban kutat, 2006-2007 között pedig Csehországban. Azóta a MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORTBAN dolgozik. Fő kutatási témája 2007-ig a határfeltételek fizikai szerepe és alkalmazásai a kvantummechanikában, jelenleg a kontinuumfizika (reológia, elemkapcsolások, közegkinematika, a téridő szerepe, stb.).



Eddig 20 szakkikke jelent meg, társszerző 5 könyvfejezetben.

1112 Budapest, Igmándi u. 26. Tel: (1)-215-8463,
tamas.fulop@gmail.com.

SZARKA ZOLTÁN DR. (1927) okl. mérnök (1950). 1950-től a Nehézipari Műszaki Egyetem – ma Miskolci Egyetem – Matematikai Tanszékének oktatója. 1967-től egyetemi docens, közben két időszakban tanszékvezető, 1991-től nyugdíjas, de oktatói munkáját 2006-ig folytatta. Szakterülete a kiegyenlítőszámítás, de 56 évi egyetemi munkája során a matematika számos területét (analízis, parciális differenciálegyenletek, valószínűségszámítás, komplex függvénytan, stb.) művelte. Számos hazai és külföldi előadása mellett 50 szakkikke és 36 könyve és egyetemi jegyzete jelent meg, részben társszerzőkkel.

3529 Miskolc, Csabai kapu 34. Tel: (46) 362 905,
mateva@gold.uni-miskolc.hu

