

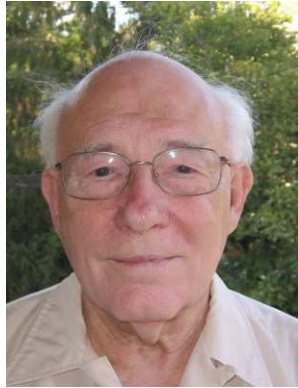
Szerkesztette:
Asszonyi Csaba

A képlékenység termodinamikájáról



Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 13

A KÉPLÉKENYSÉG
TERMODINAMIKÁJÁRÓL



*Dr. Béda Gyula professzor
80. születésnapja tiszteletére*

*International Society for Rock Mechanics
Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2012 Konferencia, Budapest*

A KÉPLÉKENYSÉG TERMODINAMIKÁJÁRÓL

SZERKESZTETTE

ASSZONYI CSABA

a műszaki tudomány doktora

Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

ÍRTA

ASSZONYI CSABA, CSATÁR ATTILA, DOLEŽALOVÁ MÁRTA, FÜLÖP TAMÁS,
HORVÁTH RÓBERT, KOCSIS DÉNES, KOVÁCS LÁSZLÓ, MATOLCSI TAMÁS,
SZARKA ZOLTÁN, VÁN PÉTER, VÁSÁRHELYI BALÁZS

MÉRNÖKGEOLOGIA-KÖZETMECHANIKA KISKÖNYVTÁR 13. KÖTET

Hungarian Printing House
2012

SZERKESZTETTE

DR. ASSZONYI CSABA

Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

ÍRTA

ASSZONYI CSABA, CSATÁR ATTILA, DOLEŽALOVÁ MÁRTA, FÜLÖP TAMÁS,
HORVÁTH RÓBERT, KOCSIS DÉNES, KOVÁCS LÁSZLÓ, MATOLCSI TAMÁS,
SZARKA ZOLTÁN, VÁN PÉTER, VÁSÁRHELYI BALÁZS

A KUTATÁST ÉS A KÖTET MEGJELENÉSÉT

A MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT,
AZ ETTE EGYESÜLET A TUDOMÁNY ÉS TECHNOLÓGIA EGYSÉGÉÉRT
TÁMOGATÁSA TETTE LEHETŐVÉ

ISBN 978-963-08-3072-0

ISSN 1789-0454

Megjelent a *Hungarian Printing House* gondozásában és nyomdájában
Felelős vezető: Kovács-Sebestyén Szabolcs
Terjedelem: 15 (A/5) ív

©2012 BUDAPEST, ASSZONYI CSABA, CSATÁR ATTILA, DOLEŽALOVÁ MÁRTA, FÜLÖP TAMÁS, HORVÁTH RÓBERT,
KOCSIS DÉNES, KOVÁCS LÁSZLÓ, MATOLCSI TAMÁS, SZARKA ZOLTÁN, VÁN PÉTER, VÁSÁRHELYI BALÁZS

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ	7
TÖMÖR ANYAGOK KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓRÓL (Asszonyi Csaba – Szarka Zoltán – Csatár Attila – Horváth Róbert – Kocsis Dénes – Ván Péter)	
1. Előzetes megjegyzések	9
2. Kísérleti eredmények	10
2.1. Egytengelyű húzókísérlet	11
2.2. Egytengelyű nyomókísérlet	16
3. Következtetések	17
Irodalom	21
EGYTENGELYŰ EREDŐ REOLÓGIA, ÉS RELAXÁCIÓ MINT DEVIATORIKUS KÚSZÁS (Fülöp Tamás)	
1. A KELVIN-HOOKE-modell eredő egytengelyű reológiája	23
2. Magasabbrendű reológiai modellek egytengelyű eredője	27
Irodalom	28
GONDOLATOK A PORÓZUS- ÉS A TÖREDEZETT ANYAGOK MECHANIKAI VISELKEDÉSÉNEK MEGÉRTÉSÉHEZ (Asszonyi Csaba – Doležalová Márta – Ván Péter – Vásárhelyi Balázs)	
1. Bevezetés	30
1.1. A célkitűzés	30
1.2. Egy felfogás a szakirodalomból	33
1.3. Néhány észrevétel	35
Kiindulási feltételek	39
2. A rugalmas anyag viselkedése az alakváltozás során	42
Irodalom	46
PORÓZUS- ÉS TÖREDEZETT ANYAGOK REOLÓGIAI VISELKEDÉSE (Asszonyi Csaba – Szarka Zoltán – Doležalová Márta – Ván Péter)	
Bevezetés	47
Porozitás és károsodás	50
Határfeltételek	51
A) Tömör anyag szerkezeti viselkedése az alakváltozás során	59
B) Porózus anyag szerkezeti viselkedése az alakváltozás során	71
Irodalom	73
MÉRNÖKI LÉTESÍTMÉNYEK MODELLEZÉSÉNEK ÉS TERVEZÉSÉNEK EGY MÓDSZERÉRŐL (Asszonyi Csaba – Doležalová Márta)	
Bevezetés	74
1. A helyszíni mérési adatok felhasználása	77
2. Az anyagmodell leírása	80
2.1 A módszer vázlata konvencionális formában	80
2.2 A módszer vázlata lineáris-képlékeny „egyensúlyi” anyagmodell esetén	84
2.3 A módszer vázlata lineáris-képlékeny „nemegyensúlyi” anyagmodell esetén	85
3. Összegezés	87
Irodalom	89

A PRIMER FESZÜLTSGÁLLAPOT IN SITU MEGHATÁROZÁSÁRÓL

(Asszonyi Csaba – Szarka Zoltán – Kovács László)

1. Föld alatti létesítmények mechanikai tervezésének kiinduló adatai	92
2. A primer feszültségállapot in situ meghatározásáról	94
2.1. A primer feszültségállapot értelmezése	94
2.2. A mérések fajtái	96
2.3. A mérések eszközei és a mért paraméterek	102
3. A fúróluk körül kialakuló mechanikai mező	107
3.1. A Hooke-féle megoldás	107
3.2. A reológiai megoldás	109
3.3. A fúrólukas mérés képleteinek összefoglalása	110
4. A fúrómagban kialakuló mechanikai mező	111
4.1. A primer deformációk	111
4.2. A reológiai megoldás	112
4.3. A fúrómagos mérés képleteinek összefoglalása	113
4.4. A Doorstopper-mérés	113
5. A primer feszültségek meghatározása	114
6. Egy példa	117
7. A főfeszültségek és főirányok	122
Irodalom	123

ANYAGOK MECHANIKAI TULAJDONSÁGAINAK MEGHATÁROZÁSA EGYTENGELYŰ

LABORATÓRIUMI KÍSÉRLETEKKEL

(Asszonyi Csaba – Szarka Zoltán – Csatár Attila – Horváth Róbert – Kocsis Dénes)

Bevezetés	125
A különböző legfontosabb feszültség- és deformáció tenzorok	126
Mérések kiértékelése	132
Irodalom	136

AZ EGYSZERŰSÍTETT ANYAGTÖRVÉNYRŐL

(Asszonyi Csaba)

Bevezetés	137
Az anyagtörvény változói	144
Az entrópiafüggvény	145
Az entrópiamérleg	146
Az energia és a munka	148
(A) Anyagtörvény egyensúly esetén	151
(B) Anyagtörvény általános esetben – egyensúlytól távol	159
A potenciálok	162
Porózus testek anyagtörvénye	165
Irodalom	169

ÁTTEKINTÉS A KONTINUUMFIZIKÁRÓL

(Matolcsi Tamás)

1. A közönséges termodinamika alapjai	171
1.1 Anyagegyenletek (konstitúciós relációk)	171
1.2 Folyamatok	173
1.3 Entrópia	174
2. A kontinuumfizikai modellezés	174
2.1 Mérlegegyenletek	174
2.2 Konstitúciós relációk	175
2.3 A viszkózus modell	176
2.4 Általánosítások	177
3. Szilárd testek	177
3.1 Alapproblémák	177
3.2 Alakváltozás	179
3.3 Alakváltozás a modellben	179
Irodalom	180
SZERZŐK	181

ELŐSZÓ

A kontinuummechanika mérnöki feladatainak megoldásához a legalapvetőbb összefüggés az ún. *anyagtörvény*, a természeti anyagok és a mérnöki létesítmények tulajdonságait leíró konstitúciós egyenlet. Az anyagtörvény meghatározásához nem elégségesek a nagyon fejlett mechanika törvényei, ugyanis azokból az anyagtörvények bizonyíthatóan nem vezethetők le, legfeljebb az emberi tapasztalat alapján valószínűsíthetők. Az anyagtörvény meghatározása az irreverzibilis termodinamika második főtételeiből lehetséges csupán, ugyanis így biztosak lehetünk abban, hogy a természet alapvető törvényei nem sérülnek. Továbbá, hogy az alapvető feltételezésekből, szigorúan deduktív levezetéssel, matematikailag bizonyítottan kapjuk meg az eredményt. Ennek a kötetnek a tanulmányai ezt a kérdéskört járják körül, mind elméleti, mind gyakorlati oldalról, külön hangsúlyt adva a rugalmas mellett, a képlékeny alakváltozásoknak.

A könyv *első* tanulmánya a *tömör anyagok képlékeny deformációjával* foglalkozik, egytengelyű húzó- és nyomókísérletek alapján. A szerzők arra a megállapításra jutnak, hogy a tömör szilárd testeknél a maradó alakváltozások teljes egészében a torzulási (deviatorikus) állapotban jelentkeznek, s a térfogatváltozási (gömbi) állapotban csak rugalmas alakváltozások vannak. Ennek következménye, hogy tömör anyagoknál a képlékenységi határfeltétel nem lehet a térfogatváltozás függvénye.

A *második* publikáció az anyagegyenletek egytengelyű folyamatokban adódó eredő alakját mutatja be, és bizonyítja, hogy a relaxáció deviatorikus kúszás eredménye is lehet. Erre a kéziratra az elmúlt években több szerző is hivatkozott, és anyagvizsgáló laboratóriumok is alkalmazzák.

A *harmadik* cikk tapasztalati adatokból kiindulva, de elméleti eszmefuttatások révén visz közelebb a *porózus- és a töredezett anyagok mechanikai viselkedésének* megértéséhez, a *negyedik* cikk pedig a *reológiai viselkedésük* elemzését szolgáltatja. Először található meg a szilárd testek – tömör és porózus – egységes tárgyalása, amelynek egyik folyamánya a porózus anyagok térfogati képlékenységeinek leírása.

A kötet *ötödik* tanulmánya *mérnöki létesítmények modellezésének és tervezésének egy módszerével* – közismert néven DOLEŽALOVÁ-módszerrel – foglalkozik. Ez egy numerikus-modellezési módszer, amelynek lényege a helyszíni mérésekre illeszkedő modellkalibráció. Az első rész a pályafüggő rugalmas-képlékeny anyagviselkedés konvencionális formáját tárgyalja, amely már nagyszámú mérnöki létesítmény modellezésénél és tervezésénél talált gyakorlati

alkalmazásra. A második rész a modellnek termodinamikai alapokra helyezett továbbfejlesztését tartalmazza.

Mérnöki létesítmények tervezéshez a primer feszültségeloszlás és a műtárgyakat körülvevő közegek anyagállandóinak ismerete szükséges. A *hatodik* tanulmány a *primer állapot in situ meghatározásával* foglalkozik. Összefoglalja a primer feszültségállapot meghatározására szolgáló in situ méréseket, és a kiértékeléshez szükséges összefüggéseket. Ennek során ismerteti a fűrőlyuk körül, a fűrőmagban, valamint a fűrőlyuk talpán kialakuló mechanikai mezőket, kitérve a fűrőlyuk körülírelése esetén keletkező közetcső mechanikai állapotára is. Mindezek ismeretében egy lehetőséget bemutat a primer feszültségeknek a mérési adatokból való meghatározására. Eddig az a felfogás uralkodott, hogy az általános térbeli orientációjú feszültségállapot 6 komponensének kiméréséhez három – nem egy síkba eső – fűrőlyuk szükséges. A cikk bizonyította, hogy egyetlen fűrőlyuk 5 feszültségkomponens korrekt, a fűrőlyuk tengelyirányú normális feszültségének közelítő meghatározását teszi lehetővé. A földkéregből történő anyagkivétel a terheléstől való felszabadítással jár, így rugalmas folyamatok játszódnak le, tehát a rugalmassági állandók ismerete elégséges a primer állapot meghatározásához.

A kötet *hetedik* cikke az *anyagtulajdonságok meghatározásával* foglalkozik egytengelyű laboratóriumi kísérletek alapján. Az ismertetés az egyszerűség kedvéért csak a tömör anyagokra vonatkozik. A porozitás és töredezettség jelentősen bonyolítja elemzéseket, de az eljárás teljesen analóg.

A könyv *nyolcadik* tanulmánya izotrop kontinuumok rugalmas–képlékeny anyagtörvényét írja fel, a műszaki gyakorlatban megengedhető egyszerűsítésekkel. Ezek az egyszerűsítések megengedettek, de szűkítik az eredmények érvényességi tartományát. Viszont nem szükségszerűek, csupán az egyszerűbb tárgyalás (és a mérnöki alkalmazás) érdekében folyamodott a szerző hozzájuk, az eredmények könnyebb áttekinthetősége érdekében, ui. a hivatkozott tanulmányokban az általános megoldások is megtalálhatók. A cikk az elmúlt hat évben született, az irreverzibilis termodinamika alapelveire épülő, az anyagtörvényre vonatkozó eredmények egy részét foglalja össze, a legfrissebb felismerések által kiegészítve. A legújabb eredmények számos részletet módosítottak, javítottak, sőt egyszerűsítettek. Ennek a cikknek célja, hogy egyetlen helyen megtalálható legyen minden olyan, a konstitúciós egyenletekre vonatkozó összefüggés, amelyekre a mérnöki alkalmazásoknál építeni érdemes.

A kötet *kilencedik* tanulmánya gondolatébresztő *áttekintés a kontinuumfizikáról*. A szerző rámutat a meglévő pongyolaságokra, az intuitív fogalmakra, a hallgatólagos megállapodásokra. E cikk elolvasása után, már nem járhatunk az eddig megszokott úton. Ennek alapján felül kell vizsgálnunk eddigi nézeteinket. Nem jelöli ki a kontinuummechanika útját, de rávilágít, hogy mely kérdésekre kell választ találni, hogy fizikailag és matematikailag helyes eredményekhez juthassunk a természet megismerésében.

Budapest, 2011. november 30.

A Szerkesztő

TÖMÖR ANYAGOK KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓRÓL

Asszonyi Csaba – Szarka Zoltán

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Csatár Attila

MEZŐGAZDASÁGI GÉPKÍSÉRLETI INTÉZET, GÖDÖLLŐ

Horváth Róbert – Kocsis Dénes

DEBRECENI EGYETEM MŰSZAKI KAR KÖRNYEZET- ÉS VEGYÉSZMÉRNÖKI TANSZÉK, DEBRECEN,

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Ván Péter

KFKI RÉSZECSCKE- ÉS MAGFIZIKAI KUTATÓINTÉZET, ELMÉLETI FIZIKA FŐOSZTÁLY, BUDAPEST

BME ENERGETIKAI GÉPEK TANSZÉK, BUDAPEST, MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT BUDAPEST

A cikk egytengelyű húzó- és nyomókísérlet alapján vizsgálja a képlékeny deformáció sajátosságait. A szerzők arra a megállapításra jutnak, hogy a tömör szilárd testeknél a maradó alakváltozások teljes egészében a torzulási (deviatorikus) állapotban jelentkeznek, s a térfogatváltozási (gömbi) állapotban csak rugalmas alakváltozások vannak.

Ennek következménye, hogy ilyen esetben a képlékenységi határfeltétel nem lehet a térfogatváltozás függvénye.

1. ELŐZETES MEGJEGYZÉSEK

[ASSZONYI-VÁN-SZARKA (2007)] könyvében az anyagtörvény általános formájának levezetése alapján, kiegészítve az egytengelyű kísérlet elemzéséből levont következtetésekkel a szerzők kimondták, hogy a *képlékenységi határfeltétel* a W deformációs munka valamelyik komponensének függvénye. Az összes szóbajöhethető munka- ill. energia felosztás alapján a lehetséges képlékenységi feltételek közül a W^d *maximális torzulási deformációs munka* elve volt az egyetlen valószínűsíthető.

A 142. oldalon azt írják, hogy a W_0 térfogati deformációs munkával, mint képlékenységi határfeltétellel a mechanikai irodalomban még nem találkoztak: „Általában azt mondják, hogy tömör testeknél a tisztán hidrosztatikus állapot nem hoz létre folyást, de erre bizonyítékot eddig nem találtunk. Az is igaz, hogy ehhez igen nagy nyomásokat

kellene létrehozni. Talán az lehet ebből az igaz, hogy normális mechanikai viszonyok mellett a W_0 csak néhány százaléka a W -nek, ezért a képlékeny állapot létrejöttét a nagyobb értékhez kötik. Azonban hidrosztatikus állapotban: $W = W_0$ és $W^d = 0$. Ebből következik, hogy akár ki is zárható, mert úgyis benne van a W -ben. De ez nem igazán korrekt érv.

Talán kizárására a longitudinális hullám természete adhat választ, amely jelentősen nagyobb sebességű, mint a torzulási hullám, vagyis vélhetően hamarabb adna képlékeny változást. Ennek azonban nyoma kellene legyen a kísérletekben is.

Ezért bár kizárjuk ezt a feltevést mi is, de erre tudományos magyarázatot, vagy cáfolatot kellene keresni.”

A fémekre és szilárd anyagokra kidolgozott képlékenységi elméletek csak a torzulási képlékenységi deformációt vezeti be. Talajok esetén számos esetben viszont mindkét fajta térfogati és torzulási képlékenységet rendszeresen alkalmazzák a különféle rugalmas-képlékeny modellekben [DRUCKER et al. (1957), ROSCOE et al. (1958), LADE (1977), DOLEŽALOVÁ (1985, 1993, 2007)]. Azonban ezek a porózus közegek kategóriájába tartoznak, s így voltaképp a pórusok záródása kinematikai szempontból nem jelent képlékeny állapotot. DOLEŽALOVÁ e cikk bírálata során azon véleményének adott hangot, hogy megállapításaink csak azokra a tömör (nem porózus) anyagokra vonatkozik, amelyeknél a hidrosztatikus feszültségállapot nem képes maradó térfogatváltozást okozni.

Felmerül a kérdés, hogy általános elméleti feltevésünket – semmi nem zárja ki elméletileg a térfogati képlékenyedést, az anyag szerkezete térfogatilag összeroppanhat, átrendeződhet – gyakorlati teszteken is kiértékeljük. Ennek megfelelően nagy deformációt mutató, nemfémek, de eléggé homogén szerkezetű anyagokon vizsgáltuk kísérletileg a kérdést. A homogén és izotrop feltételeknek a különböző műanyagok, illetve gumik feleltek meg leginkább.

Egytengelyű kísérleteink sorozata azt mutatta, hogy képlékeny (azaz maradó) deformációk mind a hosszirányú, mind a keresztirányú megnyúlásoknál jelentkeztek. Azonban az egytengelyű folyamat a torzulási és térfogati változásokat egyaránt tartalmazza, ezért a látszat elfedi a lényegét. Azonban, ha ezt a két rész különválasztottuk, akkor

- a *térfogatváltozásnál nem jelentkezett maradó deformáció* (miközben a kísérlet során átléptük a képlékenységi határt), s
- minden maradó deformáció: *torzulási deformáció*.

2. KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK

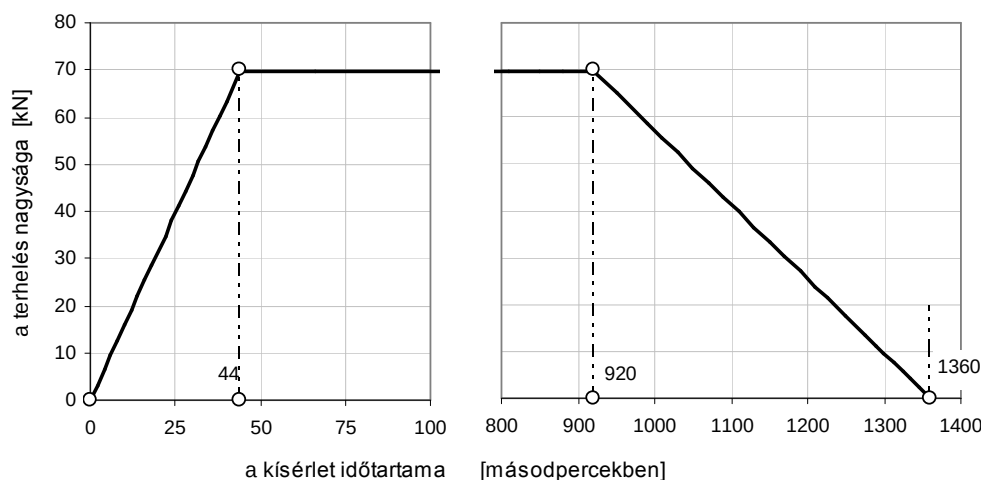
Egytengelyű húzókísérleteket a DEBRECENI EGYETEM MŰSZAKI KAR KÖRNYEZET- ÉS VEGYÉSZMÉRNÖKI TANSZÉK biomechanikai anyagvizsgáló laboratóriumában, a nyomókí-

sérleteket a GÖDÖLLŐI MEZŐGAZDASÁGI GÉPESÍTÉSI INTÉZET laboratóriumában, *Instron* 8874 és *Instron* 5581 univerzális anyagvizsgáló berendezésekkel hajtottuk végre. A vizsgálati berendezések korlátozták a próbatest méretét és maximális megnyúlást egyaránt. Ezért a próbatest méretét és anyagát úgy választottuk ki, hogy nagy deformációk valósuljanak meg (50-80%), s ezáltal lehetőleg átlépjük a képlékenységi határt.

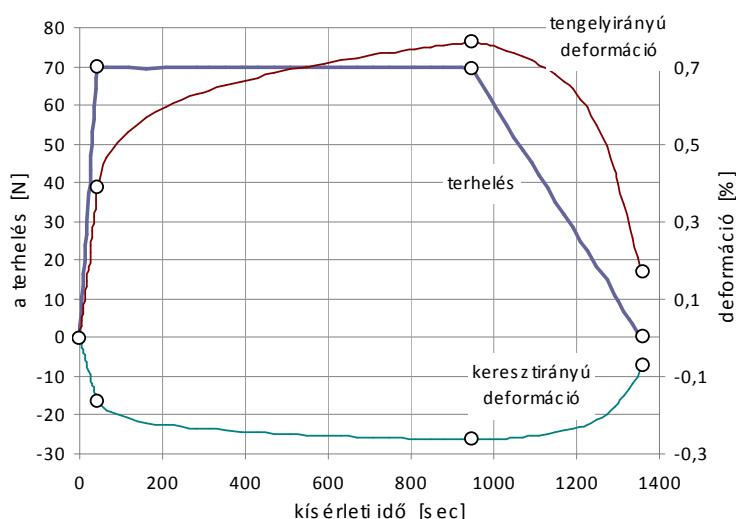
2.1. EGYTENGELYŰ HÚZÓKÍSÉRLET

A vizsgált próbatestek lágy PVC-ből¹ és gumiból² készültek. A kísérlet különböző állandó sebességű erővezérelt felterhelésből, állandó terhelésből (kúszás), állandó sebességű erővezérelt tehermentesítésből és további kúszásból álltak [8].

Ezek közül mindössze egyet emelünk ki illusztrációképpen [PVC-100N_1]:



1. ábra. A terhelési folyamat szakaszai – terhelés, kúszás, tehermentesítés



A tehermentesítés után az optikai berendezés elvesztette a jelet, ezért az ehhez tartozó kúszást folyamatában már nem tudtuk regisztrálni, csupán 1 hét után a próbatest hosszának és szélességének megméréseivel megállapítottuk a maradó deformációkat.

2. ábra. Az egytengelyű húzási kísérlet mérési adatai

¹ BORSODCHEM által gyártott LE 411/009 típusú lágy PVC

² COLUMBIAN TISZAI KOROMGYÁRTÓ KFT. által ASTM D 3192 szabvány alapján készített gumi

A KÍSÉRLETEK FELDOLGOZÁSÁNAK LEHETŐSÉGEI. Bár jelen cikkünkben az anyagjellemzők (anyagállandók meghatározásával) nem foglalkozunk, azonban példaként mégis kénytelenek vagyunk egy kis kitérőt tenni, hogy a vizsgálatok típusai indokoltak legyenek.

Ha feltételezzük például, hogy a próbatest anyagának mechanikai tulajdonságai a *tehetetlenségi standard modellel* leírható, akkor egytengelyű húzásnál a következő egyenleteink vannak [ASSZONYI, Cs. et al. (2008)]:

torzulási egyenlet:

$$(\sigma - \sigma_o) + \tau(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_o) = 2G(\varepsilon - \varepsilon_o) + 2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_o) + \theta(\ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}_o), \quad (1)$$

térfogati egyenlet:

$$\sigma_o + \tau_o \sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v \dot{\varepsilon}_o + \theta_o \ddot{\varepsilon}_o, \quad (2)$$

ahol $\sigma = \sigma_{||}$, $\varepsilon_{||}$ a tengelyirányú, $\varepsilon_{\perp}$ a keresztirányú fajlagos nyúlás és

$$\sigma_o = \frac{1}{3}\sigma, \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3}(\varepsilon_{||} + 2\varepsilon_{\perp}), \quad (\sigma - \sigma_o) = \frac{2}{3}\sigma, \quad \varepsilon_{||} - \varepsilon_o = \frac{2}{3}(\varepsilon_{||} - \varepsilon_{\perp}).$$

Ha az anyagtulajdonságokat (anyagviselkedést) fenti kettő egyenlet helyett, csupán egyetlen egyenlettel kívánjuk leírni, akkor jóval bonyolultabb összefüggést kapunk [FÜLÖP (2012)]:³

$$\sigma + g\dot{\sigma} + g_a\ddot{\sigma} + g_b\ddot{\sigma} = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} + \lambda_a\ddot{\varepsilon} + \lambda_b\ddot{\varepsilon} + \lambda_c\varepsilon, \quad (3)$$

ahol

$$\begin{aligned} E &:= \frac{18GK}{2G + 6K}, & \lambda &:= \frac{3(6K\eta + 6GK_v)}{2G + 6K}, \\ g &:= \frac{2\eta + 6K_v + 2G\tau_o + 6K\tau}{2G + 6K}, & \lambda_a &:= \frac{3(2G\theta_o + 6\eta K_v + 3K\theta)}{2G + 6K}, \\ g_a &:= \frac{\theta + 2\theta_o + 2\eta\tau_o + 6K_v\tau}{2G + 6K}, & \lambda_b &:= \frac{3(2\eta\theta_o + 3K_v\theta)}{2G + 6K}, \\ g_b &:= \frac{\theta\tau_o + 2\theta_o\tau}{2G + 6K}, & \lambda_c &:= \frac{3\theta\theta_o}{2G + 6K}. \end{aligned}$$

Innen látszik, hogy nem mindegy vajon egyetlen egyenletet kell-e megoldani, amely változóiban harmad és negyedrendű, vagy pedig változóiban első és másodrendű egyenletből kettőt. Arról nem is beszélve, hogy ha a legtöbb laboratórium csak σ , ε és $\varepsilon_{\perp}$ értéket tudja mérni, csak kivételes helyeken tudják az $\dot{\varepsilon}$ -t is regisztrálni, így a magasabbrendű deriváltakat csupán számítással lehet előállítani.

Ennek megfelelően a vizsgálatokat mind az egytengelyű mérési adatokra, mind a szétválasztott (deviatorikus és gömbi) mérési adatokra elvégeztük:

³ Ld. még: FÜLÖP (2009): „Effektív reológia” kézirat nyomán [ASSZONYI-BÉDA-SZARKA (2009)] 64. oldal (15)-(16) képlet.

ténylegesen mért egytengelyű adatok				térfogatváltozási adatok (számított)			torzulási adatok (számított)		
t	σ	ε	$\varepsilon_{\perp}$	t	σ_o	ε_o	t	$\sigma - \sigma_o$	$\varepsilon - \varepsilon_o$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	σ_1	ε_1	$\varepsilon_{\perp 1}$	1	σ_{o1}	ε_{o1}	1	$\sigma_1 - \sigma_{o1}$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_{o1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	σ_i	ε_i	$\varepsilon_{\perp i}$	i	σ_{oi}	ε_{oi}	i	$\sigma_i - \sigma_{oi}$	$\varepsilon_i - \varepsilon_{oi}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	σ_n	ε_n	$\varepsilon_{\perp n}$	n	σ_{on}	ε_{on}	n	$\sigma_n - \sigma_{on}$	$\varepsilon_n - \varepsilon_{on}$

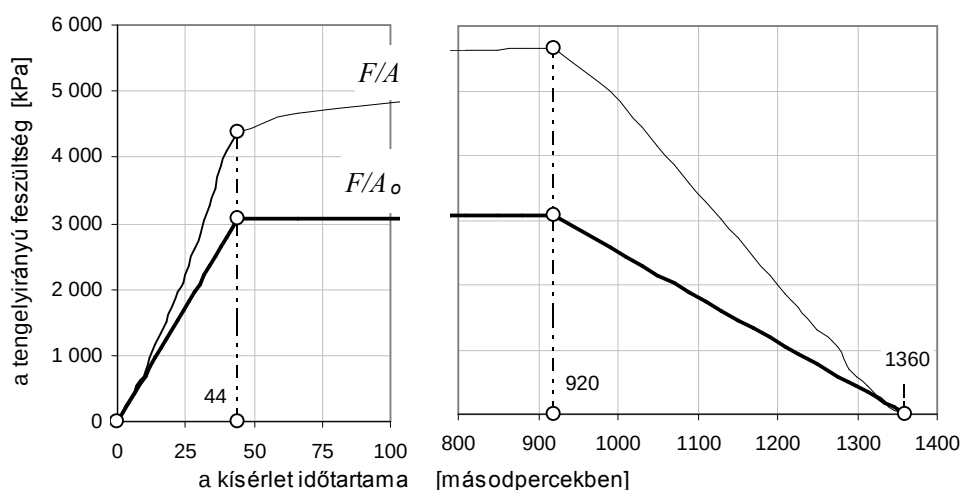
A kísérleti berendezés az F terhelő erőt regisztrálja, s a feszültségértékeket számítás útján állítjuk elő, s a deformációkat pedig a hagyományos $\delta = \Delta l/l_0 = \varepsilon^{Cauchy}$ és $\delta_{\perp} = \Delta d/d_0 = \varepsilon_{\perp}^{Cauchy}$ fajlagos lineáris hosszváltozással adja meg. A vizsgálatokat háromféle esetre is elvégeztük:⁴

KONVENCIONÁLIS ÉRTELMEZÉS, amelynél a feszültséget a kiindulási keresztmetszettel számítottuk (nominális feszültség, v. PIOLA-KIRCHHOFF-féle I. feszültség), s a deformációkat pedig a hagyományos értékekkel vettük:

$$\sigma^{nom} = \frac{F}{A_0} \quad \text{és} \quad \varepsilon^{Cauchy} = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

MÓDOSÍTOTT ÉRTELMEZÉS (a CAUCHY-féle ún. tényleges feszültséggel), amelynél a keresztmetszetben ébredő feszültséget a minden időpillanatban érvényes A keresztmetszettel számítottuk, ahol $A = A_0(1 + \delta_{\perp})^2$, és így

$$\sigma^{Cauchy} = \frac{F}{A} \quad \text{és} \quad \varepsilon^{Cauchy} = \frac{\Delta l}{l_0}.$$



3.ábra

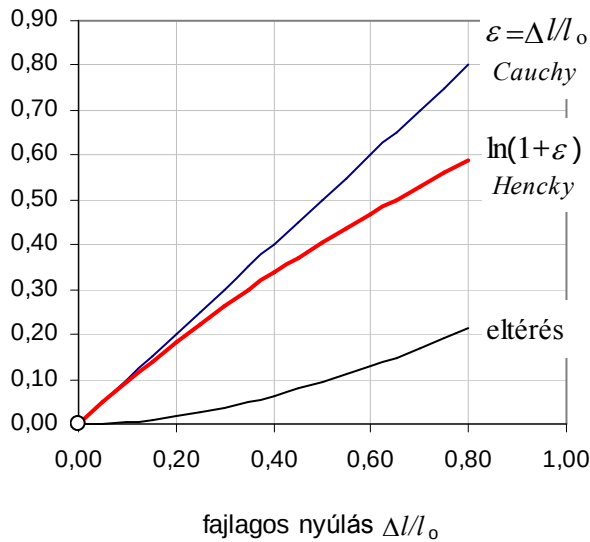
⁴ A lehetséges értelmezéseket a [ASSZONYI et al. (2011)] cikkben összefoglaljuk.

A 3. ábra mutatja az eltérést a hagyományos értelmezéssel szemben. Ekkor az állandó terhelés már nem jelent állandó feszültséget, mert a kúszás során folytonosan változik az A keresztmetszet.

A VALÓSÁGOS HELYZETNEK MEGFELELŐ (TÉNYLEGES FESZÜLTSGGEL ÉS DEFORMÁCIÓVAL TÖRTÉNŐ) ÉRTELMEZÉS. A kísérleteinknél fellépő mintegy 80%-os fajlagos nyúlásnál általában nem beszélhetünk

kis alakváltozásról, ezért nagy deformációs elmélettel kell dolgozni.

A nagy deformáció mértékek közül az anyagi objektivitás elvét egyértelműen a bal *Hencky*-féle deformáció teljesíti, ezért ezzel fogunk dolgozni FÜLÖP [1,2,3]. Megjegyezzük, hogy itt feltételezzük, hogy a kezdeti állapot teljesen deformációmentes, de FÜLÖP megfontolásai ettől jóval általánosabban is alkalmazhatóak.



4. ábra. A CAUCHY és HENCKY-féle deformációk összehasonlítása

Jelen esetben, egytengelyű terhelésnél ez, az egyszerű *Hencky*-féle deformáció:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{Hencky} &= \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l'} = \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right) = \\ &= \ln(1 + \varepsilon^{Cauchy}),\end{aligned}$$

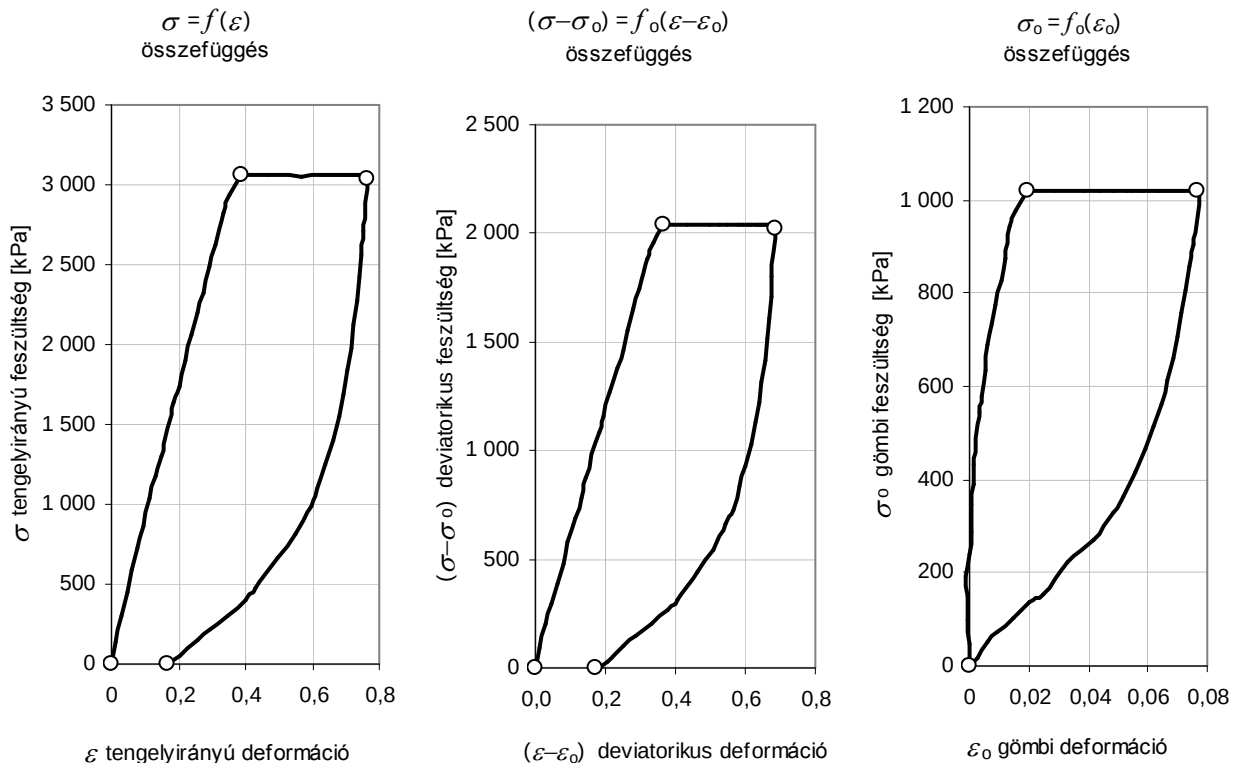
vagyis az eddigi ε helyett az $\ln(1 + \varepsilon)$ értékkel számoltunk.⁵ Azaz:

$$\sigma^{Cauchy} = \frac{F}{A} \quad \text{és} \quad \varepsilon^{Hencky} = \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right).$$

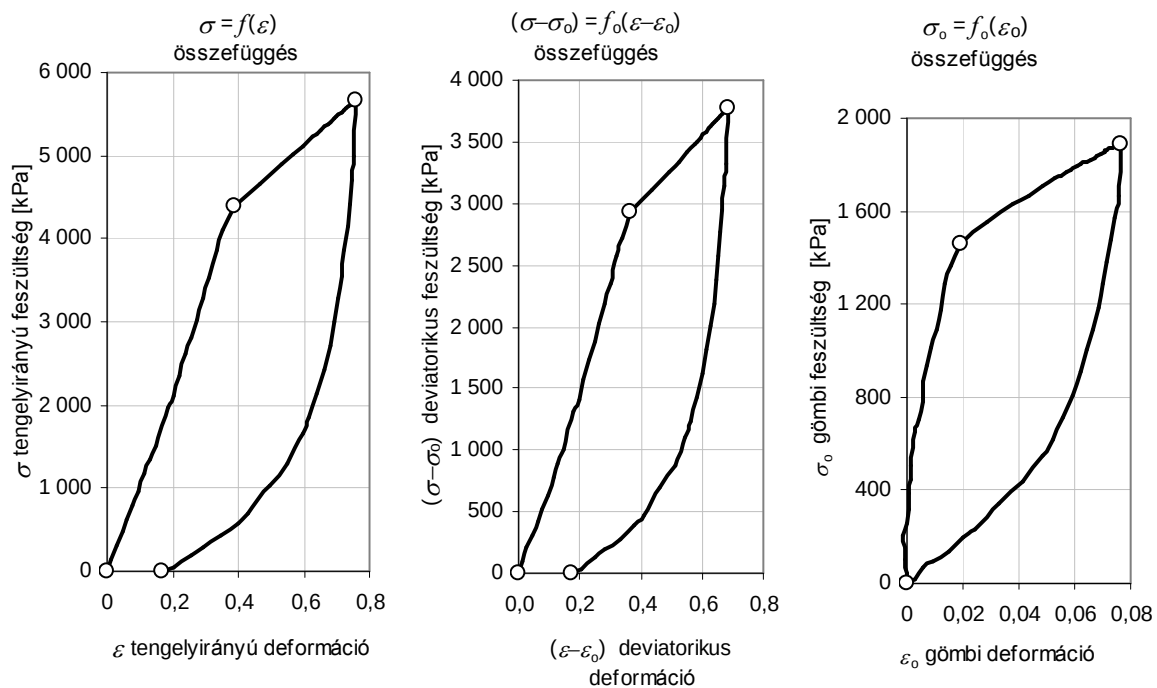
Ez a háromféle számítási mód a maradó deformációk jellegére vonatkozóan nem adnak minőségi különbséget csupán a $\sigma - \varepsilon$ görbék alakja változott.

⁵ Ebben az esetben lesz csak logikus a *torzulási* és a *térfogatváltozási* elnevezés, ugyanis a főátlóban lévő elemek összege: $\text{tr} \mathbf{\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ csak kis deformációk esetén lehet a térfogatváltozás lineáris közelítése: $\det(\mathbf{I} + \mathbf{\varepsilon}) = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)$, most viszont a főátlóban lévő elemek összege a kívánt összefüggést adja: $\det \mathbf{\varepsilon} = \ln(1 + \varepsilon_1) + \ln(1 + \varepsilon_2) + \ln(1 + \varepsilon_3) = \ln[(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)]$.

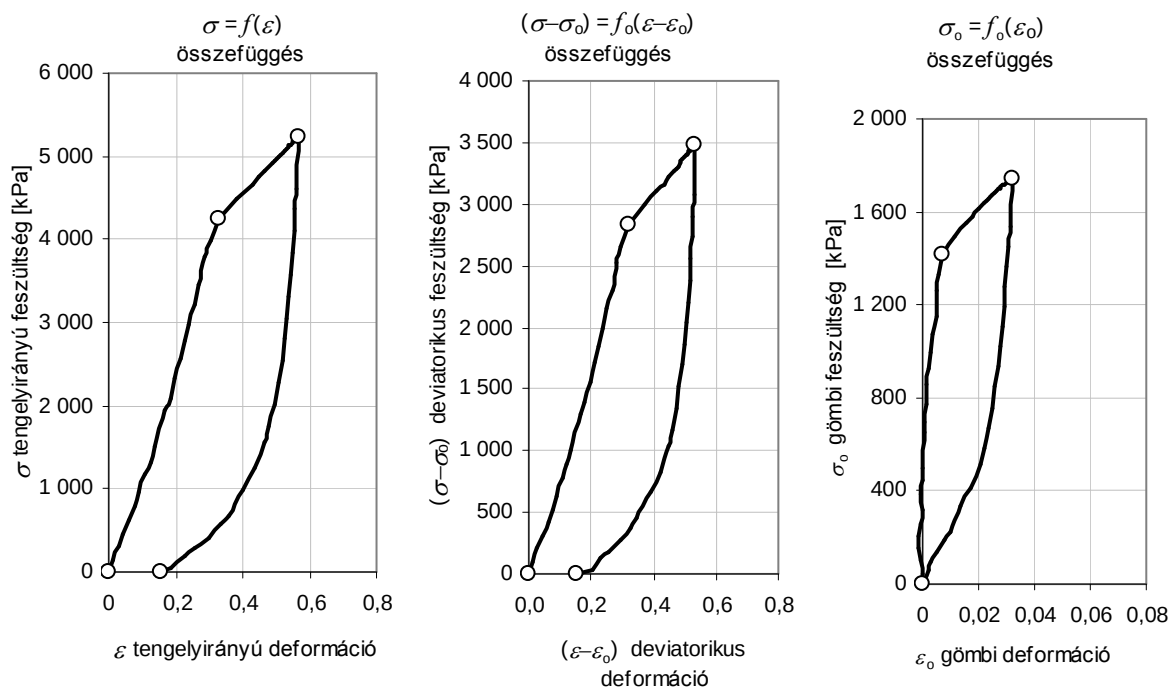
A különböző $\sigma - \varepsilon$ görbék a következő ábrák mutatják.



5. ábra. Hagyományos (PIOLA-KIRCHHOFF-féle I. feszültség – CAUCHY-deformáció) értelmezésben



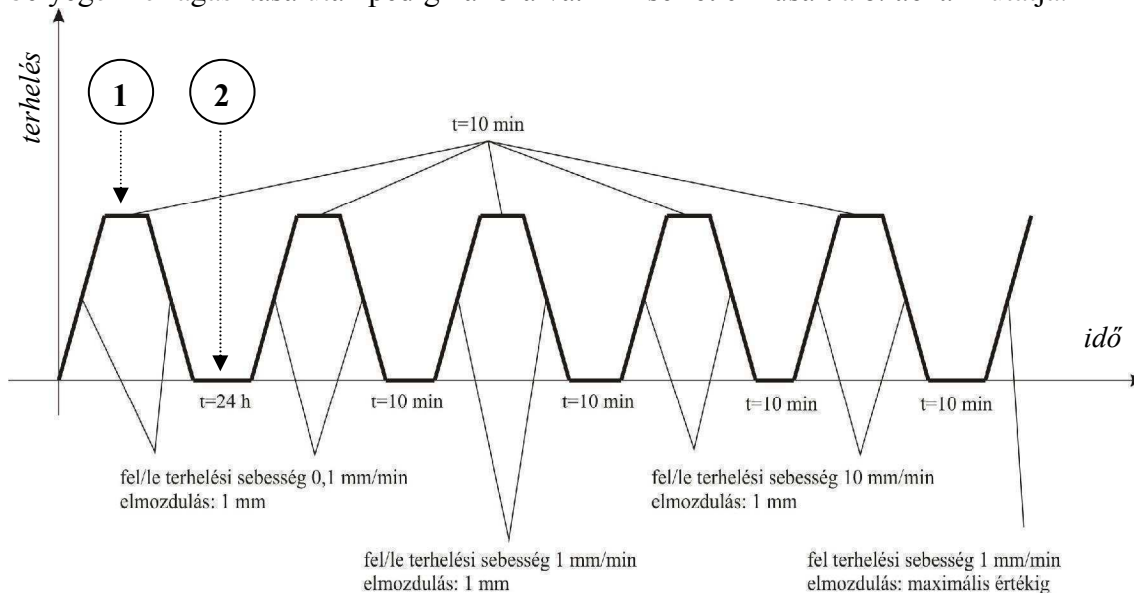
6. ábra. Módosított (CAUCHY-feszültség – CAUCHY-deformáció) értelmezésben



7. ábra. A CAUCHY-féle feszültségekkel és a HENCKY-féle deformációkkal

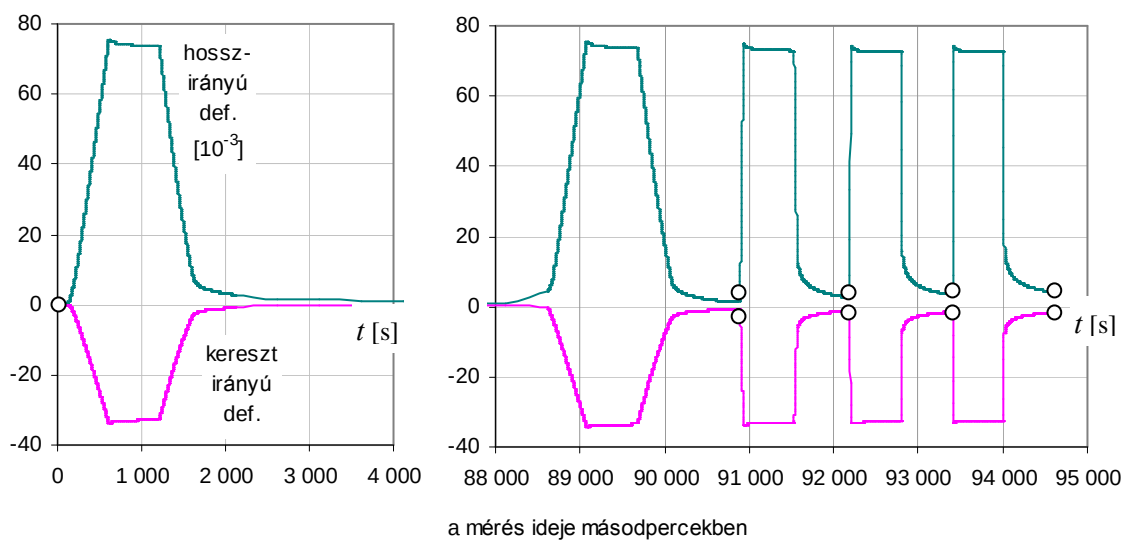
2.2. EGYTENGELYŰ NYOMÓKÍSÉRLET

A nyomókísérlethez hengeres alakú⁶ dalamit (homogén, izotrop kemény műanyag) próbatestet használtunk, amely megmunkálás után tehermentesítve lett, a nyúlásmérő-bélyegek felragasztása után pedig kalibrálva. A kísérlet ciklusait a 8. ábra mutatja.

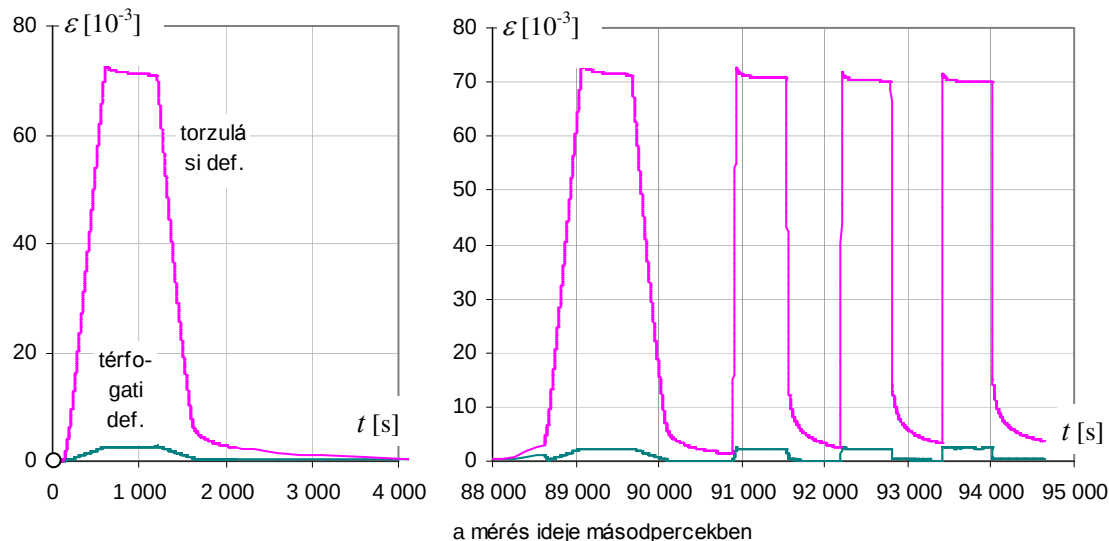


8. ábra

⁶ Átmérő (d_0): 30 mm, Hossz (l_0): 50 mm, Induló keresztmetszet (A_0): $7,0686 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.



9. ábra. A hosszirányú és keresztirányú deformációk időbeli alakulása



10. ábra. A számított torzulási és térfogatváltozási deformációk időbeli alakulása

3. KÖVETKEZTETÉSEK

Különböző és független kísérletekben vizsgáltuk a képlékenység (maradó deformáció) jelentkezését homogén és izotrop anyagokon (műanyagokon, gumikon).

A terhelés során minden esetben túlléptük az anyag képlékenységi határát (amit a maradó alakváltozás megjelenése mutatott), s a térfogatváltozásnál egyetlen esetben sem tapasztaltunk maradó deformációt, az összes maradó deformáció teljes egészében a torzulási állapotnál jelentkezett.

Ezen felismerésünket a véletlennek köszönhetjük, mivel most először bontottuk szét az egytengelyű kísérlet adatait gömbire és deviatorikusra (ui. nem akartuk a kiértékelést a (3) alatti, – változóiban harmad- és negyedrendű – differenciálegyenlet szerint végezni, inkább az (1)-(2) alatti – változóiban első- és másodrendű – két differenciálegyenlet szerint). S ez a felbontás hozta a meglepetést. Ezekután elővettük az elmúlt 6 évben végzett olyan egytengelyű laboratóriumi kísérlet eredményeit, – amelynél a terhelést tehermentesítés követte, – s megállapítottuk, hogy a térfogatváltozási (gömbi) résznél sehol sem jelentkezik maradó alakváltozás, miközben volt maradó alakváltozás.

Ezek után kettőt tehetünk:

1. Felvethetjük, hogy ez a jelenség – mert a fizika törvényei minden anyagra azonosan hatnak – *minden anyagra jellemző*. Ebből következik, hogy az anyagtörvénynek (konstitúciós egyenletnek) csak a deviatorikus részében jelentkezik a képlékeny (maradó) deformáció, a gömbi részben pedig nem. Ennek megfelelően a képlékenységi határ az ϵ_f^d -nek megfelelő torzulási deformációval adható meg. Azonban azzal is tisztában kell lenni, hogy a kísérletekkel tétel nem bizonyítható, csupán elméleti úton.

2. Felvethetjük, hogy ez a jelenség csupán *a vizsgált három anyagra* (vagy a műanyagok bizonyos csoportjára) *jellemző*, más anyagoknál a térfogati állapotban is jelentkezik maradó nyúlás, s ekkor a képlékenységi határt már két $[\epsilon_f^d], [\epsilon_f^o]$ deformációval kell megadni. Az azonban könnyen belátható, hogy ez a két érték nem lehet független egymástól. A mechanikai folyamat során ha a képlékeny határ az ϵ_f deformáció értékénél jelentkezik, akkor az $\epsilon_f^d, \epsilon_f^o$ értékek a deformációtensor deviátoros és gömbi felbontásából adódnak. $\epsilon_f = \epsilon_f^d + \epsilon_f^o$ felbontásból következik, hogy előfordulhatna az az eset, hogy az $\epsilon_f^d, \epsilon_f^o$ nem ugyanazon ϵ_f -hez tartozna, s ekkor két képlékenységi határunk is lenne $\epsilon_f^1 = \epsilon_f^d + \epsilon_1^o$ és $\epsilon_f^2 = \epsilon_f^d + \epsilon_f^o$. Ez azonban egy olyan specialitás, aminek valószínűsége nem túl nagy.⁷ Ezt eddig mindig elvetettük [ASSZONYI, Cs. et al. (2007)].

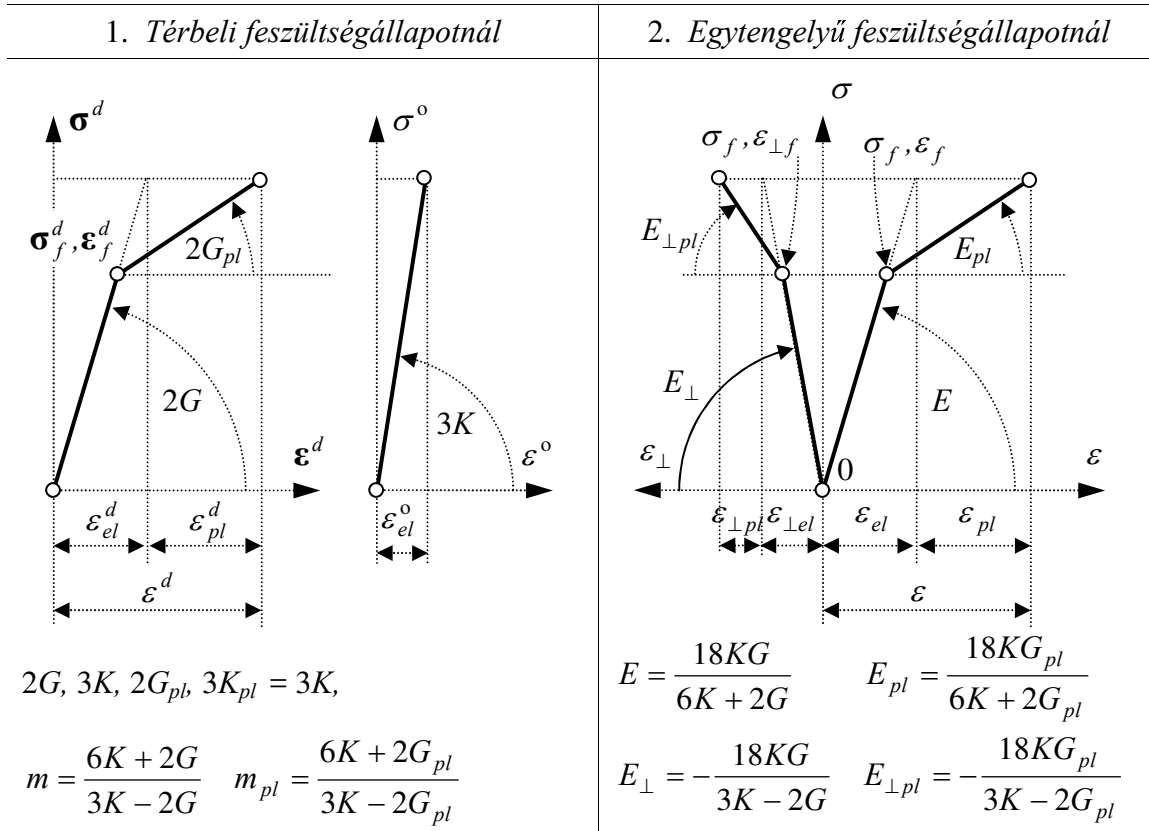
A gyakorlat oldaláról azzal tisztában vagyunk, hogy akkor jelenik meg képlékenység, amikor megjelenik a maradó deformáció. A valódi képlékenységi határfeltétel a *maradó deformáció zérus voltának a megszűnése*. Ennek azonban sem fizikai feltétele, sem matematikai megfogalmazása nem világos. Az alapvető probléma a véges deformáció kinematikai elégtelensége [FÜLÖP (2010)], illetve a termodinamikai feltételek megfogalmazása.

⁷ Ha a folyási határt a deformációs munkával hozzuk kapcsolatba, akkor az ϵ_f^d a torzulási deformációs munka függvényeként, az ϵ_f^o pedig a térfogatváltozási deformációs munka függvényeként jelenik meg, tehát két feltételünknek kell lenni, amelyek szigorúan összekapcsolódnak.

Azonban felfoghatjuk úgy is, hogy a maradó deformáció deviátoros volta egyszerű trivialisítás.

Vegyük az anyagegyenlet legegyszerűbb, lineáris „egyensúlyi” formáját, ugyanis a tehermentesítéssel az anyag egyensúlyi állapotba kerül:

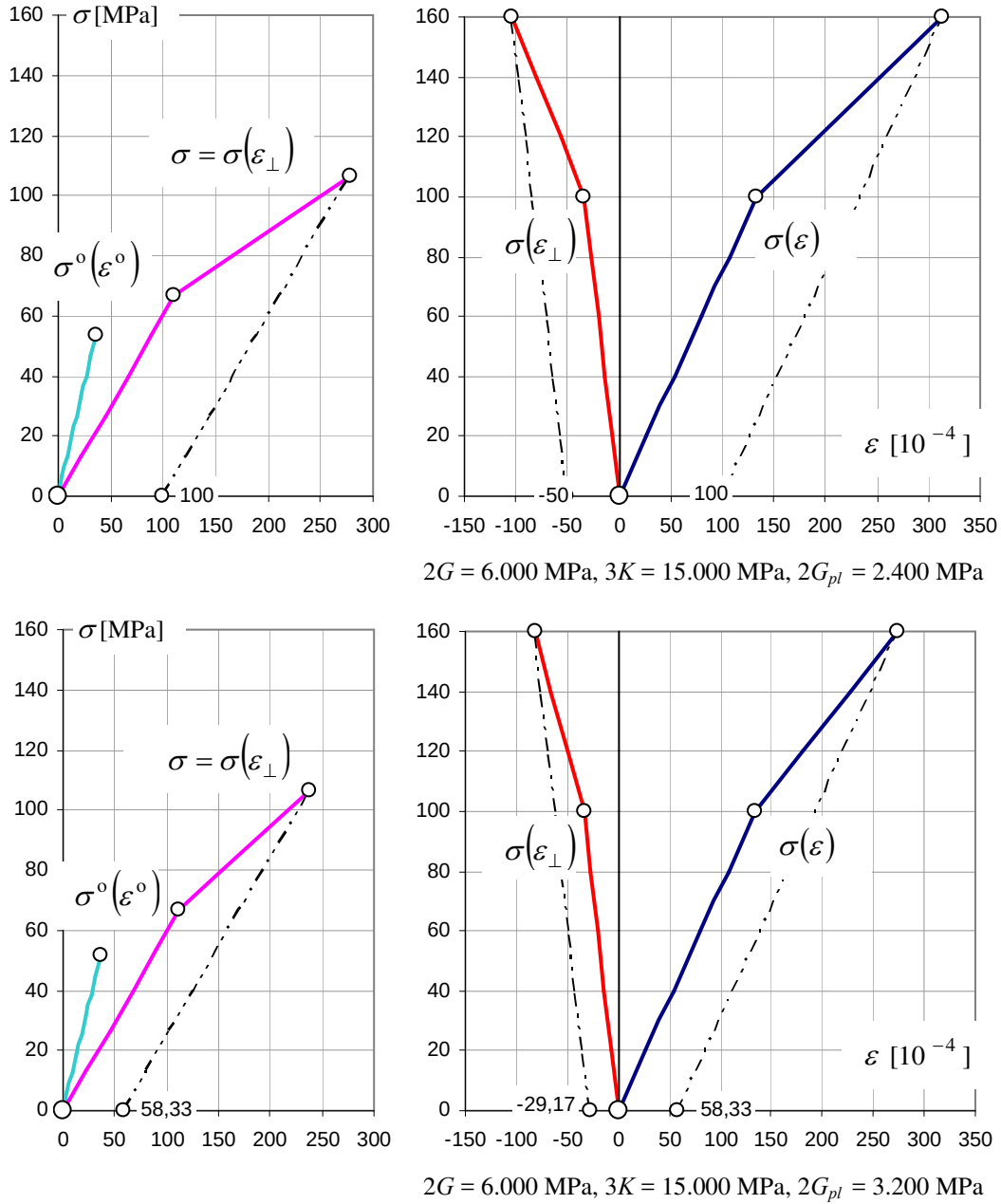
$$\begin{aligned} \text{Rugalmas állapotban} \quad [\text{ha } \boldsymbol{\varepsilon}^d \leq \boldsymbol{\varepsilon}_f^d]: \quad & \boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d, & \boldsymbol{\sigma}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o, \\ \text{Képlékeny állapotban} \quad [\text{ha } \boldsymbol{\varepsilon}^d > \boldsymbol{\varepsilon}_f^d]: \quad & \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d = 2G_{pl}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^d, & \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^o = 3K\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^o, \\ \text{ahol} \quad & \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d = \boldsymbol{\sigma}^d - \boldsymbol{\sigma}_f^d, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d, & \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^o = \boldsymbol{\sigma}^o - \boldsymbol{\sigma}_f^o, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^o = \boldsymbol{\varepsilon}^o - \boldsymbol{\varepsilon}_f^o. \end{aligned}$$



11. ábra

$$\begin{aligned} 1. \quad & \boldsymbol{\varepsilon}_{el} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d + \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^o \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d + \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^o \mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d, \\ & \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d = \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma}^d, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d = \frac{G - G_{pl}}{2GG_{pl}} \boldsymbol{\sigma}^d, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^d = \frac{1}{2G_{pl}} \boldsymbol{\sigma}^d, \quad \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^o = 0} \\ 2. \quad & \varepsilon_{el} = \frac{1}{E} \sigma, \quad \varepsilon_{pl} = \frac{E - E_{pl}}{EE_{pl}} \sigma, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E_{pl}}, \\ & \varepsilon_{\perp el} = \frac{1}{E_{\perp}} \sigma, \quad \varepsilon_{\perp pl} = \frac{E_{\perp} - E_{\perp pl}}{E_{\perp} E_{\perp pl}} \sigma, \quad \varepsilon_{\perp} = \frac{\sigma}{E_{\perp pl}}, \quad \boxed{\varepsilon_{pl} = -2\varepsilon_{\perp pl}} \end{aligned}$$

s két összemérhető számpéldának megfelelő képet mutatja a 12.ábra.



12. ábra

Az, hogy minden anyagállandó esetén a $\epsilon_{pl} = \epsilon_{pl}^d$, illetve egytengelyű esetben $\epsilon_{pl} = -2\epsilon_{\perp pl}$, következik abból, hogy az anyagegyenletnél csak a deviatorikus egyenletnél vettünk képlékeny állapotot.

A konvencionális képlékenységi elméleteknél szokásos (hibás és általunk állandóan ostromozott) feltevés, miszerint az anyag képlékeny állapotban összenyomhatatlan (térfogat-állandó), a $\epsilon_{pl}^o = \mathbf{0}$ összefüggésből levont hibás következtetés lehet csak, figyelmen

kívül hagyva, hogy a képlékeny állapotban is jelentkező rugalmas deformációknál: $\varepsilon_{el}^0 \neq 0$.

Ez a kérdés tehát további elméleti vizsgálatokat kíván.

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. et al. (1972): Rheological Basic Relations of Rock Mechanics. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungaricae* **7/1-2**, p. 3-33.
- ASSZONYI, CS. (1973): On a New Rockmechanical Theory. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungaricae* **8/3-4**, p. 313-322. Mechanical Theory of Continua. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungaricae* **8/3-4**, p. 323-360.
- ASSZONYI, CS. (1975): Kőzetkontinuumok reológiai elméletéről. *Akadémia doktori disszertáció*. Budapest, p. 62.
- ASSZONYI, CS.- RICHTER, R. (1979): The Continuum Theory of Rock Mechanics. *Trans Techn. Publications*. Clausthal-Zellerfeld p.332.
- ASSZONYI, CS. et al. (2006) : Izotrop kontinuumok anyagtörvénye. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **3**, Műegyetemi Kiadó, Budapest
- ASSZONYI, CS. – Ván, P. – Szarka, Z. (2007): Izotrop kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **5**, Műegyetemi Kiadó, Budapest
- ASSZONYI, CS. et al. (2008): Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **6**, Műegyetemi Kiadó, Budapest
- ASSZONYI, CS. – Béda, Gy. – Szarka, Z. (2009): Kontinuummechanika alapegyenleteinek megoldási módjai. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **9**, Műegyetemi Kiadó, Budapest
- DEBRECENI EGYETEM MK KÖRNYEZET- ÉS VEGYÉSZMÉRNÖKI TANSZÉK (2009-2010): Biomechanikai Anyagvizsgálati Laboratórium jegyzőkönyvek.
- GÖDÖLLŐI MEZŐGAZDASÁGI GÉPKÍSÉRLETI INTÉZET (2011): Laborvizsgálati jegyzőkönyvek.
- DRUCKER D.C., GIBSON R.E., HENKEL D.J. (1957): Soil Mechanics and work hardening theories of plasticity, *Trans. ASCE*, Vol.122, pp 338-346
- ROSCOE K. H., SCHOFIELD A.N., WROTH C.P. (1958): On yielding of soils, *Geotechnique*, Vol. 8, pp 22-52
- LADE P.V. (1977): Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces, *Int. Journal Solids Struct.*, Vol. 13, pp 1019-1035
- DOLEŽALOVÁ, M. 1985. Description of a pseudoelastic constitutive model. *Proc. of Conf. "Use of Microcomputers for Solving Soil Mech. and Found. Eng. Problems"*, Prague (in Czech)

- DOLÉŽALOVÁ, M., 1993. Numerical Solution of Rheological Problems. Chapter 12 in Jaroslav Feda (ed.), *Creep of Soils and Related Phenomen*, Academica-Elsevier, 348-385.
- DOLÉŽALOVÁ, M. (2007): Feszültségpályától függő rugalmas-képlékeny anyagmodell, *Mérnökgeológia – Kőzetmechanika* (Ed. Török Á., Vásárhelyi B.), 249-262
- FÜLÖP, T. (2010): Véges rugalmas és képlékeny deformációk leírása. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 99-151
- FÜLÖP, T. (2012): Egytengelyű eredő reológia, és relaxáció mint deviatorikus kúszás. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 13*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 23-29
- ASSZONYI, Cs. et al. (2011): Anyagállandók meghatározása egytengelyű laboratóriumi kísérletek alapján. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 13*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 121-132

EGYTENGELYŰ EREDŐ REOLÓGIA, ÉS RELAXÁCIÓ MINT DEVIATORIKUS KÚSZÁS

Fülöp Tamás

MTA KFKI RÉSZECSCSE- ÉS MAGFIZIKAI KUTATÓINTÉZET, BUDAPEST
BME ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Jelen írás arról számol be, hogy ha egy szilárd közeg akár deviatorikus, akár gömbi szempontból reológiai viselkedésű, akkor egytengelyű terhelés során a feszültség és a megnyúlás között egy bonyolultabb, eredő reológiai kapcsolat lép föl. Így például a legegyszerűbb reológiai esetben, a gömbi szempontból HOOKE-, deviatorikusan KELVIN-modell (Hooke-rugalmasság plusz torzulási viszkózitás) esetén az eredő egytengelyű reológia egy POYNTING–THOMSON-modell. Ezért már egy ilyen egyszerű reológiájú közeg is mutat relaxációs viselkedést. Ez a relaxáció tehát deviatorikus kúszásból fakad.

1. A KELVIN+HOOKE-MODELL EREDŐ EGYTENGELYŰ REOLÓGIÁJA

Érdemes a legegyszerűbb, legátláthatóbb esettel kezdeni a tárgyalást: tekintsünk egy KELVIN+HOOKE-modellt, azaz mely deviatorikus szempontból egy KELVIN-típusú

$$\sigma^d = \alpha^d \epsilon^d + \beta^d \dot{\epsilon}^d, \quad (1)$$

gömbi szempontból pedig egy HOOKE-féle

$$\sigma^s = \alpha^s \epsilon^s \quad (2)$$

konstitúciós összefüggésnek tesz eleget, ahol a tenzorok ^d deviatorikus (nyom nélküli) és ^s gömbi (szférikus, spherical) részének definíciója

$$\sigma^s = \frac{1}{3} (\text{tr} \sigma) \mathbf{I}, \quad \sigma^d = \sigma - \sigma^s, \quad \epsilon^s = \frac{1}{3} (\text{tr} \epsilon) \mathbf{I}, \quad \epsilon^d = \epsilon - \epsilon^s, \quad (3)$$

a felülpont pedig idő szerinti deriválást jelöl. Az együtthatókat szokásos a

$$\alpha^d = 2G, \quad \beta^d = 2\eta, \quad \alpha^s = 3K \quad (4)$$

alakban írni.

A szilárdtestmechanikai laboratóriumi egytengelyű húzó- és nyomókísérletek olyan folyamatok, amelyek során jó közelítéssel teljesül, hogy a feszültségtenzor és a deformációtenzor helyfüggetlen és — egy alkalmas DESCARTES-térkoordináta-rendszer szerint — minden időpillanatban a következő alakú mátrixokkal jellemezhető:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^s = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sigma^{\parallel} & & \\ & \sigma^{\parallel} & \\ & & \sigma^{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \sigma^d = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sigma^{\parallel} & & \\ & -\sigma^{\parallel} & \\ & & -\sigma^{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\parallel} & & \\ & \varepsilon^{\perp} & \\ & & \varepsilon^{\perp} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^s = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \varepsilon^{\parallel} + 2\varepsilon^{\perp} & & \\ & \varepsilon^{\parallel} + 2\varepsilon^{\perp} & \\ & & \varepsilon^{\parallel} + 2\varepsilon^{\perp} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^d = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp}) & & \\ & -(\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp}) & \\ & & -(\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp}) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

(Az $\varepsilon^{\parallel}$ tengelyirányú deformációkomponenst gyakran ε -ként, az $\varepsilon^{\perp}$ keresztirányú komponenst pedig $-\varepsilon_k$ -ként írják.) Az ilyen folyamatokra az (1) tenzoregyenlet egyetlen független skalár egyenletre vezet:

$$\sigma^{\parallel} = \alpha^d (\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp}) + \beta^d (\dot{\varepsilon}^{\parallel} - \dot{\varepsilon}^{\perp}) \quad (7)$$

a (2) összefüggés pedig a

$$\sigma^{\parallel} = \alpha^s (\varepsilon^{\parallel} + 2\varepsilon^{\perp}) \quad (8)$$

egyenletre egyszerűsödik.

Tűzzük ki célul, hogy a (7)–(8) egyenletekből kiküszöböljük $\varepsilon^{\perp}$ -t. Ehhez (7)-et írjuk a

$$\sigma^{\parallel} = (\alpha^d \varepsilon^{\parallel} + \beta^d \dot{\varepsilon}^{\parallel}) - (\alpha^d \varepsilon^{\perp} + \beta^d \dot{\varepsilon}^{\perp}), \quad (9)$$

(8)-at pedig a

$$\sigma^{\parallel} = \alpha^s \varepsilon^{\parallel} + 2\alpha^s \varepsilon^{\perp} \quad (10)$$

alakba. A (10) egyenlet időderiváltjának β^d -szereséhez adjuk hozzá a (10) egyenlet α^d -szeresét [azaz hattassuk a (10) egyenletre az $\alpha^d + \beta^d \frac{d}{dt}$ időderiváló operátort]:

$$\alpha^d \sigma^{\parallel} + \beta^d \dot{\sigma}^{\parallel} = \alpha^s (\alpha^d \varepsilon^{\parallel} + \beta^d \dot{\varepsilon}^{\parallel}) + 2\alpha^s (\alpha^d \varepsilon^{\perp} + \beta^d \dot{\varepsilon}^{\perp}). \quad (11)$$

Adjuk ehhez az egyenlethez (9) $2\alpha^s$ -szeresét, hogy az $\varepsilon^{\perp}$ -ra vonatkozó tagok kiessenek:

$$(\alpha^d + 2\alpha^s) \sigma^{\parallel} + \beta^d \dot{\sigma}^{\parallel} = 3\alpha^s \alpha^d \varepsilon^{\parallel} + 3\alpha^s \beta^d \dot{\varepsilon}^{\parallel}, \quad (12)$$

azaz, $\sigma^{\parallel}$ együttthatóját 1-re normálva

$$\sigma^{\parallel} + \frac{\beta^d}{\alpha^d + 2\alpha^s} \dot{\sigma}^{\parallel} = \frac{3\alpha^s \alpha^d}{\alpha^d + 2\alpha^s} \varepsilon^{\parallel} + \frac{3\alpha^s \beta^d}{\alpha^d + 2\alpha^s} \dot{\varepsilon}^{\parallel}. \quad (13)$$

Az egytengelyű húzó- vagy nyomóerőt jellemző $\sigma^{\parallel}$ és a megnyúlást-összenyomódást jellemző $\varepsilon^{\parallel}$ között tehát egy olyan eredő reológiai összefüggés teljesül, mely

$$\sigma^{\parallel} + \tau \dot{\sigma}^{\parallel} = \alpha \varepsilon^{\parallel} + \beta \dot{\varepsilon}^{\parallel} \quad (14)$$

alakú, azaz egy POYNTING–THOMSON-modell. Az eredő modell három együtthatóját a három eredeti konstitúciós együttható a

$$\tau = \frac{\beta^d}{\alpha^d + 2\alpha^s}, \quad \alpha = \frac{3\alpha^s\alpha^d}{\alpha^d + 2\alpha^s}, \quad \beta = \frac{3\alpha^s\beta^d}{\alpha^d + 2\alpha^s} \quad (15)$$

módon határozza meg. Az innen levezethető fordított irányú összefüggések, azaz az

$$\alpha^d = \frac{2}{3} \frac{\alpha\beta}{\beta - \tau\alpha}, \quad \beta^d = \frac{2}{3} \frac{\beta^2}{\beta - \tau\alpha}, \quad \alpha^s = \frac{1}{3} \frac{\beta}{\tau} \quad (16)$$

képletek például olyankor lehetnek hasznosak, ha egy egytengelyű kísérlet során lemérjük a $\sigma^{\parallel}(t)$, $\varepsilon^{\parallel}(t)$ függvényeket, valamilyen kiértékeléssel meghatározzuk belőlük a τ , α , β egytengelyű reológiai paramétereket, és azokból kívánunk visszakövetkeztetni a deviatorikus és gömbi együtthatókra.

2. RELAXÁCIÓ – MINT DEVIATORIKUS KÚSZÁS

A KELVIN+HOOKE-modell egytengelyű eredője tehát egy POYNTING–THOMSON-modell, ez pedig egy olyan modell, amely megengedi a relaxáció jelenségét, azaz amikor $\varepsilon^{\parallel}$ értékét egy nemnulla állandó értéken tartjuk, és azt tapasztaljuk, hogy ez az állapot időfüggő, csökkenő feszültséggel jár együtt. Ilyenkor ugyanis $\varepsilon^{\parallel} = \varepsilon^{\parallel}(0) = \text{const.}$, $\dot{\varepsilon}^{\parallel} = 0$, és a (14) differenciálegyenlet megoldása $\sigma^{\parallel}(t)$ -re

$$\sigma^{\parallel}(t) = \alpha \varepsilon^{\parallel}(0) + [\sigma^{\parallel}(0) - \alpha \varepsilon^{\parallel}(0)] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (17)$$

alakú, azaz a feszültség a kezdeti értékről exponenciális csökkenéssel relaxál a statikus HOOKE-érték felé.

Ha egy ilyen relaxáció során az $\varepsilon^{\perp}$ keresztirányú deformációra is vetünk egy pillantást, a (8)-ból adódó

$$\varepsilon^{\perp} = \frac{1}{2} (\sigma^{\parallel} - \alpha^s \varepsilon^{\parallel}) \quad (18)$$

összefüggés alapján azt láthatjuk, hogy $\sigma^{\parallel}$ időfüggésével együtt $\varepsilon^{\perp}$ is változik időben, tehát a tengelyirányú mozdulatlanság nem jár teljes mozdulatlansággal. Torzulási+gömbi szemszögből pedig úgy fogalmazhatunk, hogy a deviatorikus deformáció is változik időben, és folyamatosan zajlik egy deviatorikus kúszás, melyet a deviatorikus KELVIN-modell vezényel.

Megjegyzendő, hogy a kúszás fogalma itt nem abban a szűkebb értelemben van értve, hogy állandó nemnulla feszültséget tartva a deformáció változik, ahhoz az értékhez tartva, ami e feszültséghez HOOKE-rugalmasság esetén tartozik.¹ Abban az általánosabb értelemben van itt szó kúszásról, hogy a feszültség *lehet időfüggő*, de mindig a *pillanatnyi* feszültség szabja meg, hogy a deformáció épp mely értékhez igyekszik tartani: ha a feszültség mostantól kezdve nem változna, akkor az ennek megfelelő HOOKE-féle értékhez tart, ha ezután is változik, akkor mindig a pillanatnyi HOOKE-érték „a célja”.

A csak közvetlen rugalmas választ plusz kúszást leírni tudó deviatorikus KELVIN-modell, összezsugorolódva a még ennél is „feszesebb” (azaz csakis közvetlen rugalmas választ leíró) gömbi HOOKE-moddellel, képes tehát egytengelyű *relaxáció* produkálására. Ugyanígy generálódik relaxáció az egytengelyű folyamatokon kívül minden más olyan folyamat típusban is, ahol a megfigyelt mennyiségek (feszültségek, deformációk) nem tisztán *deviatorikusak* és nem tisztán *gömbiek*, hanem a deviatorikus és a gömbi mennyiségek valamilyen *kombinációi*.

Az eredő reológiai generálódó relaxáció egy kellemes hír a szilárd közegek reológiai modellezése számára. Ha ugyanis egy közegtípusra egy egytengelyű (vagy bármely más nem tisztán deviatorikus) folyamat során relaxáció jelenségét figyeljük meg, nem szükséges egyből legalább POYNTING–THOMSON-moddellel gondolni mind a deviatorikus, mind a gömbi konstitúciós összefüggéseket illetően (mondván, hogy a POYNTING–THOMSON-modell a létező legegyszerűbb reológiai modell², amely relaxációt is képes leírni). Az ugyanis $3 + 3 = 6$ anyagi együtthatóval járna, ennyi együttható kísérleti meghatározása azonban igencsak komoly kihívás. Szerencsére azonban erre nem feltétlenül van szükség, mert az itt látottak szerint egy sokkal kevesebb paraméterrel jellemzett modellpár is megmagyarázhatja az észlelt relaxációt. Természetesen gondos és célzatos vizsgálatokra lehet szükség annak eldöntésére, hogy egy közegtípust milyen konstitúciós összefüggésekkel lehet kielégítően modellezni: kiderülhet az is, hogy mégiscsak szükség van POYNTING–THOMSON- vagy általánosabb modellekre, de az is, hogy elegendőek bizonyos egyszerűbb modellek a deviatorikus és a gömbi szektorban.³

Ha tehát egy egytengelyű kísérletre jól illeszkedik a (14) egyenlet, azaz egy eredő POYNTING–THOMSON-modell, akkor (16) segítségével egy KELVIN–HOOKE-modell tehető mögéje, és a relaxáció elemibb magyarázatot nyer: egyszerűen kúszásként magyarázható.

¹ ASSZONYI CS. meglátása szerint a kísérletekben állandónak tartott terhelő *erő* nem is jelent állandó *feszültséget*, a keresztmetszet időfüggése miatt, illetve eleve többértelműséget okoz, hogy CAUCHY-, PIOLA-KIRCHHOFF-I- vagy PIOLA-KIRCHHOFF-II-féle feszültségről beszélünk-e.

² a termodinamikailag is megengedett közt [ASSZONYI-FÜLÖP-VÁN-SZARKA-HORVÁTH (2008)]

³ A tudományos megismerés módszertanában ismeretes az „OCCAM (OCKHAM) borotvajának” nevezett elv, miszerint ha két elmélet is kielégítően magyaráz egy jelenséget, akkor válasszuk azt, amelyik az egyszerűbb.

3. MAGASABBRENDŰ REOLÓGIAI MODELLEK EGYTENGELYŰ EREDŐJE

Most pedig következzen az általános módszer, mellyel tetszőleges lineáris, időderiváltakat véges rendig tartalmazó konstitúciós összefüggések esetén meghatározható az egytengelyű eredő reológia. A konstitúciós összefüggések legyenek tehát most általában

$$\mathcal{S}^d \sigma^d = \mathcal{E}^d \epsilon^d, \quad (19)$$

$$\mathcal{S}^s \sigma^s = \mathcal{E}^s \epsilon^s \quad (20)$$

alakúak, ahol az $\mathcal{S}^d, \mathcal{S}^s, \mathcal{E}^d, \mathcal{E}^s$ időderiváló operátorok mind $\frac{d}{dt}$ valamilyen polinomjai.⁴ Példaként érdemes kiírni a tehetetlenségi POYNTING–THOMSON–tehetetlenségi POYNTING–THOMSON-esetet, azaz a

$$\sigma^d + \tau^d \dot{\sigma}^d = \alpha^d \epsilon^d + \beta^d \dot{\epsilon}^d + \gamma^d \ddot{\epsilon}^d, \quad (21)$$

$$\sigma^s + \tau^s \dot{\sigma}^s = \alpha^s \epsilon^s + \beta^s \dot{\epsilon}^s + \gamma^s \ddot{\epsilon}^s \quad (22)$$

összefüggéspárt, mely azért érdekes, mert a tenzoriális belső változós nemegyensúlyi termodinamika ezt a modellpárt tünteti ki, mint egy univerzális általános reológiai keretet [ASSZONYI–VÁN–SZARKA (2007)], [VÁN–ASSZONYI (2008)], [VÁN (2008)]. E modellpár együtthatóit jelölik a

$$\tau^d = \tau, \quad \alpha^d = 2G, \quad \beta^d = 2\eta, \quad \gamma^d = \theta, \quad (23)$$

$$\tau^s = \tau_0, \quad \alpha^s = 3K, \quad \beta^s = 3K_v, \quad \gamma^s = \theta_0 \quad (24)$$

módon is.

Nos, egytengelyű folyamatok [ld. (5)–(6)] esetén (19) az egyetlen skalár

$$\mathcal{S}^d \sigma^{\parallel} = \mathcal{E}^d (\epsilon^{\parallel} - \epsilon^{\perp}) \quad (25)$$

egyenletre, (20) pedig a

$$\mathcal{S}^s \sigma^{\parallel} = \mathcal{E}^s (\epsilon^{\parallel} + 2\epsilon^{\perp}) \quad (26)$$

egyenletre egyszerűsödik. Az előző szakaszban látott lépések általános megfelelőjeként hattassuk $2\mathcal{E}^s$ -t (25)-re, $\mathcal{E}^d$ -t pedig (8)-ra, és adjuk össze a két eredményt. Észrevéve, hogy $\mathcal{E}^s \mathcal{E}^d = \mathcal{E}^d \mathcal{E}^s$, — és hogy általánosabban is, bármely két, állandó együtthatókkal rendelkező véges rendű lineáris differenciáloperátor felcserélhető, — az összeg az

$$(\mathcal{S}^s \mathcal{E}^d + 2\mathcal{S}^d \mathcal{E}^s) \sigma^{\parallel} = 3\mathcal{E}^d \mathcal{E}^s \epsilon^{\parallel} \quad (27)$$

⁴ $\frac{d}{dt}$ egy polinomja egy $c_0 + \dots + c_n \left(\frac{d}{dt}\right)^n$ alakú differenciáloperátor, állandó c_i együtthatókkal; mely tehát egy $f(t)$ függvényre hatva a $c_0 f + \dots + c_n \frac{d^n f}{dt^n}$ eredményt adja. A polinom n foka a differenciáloperátor rendje. Az $\mathcal{S}^d, \mathcal{S}^s, \mathcal{E}^d, \mathcal{E}^s$ operátorok általában mind különböző rendűek lehetnek.

alakba írható. A bal oldalon $\sigma^{\parallel}$ együtthatóját a konvenció szerint 1-re normálva, a végeredmény:

$$\frac{1}{\alpha^d + 2\alpha^s} (\mathcal{S}^s \mathcal{E}^d + 2\mathcal{S}^d \mathcal{E}^s) \sigma^{\parallel} = \frac{3}{\alpha^d + 2\alpha^s} \mathcal{E}^d \mathcal{E}^s \varepsilon^{\parallel}. \quad (28)$$

Példaként tekintsük (28)-at a (21)–(22) tehetetlenségi POYNTING–THOMSON–tehetetlenségi POYNTING–THOMSON-esetben: a vonatkozó behelyettesítések, beszorzások, és a megfelelő tagok csoportosítása után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sigma^{\parallel} + \frac{\beta^d + 2\beta^s + \tau^s \alpha^d + 2\tau^d \alpha^s}{\alpha^d + 2\alpha^s} \dot{\sigma}^{\parallel} + \\ + \frac{\gamma^d + 2\gamma^s + \tau^s \beta^d + 2\tau^d \beta^s}{\alpha^d + 2\alpha^s} \ddot{\sigma}^{\parallel} + \\ + \frac{\tau^s \gamma^d + 2\tau^d \gamma^s}{\alpha^d + 2\alpha^s} \ddot{\sigma}^{\parallel} = \frac{3\alpha^s \alpha^d}{\alpha^d + 2\alpha^s} \varepsilon^{\parallel} + \frac{3(\alpha^s \beta^d + \alpha^d \beta^s)}{\alpha^d + 2\alpha^s} \dot{\varepsilon}^{\parallel} + \\ + \frac{3(\alpha^d \gamma^s + \beta^s \beta^d + \alpha^s \gamma^d)}{\alpha^d + 2\alpha^s} \ddot{\varepsilon}^{\parallel} + \\ + \frac{3(\beta^d \gamma^s + \beta^s \gamma^d)}{\alpha^d + 2\alpha^s} \ddot{\varepsilon}^{\parallel} + \frac{3\gamma^s \gamma^d}{\alpha^d + 2\alpha^s} \ddot{\varepsilon}^{\parallel}. \end{aligned} \quad (29)$$

Láthatóan, ez az eredő reológiai modell már egy olyan „monstrum”, amelyben a feszültség harmadik, és a deformáció negyedik deriváltjáig bezárólag jelennek meg deriváltak. Természetesen a (29) képlet speciális esetként tartalmazza az előző szakaszban tekintett KELVIN–HOOKE-esetet is, és az összes többi egyszerűbb speciális eset (pl. a POYNTING–THOMSON–POYNTING–THOMSON-modellpár) eredő reológiai egyenlete is leolvasható belőle.

4. AZ EGYTENGELYŰ EREDŐ MINT REOLÓGIAI ELEMKAPCSOLÁS

Az iménti levezetés annak analógiája, ahogyan [FÜLÖP (2008)] tetszőleges véges, lineáris reológiai modellek soros és párhuzamos kapcsolásainak eredő egyenleteit származtatja. Érdekes és nem haszontalan megjegyezni, hogy igazából többről is van itt szó, mint analógiáról. Ezek a lépések ugyanis *pontosan* annak felelnek meg, ahogyan az ember a

$$(D \sim D \sim S) \parallel (D \sim D \sim S) \parallel (D \sim D \sim S) \quad (30)$$

kapcsolás reológiai egyenletét vezetheti le, ahol D a deviatorikus, S a gömbi reológiai modell, és $\sim$ a soros, $\parallel$ pedig a párhuzamos kapcsolást jelöli. Ez az állítás egyszerűen belátható abból, ahogyan [FÜLÖP (2008)] differenciáloperátorosan származtatja kapcsolások soros és párhuzamos eredőjét.

A (30) kapcsolás szemlélteti tehát az egytengelyű eredő modellt, mégpedig nemcsak kvalitatíve, hanem kvantitatíve is, tehát a (29) egyenlet minden konstansát is pontosan reprodukálva.

KÖSZÖNETMONDÁS

Köszönet illeti ASSZONYI CSABÁT, a probléma felvetéséért és a hasznos diszkusszió-kért. Jelen írást az OTKA K81161 számú pályázata támogatta.

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. – FÜLÖP, T. – VÁN, P. – SZARKA, Z. – HORVÁTH, R. (2008): Reológiai alapmodellek és összekapcsolásuk, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6, Műegyetemi Kiadó*, Budapest, pp. 53–92.
- ASSZONYI, CS. – VÁN, P. – SZARKA, Z. (2007): Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 5, Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- FÜLÖP, T. (2008): Reológiai elemkapcsolások, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia*. In: ASSZONYI, CS. (szerk.), *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6, Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- VÁN, P. (2008): Objective time derivatives in nonequilibrium thermodynamics, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **57** (2008) 127–131.
- VÁN, P. – ASSZONYI, CS. (2008): Izotrop kontinuumok anyagtörvényei és speciális esetei, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 ISRM Konferencia*. In: ASSZONYI, CS. (szerk.), *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6, Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

GONDOLATOK A PORÓZUS- ÉS A TÖREDEZETT ANYAGOK MECHANIKAI VISELKEDÉSÉNEK MEGÉRTÉSÉHEZ

Asszonyi Csaba

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Doležalová Márta

DOLEXPART, PRAHA – MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Ván Péter

KFKI RÉSZECSCSE- ÉS MAGFIZIKAI KUTATÓINTÉZET, ELMÉLETI FIZIKA FŐOSZTÁLY, BUDAPEST
BME ENERGETIKAI GÉPEK TANSZÉK, MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT BUDAPEST

Vásárhelyi Balázs

VÁSÁRHELYI ÉS TÁRSA KFT, BUDAPEST – MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A tanulmány CAI, MARTIN ÉS CHANDLER következtetéseiből kiindulva veszi vizsgálat alá a mechanikai anyagviselkedést abban az esetben, ha az anyag pórusos vagy töredezett. Ebben a cikkben az anyagot a tönkremenetelig rugalmasnak és lineárisnak tekintjük, az irodalommal való összehasonlíthatóság érdekében.

Ha a kőzet tömör, akkor az ún. „egyensúlyi” anyagegyenlet – az anyagegyenlet speciális alakja nemdisszipatív folyamatoknál –

$$\boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o$$

alakú, amennyiben porózus és töredezett, akkor javaslatunk szerint

$$\boldsymbol{\sigma}^d = 2G(D)\boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^o = 3K(n)\boldsymbol{\varepsilon}^o,$$

ahol n a porozitás és D a károsodottság mértéke.

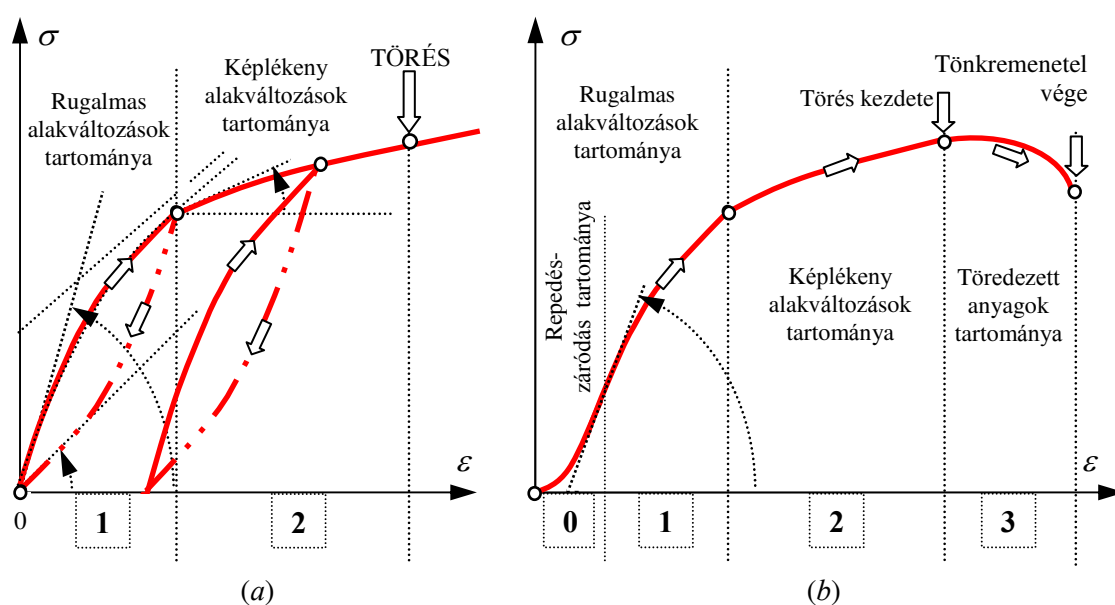
1. BEVEZETÉS

1.1. A CÉLKITŰZÉS

Eddigi vizsgálataink során a kiindulástól a tönkremenetelig két tartományt különböztettünk meg, a *rugalmas* és a *képlékeny* alakváltozások zónáját. Nem foglalkoztunk a teljes tönkremenetelt megelőző tartománnyal, amikor az anyagokban kialakuló

mikrorepedések még nem érik el azt a szintet, amikor azt már szétesettnek kell tekinteni. Vagyis nem foglalkoztunk a *töredezett anyagok* mechanikai tulajdonságaival.

Ez szinte természetesnek tűnik, hiszen a különböző szerkezeti anyagoknál (gépészet, építészet, stb.) az anyagok károsodása mindenképpen elkerülendő, sőt gyakorlatilag katasztrófát eredményező lehet. Talán egyetlen kivételnek lehet tekinteni a természetbe történő emberi beavatkozás területét (alagútépítés, bányászat), ahol a talaj- és kőzetkörnyezet adottság, s nem a mérnök dönti el, hogy megengedi-e az anyag repedezettségét, morzsolódását, tönkremenetelét. Ezen ok miatt fontos, hogy megismerjük a kőzetek tönkremeneteli folyamatait, a töredezett kőzet anyagjellemzőit és annak változását a tönkremenetel során.

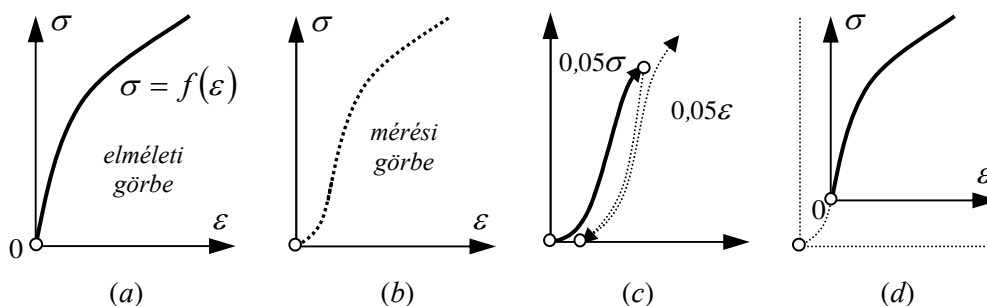


1. ábra

Az 1. ábra (a) részén látható az eddig követett út képe, s az 1. ábra (b) részén pedig a fizikailag indokolt felosztás. [Asszonyi–Ván–Szarka (2007)] 40. old. 1. ábrán felvillantottuk ezt a lehetőséget, inkább intuitíve, mint indokolva.

Nem foglalkoztunk továbbá a kőzetanyagok nagy részénél ép állapotban is meglévő pórusok hatásával sem, holott a következőkben látni fogjuk, hogy a kimondottan tömörnek tekinthető rideg gránit esetén is megtaláljuk a pórusokat. Azt nem tudhatjuk, hogy ezek a mikrorepedések még a kőzet-kialakulás során jöttek-e létre, vagy pedig a földtörténeti korokban elszenvedett geológiai és/vagy tektonikai erőhatások révén, mint lokális kezdeti tönkremenetek, amelyek nem fejlődtek tovább, nem álltak össze törési felületekké.

Ezen hiányosságainkat most megkíséreljük pótolni, persze csak részlegesen, mert kiindulásként egyetlen irodalmi felfogást veszünk górcső alá, mivel ma ez tekinthető a leglogikusabbnak és legelfogadottabbnak.



2. ábra. A tengelyirányú feszültség és tengelyirányú fajlagos megnyúlás összefüggése egytengelyű kísérlet esetén

Számos esetben a laboratóriumi nyomókísérleteknél tapasztaltuk, hogy pl. az összetartozó feszültség–deformáció görbe induláskor (alulról) konvex, s csupán később válik konkávvá, holott az eddigi elméleti eredmények – termodinamikai feltételek - ezt nem engedték meg (2. (a),(b) ábra). Ezzel a jelenséggel nem tudván mit tenni, lesöpörtük az asztalról. Feltételeztük, hogy a terhelés kezdetén az anyagszemcsék „helyezkednek”, „elrendeződnek” s ezért

– először előírtunk egy ún. kis előterhelést,¹ majd tehermentesítést, csak utána kezdtük a tényleges mérést. A probléma csupán az volt, hogy ez a jelenség továbbra is megjelent, bár kissé csökkentett formában (2. (c) ábra).

– másodszor az előterhelés után nem tehermentesítettünk, de csak az ezutáni mérési adatokat használtuk (2. (d) ábra) az anyagjellemzők meghatározására.

Annak érdekében, hogy az egyes jelenségeket el lehessen választani egymástól, a vizsgálatokat különböző részekre célszerű tagolni (különböző elvi feltételezésekkel élni):

1. a kiinduló anyag tömörsége szerint:

- az anyagot tökéletesen tömörnek,
- az anyagot porózusnak tekintjük. Ez utóbbi esetben a kapott eredményeknek – porozitás = 0 feltevése esetén – meg kell egyezniük az előbbivel.

2. a terhelési folyamat sebessége szerint:

- a terhelést „nagyon lassúnak”² tekintjük, ezáltal feltételezésünk szerint egy kvázistatikus egyensúlyi folyamatról van szó, s ekkor a $\sigma - \varepsilon$ anyagviselkedést lineárisnak vesszük,
- a terhelési folyamat sebességére nem teszünk korlátozást, s ekkor a $\sigma - \varepsilon$ anyagviselkedés reológiai.

3. az alakváltozási tartományok szerint

- először vizsgálatainkból kihagyjuk a képlékeny viselkedést, s úgy vesszük, mintha az anyag nem kerülne képlékeny állapotba, végül

¹ A tervezett tartomány max. 5%-os értékéig.

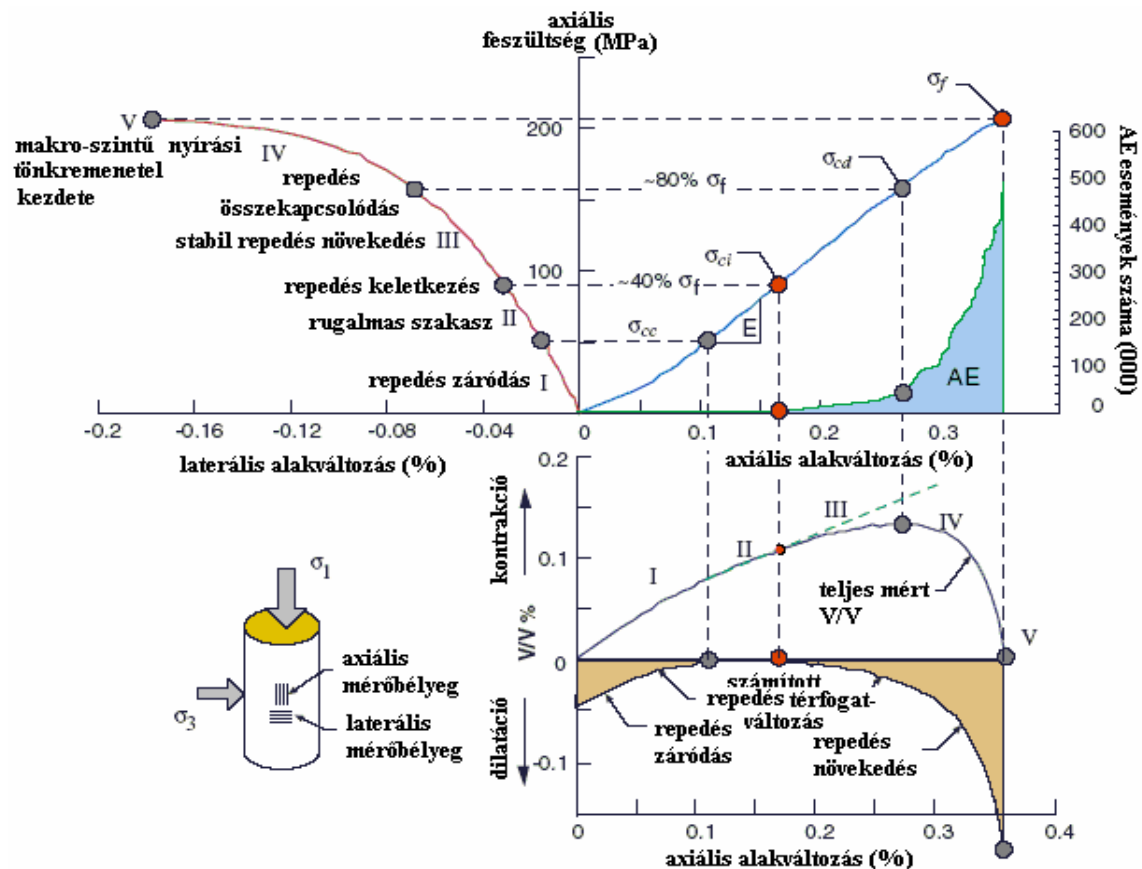
² Ez azt jelenti, hogy olyan lassú, hogy a deformációk késési ideje és a relaxációs idő megegyezik, s így az anyag nem mutat időfüggést.

- a teljes spektrumot – rugalmas, képlékeny és töredezett anyag tartomány – tárgyaljuk.

Ezeket a változatok egy következő tanulmány részei. Ebben a cikkben a reológiai viselkedéstől, a képlékeny folyamattól eltekintünk és vizsgálatainkat a rugalmas egyensúlyi viselkedésre korlátozzuk.

1.2. EGY FELFOGÁS A SZAKIRODALOMBÓL

Mondanivalónk illusztrálására vegyük alapul a következő 3. ábrát, amely [CAI, M. (2009)] cikkéből való, s [MARTIN C. D. (1993)] és MARTIN – CHANDLER (1994)] ábrájának továbbfejlesztett változata. A 3. ábra a rideg, mikrorepedezéssel károsodó anyagok károsodási folyamatának – mai felfogásunk szerint legelfogadottabb – képét szemlélteti tömören, egy Lac du Bonnet gránit-mintán végzett triaxiális kísérlet adataira alapozva.



3. ábra. Rideg anyagok károsodásának összefoglalása MARTIN, CHANDLER és CAI szerint. Gránit triaxiális összenyomásakor a tengelyirányú deformáció függvényében a teljes és repedéstérfogat változása (alul) és a feszültség (jobbra fenn), illetve az oldalirányú deformáció függvényében a feszültség (balra fenn). Az AE terület a mikrorepedezésre jellemző akusztikus emisszió-intenzitás adatok (beütésszám) mutatja. A mérési elrendezést a baloldalt alul látható.

A szerzők a 3. ábra szerint lezajló mechanikai folyamatoknál négy szakaszt különítenek el, amelyhez megbízhatóan mérni kell a tengely és oldalirányú deformációkat és hasznos mérni az akusztikus emissziót. Ez utóbbit a mikrorepedések megjelenése eredményezi. A mikrorepedés kinyílásakor a lokális feszültségrelaxációt kísérő hangesemények jelentkeznek, ezek számát v. intenzitását mérhetjük.

Ezen vizsgálat nem csak triaxiális, hanem speciálisan egyirányú nyomóvizsgálat esetén is használható, ezért a következőkben megkíséreljük az eddig ismert elméleti összefüggéseink alapján rekonstruálni az ábrát először egytengelyű, majd térbeli feszültségállapotra.

I. SZAKASZ: MIKROREPEDÉSEK ZÁRÓDÁSA, amely a terheletlen állapotból a repedéstérfogat csökkenésének befejeződéséig tart. A feszültség-axiális deformáció görbe konvex, a minta térfogata csökken, de kevésbé, mint a rugalmas összenyomódás miatt kellene. *A mikrorepedések záródása nem jár zajjal*, azaz akusztikus emisszió gyakorlatilag nincs. A tartomány határát szerintük egy ún. repedészáródási határfeszültség (σ_{cc}) jellemzi.

II. SZAKASZ: LINEÁRISAN RUGALMAS TARTOMÁNY, amelyet a repedéstérfogat állandóságával határoznak meg. A feszültség mind a tengely, mint az oldalirányú deformáció függvényében lineáris, hangkibocsátás nincs. A tartomány felső határát szerintük egy ún. repedésnyílási határfeszültség (σ_{ci}) jellemzi.

III. SZAKASZ: STABIL REPEDÉSTERJEDÉS TARTOMÁNYA, amely a repedéstérfogat csökkenésének kezdetétől illetve az akusztikus emisszió megindulásától a teljes térfogatváltozás minimumáig tart. A feszültség a tengelyirányú deformáció függvényében lineáris, az oldalirányú deformáció függvényében viszont már nem. A tartomány határát szerintük egy ún. károsodási határfeszültség (σ_{cd}) jellemzi. Más kísérletek azt mutatják, hogy a feszültség növelését a tartomány határain belül megállítva a károsodás folyamata megállítható, azaz a repedezés a feszültséget állandóan tartva nem folytatódik, az anyag hosszabb idő alatt sem megy tönkre. Innen a tartomány elnevezése.

IV. SZAKASZ: INSTABIL REPEDÉSTERJEDÉS TARTOMÁNYA. Ez a szakasz a teljes térfogatváltozás minimumától a tönkremenetelig tart. Rideg anyagoknál a tönkremenetel gyors, nincs képlékeny, illetve puhuló átmenet. A feszültség a tengelyirányú deformáció függvényében gyakorlatilag a tönkremenetelig lineáris marad. Az oldalirányú deformáció függvényében viszont egyre inkább a vízszintes felé hajlik, amit a mintatengelyre merőleges felületirányú repedések kinyílásával szokás magyarázni. Ebben a tartományban a mikrorepedések összeolvadása és nagyon erőteljes akusztikus emisszió figyelhető meg. A feszültség növekedését megállítva és állandó értéken tartva, a tönkremenetel előbb utóbb bekövetkezik.

Megjegyezzük, hogy a fenti tartományok megkülönböztetése – a szerzők szerint – csak az oldal- és tengelyirányú deformációk egyidejű mérésével lehetséges.

Ez a károsodási folyamat nincs teljesen elméleti modellel alátámasztva, így több ponton hipotetikus. Ezért kíséreljük meg tanulmányunkban az eddig ismert elméleti alapokon felépíteni az összefüggéseket.

1.3. NÉHÁNY ÉSZREVÉTEL

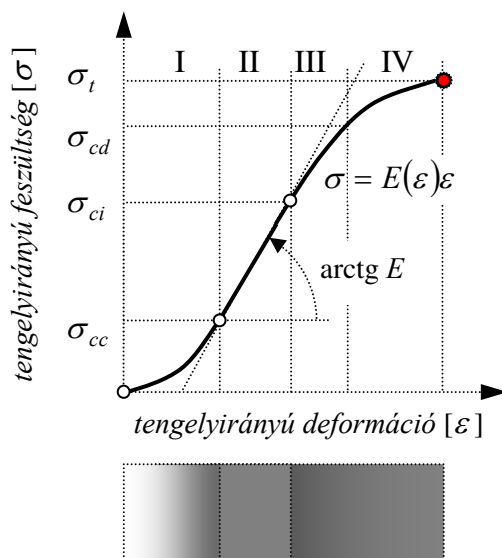
Előre kell bocsátani, hogy ezek a mérések – annak ellenére, hogy a legelfogadottabb képet tükrözik, mégis – hiányosnak tekinthetők, mivel a mérések időskáláját nem közlik, tehát nem reológiaiak. Az viszont köztudott hogy a terhelési sebességtől látszólag függenek az anyagállandók értékei.³ Arról nem is beszélve, hogy triaxiális kísérletnél az ún. egytengelyű – lineáris – anyagállandókat használják. E miatt *első lépésben* kénytelenek leszünk a „nagyon lassú” terhelési sebesség feltételezésével dolgozni, hogy ne kelljen a „reológiai” hatásokkal törődni, továbbá az egytengelyű nyomókísérletre koncentrálni, különben nincs értelme számos kifejezésnek, pl. az E Young-modulusnak.

Csak ezek után, *további lépésekben* írhatjuk fel a térbeli esetet, majd a reológiai esetben érvényes (a ténylegesen érvényes) összefüggéseket. A 3. ábrából látszik, hogy a szerzők szeme előtt csak a rugalmas alakváltozások lebegtek a kezdetektől egészen a törésig, nem zavartatták magukat az esetleges képlékeny alakváltozásoktól, s ezért nem is vették azt figyelembe. Ha azt tekintenénk, hogy az E modulus értéke csak a repedezettségtől (értelemszerűen: az anyag porozitásától és töredezettségétől) függ, akkor kaphatjuk a 4. ábrán látható elvi képet. Az egyes szakaszokat elválasztó feszültségértékeket akkor lenne szabad feltüntetnünk, ha a minőségi váltás azoktól függne. Köztudott azonban hogy ez csak a „nagyon lassú” terhelési sebességnél igaz, ezért vagyunk kénytelenek

először mi is ehhez igazodni. (A terhelési sebesség függvényében a σ értékekben az eltérés akár 300%-os is lehet.)

A 3. ábra jobb alsó része azt sugallja, hogy az anyagban eleve meglévő pórusok (I. szakasz) és a tönkremenetel (III-IV. szakasz) során kialakuló mikropredések ugyanazzal a paraméterrel is leírhatók. Ez valójában egy térfogat jellegű mérőszám (porozitás).

Ha a pórust és a repedezettséget egyaránt porozitással [$n = V_p / V$] jellemezzük – amely bizonyos feltételezéseknél még elfogadható is, – akkor nem teszünk különbséget az



4. ábra

³ Ez nem így igaz, mert az anyagállandók konstansok, s függetlenek a terhelési sebességtől, minden külső hatástól, csupán a σ - ε görbék meredeksége változik.

- (a) izometrikus v. *igazi pórus* és a
- (b) *mikrorepedéses pórus* között.

A terhelés elején a pórusok záródnak, ekkor a porozitás csökken, majd a károsodási folyamat során egyrészt a pórusok egy része (a terhelés irányába mutató pórus) ismét nyílik, más része pedig a mikrorepedések összeérése és újabb repedések létrejötte folytán nő (ez viszont a tönkremeneteli folyamat eredménye). Ekkor valójában újabb „pórusok” jönnek létre, ami valójában nem igaz, mert a repedezettség olyan pórust jelent, aminek voltaképp nincs térfogata, csupán „felülete”. A károsodás folytán létrejövő mikrorepedéseket célravezetőbb lenne egy felületi mérőszámmal leírni. Ilyen a t_m tagolt-sági mérőszám a mérnökgeológiában:

$$t_m = \frac{\sum A_i}{V},$$

ahol A_i az egyes repedési felületek területe. A probléma csupán az, hogy ezeket az A_i értékeket a minta belsejében hogyan mérhetjük? Ennek egy lehetőségét megteremti a ma már egyre gyakrabban alkalmazott komputeres tomográfia (TC). Azonban jelen cikkünkben ezt figyelmen kívül hagyjuk.

A közettömb V térfogata a V_s szilárd közetalkotók és a V_p pórusok összegzett térfogata:

$$V = V_s + V_p = \sum_i V_{si} + \sum_k V_{pk}, \quad (1)$$

ahol V_{si} az egyes közetalkotó ásványok, V_{pk} az egyes pórusok térfogata, a közettömb m össztömege analóg módon:

$$m = m_s + m_p = \sum_i m_{si} + \sum_k m_{pk}. \quad (2)$$

Ebben „kimondatlanul az is benne van”, hogy a póruseloszlást véletlenszerűnek tartjuk, esetleg anyagmodellünkben „homogénnek” tekintjük. Nem tehetünk mást, különben a háromváltozós tér függvényében fel kellene tudnunk írni a póruseloszlást nagyság és irányítottság szerint.

Ha akusztikus emissziós mérést is végzünk, akkor tudjuk, hogy a hanghatás megjelenése a károsodási folyamat megindulását jelzi. Erre az akusztikus hatások mérése a legkézenfekvőbb út, ebből viszont nem érdemes visszaszámolni valamilyen "repedéshosszak összege" jellegű paraméterre, hanem inkább valamilyen porozitási – „pórustérfogatok összege” – jellemzőre, vagy sűrűségi jellemzőre, vagy mint látni fogjuk egy „*károsodás*” jellegű mérőszámra.

A porozitás és a tömegsűrűség között egyértelmű és nagyon egyszerű összefüggés van. Legyen

$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s} = \frac{\sum_i m_{si}}{\sum_i V_{si}} \text{ - a szilárd váz térfogatsűrűsége,}$$

$$\rho_p = \frac{m_p}{V_p} = \frac{\sum_k m_{pk}}{\sum_k V_{pk}} \text{ - a pórusban lévő anyag térfogatsűrűsége (légszáraz állapotban: } \rho_p = 0, \text{ míg vízzel telített állapotban: } \rho_p = 1),$$

s ekkor az eredő sűrűség

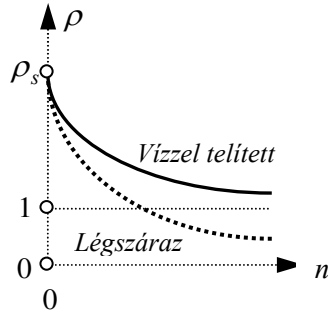
$$\rho = \frac{\sum_i m_{si} + \sum_k m_{pk}}{\sum_i V_{si} + \sum_k V_{pk}} = \frac{m_s + m_p}{V_s + V_p} = (1-n)\rho_s + n\rho_p, \quad (3)$$

ahonnan

$$n = \frac{\rho - \rho_s}{\rho_p - \rho_s},$$

amely légszáraz állapotban:

$$n = \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s},$$



5. ábra

vízzel telített állapotban:

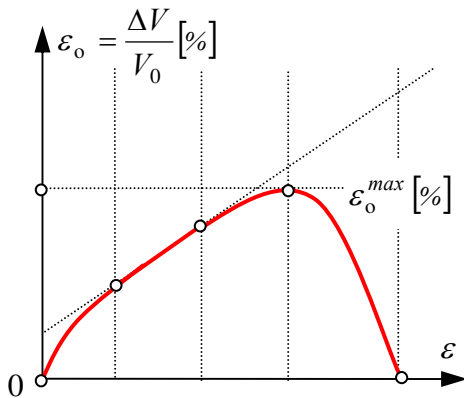
$$n = \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s - 1},$$

ahogy ezt VÁSÁRHELYINÉL láttuk (5. ábra). Tehát alapparaméternek elvben az n és a ρ is választható.

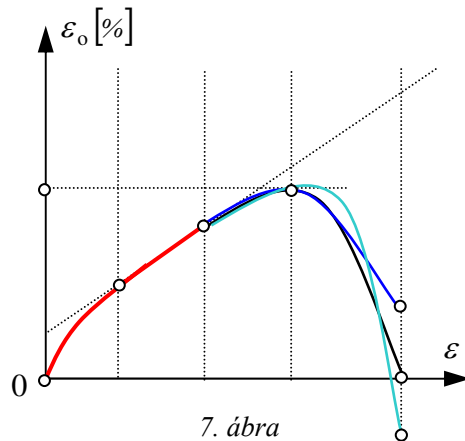
Ha figyelembe vesszük, hogy a sűrűség és az $\varepsilon^o = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_\perp)$ közepes v. átlagos deformáció⁴ között – a tömeg kontinuitási egyenlete folytán – összefüggés van:

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_\perp)(1 + \varepsilon_\perp) - 1 \approx \varepsilon + 2\varepsilon_\perp = 3\varepsilon^o, \Leftrightarrow \rho = \rho_0 \frac{1}{3}\varepsilon^o, \quad (4)$$

ahol ρ_0 a próbatest kiinduló sűrűsége, akkor az ε^o is választható alapparaméternek. Ha a kísérlet előtt a minta porozitása n_0 , akkor a (3) alapján: $\rho_0 = (1 - n_0)\rho_s + n_0\rho_p$.



6. ábra



7. ábra

⁴ Egytengelyű kísérletnél (izotrop esetben)

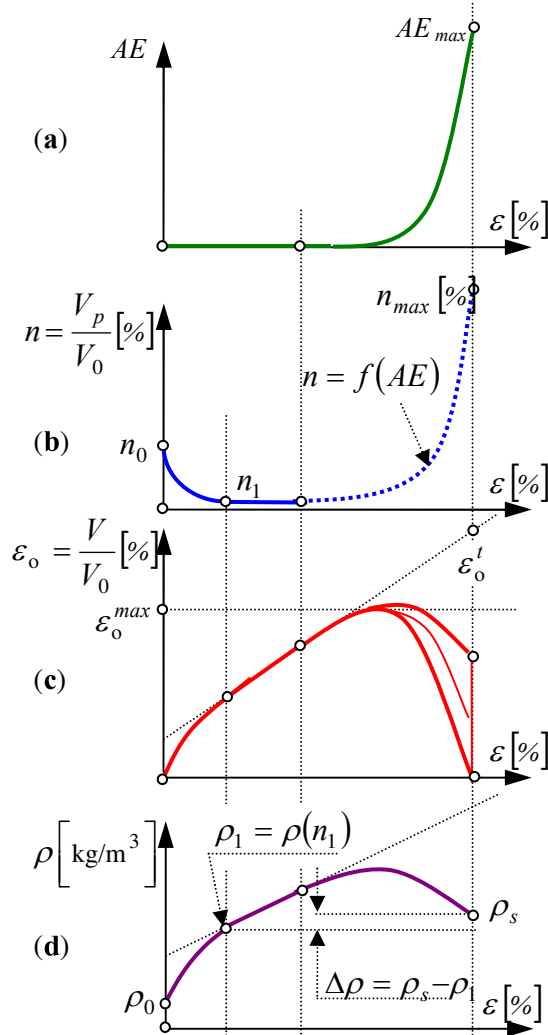
Ahhoz, hogy minden apró részletet helyesen értelmezzünk, a 3. ábra alsó két görbéjét – a térfogatváltozást és a repedezettség mértékét – is szerkesszük ki, a megszokott összefüggésekkel.

A 6. ábra a 3. ábra szerkesztési módszertanát mutatja, vagyis azt a körülményt, hogy az érintő és az ε_0 (fajlagos térfogatváltozási-) görbe közötti különbség adja „a számított repedezettség–térfogatváltozás” görbéjét. Ez miközben igaz az I. és II. szakaszra, a további két szakaszra már nem feltétlen. Ti. semmiféle fizikai érvet nem találtunk arra, hogy a kiinduló pontban lévő $\Delta V/V_0 = (V_0 - V_0)/V_0 = 0$ érték megegyezzen a törésponti $(V_t - V_0)/V_0 = 0$ értékkel. Erre mutat példát a 7. ábra. Erre a feltételezésre nincs is szükség, ugyanis a kísérlet során „kiadódik” a tényleges érték. Persze ez nem ilyen egyszerű mivel mindenki tudja, hogy a törés egy hirtelen változás, s ilyenkor a mérőeszközök tehetetlensége folytán a kapott értékek megbízhatatlanok.

Talán fordítva kéne eljárunk. Még a kísérlet kezdete előtt egyszerűen jól mérhető az anyagi próbatest tömege és térfogata egyaránt. Az anyag eredő testsűrűsége tehát adott. Ha meghatározzuk a szilárd rész sűrűségét is, akkor a porozitás mértéke számítható.

A tengelyirányú $[\varepsilon]$ és keresztirányú $[\varepsilon_{\perp}]$ nyúlásadatok a kísérlet során – mérőbéllyel vagy optikai úton – jól mérhető értékek, így az $\varepsilon^0 = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_{\perp})$ fajlagos térfogatváltozás egyszerűen számítható.

A 8. ábrán azt mutatjuk be, hogy annak érdekében, hogy a teljes változást egyetlen n paraméterrel jellemezzük, a repedezettség megindulása utáni (pontosított vonallal jelzett) szakaszon számított az akusztikus emisszió mérésekből számítási úton előállított ún. kvázi porozitással is lehetne dolgozni. Azonban a ρ tömegsűrűség görbéjének mindkét végpontja adott: a ρ_0 kiindulási értéke triviális, a tönkremenetelkor viszont már nincsenek pórusok, tehát a



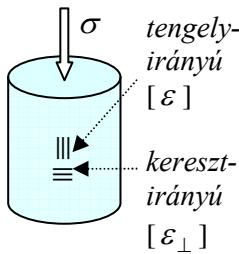
8. ábra

tömör fázis ρ_s sűrűsége kell, hogy legyen.

2. KIINDULÁSI FELTÉTELEK

AZ ANYAGRA VONATKOZÓ FELTÉTEL. Az anyagot *homogénnek* és *izotropnak* vesszük, és a pórusokkal és repedezettséggel együtt egy speciális *kontinuumnak* tekintjük, amelynek viselkedése folytonos függvényekkel leírható. E körülmény miatt a repedezettség hely- és irány szerinti eloszlását véletlenszerűnek és eloszlását homogénnek tekintjük.

A – 3. ÁBRÁN LÁTHATÓ GÖRBE REKONSTRUÁLÁSÁRA SZOLGÁLÓ – KÍSÉRLET MEGVALÓSÍTÁSÁNAK MÓDJÁ. Jelen esetben először egytengelyű feszültségállapotra vonatkozó kísérletet elemzünk. Ekkor a feszültség- és deformáció-komponensek a következők:



9. ábra

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{bmatrix},$$

$$\sigma^o = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma,$$

$$\epsilon^o = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} (\epsilon + 2\epsilon_{\perp}),$$

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma} - \sigma^o \mathbf{I} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sigma, \quad \boldsymbol{\epsilon}^d = \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon^o \mathbf{I} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\epsilon - 2\epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon + 2\epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon + 2\epsilon_{\perp} \end{bmatrix}.$$

TERHELÉSI FELTÉTEL. Tételezzük fel, hogy az anyag a „nagyon lassú” terhelés (mechanikai igénybevétel) hatására – amennyiben *rugalmas alakváltozások* tartományában marad – a már záródott pórusok szakaszán a POYNTING-THOMSON-féle (standard) modell szerint a lineáris HOOKE-törvénynek megfelelően viselkedik.

A következőkben – mint már mondtuk – a feltesszük, hogy csak rugalmas alakváltozás lép fel (képlékeny, azaz maradó nem), az anyag rugalmas marad a repedezettség növekedése során is, egészen a tönkremenetelig. Ekkor a tömör állapotra vonatkozó anyagtörvény

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d &= 2G\boldsymbol{\epsilon}^d, & \Rightarrow & \sigma = E \epsilon, \\ \boldsymbol{\sigma}^o &= 3K\boldsymbol{\epsilon}^o, & & \sigma = E_{\perp} \epsilon_{\perp}, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}\varepsilon^o &= \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_{\perp}), \quad \varepsilon_{\perp} = -\frac{\varepsilon}{m}, \quad \varepsilon^o = \frac{m-2}{3m}\varepsilon, \quad m = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\perp}}, \\ E &= \frac{18KG}{2G+3K}, \quad E_{\perp} = \frac{18KG}{2G-3K}, \quad m = \frac{6K+2G}{3K-2G} = \frac{E}{E_{\perp}}, \\ \varepsilon_{\perp} &= -\frac{\varepsilon}{m} = -\frac{3K-2G}{6K+2G}\varepsilon.\end{aligned}$$

POROZITÁSI FELTÉTEL. Legyen az anyag porózus, s jellemezhető az n porozitással. Feltételezzük, hogy a pórusok eloszlása homogén.

A pórusok és mikrorepedések szempontjából három különböző tartományt különböztetnek meg a 3. ábra szerzői:

- (a) – a pórustérfogat csökken, a pórusok záródnak (I. szakasz),
- (b) – a pórustérfogat nem csökken tovább, azaz nem változik (II. szakasz),
- (c) – a repedések száma és térfogata ismét növekedni kezd (III. és IV. szakasz).

A 3. ábra szerinti I. szakaszban – a terhelés hatására eleinte a pórusok, repedések záródnak, vagyis a porozitás a kiinduló n_0 értékről egy meghatározott n_1 értékre [esetleg $n_1 = 0$] csökken (ld. 8. (b) ábra). Az n_1 megfelel a pórusban lévő folyadék vagy gáz azon egyensúlyi nyomásának, amely megfelel a pórus felületén a közetmátrixban ébredő radiális feszültségnek.

$$\begin{aligned}n_0 &\geq n \geq n_1, \\ n_0 &\Rightarrow n_1 \quad [\text{esetleg } 0] \\ \rho_0 = (1-n_0)\rho_s + n_0\rho_p &\Rightarrow \rho_1 = (1-n_1)\rho_s + n_1\rho_p \quad [\text{esetleg } \rho = \rho_s]\end{aligned}$$

REPEDEZETTSÉGI FELTEVÉS. Különböztessük meg a repedezettséget a porozitástól. Az anyag károsodottsága [VÁN – VÁSÁRHELYI (2010)] jellemezhető egy D empirikus ún. károsodottsági mértékkel v. jellemzővel (Damage), ahol $D = 0$ érték az ép kőzetet jellemzi és egy $D = D_{cr}$ kritikus károsodottsági érték a teljesen töredezett kőzetet, a következők szerint:

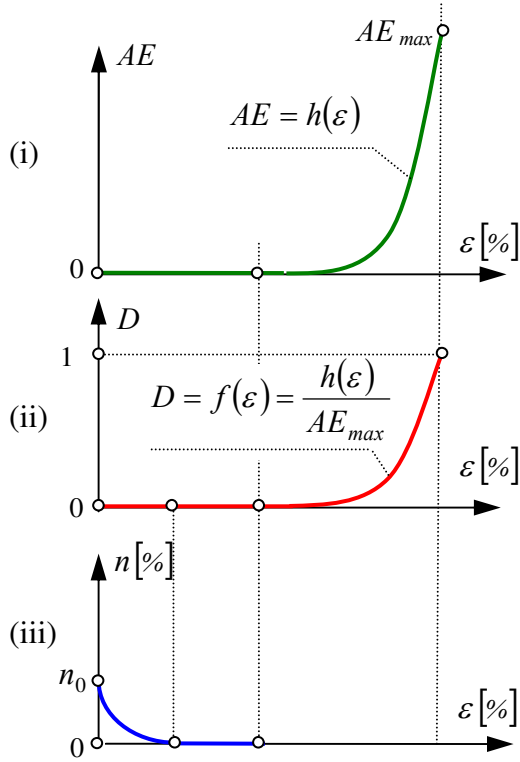
$$D = D_{cr} \left(1 - \frac{D_{RM}}{100} \right) \Rightarrow D_{RM} = 100 \left(1 - \frac{D}{D_{cr}} \right), \quad (5)$$

ahol D_{RM} a kőzettest minősítési értéke valamelyik empirikus osztályozási rendszerben.

Teljesen logikusan javasolják, hogy a D értéke 0 és 1 között változzon, vagyis a változót normáljuk [D_{cr} -rel való osztással]:

$$D = \left(1 - \frac{D_{RM}}{100} \right) \Rightarrow D_{RM} = 100(1 - D). \quad (6)$$

Itt fel kell tenni, hogy mit értenek „ép közet” alatt? A kísérlet kezdetén rendelkezésre álló közetmintát, vagy a pórus nélküli teljesen tömör „elvi” esetet. Első esetben a $D = 0$ értékhez $\rho = \rho_s$ tömegsűrűség és $n = 0$ porozitás tartozik, a második esetben pedig $\rho = \rho_0$ és $n = n_0$.



10. ábra

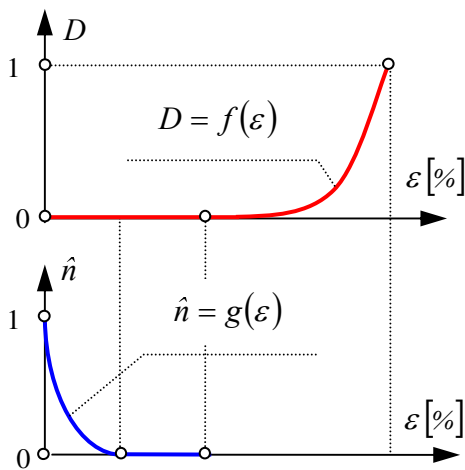
A D így módon egy viszonyszám, amely a 0 és 1 közötti tartományt futja be a teljes tönkremenetelig. Azonban a 3. ábra akusztikus emissziós görbéje nyújt valami kapaszkodót, hogy fizikai értelmet is találjunk neki. Az elvi 10. ábra (ii) része azt mutatja, hogy az AE görbe normálásával megkaphatjuk a D görbét.

Ennek a logikának megfelelően az n porozitás helyett is használhatunk egy 0 és 1 közötti viszonyszámot, az n_0 szerint történő normálással:

$$\hat{n} = \frac{n}{n_0},$$

amelyet *pórusosságnak* nevezhetünk.

Az eddigiek alapján a teljes folyamat leírására az $\hat{n}$ és a D paramétert használhatjuk oly módon (ld. 11. ábra), hogy



11. ábra

➤ az I. szakaszon:

$$\hat{n} = g(\varepsilon) \quad \text{és} \quad D = 0, \quad (7a)$$

➤ a II. szakaszon:

$$\hat{n} = 0 \quad \text{és} \quad D = 0, \quad (7b)$$

➤ a III-IV. szakaszon:

$$\hat{n} = 0 \quad \text{és} \quad D = f(\varepsilon). \quad (7b)$$

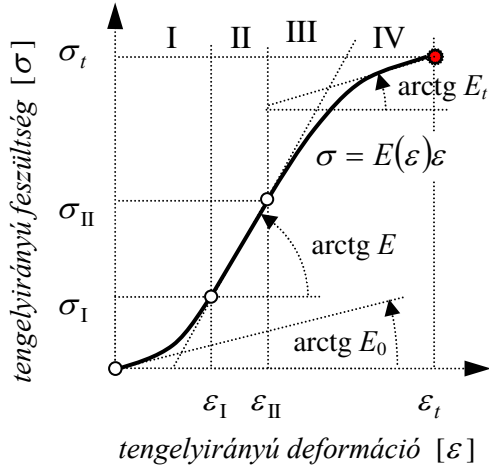
A D károsodás ilyen formájú felfogására jó példa [DESAI (2000)] a károsodási állapotelméletéről szóló könyve.

3. A RUGALMAS ANYAG VISELKEDÉSE AZ ALAKVÁLTOZÁS SORÁN

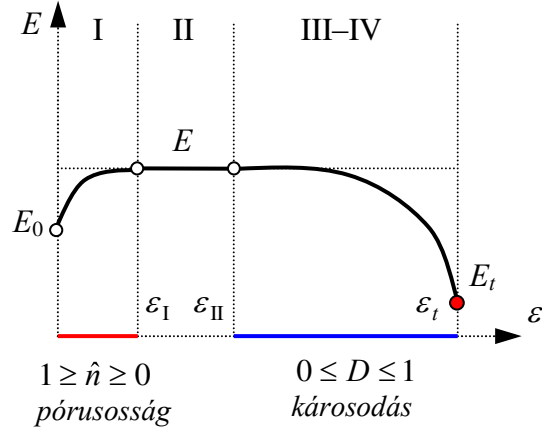
Míg a tökéletesen ép, és tömör közet anyagegyenlete – a választott speciális esetben

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (8)$$

addig a porózus, repedezett közet anyagegyenletének előállításához nem kell más, mint az E értékét matematikailag meghatározni, a 12. ábrán látható szakaszokon.



12. ábra



13. ábra

Vagyis elő kellene állítani a 13. ábrának megfelelő függvényt:

$$E(\varepsilon) = \begin{cases} E_I(\hat{n}), & \text{ha } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_I, \\ E, & \text{ha } \varepsilon_I \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{II}, \\ E_{III}(D), & \text{ha } \varepsilon_{II} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t, \end{cases} \quad \text{ahol } \begin{cases} E(0) = E_0, & E(\varepsilon_I) = E, \\ E(\varepsilon_I) = E, & E(\varepsilon_{II}) = E, \\ E(\varepsilon_{II}) = E, & E(\varepsilon_{III}) = E_t. \end{cases}$$

adott esetben nemcsak az ε , hanem az $\hat{n}$ és a D függvényében.

Azonban ez egy csapda! Ugyanis a (8) alatti $\sigma = E\varepsilon$ egytengelyű anyagegyenlet a $\sigma^d = 2G\varepsilon^d$, $\sigma^o = 3K\varepsilon^o$ tenzoregyenletek származtatott formája, s

$$E = \frac{9KG}{G + 3K}, \quad (9)$$

ahol G a torzulási állapot anyagállandója, a K pedig a térfogatváltozási modulus. Így ha meghatároztuk az $E = E(\varepsilon) = E[\varepsilon(\hat{n}, D)]$ függvényt, akkor dilemma előtt állunk, hogy hogyan néz ki a G függvény és a K függvény? És ezzel nemcsak az a probléma, hogy egyből nem lehet kettőt előállítani, hanem az is, hogy *hogyan függ a folyamat a torzulástól és a térfogatváltozástól?*

Mi a teendő? Több járható és egymással egyenértékű út is lehetséges, mivel a kísérleti mérések során a terhelés mellett a hosszirányú és a keresztirányú fajlagos nyúlásokat is mértük:

1. LEHETŐSÉG, hogy a mért σ , ε , $\varepsilon_{\perp}$ értékekből számítás útján előállítjuk a

$$\sigma^o = \frac{1}{3}\sigma, \quad \sigma^d = \sigma - \sigma^o = \frac{2}{3}\sigma, \quad \text{valamint} \quad \varepsilon^o = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_{\perp}) \quad \text{és} \quad \varepsilon^d = \varepsilon - \varepsilon^o = \frac{2}{3}(\varepsilon - \varepsilon_{\perp})$$

értékeket, s ezekből az adatokból határozzuk meg a G -t és a K -t.

2. LEHETŐSÉG, hogy az $E = \frac{9KG}{G+3K}$ és $E_{\perp} = \frac{18KG}{2G-3K}$ egyenletekből meghatározzuk a G -t és a K -t:

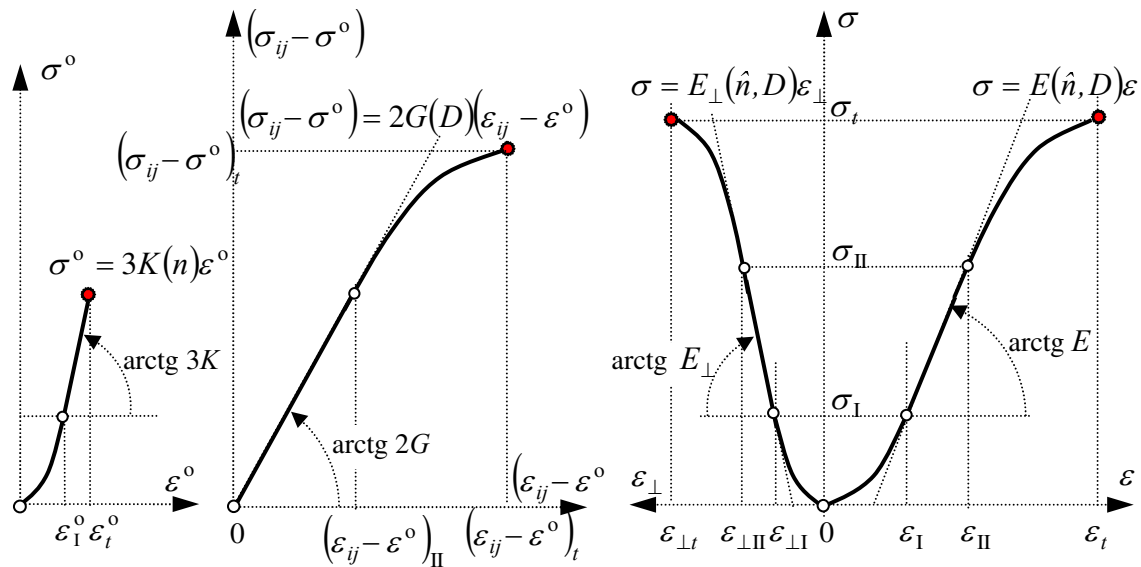
$$2G = \frac{EE_{\perp}}{E_{\perp} - E}, \quad 3K = \frac{EE_{\perp}}{E_{\perp} + 2E}. \quad (10)$$

KIINDULÁSI FELTEVÉS. Lehet, hogy vitatható, de feltételezhetjük, hogy a pórusok záródásáért csupán a térfogatváltozás (tisztá hidrosztatikus nyomás) felelős. A szögtorzulás önmagában nem csökkenti a pórusok térfogatát, vagyis a $2G$ nem függ az $\hat{n}$ -től csupán a $3K$.

Feltehetjük továbbá, hogy – mivel a hidrosztatikus állapot nem hoz létre tönkremenetelt, – így a $3K$ nem függ a D károsodási mértéktől, s csak a $2G$ függhet tőle. Mindezek alapján a

$$3K = 3K(\hat{n}) \quad \text{és} \quad 2G = 2G(D) \quad (11)$$

egyszerűsített összefüggéssel számolunk, amelynek lényege az elvi 14. ábrán látható.



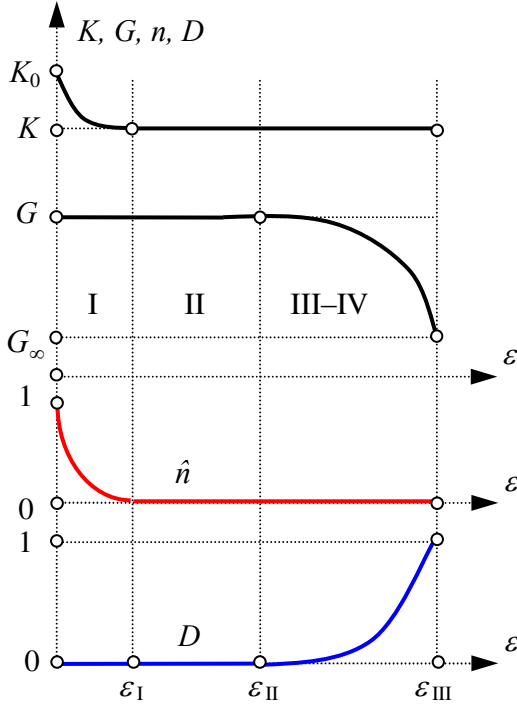
14. ábra. Az anyagállandók porozitástól és károsodástól való függvénye egytengelyű feszültség-állapot esetén

A (11) hipotézisből következik, hogy – csupán jelen esetben – az anyagtörvény

$$\boldsymbol{\sigma}^d = 2G(D)\boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^o = 3K(\hat{n})\boldsymbol{\varepsilon}^o \quad (12)$$

alakú, amely a D és $\hat{n}$ belső változóval rendelkezik. A (12) egyetlen egyenletben:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G(D)\boldsymbol{\varepsilon} + [3K(\hat{n}) - 2G(D)]\boldsymbol{\varepsilon}^o. \quad (13)$$



15. ábra. A belső változók egytengelyű esetben

A kulcskérdés: a belső változóktól történő függés formája és ezen függvények értelmezési tartománya.

Egytengelyű feszültségállapotra az összefüggéseket a 15. ábra mutatja. Térbeli állapotra ez az ábrázolás azonban nem alkalmas, mert az $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$ és ε_{III} skálárértékek, s mint ilyenek nem jelölhetik ki a térfogati és torzulási állapotban a határokat, amelyek szükségszerűen tenzori értékektől függenek.

Itt két különböző esettel állunk szemben:

1. a porozitás (vagy pórusosság) csak az anyagegyenlet térfogati részében szerepel, amelyet voltaképp egy skaláregyenlet ír le, s az $\hat{n}(\varepsilon)$ értelmezési tartománya:

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_I.$$

Ez minden további nélkül átírható a fajlagos térfogatváltozással $n(\varepsilon^o)$ formára,⁵ vagyis $0 \leq \varepsilon^o \leq \varepsilon_I^o$ -ra. Az $\varepsilon^o = 0$ alsó határ voltaképp nem fizikai, hanem geometriai határ, ui. a terheletlen – teljesen kirugózott – induló állapotot jelenti. Az $\varepsilon^o = \varepsilon_I^o$ felső határ viszont már az anyagra jellemző érték, amikor a pórusok bezáródtak. Ez azonban nem a térfogatváltozás határa: $\varepsilon^o = \text{konstan} s = \varepsilon_{max}^o$, amelynek elérése után az anyag tovább már nem tömöríthető.

2. a károsodás az anyagegyenlet torzulási (deviatorikus) részében szerepel, tehát formálisan $\boldsymbol{\varepsilon}_{II}^d \leq \boldsymbol{\varepsilon}^d \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^d$, repedés kezdeti és végső határát jelzi. Ez utóbbit nevezzük tönkremeneteli határnak, amelyet matematikailag a tönkremeneteli határfeltétel kell, hogy leírjon.

⁵ Egytengelyű esetből: $\varepsilon_I^o = \frac{1}{3}(\varepsilon_I + 2\varepsilon_{\perp, I})$.

Korábbi munkáinkban már leírtuk, hogy sem a képlékenységi sem a tönkremeneteli határfeltétel nem lehet a feszültségi- vagy a deformációs állapot függvénye önmagában, hanem mindkettőé együttesen. Kivételt képeznek a nemreológiai anyagok, mert azoknál a σ és az ε kölcsönösen egyértelmű függvényei egymásnak. Épp ezért jelen esetben nem foglalkozunk a kérdéssel.

A BELSŐ VÁLTOZÓK FEJLŐDÉSI EGYENLETE. A D károsodással foglalkozó [VÁN-VÁSÁRHELYI (2010)] tanulmány szerint:

„A károsodásmechanika számos elmélete a termodinamikai potenciálok (pl. szabadenergia) polinomiális függését tételezi fel a deformációtól és a károsodástól. Ezt a fajta függést mezoszkópikus számítások (PAPENFUSS et al. 2007), és a rugalmasságtan elméletével megtartott teljes analógia motiválja. Másodrendű tenzort (fabric tensor) vezetve be károsodási paraméterként a rugalmasságtannal azonos elveket alkalmazhatunk a szabadenergiának a károsodástól és a deformációtól való függésének meghatározására. Például izotrop károsodás esetén a szabadenergia legáltalánosabb, másodfokú polinomiális függvénye [PAPENFUSS & VÁN (2008)] 11 anyagi paramétert tartalmaz a rugalmassági paramétereken kívül. Azonban a másodrendű tenzor nem az egyetlen lehetséges károsodási változó, a mikrorepedezés irány és hossz szerinti átlagolása skalár és vektori rendű károsodási paraméterekhez is vezethet, a repedésrendszer szimmetriáitól függően. Mivel a közettömeg osztályozási rendszerek nem veszik figyelembe a repedés és töredezésrendszer részleteit, ezért mi is a továbbiakban a lehető legegyszerűbb, skaláris változót tartalmazó és minimális számú anyagi paramétert bevezető modell felállítására törekszünk. A termodinamikai megfontolások biztosítják, hogy elméleti modellünk robosztus, azaz a paraméterek változására érzéketlen legyen. ...

Első észrevételünk az, hogy a károsodás különbözik a nemegyensúlyi termodinamika klasszikus belső változóitól az egyirányú terjedési tulajdonságban: a károsodás az idő függvényében tipikusan növekszik, csökkenni csak ritka, kivételes esetekben hajlandó. Ezért a szabadenergia károsodásfüggésekor olyan függvénykapcsolat is szóba kerülhet, amely nem szimmetrikus a nullára, esetleg nem is értelmezett negatív károsodás esetén. Ez a megfigyelés vezet az első alapfeltevésünkhöz: a *károsodás* egységesen gyengíti a közettömeg rugalmas kötéseit és a rugalmas energia csökkenése arányos az anyag rugalmasenergia tartalmával. Azaz feltételezzük, hogy a károsodás *energetikai* jellegű, tehát ugyanaz a károsodás a jobban deformálódott közeg energiatartalmát jobban csökkenti.”

Mindez elmondható a porozitásra is, csak ellenkező előjellel. Az anyag porózussága is csökkenti a deformálódott közeg energiatartalmát, azonban a deformálódással a porozitás csökken, vagyis az energiatartalom nő.

Ez a hivatkozott cikk, egy egyébként értelmezhetetlen E alakváltozási modulust vizsgál, s exponenciális modelljében⁶ az $E(D) = E_i e^{-\alpha D}$ eredményhez jut [91. oldal (8)], $\sigma = E\varepsilon$ egytengelyű anyagtörvény esetén. (Az α értéke, empirikus összefüggésekből: 2,624–4,440.)

Azonban ezen cikk következtetései a $\sigma^d = 2G\varepsilon^d$, $\sigma^o = 3K\varepsilon^o$ anyagtörvénynél is alkalmazhatók, s a végeredmény

$$2G(D) = 2Ge^{-\alpha D}, \quad 3K(\hat{n}) = 3Ke^{-\beta \hat{n}}, \quad (14)$$

ahol α a károsodásra, β a porozitásra vonatkozó anyagi paraméter.

[DESAI, CH,S. (2000)] károsodási állapotelmélete, amely szintén az anyagviselkedés ép állapotból (Relative Intact State) a tönkrement állapotba (Fully Adjusted State) való átmenetét írja (lásd következő cikk). Míg VÁN–VÁSÁRHELYI a D -t egyetlen kísérleti úton meghatározható α empirikus paraméterrel jellemzi, addig DESAI szintén exponenciális összefüggése két – A és Z – paraméterrel adott.

IRODALOM

- CAI, M. (2009): Practical Estimates of Tensile Strength and Hoek–Brown Strength Parameter of Brittle Rocks, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, DOI 10.1007/s00603-009-0053-1.
- MARTIN C. D. (1993): The strength of massive Lac du Bonnet granite around underground opening. Ph.D. thesis, p 278.
- MARTIN, C. D. – CHANDLER, N. A. (1994): The progressive fracture of Lac du Bonnet granite, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science and Geomechanical Abstracts*, **31**, **6**, p. 643-659.
- VÁSÁRHELYI, B. – DELI, Á. – GÁLOS, M. – VÁN, P. (2000): *Relationship between the critical dissipated energy per unit volume and the mechanical properties of different rocks*. In: J. Girard; M. Liebman; C. Breeds & T. Doe (eds.) ‘Pacific Rocks 2000’, Proc. 4th NARMS, Seattle, 1289–1293, Balkema.
- VÁN, P. – VÁSÁRHELYI, B. (2001): Second Law of thermodynamics and the failure of rock materials. In D. Elsworth, J.P. Tinucci & K.A. Heasley (eds.) *Rock Mechanics in the National Interest* 767-773, Balkema Publ.
- VÁN, P. (2001): Internal thermodynamic variables and the failure of microcracked materials, *J. of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **26** (2): 167-189.
- DESAI, CH,S. (2000): *Mechanics of Materials and Interfaces, the Disturbed State Concept*. CRC Press, London–New York, p: 698.

⁶ Ahol a szerzők feltételezik, hogy a károsodás során bekövetkező rugalmas energia csökkenése arányos az anyag rugalmasenergia-tartalmával.

PORÓZUS- ÉS TÖREDEZETT ANYAGOK REOLÓGIAI VISELKEDÉSE

Asszonyi Csaba – Szarka Zoltán

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Doležalová Márta

DOLEXPART, PRAHA – MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Ván Péter

KFKI RMKI ELMÉLETI FIZIKA FŐOSZTÁLY, BME ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK,
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A tanulmány CAI, MARTIN ÉS CHANDLER következtetéseiből kiindulva veszi vizsgálat alá a mechanikai anyagviselkedést abban az esetben, ha az anyag pórusos vagy töredezett.

Ha a kőzet tömör, akkor az anyagegyenlet a rugalmas tartományban

$$\boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o$$

reológiai egyenlettel reprezentálható, amennyiben porózus és töredezett, akkor pedig

$$\boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}(D)\boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^o$$

összefüggéssel, ahol $\tilde{G}$, ill. $\tilde{K}$ a torzulási, ill. térfogati anyagoperátor (differenciáloperátor), n – a porozitás és D – a károsodottság mértéke.

BEVEZETÉS

A szerzők az előző tanulmányban a homogén, izotrop anyagok mechanikai viselkedésével foglalkoztak, s vizsgálataikat a rugalmas „egyensúlyi” anyagtörvényre korlátozták. A következőkben az összes többi esetet is megvizsgáljuk, a legáltalánosabb: rugalmas-képlékeny „nemegyensúlyi” anyagtörvénnyel bezárólag.

AZ ANYAGTÖRVÉNY. A mechanikában az anyagot a konstitúciós egyenlet, vagy más néven *anyagtörvény* írja le. Minden anyagnak van anyagtörvénye. Az anyag konstitúciós egyenlete nem függhet semmi mástól csak az anyagtól magától. Tehát nem függhet

pl. a különböző terhelési folyamatok sorrendjétől, irányától, a koordináta-rendszer-től, amiben elhelyezem az anyagot, stb. Ebből következik, hogy az anyagnak nincs külön anyagtörvénye rugalmas állapotban, képlékeny állapotban, vagy töredezett állapotban. „Egyetlen” anyagtörvény van csak. Ezt a fizika, a termodinamika alaptörvényeiből kell deduktíve levezetni, ha tudjuk, s nem lehet szubjektív észkonstrukció.

Az „anyagtörvény”-t a gyakorlatban abból következtethetjük ki, hogy milyen viselkedést tapasztalunk a különféle folyamatokban.¹ Mivel lehet egy folyamat tisztán rugalmas, az ilyen esetekben regisztrált viselkedésből csak a rugalmas összefüggésekre következtethetünk. Hasonlóképp a képlékeny, vagy töredezési zónában játszódó folyamatokból észlelték csupán arra a tartományra szolgáltatnak információt. Azonban az anyagtörvény „egy”, csupán az emberi felosztás bontja részletekre. Ennek megfelelően az anyagtörvénynek van csupán rugalmas, képlékeny, stb tartományra szűkített formája, s ez szokott sokszor félrevezetni bennünket. A fázisokat is a fázishatárok választják el egymástól matematikailag, mégsem célszerű fázisonkénti anyagtörvényről beszélni, holott az összefüggéseket a megismerés folyamatában először fázisonként bontjuk fel.

Az anyagviselkedést a *konstitúciós egyenlet*, más néven *anyagtörvény* írja le matematikai formában. Ez a feszültség-tenzor a termodinamikai változók függvényében. A legegyszerűbb izotrop anyagok esetén az anyagtörvényt két egyenletben: a deviatorikus (v. torzulási) egyenletben, és a gömbi (v. térfogatváltozási) egyenletben írjuk fel, mert így jelenik meg a legegyszerűbb formában. Pl. a tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-féle ún. „standard” modell egyenlete (csak rugalmas folyamatoknál és nem porózus anyagoknál):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d &= 2G\boldsymbol{\epsilon}^d + 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^d, & \text{azaz} & \boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\epsilon}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^o + \tau_o \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o &= 3K\boldsymbol{\epsilon}^o + 3K_v\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o + \theta_o\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^o, & \boldsymbol{\sigma}^o &= 3\tilde{K}\boldsymbol{\epsilon}^o \end{aligned} \quad (1)$$

formájú, ahol

$$2\tilde{G} \equiv 2G \frac{1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 3\tilde{K} \equiv 3K \frac{1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}} \quad (2)$$

az anyagállandókat és időszerinti deriválást tartalmazó *anyagoperátorok*.

Az anyagegyenletet azért célszerű két részben tárgyalni, mert egyrészt sokkal tisztább képet mutat, másrészt így csak alacsonyabb rendű időderiváltakkal van dolgunk. Példaképpen:

¹ Egyszerű termodinamikai példa: az anyagnak van állandó nyomáson vett fajhője, állandó térfogaton vett fajhője, és még számtalan más, folyamattól függő fajhője; vagyis az anyag „hőátadási viselkedése” folyamattól függ. Ugyanez igaz a „hőtágulási viselkedésre”, a „kompresszibilitási viselkedésre”, a „torzulási (nyírási) viselkedésre”, stb.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^o = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d + 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o = 2\tilde{G}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^o) + 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon} + (3\tilde{K} - 2\tilde{G})\boldsymbol{\varepsilon}^o$$

a (2) behelyettesítésével

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \frac{1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}} \boldsymbol{\varepsilon} + \left(3K \frac{1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}} - 2G \frac{1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}} \right) \boldsymbol{\varepsilon}^o,$$

a kijelölt műveletek elvégzésével, az anyagtörvény egyesített alakja:

$$\begin{aligned} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2G \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\varepsilon} + \\ + \left(3K \left(1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) - 2G \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \boldsymbol{\varepsilon}^o, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} + (\tau + \tau_o) \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \tau \tau_o \ddot{\boldsymbol{\sigma}} = 2G \boldsymbol{\varepsilon} + (2\eta + 2G\tau_o) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\theta + 2\eta_o) \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \theta \tau_o \dddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (3K - 2G) \boldsymbol{\varepsilon}^o + \\ + (3K_v + 3K\tau - 2\eta - 2G\tau_o) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + (\theta_o + 3K_v\tau - \theta - 2\eta\tau) \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + (\theta_o\tau - \theta\tau_o) \dddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o. \end{aligned} \quad (3)$$

Az anyagtörvény (3) szerinti formájában az anyagállandók nagyon bonyolult képet mutatnak, s a feszültségek is és a deformációk is eggyel magasabbrendű időderiváltakat tartalmaznak, miközben az (1) és (3) teljesen egyenértékűek. Ezen okok miatt és kényelmi szempontból a következőben mindig a torzulási és térfogati anyagegyenletet tekintjük. Mindehhez hozzájárul még, hogy egyszerűsítő feltevésünk szerint a „porozitás” szerepe a térfogatváltozási egyenletnél van csak, míg a tönkremenetel előtti „repedezettség” csupán a torzulási állapotban játszik szerepet.

A tárgyalás során minden lehetséges esetet vizsgálunk, az egyszerűbbtől a bonyolultabb felé haladva, hogy lehetőleg logikus és áttekinthető legyen a mondanivalónk.

A) „Tömör” anyagra, illetve B) „Porózus” anyagra történő felosztást követjük, „egyensúlyi” és „nemegyensúlyi” (vagyis reológiai) esetre:

- | | |
|---|---|
| 1. „Egyensúlyi” anyagtörvény | 2. „Nemegyensúlyi” anyagtörvény |
| 1.1 tisztán rugalmas állapotban | 2.1 tisztán rugalmas állapotban |
| 1.2 rugalmas-képlékeny állapotban | 2.2 rugalmas-képlékeny állapotban |
| 1.3 rugalmas-tönkremeneteli zónában | 2.3 rugalmas-tönkremeneteli zónában |
| 1.4 rugalmas-képlékeny-tönkremeneteli zónában | 2.4 rugalmas-képlékeny-tönkremeneteli zónában |

² $\boldsymbol{\sigma} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}^o + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o$

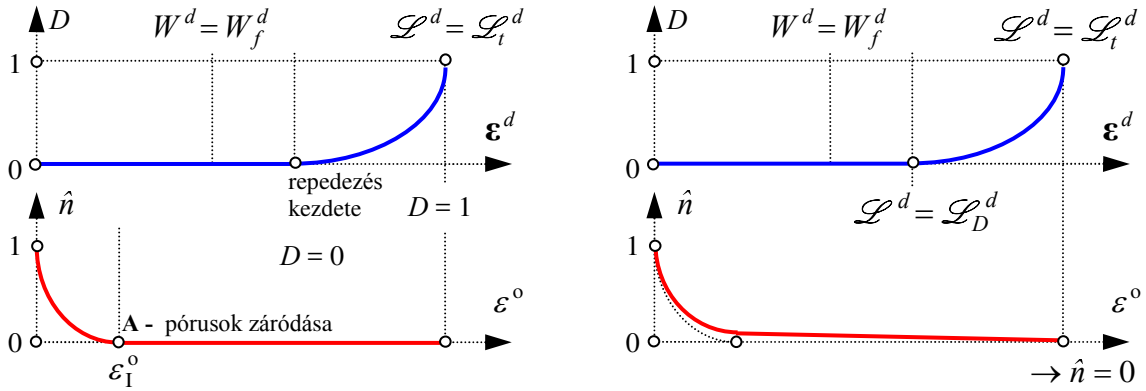
POROZITÁS ÉS KÁROSODÁS

Az előző [ASSZONYI et al. (2011)] cikk feltételezései szerint:

- az anyag porozitásának (n), vagy pórusosságának ($\hat{n}$) változása³ a térfogat-változási (gömbi) térben,
- az anyag károsodása, repedezettsége (D) a torzulási (deviatorikus) térben

jelentkező jelenség.

Amíg a határfeltételek jól definiált matematikai összefüggések, s ennek megfelelően a repedezés kezdete, mint határfeltétel is matematikailag nem megfogalmazott állapot. Azonban a pórusok záródása empirikusan megismerhető, de fizikailag még nem feltárt.



7. ábra

A 7. ábrán bal oldalán a D károsodás és az $\hat{n}$ pórusosság fejlődése látható a hivatkozott cikkben közölteknek megfelelően. Ennél a pórusok záródása egy meghatározott ϵ_1^o értékhez köthető [$\hat{n}(\epsilon_1^o) = 0$]. A jobboldalon azt – az általunk javasolt – esetet mutatjuk, hogy a pórusok záródására nem adunk feltételt, hanem azok az ϵ_1^o értéknél legyenek zérus közeli értékek és $\lim_{\hat{n} \rightarrow \infty} \hat{n}(\epsilon^o) = 0$. Ezáltal a pórusok bezáródására nem kell határfeltételt keresni.

Azonban ezen cikk következtetései szerint a $\sigma^d = 2G\epsilon^d$, $\sigma^o = 3K\epsilon^o$ "egyensúlyi" anyagtörvénynél a D és $\hat{n}$ belső változók a rugalmassági modulus változásában fejtik ki hatásukat:

$$2G(D) = 2Ge^{-\alpha D}, [0 \leq D \leq 1], \quad 3K(\hat{n}) = 3Ke^{-\beta \hat{n}}, [0 \leq \hat{n} \leq \hat{n}_0],$$

ahol α a károsodásra, β a porozitásra vonatkozó (empirikus) anyagi paraméter.

³ Az $\hat{n}$ pórusosság az n_0 kezdeti porozitásból, $\hat{n} = n/n_0$ normálással kapott jellemző.

HATÁRFELTÉTELEK

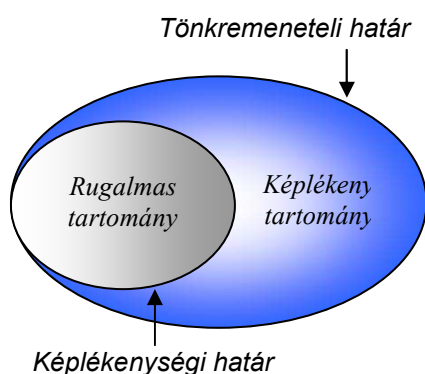
Annak megértéséhez, hogy miért ezt a felosztást követjük, össze kell foglalnunk az ún. határfeltételeket. Különböztetünk például, hogy adott esetben az anyag úgy kerül át a tönkremeneteli zónába, hogy közben nem lép fel képlékeny állapot, nincs maradós alakváltozás.

A szilárd testek kontinuummechanikájában – beleértve a közetmechanikát is – eddig az anyag viselkedésének különböző tartományait (fázisait)

- rugalmas és képlékeny – ismertük, amelyeket az egyes fázishatárok választanak el egymástól:

- képlékenységi és tönkremeneteli határ.

A tönkremeneteli határon túl nincs semmi, az anyag kontinuitása megszűnik, kontinuum-felfogással nem tárgyalható.

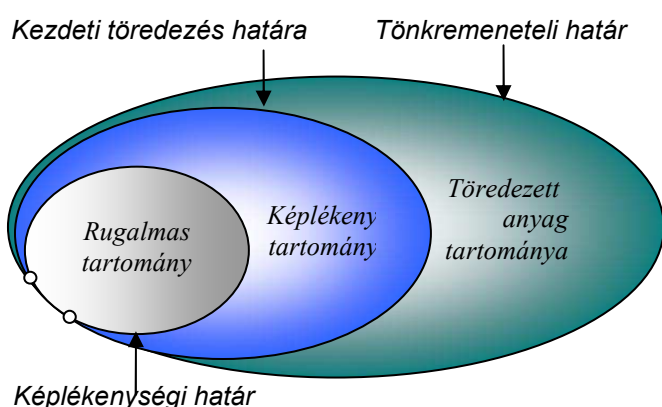


1. ábra

Ez az 1. ábra azt is mutatja, hogy a tönkremenetelhez eljuthatunk a rugalmas állapotból a képlékenyen át a tönkremenetelig, de azt is,

hogy lehetséges olyan törés is, amelynél az anyag egyetlen pillanatra sem kerül képlékeny állapotba.⁴ Régóta tudjuk, hogy minden anyagnál előfordulhat ilyen típusú tönkremenetel. Legjobb példa erre, ha az anyagot olyan ismételt igénybevételnek tesszük ki, amelynek során soha nem érjük el a képlékenységi határt, mégis egy idő után az anyag hirtelen eltörik. Szokás ezt kifáradásnak, ridegtörésnek is nevezni. Ennek fizikai magyarázatát is ismerjük.

Eddig nem foglalkoztunk – csupán előző cikkünkben, – a teljes tönkremenetelt megelőző tartománnyal, amikor az



2. ábra

anyagokban kialakuló mikrorepedések még nem érik el azt a szintet, amikor azt már szétessenek kell tekinteni. Ennek oka, hogy a szerkezeti anyagoknál mérnöki szempontból a töredezettség sose volt megengedett. Viszont a mélyépítésben, alagútépítésben, bányászatban, a kőzetek töredezettsége sok esetben

⁴ Pl. a rugalmas állapotban végrehajtott ismételt igénybevételekkel (a ridegtörés jelensége).

már az érintetlen *in situ* közetkörnyezetben is megjelenhet, s az emberi beavatkozás (mérnöki létesítmény) is létrehozhatja azt.

Vagyis eddig nem foglalkoztunk a *töredezett anyagok* mechanikai tulajdonságaival. Éppen ezért fel sem merült bennünk, hogy kell léteznie még egy határfeltételnek, amely elérése után kezdődnek a repedések, de az anyag még nem szétesett, tehát továbbra is kvázi-kontinuumnak tekinthető. Vagyis az 1. ábrán látható határ, valójában maga is egy tartomány (ld. 2. ábra).

Az anyagban az alakváltozás során a szerkezeti részekben változás következhet be. Ezekhez a szerkezeti változásokhoz kötjük a különböző – képlékenységi, tönkremeneteli – határfeltételeket.

A *képlékenységi határ* az a pillanatnyi állapot a folyamat során, amikor megjelennek a maradó (vissza nem csinálható) deformációk.

A *tönkremeneteli határ*, az az állapot, amikor a testben a kontinuitás általánosan megszűnik, az anyag összetörik, s a *kezdeti töredezés határa*, ahol a D károsodási tényező zérus értéke megszűnik.

Ezeket a küszöbértékeket matematikai formában a *határfeltételek* írják le. Az anyag szerkezeti elrendezése a határ két oldalán minőségileg különböző. Például a maradó alakváltozás tehermentesítés során sem tűnik el, vagy pedig a törés kezdetekor megjelenő mikrorepedések sem forrnak többé össze.

Az irodalom a határfeltételek három formáját ismeri, függetlenül attól, hogy melyik határfeltételről van szó, annak függvényében, hogy melyek a független változók:

- (i) – $[\psi(\boldsymbol{\sigma}), \psi(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}), \dots]$ *feszültségi* határfeltételt, amelynél a matematikai struktúra (függvény) csak és egyedül a feszültségtenzortól, vagy annak invariánsaitól függ. A gyakorlatban ezek a leggyakrabban alkalmazott határfeltételek (oktaédres feszültség, redukált feszültség, stb. formájában).
- (ii) – $[\psi(\boldsymbol{\epsilon}), \psi(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}), \dots]$ *alakváltozási* határfeltételt, amelynél a matematikai struktúra csak és egyedül a deformáció- v. alakváltozási tenzortól, vagy annak invariánsaitól függ. A gyakorlatban ezek ritkán alkalmazott határfeltételek.
- (iii) – $[\psi(W), \psi(W, \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}), \dots]$ *energia- v. deformációs-munka* határfeltételt, amelynél a független változó a rugalmas energia, a deformációs munka, az energia-disszipáció, stb.

Az egyetlen fizikailag elfogadható határfeltétel a (iii), mert bizonyítható tény, hogy önmagában pl. a feszültségtől nem függhet a képlékenységi küszöb, hanem csak a feszültségtől és a deformációtól együttesen, amit a munka- vagy energia-feltételek írnak le.

Az alakváltozási folyamat során egy tetszőleges t időpontban a (térfogategységre jutó) alakváltozási teljesítmény:

$$P = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{v} \circ \nabla = \dot{W} \cong \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Vegyük azt az egyszerű esetet, hogy a kezdeti $t_0 = 0$ időpontban az anyag feszültség- és deformációmentes: $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \mathbf{0}$, s ekkor a *deformációs munka*:

$$W = \int_0^t P dt = \int_0^t \dot{W} dt = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dt,$$

illetve a *torzulási és térfogatváltozási deformációs munka* [$W = W^d + W^o$]:

$$W^d = \int_0^t \dot{W}^d dt = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d dt = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^d} 2\tilde{G} \boldsymbol{\varepsilon}^d : d\boldsymbol{\varepsilon}^d = \sum_{ij} \int_0^t 2\tilde{G}_{ij} \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

$$W^o = \int_0^t \dot{W}^o dt = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^o : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o dt = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^o} 3\tilde{K} \boldsymbol{\varepsilon}^o : d\boldsymbol{\varepsilon}^o = \int_0^{\varepsilon^o} 3\tilde{K} \varepsilon^o d\varepsilon^o. \quad (5)$$

A 2006-2009 évek során ebben a könyvsorozatban leírtakat nem kívánván megismételni, csak a végeredményt – a szükséges korrekcióval – foglaljuk össze:

A képlékenységi határ egy bizonyos W_f^d *torzulási deformációs munka* elérése után következik be. E határ alatti ismételt igénybevétel esetén az anyagnak nincs módjában képlékeny állapotba kerülni.

A törés viszont az $\mathcal{L}_i^d$ *torzulási diszperziós munka* értékéhez kötött. Az anyaggal közölt W^d *torzulási deformációs munka* és az anyagban tárolt Φ^d *torzulási rugalmas energia* különbsége a $\mathcal{L}^d$ *torzulási diszperziós munka*. Az $\mathcal{L}^d$ az a munka, amelyet az anyag nem képes rugalmasan (mechanikai formában visszanyerhetően) tárolni. Ez a munka egyrészt hővé alakul, lead környezetének [ez a $\mathcal{D}^d$ *disszipációs munka*]. Másrészt a belső szerkezeti részek átalakulására (képlékeny deformációk létrehozására) fordítódik [ez a befagyott rugalmas energia, vagy más néven $\mathcal{S}^d$ *képlékenységi munka*], ami szintén nem nyerhető vissza.

A diszperziós munka értéke az ismételt igénybevételnek megfelelő ciklus esetén egy meghatározott $\mathcal{L}_i^d$ érték, amelyek minden ciklusnál összeadódik [$\sum_i \mathcal{L}_i^d$], s kellő számú ismétlés esetén eléri a kritikus értéket [$\sum_i \mathcal{L}_i^d = \mathcal{L}_i^d$], s bekövetkezik a törés (ld. WÖHLER-görbék).

Az eddigi munkáinkban helytelenül a diszperziós munkát disszipációs munkának neveztük. Tartalmilag jól írtuk fel, mert az *összes munka mínusz rugalmas energiaként* értelmeztük. Emiatt elkendőztük – sőt nem is emlegettük – a képlékenységi munkát, külön nem is emlegettük ezt a fogalmat.

Összefoglalva:

A W deformációs munka:

$$W = W^d + W^o \quad \left\{ \begin{array}{l} W^d = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d dt = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}^d} 2\tilde{G} \boldsymbol{\epsilon}^d : d\boldsymbol{\epsilon}^d, \\ W^o = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^o : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o dt = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}^o} 3\tilde{K} \boldsymbol{\epsilon}^o : d\boldsymbol{\epsilon}^o, \end{array} \right.$$

összetevődik Φ rugalmas energiából és $\mathcal{L} := W - \Phi$ diszperziós munkából:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^d = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{el}^d dt = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}^d} 2G \boldsymbol{\epsilon}^d : d\boldsymbol{\epsilon}^d = G \boldsymbol{\epsilon}^d : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d, \\ \Phi^o = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^o : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{el}^o dt = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}^o} 3K \boldsymbol{\epsilon}^o : d\boldsymbol{\epsilon}^o = \frac{3}{2} K \boldsymbol{\epsilon}^o : \boldsymbol{\epsilon}^o, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^d = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d dt = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}^d} 2\tilde{G} \boldsymbol{\epsilon}^d : d\boldsymbol{\epsilon}^d, \\ \mathcal{L}^o = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^o : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o dt = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}^o} 3\tilde{K} \boldsymbol{\epsilon}^o : d\boldsymbol{\epsilon}^o, \end{array} \right.$$

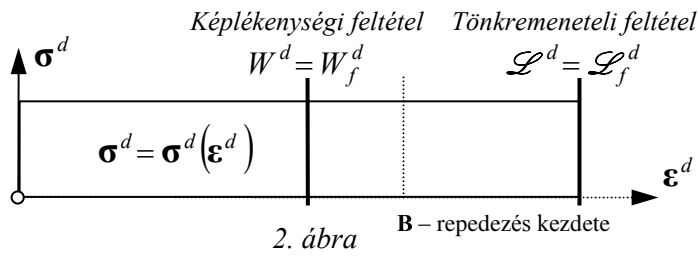
s ez utóbbi pedig $\mathcal{L} := \mathcal{S} + \mathcal{D}$, a $\mathcal{S}$ képlékenységi munkából és az $\mathcal{D}$ disszipációs munkából:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^d = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{el}^d dt = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}^d} 2G \boldsymbol{\epsilon}^d : d\boldsymbol{\epsilon}^d = G \boldsymbol{\epsilon}^d : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d, \\ \Phi^o = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^o : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{el}^o dt = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}^o} 3K \boldsymbol{\epsilon}^o : d\boldsymbol{\epsilon}^o = \frac{3}{2} K \boldsymbol{\epsilon}^o : \boldsymbol{\epsilon}^o, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^d = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d dt = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}^d} 2\tilde{G} \boldsymbol{\epsilon}^d : d\boldsymbol{\epsilon}^d, \\ \mathcal{L}^o = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^o : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o dt = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}^o} 3\tilde{K} \boldsymbol{\epsilon}^o : d\boldsymbol{\epsilon}^o, \end{array} \right.$$

Az *anyagtvörvény* a teljes alakváltozási tartományon érvényes összefüggés, s a *határfeltételek*, mint elválasztó felületek jelennek meg az alakváltozási térben. Ha az alakváltozásoknál az $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^d + \boldsymbol{\epsilon}^o$ deviatorikus és gömbi felosztást követjük, akkor két független tenzortérben $[\boldsymbol{\sigma}^d - \boldsymbol{\epsilon}^d, \boldsymbol{\sigma}^o - \boldsymbol{\epsilon}^o]$ játszódnak le a folyamatok, s a $\boldsymbol{\sigma}^d(\boldsymbol{\epsilon}^d), \boldsymbol{\sigma}^o(\boldsymbol{\epsilon}^o)$ konstitúciós összefüggések – és csakis ezek – is függetlenek egymástól.

A képlékenységi és tönkremeneteli határfeltételek tehát csak a torzulási (deviatorikus) térben jelennek meg (2. ábra). Eddig nem foglalkoztunk a teljes tönkremenetelt megelőző tartománnyal.



Ekkor az anyagokban kialakuló mikrorepedések még nem érik el azt a szintet, amikor azt már szétesettnek kell tekinteni. Vagyis nem foglalkoztunk a *töredezett anyagok* mechanikai

tulajdonságaival. Éppen ezért fel sem merült bennünk, hogy kell léteznie még egy határfeltételnek, amely elérése után kezdődnek a repedések, de az anyag még nem szétesett, tehát továbbra is kvázi-kontinuumnak tekinthető.

Erre vonatkozóan az irodalomban még csak elgondolás – nemhogy határfeltétel – sem található. A tények rögzítésén kívül – ld. előző cikk 2. ábráját – fizikai, vagy termodinamikai feltárás nem történt. Ennek a határfeltételnek ezért még neve sincs. Munkacímként nevezzük ezt *töredezési határfeltételnek* (kezdeti töredezés határfeltételének).

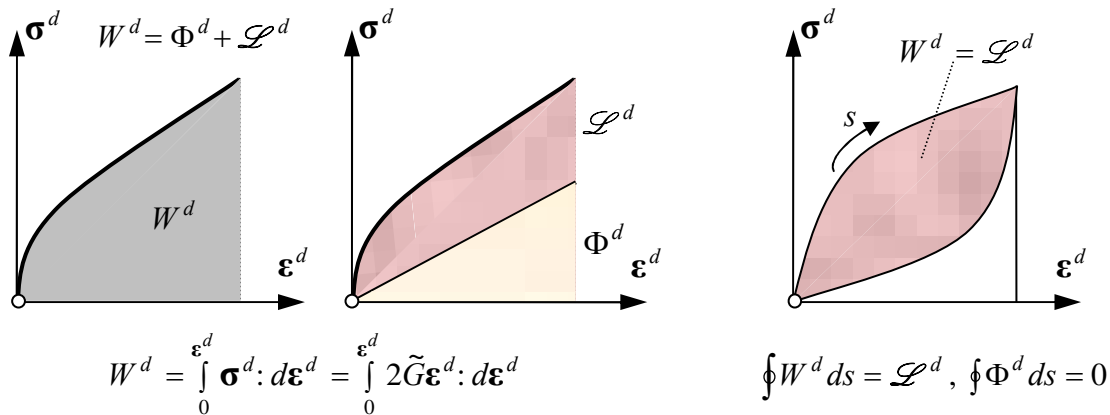
A következőkben spekulatív megkíséreljük ennek a feltételnek a megkeresését. Módszerünk, mint eddig annyiszor, a nem lehetséges feltételek kizárása, s választás a lehetségesek közül. Túl sok variáns nincs, mivel a megoldás csak a deviatorikus változók között keresendő, mindössze a

$$W^d = \Phi^d + \mathcal{L}^d \quad (6)$$

összefüggésben szereplő változók jöhetnek szóba, ha igaz, hogy határfeltétel csak energia- v. munkafeltétel lehet. Ezek

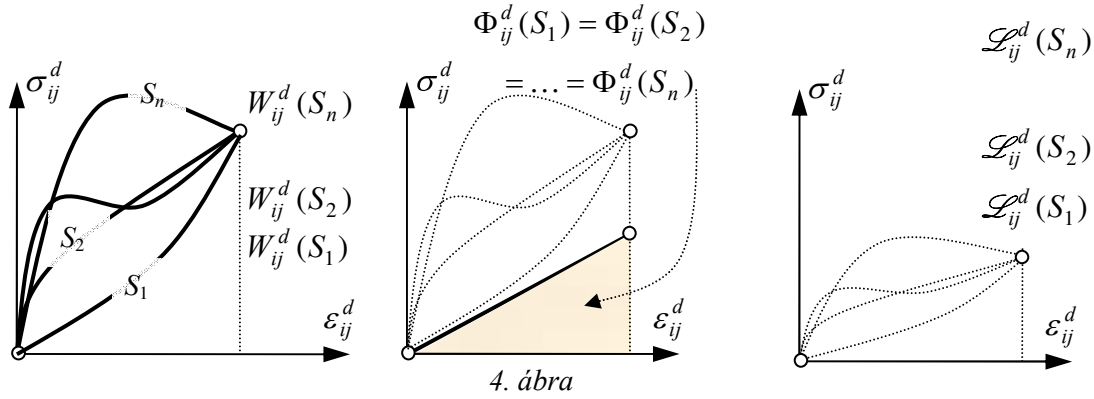
$$\begin{aligned} W^d &= \int_0^t \sigma^d : \dot{\epsilon}^d dt = \int_0^{\epsilon^d} \sigma^d : d\epsilon^d = \int_0^{\epsilon^d} 2\tilde{G}\epsilon^d : d\epsilon^d, \\ \Phi^d &= \int_0^{\epsilon^d} (\sigma^d)^{el} : d\epsilon^d = \int_0^{\epsilon^d} 2G\epsilon^d : d\epsilon^d = G\epsilon^d : \epsilon^d = G \sum_{i,j} (\epsilon_{ij}^d)^2 = \sum_{i,j} \Phi_{ij}^d, \\ \mathcal{L}^d &= \int_0^{\epsilon^d} [\sigma^d - (\sigma^d)^{el}] : d\epsilon^d = \int_0^{\epsilon^d} [2\tilde{G} - 2G]\epsilon^d : d\epsilon^d, \end{aligned} \quad (7)$$

amelyek formális jelentését a 3. ábra mutatja.



3. ábra. A munka- és energia kifejezések sematikus ábrája

A kétféle *munka* és *energia* elnevezést az indokolja, hogy míg a deformáció és a disszipáció függ a folyamattól (a kezdő és a végpont közötti úttól), addig a tárolt rugalmasság (rugalmas energia) csupán a kezdő és végpontban felvett értéktől függ, ahogy az integrációs képletből is látszik. A 4. ábra különböző alakváltozási útvonalak esetét mutatja.



Vizsgáljuk meg mindhárom tagot.

ELSŐ ESET: $\psi(W^d)$. Függhet-e a töredezés kezdete a W^d torzulási deformációs munkától? Ekkor a megfogalmazás: *a töredezés kezdete az az érték, amelynél az alakváltozás során a W^d munka eléri, ill. átlépi a W_D^d küszöbértéket*. Ha ez lehetséges lenne, akkor az a kérdés, hogy a W_f^d folyáshatár és W_D^d repedési határ, hogyan viszonyul egymáshoz nagyságban. $W_D^d > W_f^d$ nem lehetséges, mert akkor nem lehetne tönkremenetel, képlékeny állapot nélkül. Kisebb sem lehetséges, mert akkor a mikrorepedéseknek meg kellene jelenniük a képlékenyedés előtt, tehát a képlékeny állapotban *minden esetben* repedezettnek kéne lennie az anyagnak, ami szintén nem reális. *Tehát ez a feltétel elfogadhatatlan.*

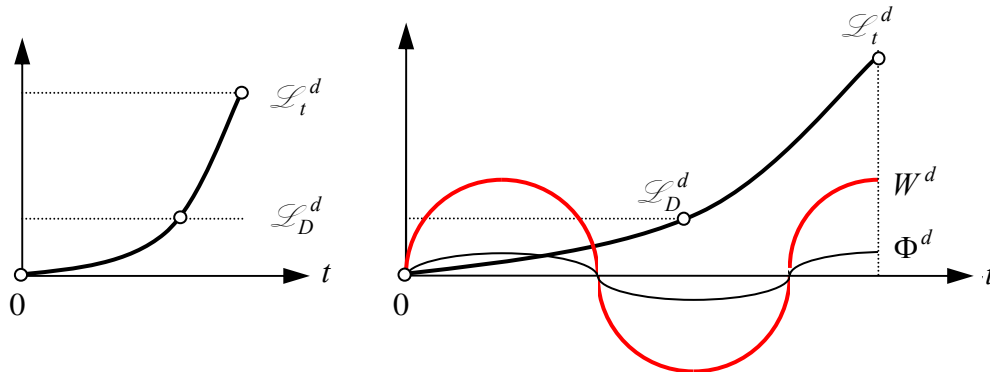
A folyáshatár az egy változó érték, mert ha egyszer átléptük a folyáshatárt, a folyáshatár értéke is megváltozik, az újabb folyáshatár az elért legmagasabb W^d értékkel egyezik meg.

MÁSODIK ESET: $\psi(\Phi^d)$. Függhet-e a töredezés kezdete a Φ^d rugalmas torzulási energiától?

Ismételt igénybevételnél minden ciklusánál, vagyis minden körfolyamatnál a rugalmas energia zérussá válik: $\oint d\Phi = 0$. Tehát a $\Phi^d = \Phi_D^d$ nem lehet határfeltétel, mert akkor a repedések minden ciklusnál összeforrnak, majd újra keletkeznek, ami abszurd.

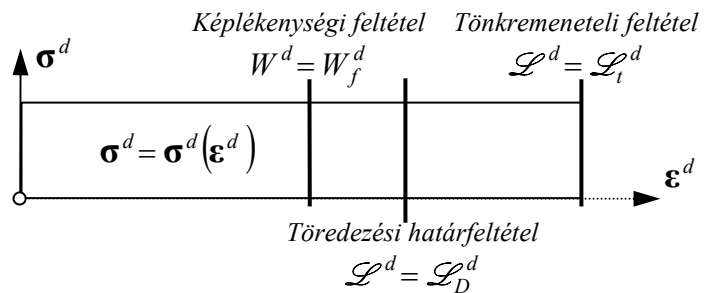
HARMADIK ESET: $\psi(\mathcal{L}^d)$. Ezek után csak ez az egy lehetőségünk maradt. Tehát a töredezés kezdete csak a $\mathcal{L}^d$ torzulási disszipációs munkától függhet. Az alakváltozási folyamat során az energiadisszipáció folyamatosan növekszik a folyamat jellegétől füg-

getlenül, s értéke csak pozitív lehet. Míg a W^d és a Φ^d a folyamat jellegétől függően pozitív és negatív is lehet (ld. 5. ábra).



5. ábra

Azonban továbbra is kérdés, hogyan határozható meg az $\mathcal{L}_D^d$ és $\mathcal{L}_t^d$ értéke, amelyhez a D károsodás speciális értékei tartoznak. Az előző cikkben láttuk, hogy $D = 0$ – a károsodás kezdete, ahol az AE akusztikus emisszió éppen jelentkezik, és D



6. ábra

$= 1$ – a teljes tönkremenetel, ahol $AE = AE_{max}$, a próbatest teljesen szétesik. Tehát értékét laboratóriumi kísérletből határozhatjuk meg, de csak számítás útján. Ugyanis nem lehet a határfeltételeket CAI, MARTIN és CHANDLER cikkében jelzett σ_{cl} és σ_f értékekkel jellemezni, sem a hozzátartozó ε_{cl} , $\varepsilon_{\perp cl}$ és ε_f , $\varepsilon_{\perp f}$ értékekkel (ld. előző cikk 3. ábrája), holott ezekhez tartozik a $D = 0$ és a $D = 1$. Erre példát az 1.3. pontban mutatunk.

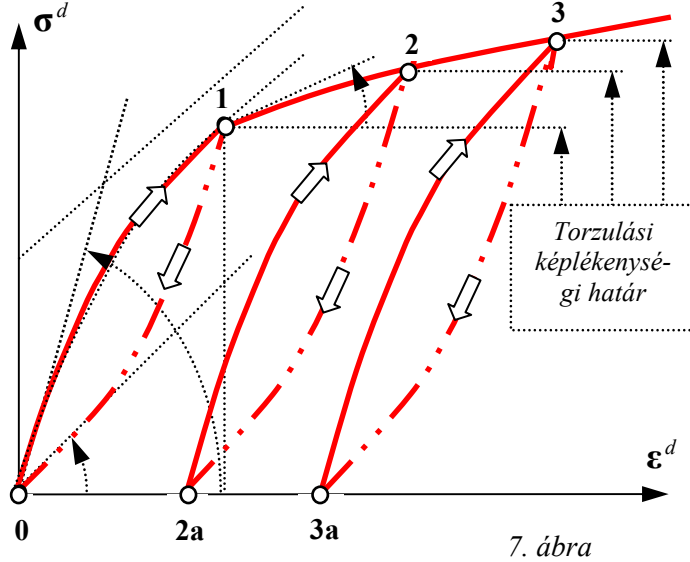
Az eddigiekben kimondatlanul benne van, hogy a képlékeny állapotba a rugalmas állapotból juthatunk, ha nő az igénybevétel. Azonban az anyagok porozitása megváltoztatja ezt a képet, mert akkor már a kezdeteknél megjelenik a térfogati képlékenységi (ami a pórusok visszafordíthatatlan záródásának következménye). Ez a jellemző a talajmechanikára. A talajoknak a közetekkel és más szilárd testekkel szemben van egy különleges tulajdonsága. A képlékeny állapot speciális volta.

- Míg a normál szilárd testek – a kezdeteknél rugalmasan viselkednek, s csak a képlékeny határ után képlékenyként, majd terheléscsökkenésnél megint rugalmasan. Ez csak a deviatorikus (torzulási) résznél jelentkezik, a gömbi (térfogatváltozási) résznek nincs képlékeny állapota.

- Addig a talajok „terhelésnövekedési” esetekben mindig képlékeny testként viselkednek már a kezdetektől fogva, és nemcsak torzulásnál, hanem térfogatváltozásnál is.

Ennek megfelelően létezik *térfogati képlékenységi határfeltétel* is. Nagyon jól tudjuk, hogy a képlékenységi határfeltételek nem „fix” feltételek, hanem az alakváltozás során vándorolhatnak.

A torzulási határ „vándorlásának” szemléletes képét a 7. ábra mutatja [ASSZONYI-VÁN (2006) 70. old.]. Itt legyen az



1 pont a képlékenységi határ az induláskor, majd a további folyamatnál 2, 3, stb.

Tehát a *rugalmas* alakváltozások:

0–1, 2–2a, 3–3a, stb,

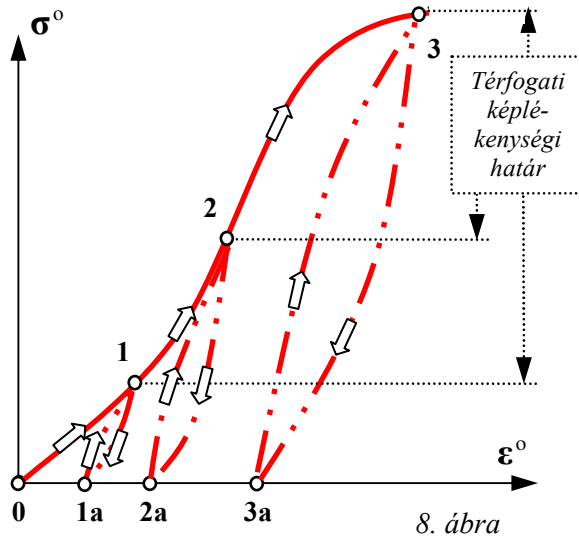
a *képlékenyek* pedig:

1–2, 2–3, 3–, stb.

Vagyis a mindenkor képlékenységi határfeltétel az *előző időszakokban elért* torzulási deformációs munka értékek legnagyobbika:

$$W_f^d = \text{Max} \{W_f^d(t_i)\},$$

amelynek értéke mindaddig növekszik, ameddig be nem következik a teljes tönkremenetel az $\mathcal{L}_t^d$ disszipációs munkánál.



A térfogati képlékenységi határ „vándorlása” hasonló, azzal a különbséggel, hogy a *maradó* deformációk már a kezdetektől megjelennek (8. ábra), tehát kezdetben a „határ”:

$$W_f^o|_{t=0} = 0.$$

Tehát a *rugalmas* alakváltozások:

1–1a, 1a–1, 2–2a, 2a–2, 3–3a, 3a–3,

a *képlékenyek* pedig:

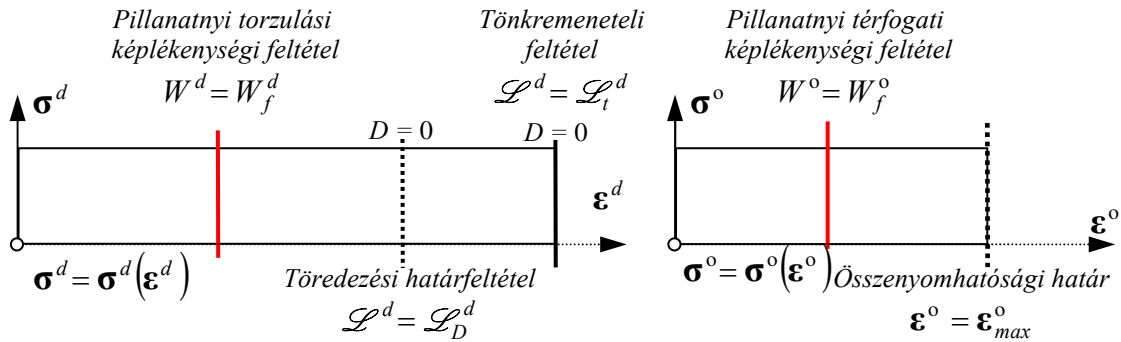
0–1, 1–2, 2–3, 3–, stb.

Vagyis a pillanatnyi térfogati határfeltétel:

$$W_f^o = \text{Max}_{-\infty < t < t_0} \{W_f^o(t_i)\},$$

amelynek értéke csak addig növekszik, ameddig a pórusok záródnak [$\hat{n} = 0$]. Utána a képlékenységi határ többet nem változik. Vagyis utána minden térfogati deformáció, akár terhelésnövekedés, akár terheléscsökkenés van, mindig rugalmas lesz.

A deviatorikus és a gömbi síkon ábrázolva az összes határfeltétel a 9. ábrán látható, ahol az anyag összenyomhatóságának határát is feltüntettük.

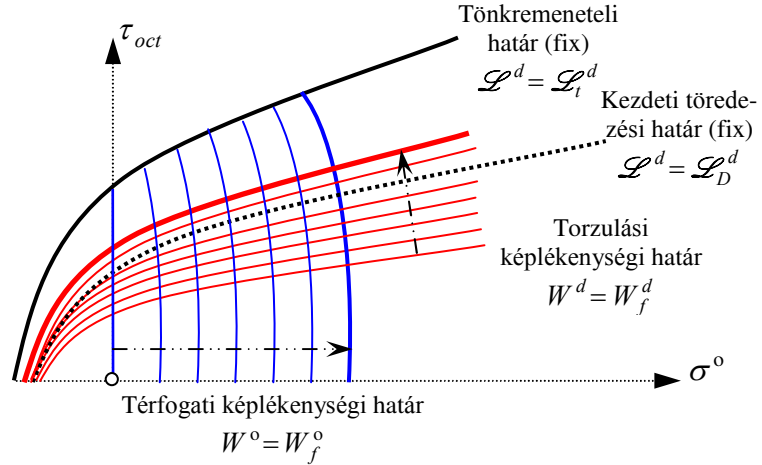


9. ábra

Nem helyénvaló, de nagyon szemléletes, ha a klasszikus „feszültségi” határfeltételeknél megszokott ábrázolást követjük. Ezt tesszük annak ellenére, hogy tudjuk, hogy a határfeltételek feszültségsíkon nem ábrázolhatóak, csak munka- vagy energia síkon. Válaszszuk a

$$\tau_{oct} - \sigma_{oct} (= \sigma^o)$$

síkon⁵ történő ábrázolást, s ezáltal láthatjuk a „fix” és a „vándorló” határfeltételeket.



10. ábra

A) TÖMÖR ANYAG SZERKEZETI VISELKEDÉSE AZ ALAKVÁLTOZÁS SORÁN

Kiindulásként összefoglaljuk a tömör (porozitása zérus), nem repedezett (károsodás nélküli) anyagok esetére az anyagtörvényeket, helyesebben az egyetlen anyagtörvény (konstitúciós egyenlet) különböző feltételek melletti alakjait.

⁵ $\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma^o)^2 + (\sigma_2 - \sigma^o)^2 + (\sigma_3 - \sigma^o)^2}$, $\sigma_{oct} = \sigma^o = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.

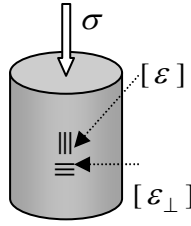
1. AZ ANYAGTÖRVÉNY EGYENSÚLYI FOLYAMAT ESETÉN

1.1. „EGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY TISZTÁN RUGALMAS ÁLLAPOTBAN

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^d &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^o &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o,\end{aligned}\tag{8}$$

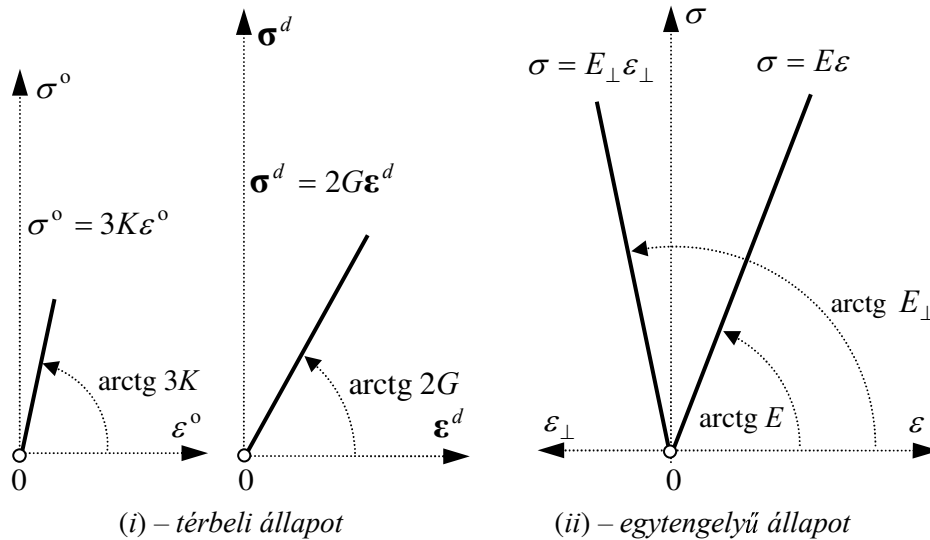
amelynek jellegét – egyenletes terhelési sebesség esetére – a 8. ábra mutatja (HOOKE-törvény). A térfogati és torzulási kép mellett azért célszerű az egytengelyű feszültségállapotot ((ii) jobboldali ábra) is mutatni, ahol

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma^o &= \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma, \\ \varepsilon^o &= \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3} (\varepsilon + 2\varepsilon_{\perp}), \end{aligned}$$



$$\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma} - \sigma^o \mathbf{I} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sigma, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^d = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon^o \mathbf{I} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\varepsilon - 2\varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon + 2\varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon + 2\varepsilon_{\perp} \end{bmatrix},$$

mert ebben az esetben a térfogati hatás együttesen – különválaszthatatlanul – jelenik meg.



8. ábra. A rugalmas egyensúlyban lévő anyag mechanikai viselkedésének jellege általánosan és egytengelyű állapot esetén

Az anyagállandók

- G – a csúsztató (v. torziós) rugalmassági modulus,
- K – a térfogati (v. kompresszibilitási) modulus,
- E – az egytengelyű (v. *Young-féle*) rugalmassági modulus,
- $E_{\perp}$ – a keresztirányú (v. laterális) rugalmassági modulus,

s az anyagtörvény egytengelyű feszültségállapotban:

$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon, \\ \sigma &= E_{\perp}\varepsilon_{\perp},\end{aligned}\tag{9}$$

ahol

$$E = \frac{18KG}{2G+6K}, \quad E_{\perp} = \frac{18KG}{2G-3K}.\tag{10}$$

1. 2. „EGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY RUGALMAS-KÉPLÉKENY ÁLLAPOTBAN

$$\begin{aligned}\sigma^d &= 2G\varepsilon^d - \Psi^d(2G-2G_{pl})(\varepsilon^d - \varepsilon_f^d), \\ \sigma^o &= 3K\varepsilon^o,\end{aligned}\tag{11}$$

ahol G_{pl} a képlékenységi modulus, és Ψ^d a torzulási képlékenységi határt kijelölő egy-ségugrás-függvény általánosan:

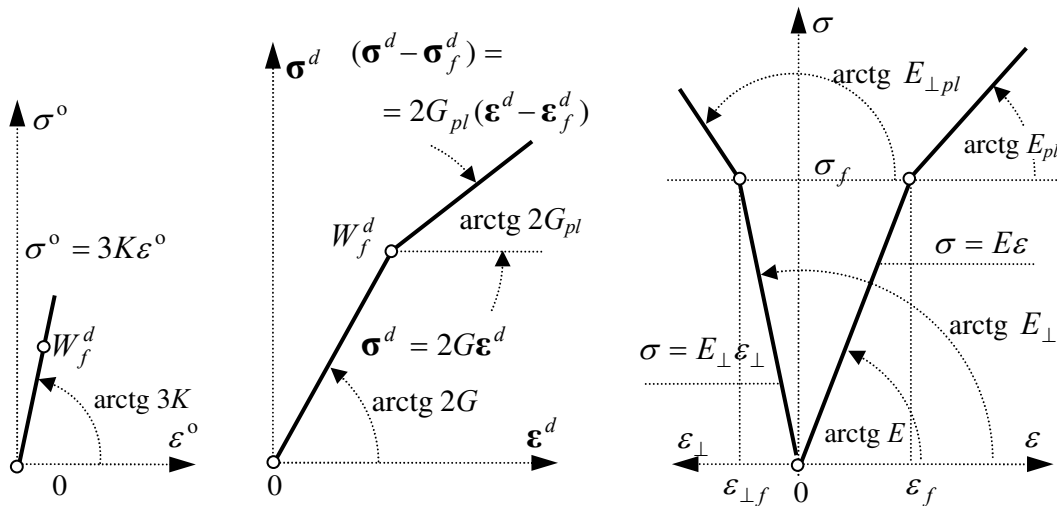
$$\Psi^d = \Psi^d(W^d, \dot{W}^d) = \begin{cases} 0, & \text{ha } W^d < W_f^d, \text{ vagy } \dot{W}^d < 0, \\ 1, & \text{ha } W^d \geq W_f^d, \text{ és } \dot{W}^d \geq 0, \end{cases}$$

illetve egyensúlynál:

$$\Psi^d = \Psi^d(W^d, \Delta W^d) = \begin{cases} 0, & \text{ha } W^d < W_f^d, \text{ vagy } \Delta W^d < 0, \\ 1, & \text{ha } W^d \geq W_f^d, \text{ és } \Delta W^d \geq 0, \end{cases}$$

s W_f^d a torzulási deformációs munka azon értéke, amely után a maradó deformációk megjelennek az alakváltozás során. A (4) szétbontva rugalmas és képlékeny zónára:

$$\Psi^d = 0: \begin{cases} \sigma^d = 2G\varepsilon^d, \\ \sigma^o = 3K\varepsilon^o, \end{cases} \quad \Psi^d = 1: \begin{cases} \sigma^d = 2G\varepsilon_f^d + 2G_{pl}(\varepsilon^d - \varepsilon_f^d), \\ \sigma^o = 3K\varepsilon^o. \end{cases}\tag{12}$$



9. ábra. Az egyensúlyi anyagtörvény a rugalmas és képlékeny tartományban

A képlékenységi határ átlépésével a G csúsztató rugalmassági modulus értéke látszólag megváltozik (csökken) G_{pl} -re, a K értéke viszont változatlan marad. Azért csak „lát-

szólag”, mert úgy néz ki, mintha a G értéke lecsökkent volna G_{pl} -re. Pedig a G értéke változatlan marad (ez fejezi ki a rugalmas deformációkat), csak megjelennek a G_{pl} -lel leírható „maradó” (vissza nem fordítható, plasztikus) deformációk. Pongyola felírásban:

$$2G = \frac{\Delta(\sigma_{ij} - \sigma^o)}{\Delta(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^o)^{el}}, \text{ illetve } 2G_{pl} = \frac{\Delta(\sigma_{ij} - \sigma^o)}{\Delta(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^o)^{el} + \Delta(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^o)^{pl}} = \frac{\Delta(\sigma_{ij} - \sigma^o)}{\Delta(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^o)}.$$

Ennek megfelelően az egytengelyű állapot modulusai értelemszerűen:

$$E_{pl} = \frac{18KG_{pl}}{2G_{pl} + 6K}, \quad E_{\perp pl} = \frac{18KG_{pl}}{2G_{pl} - 3K}. \quad (13)$$

A G csúsztató rugalmassági modulus értékének változását a 10. ábra mutatja a torzulási térbe berajzolva.

A φ viszonzszám

$$\varphi := \frac{G_{pl}}{G} \quad (14)$$

bevezetésével [$0 < \varphi < 1$] az anyagtörvény felírható

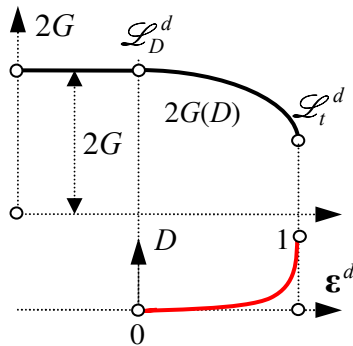
$$\begin{aligned} \sigma^d &= 2G\varepsilon^d - \Psi 2G(1 - \varphi)(\varepsilon^d - \varepsilon_f^d), \\ \sigma^o &= 3K\varepsilon^o \end{aligned} \quad (15)$$

formában is.

10. ábra. A csúsztató rugalmassági modulus értékének látszólagos megváltozása a képlékenységi határ átlépése után

Már COULOMB is feltételezte, hogy minden szilárd anyagnak van egy jellemző molekula elrendezése, amelyet a kis rugalmas alakváltozás nem befolyásol. Nagyobb alakváltozásnál van egy képlékenységi határ, amely felett a molekulák között elcsúszás jön létre, de ez a rugalmassági tulajdonságot nem befolyásolja (ld. 10. ábra).

1. 3. „EGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY A RUGALMAS-TÖNKREMENTELI ZÓNÁBAN



11. ábra

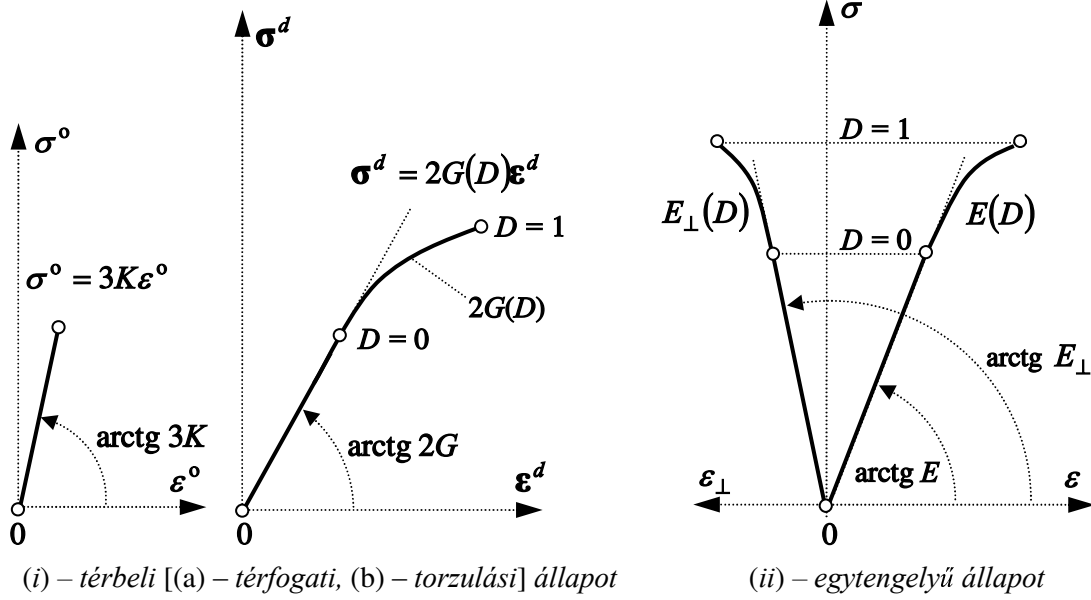
Ebben az esetben az anyag úgy kerül át a tönkremeneteli zónába, hogy közben nem lép fel képlékeny állapot, nincs maradó alakváltozás (ez az ún. rideg törés). Mint előző cikkünkben láttuk, ekkor az anyagtörvény a

$$\begin{aligned} \sigma^d &= 2G(D)\varepsilon^d, \\ \sigma^o &= 3K\varepsilon^o. \end{aligned} \quad (16)$$

parametrikus alakot ölti, ahol D a károsodás mértéke [$0 \leq D \leq 1$].

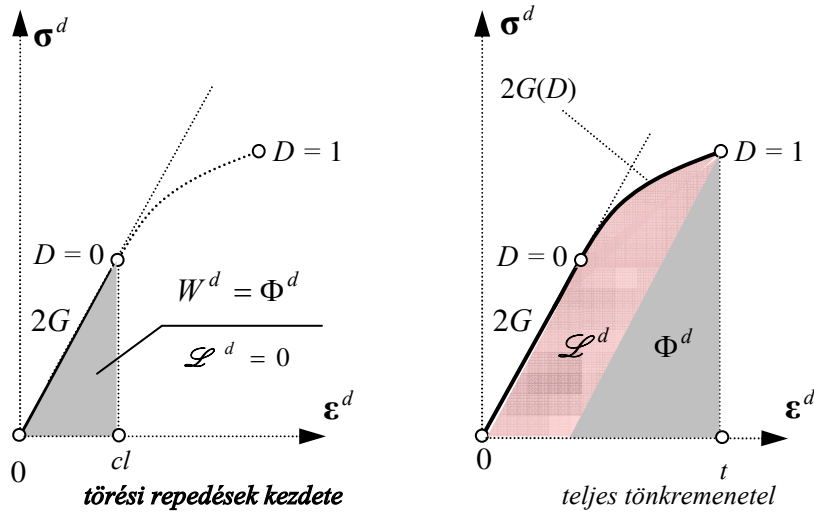
A $2G(D)$ függvény, valamint a függvény függvény alakja az 11. ábrán látható. A D hatása – mint látható – a rugalmassági modulus értékének csökkenésében fejeződik ki.

A megszokott ábrázolás a következő ábrán látható.



12. ábra. A rugalmas egyensúlyban lévő anyag mechanikai viselkedésének jellege általánosan és egytengelyű állapot esetén

A tönkrement anyag zónájának két határát a mérésekből számításokkal határozhatjuk meg. Vegyünk egy egytengelyű kísérletet, amelynél ahol jelezni kezd az akusztikus emisszió, ott van a $D = 0$ érték. Legyenek az ekkor leolvasott értékek: $\sigma_{cl}, \epsilon_{cl}, \epsilon_{\perp cl}$. Míg a $D = 1$ tönkremeneteli érték pedig a $\sigma_t, \epsilon_t, \epsilon_{\perp t}$. A repedezettség kezdetét jelző $\mathcal{L}_D^d$ és a teljes tönkremenetelt jelző $\mathcal{L}_t^d$ disszipációs munka értéke a munkaösszefüggésekből számítható.



13. ábra

Ebben az esetben mint a 13. ábráról látható az alsó határ $\mathcal{L}_D^f$ a zérussal egyenlő, míg az (felső) határ számítható: $\mathcal{L}_t^d = \int_0^{\varepsilon_t^d} [2G(D) - 2G] \varepsilon^d : d\varepsilon^d = \int_0^{\varepsilon_t^d} [2G(D) \varepsilon^d : d\varepsilon^d - G \varepsilon_t^d : \varepsilon_t^d]$.

1. 4. „EGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY A RUGALMAS-KÉPLÉKENY-TÖNKREMETETELI ZÓ- NÁBAN

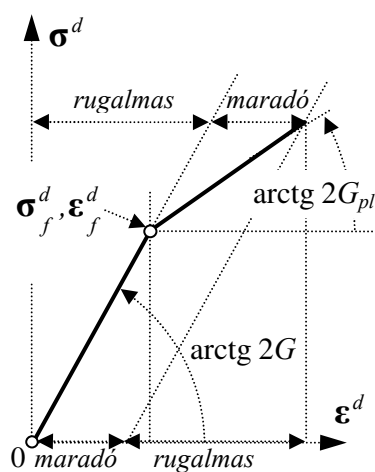
Ameddig nem jelentkezik a tönkremenetel, nem kezdenek kialakulni az anyagban a mikrorepedések, addig az anyag viselkedését a (7), (8) illetve (11) egyenlet valamelyikével írhatjuk le. A repedezettséget a D károsodási tényezővel reprezentáljuk, amelynek hatása a torzulási anyagállandók változásában jelenik meg. Azonban formálisan nézve, itt három lehetőség is van:

- (a) $\sigma^d = 2G(D) \varepsilon^d - \Psi 2G(D)(1 - \varphi)(\varepsilon^d - \varepsilon_f^d),$
- (b) $\sigma^d = 2G \varepsilon^d - \Psi 2G(1 - \varphi(D))(\varepsilon^d - \varepsilon_f^d),$
- (c) $\sigma^d = 2G(D) \varepsilon^d - \Psi 2G(D)(1 - \varphi(D))(\varepsilon^d - \varepsilon_f^d)$

attól függően, hogy a D hatása csak a rugalmassági modulusban, vagy csak a képlékenységi modulusban, vagy mindkettőben megjelenik.

Mivel láttuk, hogy a tönkremenetel bekövetkezhet anélkül is, hogy az anyag képlékeny állapotba kerülne, azért a $G(D)$ függés evidens. Viszont mi a helyzet a $G_{pl}(D)$ függéssel, s főként a $\varphi(D)$ függéssel?

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, – amelyre semmi bizonyítékunk nincs, – hogy a



14.a) ábra

nem pedig

$$\varphi(D) = \frac{G_{pl}}{G(D)},$$

$$\varphi(D) = \frac{G_{pl}(D)}{G(D)},$$

amely logikusnak tűnik a G_{pl} magyarázatából (ld. 14.a) ábra). Ui. míg a G csúsztató rugalmassági modulus a *rugalmas* deformációkkal értelmezett:

$$2G = \frac{\Delta(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma^o)}{\Delta(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon^o)^{elast}},$$

addig a G_{pl} pedig a *maradó* v. *plasztikus* deformációkkal:

$$2G_{pl} = \frac{(\sigma_{ij} - \sigma^o) - (\sigma_{ij} - \sigma^o)_f}{(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^o) - (\varepsilon_{ij} - \varepsilon^o)_f} = \frac{\Delta_f (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma^o)}{\Delta (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon^o)^{elast} + \Delta (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon^o)^{plast}},$$

s talán semmi sem indokolja, hogy a töredezettséget a maradó deformációkhoz kössük.

Tehát az anyagtörvény a rugalmas és képlékeny tartományban (c)-alakú, vagyis a konstitúciós egyenlet a következő:

$$\sigma^d = 2G(D)\epsilon^d - \Psi^d (2G(D) - 2G_{pl})(\epsilon^d - \epsilon_f^d). \quad (17)$$

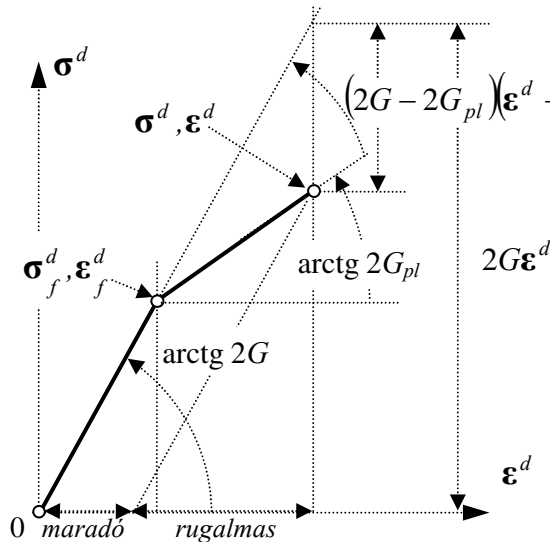
$\Psi = 1$ esetén, vagyis a képlékeny zónában a (17) összefüggésből több, egymással egyenértékű egyenlet is felírható

$$\begin{aligned} [1] \quad \sigma^d &= 2G(D)\epsilon^d - (2G(D) - 2G_{pl})(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ \Psi^d = 1: \quad [2] \quad \sigma^d &= 2G(D)\epsilon_f^d + 2G_{pl}(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ [3] \quad \sigma^d &= (2G(D) - 2G_{pl})\epsilon_f^d + 2G_{pl}\epsilon^d, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} [1] \quad \sigma^d &= 2G(D)\epsilon^d - 2G(D)(1 - \varphi)(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ \Psi^d = 1: \quad [2] \quad \sigma^d &= 2G(D)\epsilon_f^d + 2G(D)\varphi(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ [3] \quad \sigma^d &= 2G(D)(1 - \varphi)\epsilon_f^d + 2G_{pl}\epsilon^d, \end{aligned}$$

amelynek geometriai magyarázatát a 14.b) ábra mutatja. Az ábránál az áttekinthetőség kedvéért a D károsodási tényező feltüntetését elhagytuk.



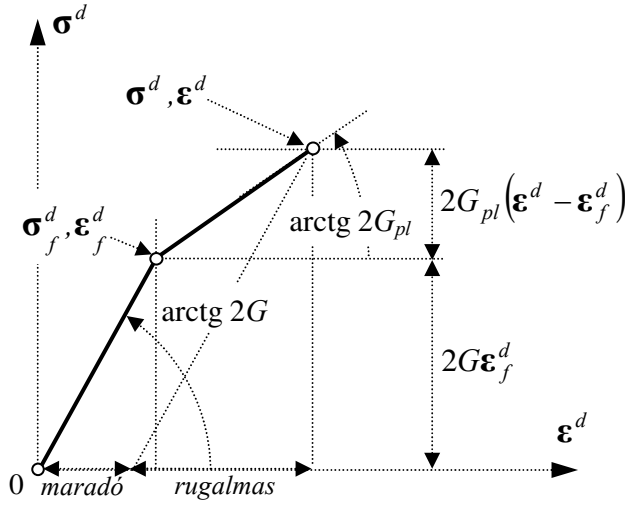
Ha $D = 0$, akkor

$$\begin{aligned} \sigma^d &= 2G\epsilon^d - (2G - 2G_{pl})(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ \sigma^d &= 2G\epsilon^d - 2G(1 - \varphi)(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \end{aligned}$$

ha $0 \leq D \leq 1$, akkor

$$\begin{aligned} \sigma^d &= 2G(D)\epsilon^d - \\ &\quad - (2G(D) - 2G_{pl})(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ \sigma^d &= 2G(D)\epsilon_f^d - \\ &\quad - 2G(D)(1 - \varphi)(\epsilon^d - \epsilon_f^d). \end{aligned}$$

[1]



Ha $D = 0$, akkor

$$\sigma^d = 2G\epsilon_f^d + 2G_{pl}(\epsilon^d - \epsilon_f^d),$$

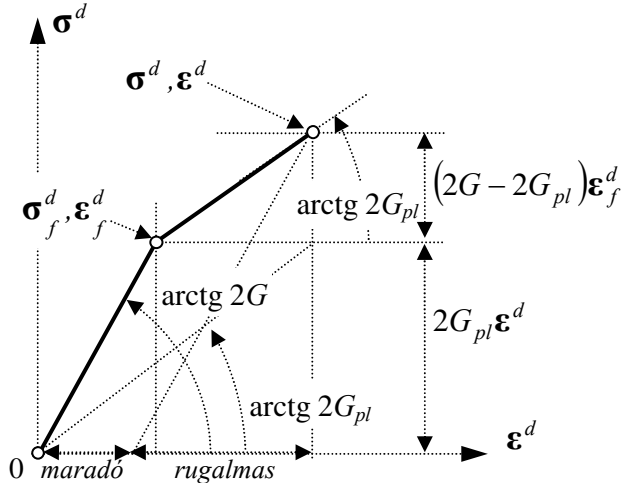
$$\sigma^d = 2G\epsilon_f^d + 2G\phi(\epsilon^d - \epsilon_f^d),$$

ha $0 \leq D \leq 1$, akkor

$$\sigma^d = 2G(D)\epsilon_f^d + 2G_{pl}(\epsilon^d - \epsilon_f^d),$$

$$\sigma^d = 2G(D)\epsilon_f^d + 2G(D)\phi(\epsilon^d - \epsilon_f^d).$$

[2]



Ha $D = 0$, akkor

$$\sigma^d = (2G - 2G_{pl})\epsilon_f^d + 2G_{pl}\epsilon^d,$$

$$\sigma^d = 2G(1 - \phi)\epsilon_f^d + 2G\phi\epsilon^d,$$

ha $0 \leq D \leq 1$, akkor

$$\sigma^d = (2G(D) - 2G_{pl})\epsilon_f^d + 2G_{pl}\epsilon^d,$$

$$\sigma^d = 2G(D)(1 - \phi)\epsilon_f^d + 2G(D)\phi\epsilon^d.$$

[3]

14.b) ábra. Az [1], [2] és [3] esetek trigonometriai összefüggései

2. AZ ANYAGTÖRVÉNY NEMEGYENSÚLYI FOLYAMATNÁL

2.1. „NEMEGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY TISZTÁN RUGALMAS ÁLLAPOTBAN

Az anyagtörvény [VÁN-ASSZONYI (2006)]:

$$\begin{aligned}\sigma^d + \tau \dot{\sigma}^d &= 2G\epsilon^d + 2\eta \dot{\epsilon}^d + \theta \ddot{\epsilon}^d, \\ \sigma^o + \tau_o \dot{\sigma}^o &= 3K\epsilon^o + 3K_v \dot{\epsilon}^o + \theta_o \ddot{\epsilon}^o,\end{aligned}\tag{18}$$

amelyet tehetetlenségi POYNTING–THOMSON (standard) testnek hívunk, ahol az előzőekben még nem szerepelt anyagállandók:

- τ – a relaxációs idő,
- η – a viszkozitási együttható,

- θ – a tehetetlenségi tényező,
- τ_o – a térfogati relaxációs idő,
- K_v – a térfogati viszkozitás,
- θ_o – a térfogati tehetetlenségi tényező.

A (18) anyagtörvény termodinamikai levezetése az entrópiánövekedés tényéből – a disszipációs feltételből – történt. A levezetés két részből állt. Az entrópiánövekedés reverzibilis (Δs^{rev}) és irreverzibilis (Δs^{irrev}) részéből következett az egyensúlyi és a nemegyensúlyi része az anyagtörvénynek:

$$(\Delta s^{rev} = 0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (\sigma^d)^{rev} &= 2G\epsilon^d, & (\dot{\sigma}^d)^{rev} &= 2G\dot{\epsilon}^d, \\ (\sigma^o)^{rev} &= 3K\epsilon^o, & (\dot{\sigma}^o)^{rev} &= 3K\dot{\epsilon}^o, \end{aligned} \quad (19a)$$

$$(\Delta s^{irrev} > 0)^6 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (\sigma^d)^{irrev} + \tau(\dot{\sigma}^d)^{irrev} &= 2\mu\dot{\epsilon}^d + \theta\ddot{\epsilon}^d, \\ (\sigma^o)^{irrev} + \tau_o(\dot{\sigma}^o)^{irrev} &= 3\kappa\dot{\epsilon}^o + \theta_o\ddot{\epsilon}^o, \end{aligned} \quad (19b)$$

majd a kettő összegeként a teljes anyagtörvény:

$$\begin{aligned} \sigma^d &= (\sigma^d)^{rev} + (\sigma^d)^{irrev}, \\ (\Delta s \geq 0) \quad \Rightarrow \quad \sigma^o &= (\sigma^o)^{rev} + (\sigma^o)^{irrev}, \\ \sigma^d + \tau \dot{\sigma}^d &= 2G\epsilon^d + (2\mu + 2G\tau)\dot{\epsilon}^d + \theta\ddot{\epsilon}^d, \\ \sigma^o + \tau_o \dot{\sigma}^o &= 3K\epsilon^o + (3\kappa + 3K\tau_o)\dot{\epsilon}^o + \theta_o\ddot{\epsilon}^o, \end{aligned} \quad (19c)$$

ahol

$$2\eta = 2\mu + 2G\tau \quad \text{és} \quad 3K_v = 3\kappa + 3K\tau_o. \quad (20)$$

Gyakorlati feladatoknál számos esetben a másodrendű időderivált (tehetetlenségi hatás) elhanyagolható, s ekkor a

$$\begin{aligned} \sigma^d + \tau \dot{\sigma}^d &= 2G\epsilon^d + 2\eta\dot{\epsilon}^d + \theta\ddot{\epsilon}^d, & \text{helyett a} & \sigma^d + \tau \dot{\sigma}^d = 2G\epsilon^d + 2\eta\dot{\epsilon}^d, \\ \sigma^o + \tau_o \dot{\sigma}^o &= 3K\epsilon^o + 3K_v\dot{\epsilon}^o + \tau_o\ddot{\epsilon}^o, & & \sigma^o + \tau_o \dot{\sigma}^o = 3K\epsilon^o + 3K_v\dot{\epsilon}^o \end{aligned}$$

standard modellre korlátozzuk vizsgálatainkat.

Ha bevezetjük a (2)

$$2\tilde{G} \equiv 2G \frac{1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 3\tilde{K} \equiv 3K \frac{1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\theta_o}{3K} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}} \quad (2)$$

differentiáloperátorokat, akkor segítségükkel a (18) anyagegyenlet formálisan egy egyensúlyi anyagtörvényre egyszerűsödik:

$$\sigma^d = 2\tilde{G}\epsilon^d, \quad \sigma^o = 3\tilde{K}\epsilon^o, \quad (21)$$

⁶ A egyenlőtlenség kielégítése a LAGRANGE-féle középértéktétel alapján egy egyenletrendszer eredményez, melynek megoldása az anyagtörvény irreverzibilis része.

mivel a reológiai változás az anyagoperátorokban van elrejtve.

Így egytengelyű feszültségállapotban a (20) standard test anyagegyenlete:

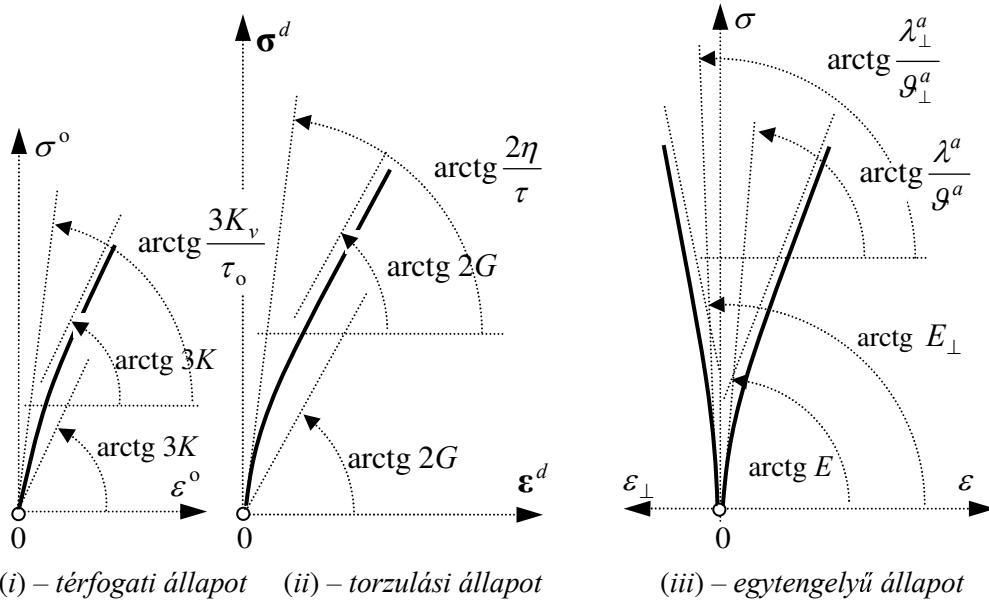
$$\begin{aligned}\sigma &= \tilde{E}\varepsilon, \\ \sigma &= \tilde{E}_\perp \varepsilon_\perp,\end{aligned}\quad \text{ahol} \quad \tilde{E} = \frac{18\tilde{K}\tilde{G}}{2\tilde{G}+6\tilde{K}}, \quad \tilde{E}_\perp = \frac{18\tilde{K}\tilde{G}}{2\tilde{G}-3\tilde{K}}, \quad (23)$$

amely a behelyettesítések elvégzése után

$$\begin{aligned}\sigma + \vartheta \dot{\sigma} + \vartheta^a \ddot{\sigma} &= E \varepsilon + \lambda \dot{\varepsilon} + \lambda^a \ddot{\varepsilon}, \\ \sigma + \vartheta_\perp \dot{\sigma} + \vartheta_\perp^a \ddot{\sigma} &= E_\perp \varepsilon_\perp + \lambda_\perp \dot{\varepsilon}_\perp + \lambda_\perp^a \ddot{\varepsilon}_\perp,\end{aligned}\quad (24)$$

alakot ölti, ahol az egyenletekben szereplő ún. „egytengelyű” anyagállandók tartalma kiolvasható [E - rugalmassági modulus, λ és λ^a a deformáció-sebességgel és a deformáció-gyorsulással arányos viszkozitás, ϑ és ϑ^a a feszültségváltozási sebességgel és a feszültségváltozási gyorsulással arányos relaxáció]:

$$\begin{aligned}\vartheta &:= \frac{\eta + 3K_v + G\tau_o + 3K\tau}{G + 3K}, & \vartheta_\perp &:= \frac{2G\tau_o + 2\eta - 3K_v - 3K\tau}{2G - 3K}, \\ \vartheta^a &:= \frac{\eta\tau_o + 3K_v\tau}{G + 3K}, & \vartheta_\perp^a &:= \frac{2\eta\tau_o - 3K_v\tau}{2G - 3K}, \\ E &:= \frac{18GK}{2G + 6K}, & E_\perp &:= \frac{18GK}{2G - 3K}, \\ \lambda &:= \frac{9(K\eta + GK_v)}{G + 3K}, & \lambda_\perp &:= \frac{18(K\eta + GK_v)}{2G - 3K}, \\ \lambda^a &:= \frac{18\eta K_v}{2G + 6K}, & \lambda_\perp^a &:= \frac{3(3K\theta + 6\eta K_v + 2G\theta_o)}{2G - 3K}.\end{aligned}\quad (25)$$



15. ábra. A rugalmas nemegyensúlyi anyagtörvény mechanikai viselkedésének ábrája

2.2. „NEMEGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY” RUGALMAS-KÉPLÉKENY ÁLLAPOTBAN

Az egyensúlyi anyagtörvény

$$\boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d - \Psi^d (2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d), \quad \boldsymbol{\sigma}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o,$$

rugalmas-képlékeny alakját kell alapul venni. Mivel a rugalmas részt már tárgyaltuk, elégséges a $\Psi^d = 1$ képlékeny tartománybeli viselkedésre koncentrálni:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}_f^d + 2G_{pl}(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d), \\ \boldsymbol{\sigma}^o &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o. \end{aligned} \quad (26)$$

A (19) alatti levezetés logikája szerint [$\Psi^d = 1$ esetén]:

$$\begin{aligned} (\Delta s^{rev}): \quad & \begin{cases} (\boldsymbol{\sigma}^d)^{rev} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_f^d + 2G_{pl}(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d), & (\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d)^{rev} = 2G_{pl}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d, \\ (\boldsymbol{\sigma}^o)^{rev} = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o, & (\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o)^{rev} = 3K\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o, \end{cases} \\ (\Delta s^{irrev}): \quad & \begin{cases} (\boldsymbol{\sigma}^d)^{irrev} + \tau(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d)^{irrev} = 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d, \\ (\boldsymbol{\sigma}^o)^{irrev} + \tau_o(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o)^{irrev} = 3\kappa\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \theta_o\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o, \end{cases} \\ (\Delta s): \quad & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^d + \tau\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_f^d + 2G_{pl}(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d) + (2\mu + 2G_{pl}\tau)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^o + \tau_o\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o + (3K\tau_o + 3\kappa)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \theta_o\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o, \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

mivel a (20) szerint: $2\eta = 2\mu + 2G\tau$, $3K_v = 3\kappa + 3K\tau_o$, így $2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d + \tau\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d &= (2G - 2G_{pl})\boldsymbol{\varepsilon}_f^d + 2G_{pl}\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta_{pl}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^o + \tau_o\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \theta_o\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o. \end{aligned} \quad (28)$$

Ezt ábrázolni már nem egyszerű feladat. Ui. a 4. és a 8. ábra összetolásával lehet megalakítani a szokásos ábrát, s az egytengelyű ábrázoláshoz fel kellene írni a (28) egytengelyű formáját is, ami nem egy nehéz feladat, de már nagyon kuszává teszi a képet.

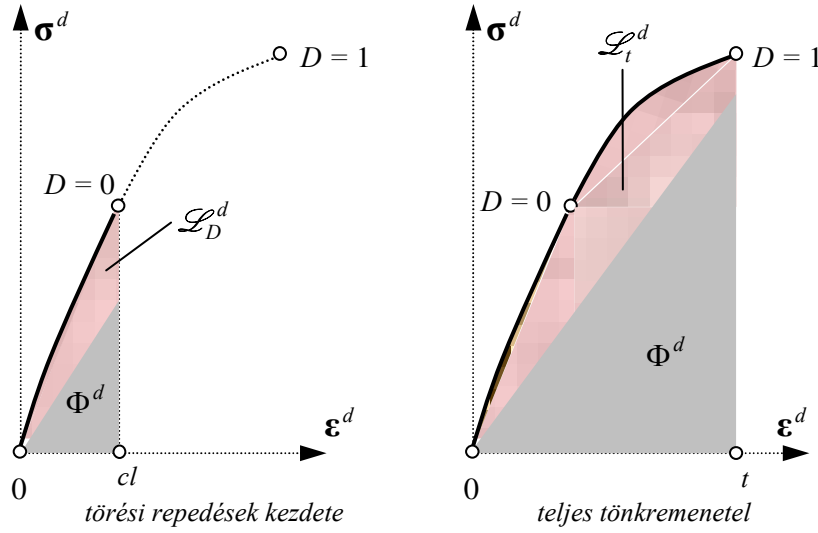
2.3. „NEMEGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY” RUGALMAS-TÖNKREMENTELI ÁLLAPOTBAN

A (16) alatti „egyensúlyi” formából a $2G$ és $3K$ anyagállandóknak a $2\tilde{G}(D)$ és $3\tilde{K}$ anyagoperátorokra történő cseréjével a konstitúciós egyenlet:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d &= 2\tilde{G}(D)\boldsymbol{\varepsilon}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^o &= 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o, \end{aligned} \quad (29)$$

ahol

$$2\tilde{G}(D) \equiv \frac{2G(D) + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 3\tilde{K} \equiv \frac{3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}}. \quad (30)$$



16. ábra

2.4. „NEMEGYENSÚLYI ANYAGTÖRVÉNY” RUGALMAS–KÉPLÉKENY–TÖNKREMENTELI ÁLLAPOTBAN

Teljesen hasonlóan eljárva a

$$\begin{aligned} \sigma^d &= 2G(D)\epsilon^d - \Psi^d (2G(D) - 2G_{pl}(D))(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ \sigma^o &= 3K\epsilon^o \end{aligned} \quad (17)$$

egyensúlyi formából indulunk ki, amely a $\Psi^d = 0$ rugalmas és a $\Psi^d = 1$ képlékeny tartományban külön-külön:

$$\sigma^d = \begin{cases} 2G\epsilon^d, & \text{ha } D = 0, \\ 2G(D)\epsilon^d, & \text{ha } 0 \leq D \leq 1. \end{cases} \quad \sigma^d = \begin{cases} 2G_{pl}\epsilon_f^d + (2G - 2G_{pl})\epsilon^d, & \text{ha } D = 0, \\ 2G_{pl}\epsilon^d - (2G(D) - 2G_{pl}(D))\epsilon^d, & \text{ha } 0 \leq D \leq 1. \end{cases}$$

A megoldás úgy adódik, ha az anyagállandókat anyagoperátorokra cseréljük, azaz

$$\begin{aligned} \sigma^d &= 2\tilde{G}(D)\epsilon^d - \Psi^d (2\tilde{G}(D) - 2\tilde{G}_{pl}(D))(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ \sigma^o &= 3\tilde{K}\epsilon^o, \end{aligned} \quad (31)$$

ahol az anyagoperátorok a (30) alattiak, valamint

$$2\tilde{G}_{pl}(D) \equiv \frac{2G_{pl} + \{2\eta - [2G(D) - 2G_{pl}]\tau\} \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad (32)$$

amely egyszerűbben:

$$2\tilde{G}_{pl}(D) \equiv \frac{2G_{pl} + 2\eta_{pl}(D) \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 2\eta_{pl}(D) \equiv 2\eta - (2G(D) - 2G_{pl})\tau.$$

Valójában a járható út a fordított: nem az anyagállandókból következnek az anyagoperátorok, hanem az anyagoperátorok „egyensúlyi” részei az anyagállandók.

B) PORÓZUS ANYAG SZERKEZETI VISELKEDÉSE AZ ALAKVÁLTOZÁS SORÁN

Porózus anyagoknál van „térfogati képlékeny állapot” is, ami a tömör anyagoknál nincs. E miatt a térfogatváltozásnál is van képlékenységi határ, amely elválasztja egymástól a rugalmas és képlékeny tartományokat.

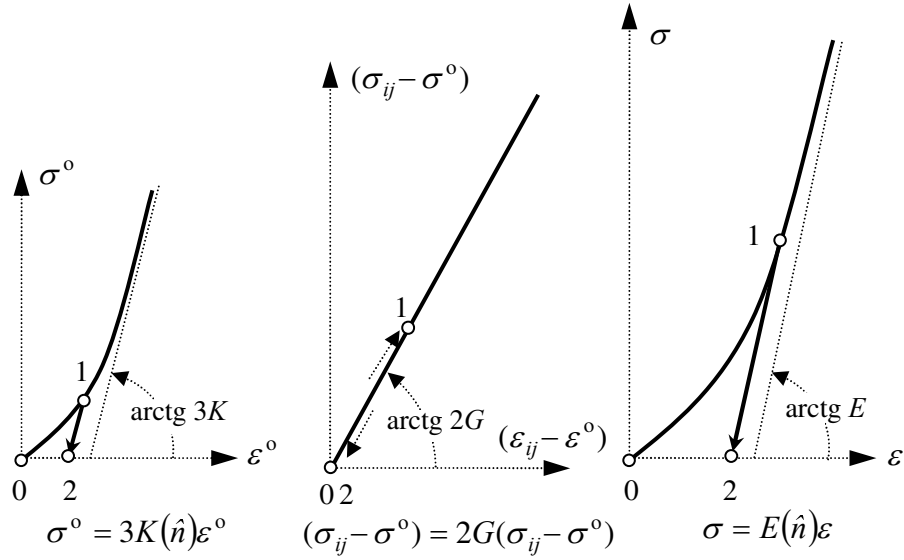
Az előző pontban közöltekkel teljesen analóg lenne a levezetés, ha a térfogatváltozási egyenletbe is bevezetnénk a képlékenységi határt (ld. 8. ábra), a határt kijelölő Ψ^o egy-ségugrás-függvénnyel:

$$\Psi^o = \Psi^o(W^o, \dot{W}^o) = \begin{cases} 0, & \text{ha } W^o < W_f^o, \text{ vagy } \dot{W}^o < 0, \\ 1, & \text{ha } W^o \geq W_f^o, \text{ és } \dot{W}^o \geq 0, \end{cases}$$

ami azt mondja ki, hogy *rugalmas állapot* van a képlékenységi határ alatt tetszőleges terhelésnél és minden terheléscsökkenéskor [$\Delta\sigma^o \leq 0$], *képlékeny állapot* van a képlékenységi határ fölött és csak terhelésnövekedéskor [$\Delta\sigma^o > 0$].

Ha az anyag deformálódása tökéletesen nyugalomban lévő, tökéletesen relaxált állapotból indul, és porúsossága nem zérus, akkor az induló képlékenységi határ: $W_f^o = 0$, s azonnal jelentkezik a térfogati képlékenység.

Példaként nézzük meg a 17. ábrán egy egytengelyű nyomókísérlet ábráját $0 \Rightarrow 1$ felterhelés, és $1 \Rightarrow 2$ tehermentesítés esetén.



17. ábra

A Ψ^0 bevezetésére semmi szükség, mivel a térfogati képlékenységek nem jár szerkezeti változással, mint a torzulási képlékenységek, csupán a pórustérfogat változásával. Ezt egy $\hat{n}$ belső paraméter változásával írjuk le. Ennek megfelelően porózus közegekre az anyag-törvény a legáltalánosabb esetre a (31) összefüggés alapján – térfogati egyenletének ki-gészítésével – írható fel:

$$\begin{aligned}\sigma^d &= 2\tilde{G}(D)\epsilon^d - \Psi^d(2\tilde{G}(D) - 2\tilde{G}_{pl}(D))(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ \sigma^0 &= 3\tilde{K}(\hat{n})\epsilon^0.\end{aligned}\quad (32)$$

Ezen ok miatt a különböző speciális esetekre vonatkozó levezetéseket nem ismételjük meg, csupán a végeredményt közöljük.

1. AZ ANYAGTÖRVÉNY „EGYENSÚLYI” FOLYAMAT ESETÉN

1.1 „EGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY TISZTÁN RUGALMAS ÁLLAPOTBAN, általában nem létezik. Porózus anyagoknál ugyanis már a kezdetben is megjelenik a maradó deformáló-dás, amelyet a pórusok záródása okoz. Térfogatváltozásnál rugalmas állapot csak „térfogat-terheléscsökkenés” esetén lehetséges. Ezt felírni csak növekményes formában lehet:

$$\begin{aligned}\text{általában: } \Delta\sigma^d &= 2G\Delta\epsilon^d, \\ \Delta\sigma^0 &= 3K(\hat{n})\Delta\epsilon^0, \\ \text{speciálisan: } \Delta\sigma^d &= 2G\Delta\epsilon^d, \quad \text{ha } \Delta\sigma^0 \leq 0. \\ \Delta\sigma^0 &= 3K\Delta\epsilon^0,\end{aligned}\quad (33)$$

1.2 „EGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY RUGALMAS–KÉPLÉKENY ÁLLAPOTBAN

$$\begin{aligned}\sigma^d &= 2G\epsilon^d - \Psi^d(2G - 2G_{pl})(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ \sigma^0 &= 3K(\hat{n})\epsilon^0.\end{aligned}\quad (34)$$

1.3 „EGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY RUGALMAS–TÖNKREMETETELI ZÓNÁBAN

$$\begin{aligned}\sigma^d &= 2G(D)\epsilon^d, \\ \sigma^o &= 3K(\hat{n})\epsilon^o.\end{aligned}\tag{35}$$

1.4 „EGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY RUGALMAS–KÉPLÉKENY–TÖNKREMETETELI ZÓNÁBAN

$$\begin{aligned}\sigma^d &= 2G(D)\epsilon^d - \Psi^d(2G(D) - 2G_{pl}(D))(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ \sigma^o &= 3K(\hat{n})\epsilon^o.\end{aligned}\tag{36}$$

2. AZ ANYAGTÖRVÉNY „NEMEGYENSÚLYI” FOLYAMAT ESETÉN

2.1 „NEMEGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY TISZTÁN RUGALMAS ÁLLAPOTBAN

$$\begin{aligned}\sigma^d + \tau \dot{\sigma}^d &= 2G\dot{\epsilon}^d + 2\eta\dot{\epsilon}^d + \theta\ddot{\epsilon}^d, & \text{ill.} & \sigma^d = 2\tilde{G}\epsilon^d, \\ \sigma^o + \tau_o \dot{\sigma}^o &= 3K(\hat{n})\dot{\epsilon}^o + 3K_v\dot{\epsilon}^o + \theta_o\ddot{\epsilon}^o, & \sigma^o &= 3\tilde{K}(\hat{n})\epsilon^o.\end{aligned}\tag{37}$$

2.2 „NEMEGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY RUGALMAS–KÉPLÉKENY ÁLLAPOTBAN

$$\begin{aligned}\sigma^d &= 2\tilde{G}\epsilon^d - \Psi^d(2\tilde{G} - 2\tilde{G}_{pl})(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ \sigma^o &= 3\tilde{K}(\hat{n})\epsilon^o.\end{aligned}\tag{38}$$

2.3 „NEMEGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY RUGALMAS–TÖNKREMETETELI ZÓNÁBAN

$$\begin{aligned}\sigma^d &= 2\tilde{G}(D)\epsilon^d, \\ \sigma^o &= 3\tilde{K}(\hat{n})\epsilon^o.\end{aligned}\tag{39}$$

2.4 „NEMEGYENSÚLYI” ANYAGTÖRVÉNY RUGALMAS–KÉPLÉKENY–TÖNKREMETETELI ZÓNÁBAN

$$\begin{aligned}\sigma^d &= 2\tilde{G}(D)\epsilon^d - \Psi^d(2\tilde{G}(D) - 2\tilde{G}_{pl}(D))(\epsilon^d - \epsilon_f^d), \\ \sigma^o &= 3\tilde{K}\epsilon^o.\end{aligned}\tag{40}$$

IRODALOM

CAI, M. (2009): Practical Estimates of Tensile Strength and Hoek–Brown Strength Parameter of Brittle Rocks, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, DOI 10.1007/s00603-009-0053-1.

ASSZONYI et al. (2011): Gondolatok a porózus- és a töredezett anyagok mechanikai viselkedésének megértéséhez. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 12?*, Műegyetemi Kiadó, Budapest

VÁN, P. (2001): Internal thermodynamic variables and the failure of microcracked materials, *J. of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **26** (2): 167-189.

MÉRNÖKI LÉTESÍTMÉNYEK MODELLEZÉSÉNEK ÉS TERVEZÉSÉNEK EGY MÓDSZERÉRŐL

Asszonyi Csaba

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Doležalová Márta

DOLEXPART-GEOTECHNIKA, PRAHA – MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A cikk tárgya egy numerikusmodellezési módszer, amelynek lényege a helyszíni mérésre illeszkedő modellkalibráció. Az illesztést egy feszültségpályától függő anyagmodell segíti elő azzal, hogy folyamatosan figyelembe veszi a feszültségpályák irányváltozásával járó merevségváltozást. Az első rész a pályafüggő anyagmodell konvencionális formáját tárgyalja, amely már nagyszámú mérnöki létesítmény modellezésénél és tervezésénél talált gyakorlati alkalmazásra. A második rész a pályafüggő anyagmodellnek termodinamikai alapokra helyezett továbbfejlesztését tartalmazza.

BEVEZETÉS

A cikkben elemzésre kerülő modell és módszer [DOLEŽALOVÁ (1985, 1993, 2007)] 1985 óta széleskörű alkalmazásra talált a geotechnikai gyakorlatban. Ez idő folyamán mintegy 39 mérnöki létesítmény sík (2D) és térbeli (3D) numerikus modelljét dolgozták ki és alkalmazták 16 nagyát, 9 alagút, 5 földalatti csarnok és tározó, 2 mély munkagödör és 7 külszíni fejtés különböző tervezési és üzemeltetési problémáinak megoldására. További alkalmazások: mélyművelési bányák vízszintsüllyesztésének szimulációja és szabályozása. Tehát egy már kipróbált eljárásról van szó, amely megérdemli az odafigyelést, s amelyet megalkotójáról DOLEŽALOVÁ-módszernek neveznek. A szerző a módszert „*helyszíni méréshez illeszkedő modellezésnek*” és az ott használt anyagmodellt „*feszültségpályától függő rugalmas-képlékeny anyagmodell*”-nek nevezi. Más összevont elnevezés: „*méréshez illeszkedő numerikus modellezés pályafüggő anyagmodell segítségével*”

A módszer lényege a helyszíni mérésre illeszkedő modellkalibráció, amelyet a pályától függő anyagmodell segít elő azzal, hogy folyamatosan figyelembe veszi a pályairány változással járó merevségváltozást. További követelmény a legfontosabb kivitelezési és üzemeltetési szakaszok valósághű modellezése, amely a kalibrált anyagmodellel együtt lehetővé teszi a méréseredmények követését.

A módszer tehát olyan mérnöki létesítmények modellezésére és tervezésére alkalmas, ahol már a tervezés idején is állnak bizonyos mérésadatok a rendelkezésre. Ilyenek elsősorban a létező szerkezetek, ahol a monitoring figyelmeztet rendellenes viselkedésre és ezért diagnózisra van szükség. A fokozatos modellillesztés rávezet a lehetséges okokra és ezzel alapot nyújt a megfelelő beavatkozáshoz. A tervezés alatt álló mérnöki létesítményeknél fel lehet az adott célra használni a kutató tárókban és pilot-alagutakban végzett méréseket és minden más olyan helyszíni mérést, amely a létesítmények (bányák, alagutak, földgátak, stb.) építésének és üzemeltetésének kezdeti szakaszában történik.

A cél a mérés és modellezés interaktív (szinenergikus) alkalmazása, ahol a mérési adatok segítik a modellkalibrációt, és a modellezési eredmények pedig hozzájárulnak a mérési módszer tökéletesítéséhez. A végeredmény egy méréshez illeszkedő, valósághű 3D modell, amely a szerkezet várható viselkedésének és biztonságának megbízható becslését és előrejelzését teszi lehetővé mind a tervezőmérnökök, mind pedig az üzemeltető mérnökök számára. Részletesebb ismertetést és példákat a szerzőnek és társszerzőinek az irodalomban idézett cikkei [DOLEŽALOVÁ et al. 1985 - 2007] tartalmazzák.

Mi inspirálta a szerzőt ezen komplex eljárás kidolgozására? A kézenfekvő válasz:

- A számítástechnikának, a mérés technikának és a numerikusmodellezésnek az elmúlt évtizedekben történt gyors fejlődése által kínált lehetőségek kiaknázása,
- A helyszíni mérési adatokhoz illeszkedő anyagmodellezés és ezzel a valósághűbb numerikus modellalkotás lehetősége,
- A mérés és modellezés szinenergikus alkalmazása a mérnöki létesítmények geotechnikai problémáinak megoldására,
- A geotechnikus tervezőmérnökök eszköztárának kiegészítése a szerkezetek megbízhatóbb becslése, méretezése és előrejelzése céljából.

Az elmúlt időszakban sikerült a szerzőnek és munkatársainak mindezt szintetizálni, gyakorlati eredményekhez illeszteni és megalkotni a terhelési zónák olyan fogalmát, amellyel a határfeltételhez való közeledést, vagy távolodást kimutatni, jellemezni lehet. Ez a számítási eredmények egy új interpretálása.

A módszer valójában nagy kiterjedésű rendszerekre alkalmazható végeselemes számítási eljárás, amelynek specialitása a „merevségi mátrix” fokozatos közelítése, s e

célból az adott pontok mechanikai igénybevételének a határállapothoz való viszonyának a meghatározása.

E miatt az alkalmazott pályafüggő anyagmodell „növekményes” és szakaszonként lineáris. Ezt egyrészt a talajok és kőzetek természete, másrészt számítástechnikai célszerűség diktálja. A talajok és kőzetek szerkezete (a szemcsék kölcsönös helyzete) és ezzel merevségük és szilárdságuk is a terhelés folyamán változik (lásd a laboratóriumi méréseredmények nemlinearitását és irreverzibilitását), amit csak növekményes anyagmodellel lehet figyelembe venni. Ha a folyamatot ugyanakkor elegendően kis szakaszokra osztjuk fel, akkor nem kell a jóval időigényesebb nemlineáris összefüggésekkel dolgozni, mert ezeket a lineáris lépések szuperpozíciója helyettesíti. A nagyszámú iterációs lépés viszont olyan effektív programrendszert követel, amely a nagykiterjedésű lineáris egyenletrendszerek hatékony megoldását teszi lehetővé [HLADIK (1998)].

A pályafüggő anyagmodellnek van egy időtől független rugalmas-képlékeny mechanikai része és egy időtől függő viszkoplasztikus része, amely az egyes terhelési lépcsőkhöz tartozó kúszást vagy relaxációt veszi figyelembe [DOLEŽALOVÁ & HLADIK (2005)]. Mindkét résznél a modell a plasztikus potenciál elméletet alkalmazza. Ugyanakkor a modell csak részben reológiai, mert a mechanikai résznél elhanyagolja a terhelési sebességnek a tönkremeneteli határra gyakorolt hatását. Ezért az alkalmazott Mohr-Coulomb képlékenységi és tönkremeneteli határfeltételhez mindég a lassú terhelésnek megfelelő, tehát minimális nyíró- és húzó szilárdságot kell rendelni.

A talajmechanikában általánosan (?) elfogadott tétel, hogy a talajok viselkedése nem csak a terhelés *sebességétől* és *nagyságától* függ, hanem annak az *irányától* és *sorrendjétől* is. Ezt nevezik pályafüggésnek.¹

Ennek az állításnak azonban van egy nagyon nagy hibája. Elfedi a lényegét. Az anyag viselkedése ténylegesen függ a terhelési folyamatoktól, más összefüggést kapunk pl. egy gyors terheléskor, egy csavaráskor, vagy nyíráskor, stb. Az anyagnak még sincs más terhelési, csavarási, nyírási modellje. Ugyanis az anyag modellje, az anyagtörvény, vagy az anyag konstitúciós egyenlete nem függhet csak anyagtól magától, nem függhet a terhelési folyamatok sorrendjétől! Vagyis:

- (a) Az anyagtörvény, az anyag konstitúciós egyenlete nem függhet semmi mástól csak az anyagtól magától. Tehát nem függhet pl. a különböző terhelési folyamatok sorrendjétől, irányától, a koordinátarendszertől, amiben elhelyezem az anyagot, stb.

¹ Okaként azt jelölik meg, hogy a talajok szerkezete már kis terhelésnél is változik és ezt, a következő terhelési lépcsőnél már figyelembe kell venni. Ennek növekményes anyagtörvények és növekményes VEM megoldások felelnek meg. Ez magyarázza a mai VEM modellezési gyakorlatot, ahol mind a terhelés menetét mind pedig a nemlineáris viselkedést növekményes segítségével szimulálják.

- (b) Egyszerű termodinamikai példa: az anyagnak van állandó nyomáson vett fajhője, állandó térfogaton vett fajhője, és még számtalan más, folyamattól függő fajhője; vagyis az anyag „hőátadási viselkedése” folyamattól függ. Ugyanez igaz a „hőtágulási viselkedésre”, a „kompresszibilitási viselkedésre”, a „torzulási (nyírási) viselkedésre”, stb.
- (c) Az „anyagtörvény”-t a gyakorlatban abból következtethetjük ki, hogy milyen viselkedést tapasztalunk a különféle folyamatokban.²
- (d) Minden anyagnak van anyagtörvénye.

Ezek után csupán az a kérdés, hogy az anyagtörvény egy folyamatra lokalizált szakaszából állítjuk elő a merevségi mátrix elemeit, vagy egy adott folyamatnál tapasztalt viselkedésből. Elvileg a kettő között nem szabadna különbségnek lenni, mégis óriási a különbség. Első esetben tetszőleges terhelési pályára (folyamatra) meg van a „viselkedés függvényem”, azokra is, amelyeket eddig nem vizsgáltunk, amelyekre nem is gondoltunk, a másik esetben csak a már megmért pályák esetére.³

Ebből a szempontból a pályafüggő anyagmodell egy „viselkedésmodell”, amelyet az eddig még ismeretlen általános anyagtörvény pályára lokalizált alakjának lehet tekinteni.

Összefoglalva: a tárgyalt módszer egy végeselemes számítás, amely feszültség-pályától függő, nemlineáris (pontosabban szakaszosan lineáris) rugalmas-képlékeny viselkedésmodellt vesz figyelembe, feszültségi tönkremeneteli határfeltételhez viszonyít és a modellparamétereket a mérésadatok szerint kalibrálja.

A következőkben a módszer egyes elemeit vetjük vizsgálat alá.

1. A HELYSZÍNI MÉRÉSI ADATOK FELHASZNÁLÁSA

A talajok és kőzetek viselkedése komplex, leírásuk adatigényes és ezért a geotechnikai feladatok megoldásánál gyakran lép fel adathiány. Minél tökéletesebb egy anyagmodell, annál több adatra van szüksége, s ez feltehetően hozzájárul ahhoz, hogy kevés élenjáró anyagmodell kerül szélesebbkörű gyakorlati alkalmazásra.

Ugyanakkor a nagy mérnöki létesítmények kutatása, építése és üzemeltetése során ma nagymennyiségű mérési adat kerül regisztrálásra és összegyűjtésre. Ezek az adatok nem csak a szerkezet viselkedéséről nyújtanak információt, hanem az azt formáló anyagok tulajdonságairól is. A mérési adatok értelmezését viszont nehezíti az a körülmény, hogy az építmények és kőzetkörnyezetük in situ feszültségállapota az építés és üzemeltetés

² Vagyis a folyamat egyenletét behelyezzük az anyagtörvény egyenletébe (ha ismerjük), és akkor vissza kell kapnunk a már tapasztalt „viselkedést”. Ha nem ismerjük akkor keressük azt az anyagegyenletet, amely adekvát a különböző tapasztalati viselkedésekkel.

³ Erre a továbbiakban látunk példát.

menetétől függően komplex és – a laboratóriumi vizsgálatoktól eltérően – ismeretlen. Ezért többnyire csak a mérések idősora kerül kiértékelésre, míg a méréseredmények szélesebbkörű kihasználása figyelmen kívül marad.

A numerikusmodellezésnek az elmúlt évtizedekben történt gyors fejlődése új lehetőségeket kínál a probléma megoldására. Megfelelő numerikus programok, amelyek az iterációs módszerek alkalmazásával nagyméretű, nemlineáris egyenletrendszerek gyors és hatékony megoldására képesek, lehetőséget nyújtanak nagy mérnöki létesítmények térbeli modelljeinek kidolgozására és azok effektív megoldására. Az eredeti tervek, és leltári dokumentumok alapján figyelembe lehet venni a létesítmény építésének és üzemeltetésének lényeges mozzanatait, és olyan két- és háromdimenziós modelleket lehet kidolgozni, amelyeket fokozatos közelítéssel illeszteni tudunk a mérési eredményekhez (modellkalibráció). Ily módon jóval eredményesebben lehet feldolgozni és kiértékelni a helyszíni vizsgálatok eredményeit, a kutató tárókban és pilot-alagutakban végzett méréseket és minden más olyan helyszíni mérést, amely a mérnöki létesítmények (bányák, alagutak, földgátak, stb.) építésének és üzemeltetésének kezdeti szakaszában történik s így a további szakaszokban használható.

Miután a terhelési szakaszok és az azokhoz tartozó feszültségi és alakváltozási pályák (egy adott pont feszültségi, illetve alakváltozási állapotainak idősora) valósághű követésére van szükség, nem csak egy egyszerű paraméter visszaszámításról van szó. A paraméter visszaszámító inverz módszerek ugyan egyenesen az elmozdulásokból számítják vissza a rugalmassági paramétereket [GIODA (1985), SWOBODA et al. (1995)], de rendszerint csak egy terhelési lépcsőre és lineárisan rugalmas anyagmodellre szorítkoznak, s ezért nagy létesítmények méréshez illeszkedő modellezéséhez nemigen alkalmazhatók. Használatukat akadályozza a terhelési lépcsők száma és jellege (váltakozó terhelés és tehermentesítés) a modellezendő létesítmény és közetkörnyezetének kiterjedése, továbbá az azt formáló különböző anyagok száma is. Ezért helyezzük előnybe a modellparaméterek kalibrálásával történő fokozatos közelítést, amely a létesítmény helyi körülményeinek és terhelési feltételeinek valósághű követését teszi lehetővé. Lényeges az, hogy ez a modellillesztés ne csak egy pár kiválasztott mérőhelyre és eredményre, hanem az egész szerkezetet befogó mérőhálóra, vagyis nagyszámú mérőpont idősorára és térbeli kölcsönhatására vonatkozzon.

Sokéves tapasztalatunk szerint a sikeres szimulációhoz olyan anyagmodellre van szükség, amely a törés alatti tartományban figyelembe tudja venni a pályairány-változásokat és az azokhoz tartozó változó merevségű deformációs válaszokat.

Gátak, alagutak és más létesítmények alakváltozási és feszültségi pályáinak vizsgálata ugyanis kimutatta, hogy még a monoton terhelési és tehermentesítési folyamatok is pályairányváltást mutató, tehát nem monoton feszültségválaszt vonnak maguk után [DOLEZALOVA (1994), (2006)]. Ez heterogén deformációs mezőt

eredményez, ahol csökkenő vagy növekvő merevségű zónák jönnek létre. Ezek a zónák a képlékenységi küszöb mértani helyei és azt jelzik, hogy az adott pontban és az adott terhelési lépcsőnél az anyag normálisan konszolidált vagy túlkonszolidált. A normálisan konszolidált anyag a terhelésre nagy, képlékeny alakváltozással válaszol, míg a túlkonszolidált anyag kis, rugalmas alakváltozással felel. A fejlettebb anyagmodellek közül ezt a pályahatást a képlékenységi folyáselmélet (plasztikus potenciál elmélet) duplán felkeményedő anyagmodelljei, pl. [MOLENKAMP (1983)] és más olyan anyagmodellek veszik figyelembe, amelyek modellezik a nyírási felkeményedést [VERMEER, (1982), LADE-KIM (1988), DESAI et al. (1991), DESAI (2001), KOLYMBAS et al. (1995) és mások].

Ugyanakkor nincs értesülésünk arról, hogy sikerült volna ezeket az anyagmodelleket mérnöki nagylétesítmények méréseredményeinek visszaszámítására használni. A valószínű ok az, hogy a képlékenységi és a plasztikus potenciál felületek, valamint a felkeményedést és lágyulást meghatározó összefüggések és paraméterek túlságosan bonyolultak ahhoz, hogy lépésről lépésre történő módosításukkal a méréseredményekhez közelíteni lehetne. Ezért az in situ méréseredmények visszaszámításánál egyszerűbb, rugalmas, rugalmas-ideálisan-képlékeny [GIODA és LOCATELLI (1999), SWOBODA et al. (1995), 1999)], modifikált tranzverzálisan izotróp [(SAKURAI (1991)] vagy hiperbolikus anyagmodellek kerülnek alkalmazásra, amelyek a hagyományos deformációs paramétereket (E egytengelyű rugalmassági moduluszt és a ν Poisson-tényezőt) használják. (Megjegyzendő, hogy ezek a paraméterek csak egytengelyű lineáris esetben jelentenek anyagállandót, ezért használatuk kerülendő [BOJTÁR-VÁSÁRHELYI-ASSZONYI (2008)], ugyanis a G csúsztató (v. nyírási) rugalmassági modulus és a K térfogatváltozási (v. kompresszibilitási) modulus már általános reológiai modellek esetén is anyagállandó. Az átszámítás, már amikor megengedett, a következő:

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}, \quad \text{illetve} \quad 2G = E \frac{1}{1 + \nu}, \quad 3K = E \frac{1}{1 - 2\nu}.)$$

Az ismertetésre kerülő pályától függő, nemlineáris (pontosabban szakaszosan lineáris) anyagmodell a nyomó főfeszültségek terében négy pályacsoportot különböztet meg, ahol a hagyományos deformációs paraméterek érintő értékeit más és más összefüggéspárral számítja. A pályacsoportok pályairányváltozást jelentenek, amelyet a modell a feszültségállapot változásától függő feltételek segítségével (a közép-feszültség növekedése/csökkenése és a relatív nyírásszint növekedése/csökkenése) határoz meg. Ily módon a pályától függő modell a duplán felkeményedő rugalmas-képlékeny anyagmodelleknek törés alatti működését imitálja, azoknak egy durva közelítése. Ugyanakkor ez a közelítés a hagyományos deformációs paraméterek érintő értékeinek (E_i, ν_i) használatával együtt megkönnyebbíti a modellkalibrálást, és lehetővé teszi komplex geotechnikai létesítmények hosszú távú méréseredményeinek visszaszámítását [DOLEŽALOVÁ és SVANCARA (2006)].

2. AZ ANYAGMODELL LEÍRÁSA

A DOLEŽALOVÁ-féle módszer geotechnikai létesítmények helyszíni méréseiből levezetett alakváltozási és feszültségi pályáinak elemzésére és azoknak a triaxiális kísérletekkel történt értelmezésén alapul [DOLEŽALOVÁ (1976), (1994), (2006), DOLEŽALOVÁ és HORENI (1982a)].

Az elemzés két – a modell felállítása szempontjából lényeges – megállapításhoz vezetett:

- Az irányváltozással rendelkező feszültségpályákat az irányváltozásra adott deformációs válaszuk alapján csoportosítani lehet és a végtelen sok pályairány helyett csak négy feszültségpálya-csoportot kell megkülönböztetni a törés alatti tartományban.

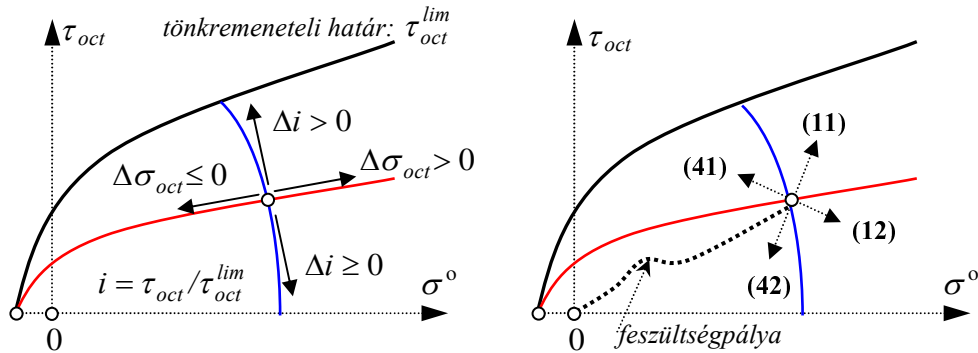
- A nyírásszint növelésével, azaz nyírási (deviatorikus) terheléssel járó feszültségpályák nagy, maradandó, képlékeny deformációt váltanak ki, míg nyírásszint csökkenésével, azaz torzulási tehermentesítéssel járó feszültségpályák csak kis, rugalmas deformációt okoznak. Az első pályacsoportnál merevségcsökkenés, míg a másodiknál merevségnövekedés figyelhető meg. Ez érvényes a nyomó főfeszültségek ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) tartományára függetlenül attól, hogy a közép-feszültség nő vagy pedig csökken.

2.1 A MÓDSZER VÁZLATA KONVENCIONÁLIS FORMÁBAN

Magyarázatképpen tekintsük az 1. ábrán látható hagyományos „feszültségi” ábrázolást a $\tau_{oct} - \sigma_{oct}$ síkon:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma^o)^2 + (\sigma_2 - \sigma^o)^2 + (\sigma_3 - \sigma^o)^2}, \quad \sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \equiv \sigma^o \quad ^4$$

A módszer a pillanatnyi helyzetet jelölő pontból négyféle irányt jelöl ki, ha mindegyik főfeszültség nyomófeszültség. Ha legalább egy főfeszültség húzófeszültség, akkor még további *nyolc* pályacsoportot különböztet meg (ettől most eltekintünk).



⁴ A deformációs síkon: $\delta_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon^o)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon^o)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon^o)^2}$, $\varepsilon_{oct} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \equiv \varepsilon^o$.

1.ábra

Ezekhez a pályairányokhoz a határhoz való közeledést, illetve távolodást rendeli hozzá a

$$i = \tau_{oct} / \tau_{oct}^{lim} \text{ és } r = \sigma_{oct} / \sigma_{oct}^{max}$$

viszonyítással, s empirikus összefüggésekkel a pillanatnyi feszültségállapotból, a kezdeti E_p, ν_p értékekből és a többi laborvizsgálatból levezetett belépő adatból előírja a következő pályaszakasz E_t, ν_t értékeit:

$$11 \quad \underline{\Delta \sigma_{oct} \geq 0, \Delta i > 0}: E_t = E_p (\sigma_{oct} / \sigma_0)^{k_1} [1 - (1 - \delta) i_*^{k_2}], \quad \nu_t = \nu_p + (\nu_{max} - \nu_p) i_*^{k_3},$$

$$12 \quad \underline{\Delta \sigma_{oct} \geq 0, \Delta i \leq 0}: E_t = E_p (\sigma_{oct} / \sigma_0)^{k_1}, \quad \nu_t = \nu_p,$$

$$41 \quad \underline{\Delta \sigma_{oct} < 0, \Delta i > 0}: E_t = E_{unl} [1 - (1 - r)^{p_1}] [1 - (1 - \delta) i_*^{k_2}], \quad \nu_t = \nu_p + (\nu_{max} - \nu_p) i_*^{k_3},$$

$$42 \quad \underline{\Delta \sigma_{oct} < 0, \Delta i \leq 0}: E_t = E_{unl} [1 - (1 - r)^{p_1}], \quad \nu_t = \nu_p,$$

ahol

σ_{oct}^{max} – a σ_{oct} „történelmi” maximuma,

σ_0 – atmoszférikus nyomás,

ν_{max} – a ν_t Poisson tényező maximális értéke,

$\nu_p - \nu_t$ kezdeti értéke σ_0 feszültségnél,

k_1, k_2, k_3, p_1 – empirikus hatványkitevők,

$E_{min} = \delta \cdot E_p$ – minimális deformációs modulus;

E_{max} – maximális deformációs modulus;

E_p – az E_t modulus kezdeti értéke σ_0 -nál,

E_{unl} – tehermentesítési (Young) modulus;

$i_* = (i - i_0) / (1 - i_0)$ – modifikált i nyírás-szint,

i_0 – az i nyírásszint kezdeti értéke;

E_t, ν_t deformációs paraméterek korlátai:

$$E_{min} = E_p \leq E_t \leq E_{max}, \quad \nu_p \leq \nu_t \leq \nu_{max}.$$

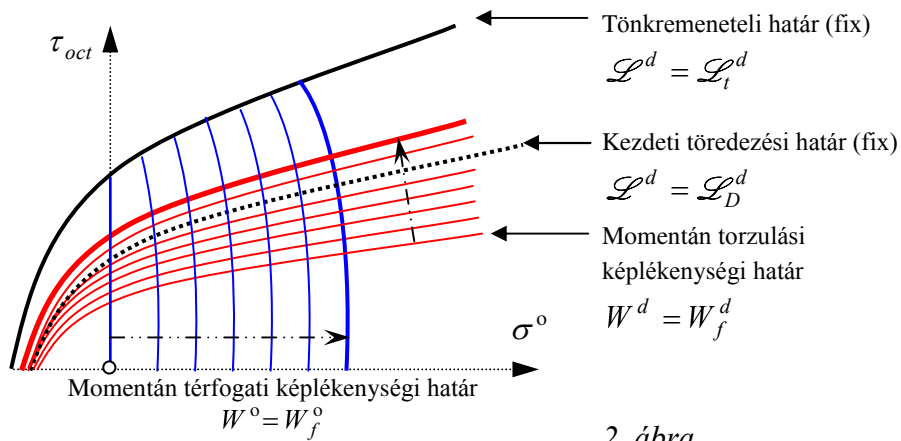
A fenti nemlineáris összefüggések figyelembe veszik azt kereszthatást, amelyet a normálfeszültség szint σ_{oct} növekedése vagy csökkenése és a nyírófeszültség szint i növekedése vagy csökkenése gyakorol az anyag merevségére.

A talajoknak, a közetekkel és más szilárd testekkel szemben van egy különleges tulajdonsága. A képlékeny állapot speciális volta.

- Míg a normál szilárd testek – a kezdeteknél mindig rugalmasan viselkednek, s csak a képlékeny határ után képlékenyként, majd terheléscsökkenésnél megint rugalmasan. Ez a hatás csak a deviatorikus résznél jelentkezik, a gömbi (térfogati) résznek nincs képlékeny állapota.
- Addig a talajok „terhelésnövekedési” esetekben mindig képlékeny testként viselkednek már a kezdetektől fogva, és nemcsak torzulásnál, hanem térfogatváltozásnál is.

A fenti összefüggések szerint a modell pályairányonként rendel különböző E_t, ν_t értékeket az anyagi ponthoz, attól függően, hogy terhelésről vagy tehermentesítésről van szó. Amíg a tönkremeneteli határ e konvencionális felfogásban egy „fix” görbe, addig a „torzulási” és a „térfogati” határ vándorol (lásd 2. ábra).

A DOLEŽALOVÁ-módszer nemcsak a hagyományos feszültségi határfeltételek esetén alkalmazható, hanem a termodinamikailag helyes energia és munkafeltételek esetén is, csupán ekkor lépésenként nem a τ_{oct}, σ^o értékeket kell számolni, hanem a torzulási $[W^d]$ és térfogatváltozási $[W^d]$ deformációs munkát, illetve a rugalmas torzulási $[\Phi^d]$ energiát, valamint a torzulási $[\mathcal{L}^d = W^d - \Phi^d]$ diszperziós munkát (lásd 2. ábra).



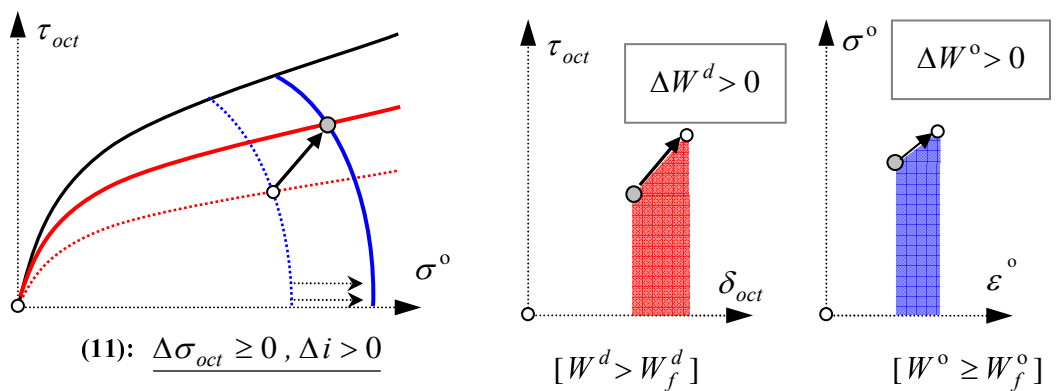
2. ábra

Ekkor a képlékenységi határok a 3. ábra baloldali oszlopában lévő képnek megfelelően alakulnak pályairányonként. Az ábra jobboldalán: a feszültség–deformáció síkon a torzulási- és a térfogati deformációs munka változása látható (mint görbe alatti terület).

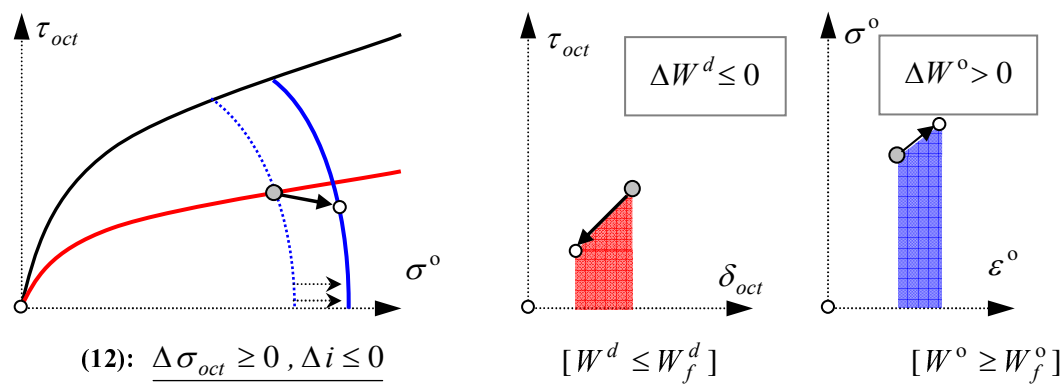
Az alkalmazott összefüggés:

- | | |
|--|---|
| 11 – torzulási egyenletben: <i>képlékeny</i> , | térfogati egyenletben: <i>képlékeny</i> , |
| 12 – torzulási egyenletben: <i>rugalmas</i> , | térfogati egyenletben: <i>képlékeny</i> , |
| 41 – torzulási egyenletben: <i>képlékeny</i> , | térfogati egyenletben: <i>rugalmas</i> , |
| 42 – torzulási egyenletben: <i>rugalmas</i> , | térfogati egyenletben: <i>rugalmas</i> . |

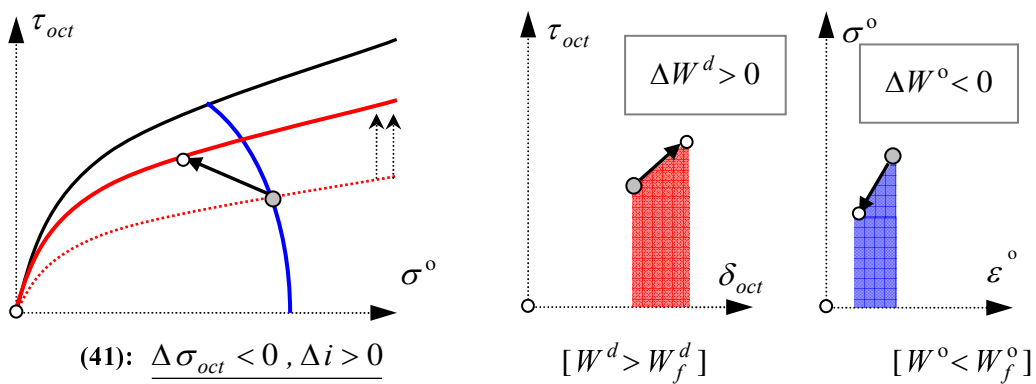
Vagyis az összes variáció benne van a modellben. Ez a kép ilyen eklatánsan azért nem jelenik meg, mert a konvencionális alakváltozási paraméterek tangens értékei E_t, ν_t (vigyázat: nem anyagállandók!) szerepelnek benne.



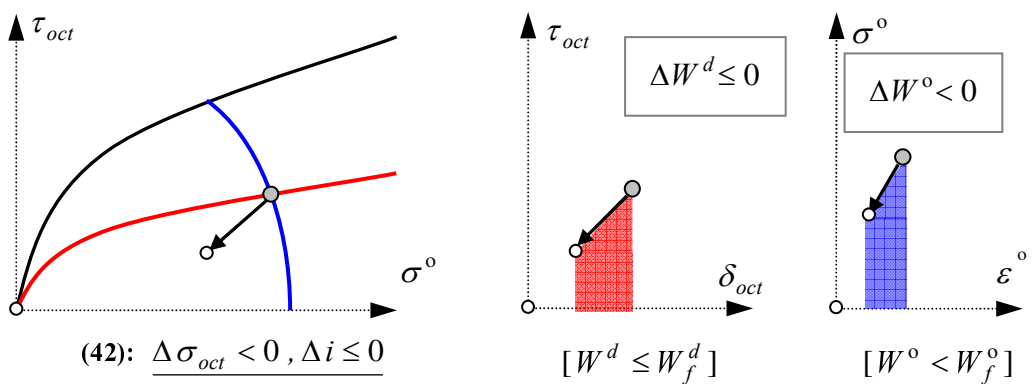
(11): mindkét képlékenységi határ emelkedik



(12): csak a térfogati képlékenységi határ emelkedik



(41): csak a torzulási képlékenységi határ emelkedik



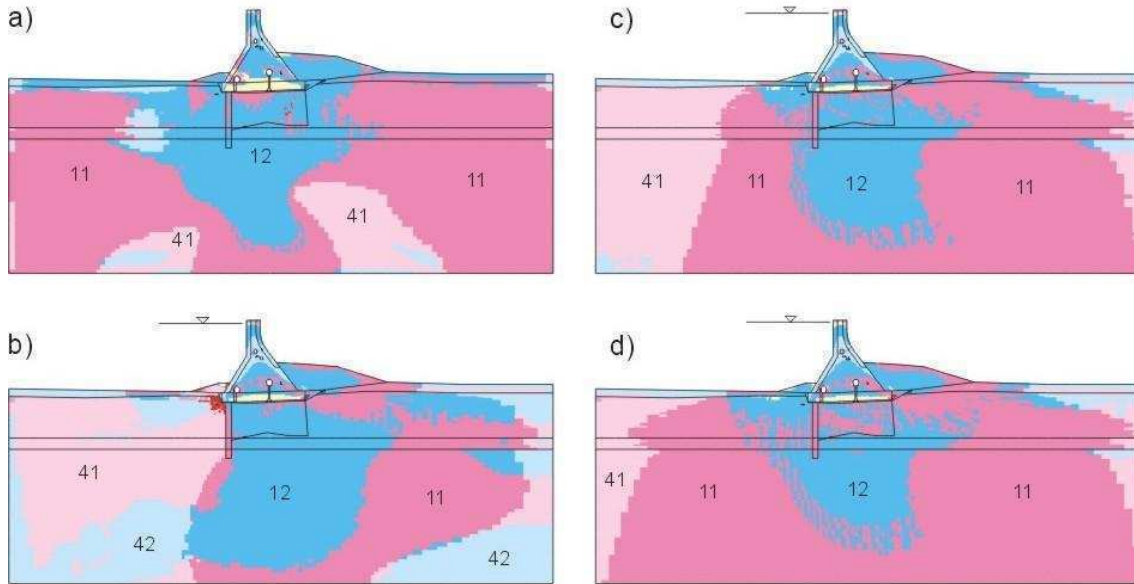
(42): a képlékenységi határok nem változnak

3. ábra

A ΔW^d és ΔW^o elemi munka közelítőleg:

$$\Delta W^d = \Delta \tau_{oct} \cdot \Delta \delta_{oct} \text{ és } \Delta W^o = \Delta \sigma_{oct} \cdot \Delta \varepsilon_{oct} = \Delta \sigma^o \cdot \Delta \varepsilon^o.$$

A pályacsoportok jelentőségének megértéséhez a 4. ábrán mutatunk egy példát.



4. ábra Feszültség-pályacsoportok alakulása a ZERMANICE betongát 1-1' szelvényében: (a) – a gát építése 1956-1957, (b) – a víztároló feltöltése 1958-1962, (c) – az alapkőzetet formáló márgás agyagpalában végbemenő folyamatok (konszolidáció, áramlás és viszkoplasztikus folyás) hatása állandó vízszint mellett 1963 és 1980 és (d) 1981 és 2000 között.

2.2 A MÓDSZER VÁZLATA LINEÁRIS–KÉPLÉKENY „EGYENSÚLYI” ANYAGMODELL ESETÉN

Következő mondanivalónk csak elvi támpontot akar nyújtani. Legyen az anyagtörvény például a legegyszerűbb rugalmas-képlékeny HOOKE-test⁵, amelynek „növekményes” anyagegyenlete a következő:

Rugalmas tartományban:

$$\Delta \sigma^d = 2G \Delta \varepsilon^d, \quad \Delta \sigma^o = 3K \Delta \varepsilon^o$$

Képlékeny tartományban:

$$\Delta \sigma^d = 2G_{pl} \Delta \varepsilon^d, \quad \Delta \sigma^o = 3K_{pl} \Delta \varepsilon^o.^6$$

Ekkor a különböző pályaszakaszokon a merevségi mátrix elemeit a két rugalmas és két képlékeny anyagállandóból építhetjük fel.:

⁵ Lineáris modell

⁶ Illetve: $\Delta \tau_{oct} = 2G \Delta \delta_{oct}$, $\Delta \sigma_{oct} = 3K \Delta \varepsilon^o$, és $\Delta \tau_{oct} = 2G_{pl} \Delta \delta_{oct}$, $\Delta \sigma_{oct} = 3K_{pl} \Delta \varepsilon^o$.

$$11 - \underline{\Delta\sigma_{oct} \geq 0, \Delta i > 0}: 2G_t = 2G_{pl}, \quad 3K_t = 3K_{pl},$$

$$12 - \underline{\Delta\sigma_{oct} \geq 0, \Delta i \leq 0}: 2G_t = 2G, \quad 3K_t = 3K_{pl},$$

$$41 - \underline{\Delta\sigma_{oct} < 0, \Delta i > 0}: 2G_t = 2G_{pl}, \quad 3K_t = 3K,$$

$$42 - \underline{\Delta\sigma_{oct} < 0, \Delta i \leq 0}: 2G_t = 2G, \quad 3K_t = 3K.$$

Ebben (és csak ebben) az esetben – mivel a HOOKE-testről van szó – minden további nélkül áttérhetünk az E egytengelyű v. *Young*-modulusra és ν *Poisson*-tényezőre a közismert átszámítási formulákkal, vagyis

$$11 - \quad E_t = \frac{9K_{pl}G_{pl}}{3K_{pl} + G_{pl}}, \quad \nu_t = \frac{3K_{pl} - 2G_{pl}}{6K_{pl} + 2G_{pl}},$$

$$12 - \quad E_t = \frac{9K_{pl}G}{3K_{pl} + G}, \quad \nu_t = \frac{3K_{pl} - 2G}{6K_{pl} + 2G},$$

$$41 - \quad E_t = \frac{9KG_{pl}}{3K + G_{pl}}, \quad \nu_t = \frac{3K - 2G_{pl}}{6K + 2G_{pl}},$$

$$42 - \quad E_t = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \nu_t = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}.$$

A paraméterváltást a deformációs munka változása vezényli, vagyis

$$11: \text{ ha } W^d > W_f^d, \text{ és } \Delta W^d > 0, \text{ továbbá } W^o > W_f^o, \text{ és } \Delta W^o \geq 0,$$

$$12: \text{ ha } W^d \leq W_f^d, \text{ vagy } \Delta W^d \leq 0, \text{ továbbá } W^o > W_f^o, \text{ és } \Delta W^o > 0,$$

$$41: \text{ ha } W^d > W_f^d, \text{ és } \Delta W^d > 0, \text{ továbbá } W^o < W_f^o, \text{ vagy } \Delta W^o < 0,$$

$$42: \text{ ha } W^d \leq W_f^d, \text{ vagy } \Delta W^d \leq 0, \text{ továbbá } W^o < W_f^o, \text{ vagy } \Delta W^o < 0.$$

2.3 A MÓDSZER VÁZLATA LINEÁRIS-KÉPLÉKENY „NEMEGYENSÚLYI” ANYAGMODELL ESETÉN

Legyen az anyagtörvény a termodinamikailag levezetett rugalmas-képlékeny reológiai modell, a POYNTING–THOMSON-féle ún. standard test, amelynek „növekményes” anyagegyenlete a következő:

Rugalmas tartományban:

$$\Delta\sigma^d = 2\tilde{G}\Delta\epsilon^d, \quad \Delta\sigma^o = 3\tilde{K}\Delta\epsilon^o$$

Képlékeny tartományban:

$$\Delta\sigma^d = 2\tilde{G}_{pl}\Delta\epsilon^d, \quad \Delta\sigma^o = 3\tilde{K}_{pl}\Delta\epsilon^o,$$

amelyben a torzulási és térfogati anyagállandók szerepét az ún. anyagoperátorok veszik át:

$$2\tilde{G} = \frac{2G \frac{\partial}{\partial t} + 2\eta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 2\tilde{G}_{pl} = \frac{2G_{pl} \frac{\partial}{\partial t} + 2\eta_{pl} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}},$$

$$3\tilde{K} = \frac{3K \frac{\partial}{\partial t} + 3K_v \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 3\tilde{K}_{pl} = \frac{3K_{pl} \frac{\partial}{\partial t} + 3K_{v,pl} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}},$$

ahol

- G – a csúsztató (v. nyírási) rugalmassági modulus,
- η – a viszkozitási együttható,
- τ – a relaxációs idő,
- K – a térfogati (v. kompresszibilitási) modulus,
- K_v – a térfogati viszkozitás,
- τ_o – a térfogati relaxációs idő,
- G_{pl} – a torzulási képlékenyégi modulus,
- K_{pl} – a térfogati képlékenyégi modulus,

továbbá az eddigiekből származtatott anyagállandók

- η_{pl} – a képlékeny viszkozitási együttható [$2\eta_{pl} \equiv 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau$],
- $K_{v,pl}$ – a képlékenyégi modulus [$3K_{v,pl} \equiv 3K_v - (3K - 3K_{pl})\tau_o$].

Az anyagtörvény differenciálegyenlet formájába kiírva:

Rugalmas tartományban:

Képlékeny tartományban:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^d = 2G \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \tau \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d, \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}^d = 2G_{pl} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta_{pl} \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \tau \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d,$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^o = 3K \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_v \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o - \tau_o \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o, \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}^o = 3K_{pl} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^o + 3K_{v,pl} \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o - \tau_o \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}}^o.$$

Ahhoz, hogy a DOLEŽALOVÁ-módszert minden további nélkül erre a reológiai modellre is alkalmazni lehessen, meg kell határozni az „anyagviselkedést” a pálya mentén, vagyis meg kell oldani ezt a differenciálegyenletet adott pálya mentén. A feladat megoldása nagyon egyszerű, a leggyakoribb eseteket leköszöltük [SZARKA–ASSZONYI-FÜLÖP (2008)] 181-183. oldalon.

Itt van nagy szerepe a gyakorlati tapasztalatnak, mert a differenciálegyenlet megoldásához a kerületi és kezdeti feltételek szükségesek. A i -edik iterációnál kapott értékek legyenek pl. σ_{ij} és ε_{ij} [vagyis σ_{ij}^d és ε^o], s keressük az $i+1$ -edik lépéshez tartozó $2G_t$ és $3K_t$ érintő értékeket. Ha pl. feltételezzük, hogy ezen a kis szakaszon a

deformációsebesség állandó ($\dot{\varepsilon}_{ij}^d = \text{const} = a$ és $\dot{\varepsilon}^o = \text{const} = b$), akkor a differenciálegyenlet – rugalmas részének – megoldása

$$\sigma_{ij}^d = 2G \left[\varepsilon_{ij}^d - a \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau a} \varepsilon_{ij}^d} \right) \right], \text{ ill. } \sigma^o = 3K \left[\varepsilon^o - b \left(\frac{K_v}{K} - \tau_o \right) \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_o b} \varepsilon^o} \right) \right].$$

Az érintő iránytangense pedig

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^d}{\partial \varepsilon_{ij}^d} = 2G_t, \text{ ill. } \frac{\partial \sigma^o}{\partial \varepsilon^o} = 3K_t,$$

azaz

$$2G_t = 2G - \left(\frac{\eta}{G\tau} - 1 \right) e^{-\frac{1}{\tau a} \varepsilon_{ij}^d}, \text{ ill. } 3K_t = 3K - \left(\frac{K_v}{K\tau_o} - 1 \right) e^{-\frac{1}{\tau_o b} \varepsilon^o},$$

vagyis értéke az iterációs lépéseknél az előző ε_{ij}^d és ε^o értékekkel, valamint a felvett a és b értékekkel számítható.

Ha tapasztalatunk azt diktálja, hogy ne a deformációsebesség, hanem a feszültségváltozási-sebesség állandóságát ($\dot{\sigma}_{ij}^d = \text{const} = a$ és $\dot{\sigma}^o = \text{const} = b$) célszerű feltenni, akkor

$$\varepsilon_{ij}^d = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij}^d - a \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta a} \sigma_{ij}^d} \right) \right], \text{ ill. } \varepsilon^o = \frac{1}{3K} \left[\sigma^o - b \left(\frac{K_v}{K} - \tau_o \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v b} \sigma^o} \right) \right],$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^d}{\partial \sigma_{ij}^d} = \frac{1}{2G_t}, \text{ ill. } \frac{\partial \varepsilon^o}{\partial \sigma^o} = \frac{1}{3K_t},$$

$$\frac{1}{2G_t} = \frac{1}{2G} - \left(\frac{1}{2G} - \frac{\tau}{2\eta} \right) e^{-\frac{G}{\eta a} \sigma_{ij}^d}, \text{ ill. } \frac{1}{3K_t} = \frac{1}{3K} - \left(\frac{1}{3K} - \frac{\tau_o}{3K_v} \right) e^{-\frac{K}{K_v b} \sigma^o}.$$

MEGJEGYZÉS. Amennyiben egy geotechnikai feladatot nem egy lépcsőben, hanem szakaszonként oldunk meg, akkor szükség van a pályamenti mechanikai viselkedés matematikai összefüggésére, ami az „anyagtörvény pályára lokalizált alakja”.

3. ÖSSZEGEZÉS

1. A cikk tárgya egy numerikusmodellezési módszer és egy ahhoz tartozó pályától függő anyagmodell, amelynek célja a helyszíni méréshez illeszkedő, valóságghú modellalkotás.

2. A módszer lényege a mérésre illeszkedő modellkalibráció, amelyet a feszültségpályától függő anyagmodell azzal segít elő, hogy folyamatosan figyelembe veszi a pályairány változással járó merevségváltozást. További követelmény a legfontosabb kivitelezési és üzemeltetési szakaszok valósághű modellezése, amely a kalibrált anyagmodellel együtt lehetővé teszi a méréseredmények fokozatos közelítését.
3. A módszer tehát olyan mérnöki létesítmények modellezésére és tervezésére alkalmas, ahol már a tervezés idején is állnak bizonyos mérésadatok a rendelkezésre. Ilyenek pl. a kutató tárokbán, pilot-alagutakban, kezdeti kivitelezési szakaszokon, létező szerkezeteken, analogikus műtárgyakon, stb. végzett mérések.
4. A cikk első része a pályafüggő anyagmodell konvencionális formáját tárgyalja. Az alkalmazott anyagmodell egy növekményes, kombinált modell, amelynek van egy időtől független rugalmas-képlékeny mechanikai része és egy időtől függő viszkoplasztikus része. A képlékeny deformációt mindkét résznél a plasztikus potenciál elmélet segítségével számoljuk.
5. A pályától függő, nemlineáris (pontosabban szakaszosan lineáris) rész a nyomó főfeszültségek terében négy pályacsoportot különböztet meg, ahol a hagyományos deformációs paraméterek érintő értékeit más és más összefüggéspárral számítja. A pályacsoportok pályairányváltozást jelentenek, amelyet a modell a feszültségállapot változásától függő feltételek segítségével (a közép-feszültség növekedése/csökkenése és a relatív nyírásszint növekedése/csökkenése) határoz meg.
6. A leírt módszer és a modell eddig 16 nagyát, 9 alagút, 5 földalatti csarnok és tározó, 2 mély munkagödör és 7 külszíni fejtés modellezésénél és tervezésénél talált gyakorlati alkalmazásra.
7. A cikk második része a pályafüggő anyagmodellnek termodinamikai alapokra helyezett továbbfejlesztését tartalmazza. A konvencionális alakváltozási modulus és Poisson tényező helyett a kísérletileg jobban megalapozott térfogati és torzulási modulus és a feszültségállapottól függő feltételek helyett a termodinamikailag helyes térfogati és torzulási deformációs munkafeltételeket vezeti be.
8. A pályafüggő modellnek két termodinamikai változata kerül bemutatásra. Az első változat az „egyensúlyi” anyagmodell (rugalmas-képlékeny Hooke-testet), míg a második változat a „nemegyensúlyi” anyagmodell (rugalmas-képlékeny reológiai modell, azaz Poyting-Thomson-féle standard testet) alkalmazza. Különböző kezdeti feltételekre vonatkoztatva, adva vannak az egy terhelési lépcsőhöz kapcsolódó differenciálegyenletek megoldásai is.

IRODALOM

- DESAI, CH. S. (2001). *Mechanics of Materials and Interfaces. The Disturbed State Concept*, CRC Press, ISBN 0-8493-0248-X.
- DESAI, C. S. - SHARMA, K. G. - WATHUG, G. W. - RIGBY, D. (1991). Implementation of Hierarchical Single Surface δ_0 and δ_1 Models in finite element procedure. *Int. J. Num. Analyt. Meth. in Geomechanics*, **15**, 649 - 680
- DOLEŽALOVÁ, M. (1976): Strain Paths in Embankments, 5th Budapest Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Budapest, pp. 41 - 52
- DOLEŽALOVÁ, M. (1985). Description of a pseudoelastic constitutive model. Proc. of Conf. "Use of Microcomputers for Solving Soil Mech. and Found. Eng. Problems", Prague (in Czech)
- DOLEŽALOVÁ, M. (1993). Numerical Solution of Rheological Problems. Chapter 12 in Jaroslav Fedá (ed.), *Creep of Soils and Related Phenomena*, Academica-Elsevier, 348-385.
- DOLEŽALOVÁ, M. (1994). On overestimation of displacements in numerical calculation of zoned dams. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomech.*, **18**, 1-24
- DOLEŽALOVÁ, M. (2002). Approaches to numerical modelling of ground movements due to shallow tunnelling. Proc. 2nd Int. Conference on Soil Structure Interaction in Urban Civil Engineering, Zurich, 365-374
- DOLEŽALOVÁ, M. (2006). Strain and stress path analysis of geotechnical structures and requirements to constitutive models for geomaterials. Int. Workshop on Const. Modeling - Development, Implementation, Evaluation and Application, Hong Kong
- DOLEŽALOVÁ, M. (2007). Feszültségpályától függő rugalmas-képlékeny anyagmodell, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007 (Szerk. Török Á. & Vásárhelyi B.), 249-262
- DOLEŽALOVÁ, M. - A. HOŘENÍ (1982a). Strain paths in rockfill dams, measurements, constitutive laws, FEM calculations. 4th ICONMIG, Edmonton, 679 - 690.
- DOLEŽALOVÁ, M. - A. HOŘENÍ (1982b). A path dependent computational model for rockfill dams. Proc. Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics, Zurich, 577-586.
- DOLEŽALOVÁ, M. - HLADÍK, I. (2005). Viscoplastic flow of soft rock in foundation of Zemanice Dam, Eurock 2005- Impact of Human Activity on the Geological Environment – Konecny (ed), Taylor & Francis Group, London, 95-101
- DOLEŽALOVÁ, M. - SVANCARA, J. (2006). *Analysis of unusual behaviour of Zemanice Dam*, Czech National Committee on Large Dams, SORG Ltd. Prague, ISBN 80-239-7267-7
- DOLEŽALOVÁ, M. - HLADÍK, I. - ZEMANOVA V. (2004). Numerical analysis of unusual behaviour of Zemanice Dam, 11th International Conference of IACMAG, Prediction, Analysis and Design in Geomechanical Applications, Torino, Patrone Editore, Bologna, Vol. 3, 403 – 410
- GIODA, G. 1985. Some remarks on back analysis and characterization problems in geomechanics. 5th Int. Conf. on Computer Methods and Advances in Geomechanics, Nagoya, Vol.1, 47-62
- GIODA, G. - LOCATELLI, L. (1999). Back analysis of the measurements performed during the excavation of a shallow tunnel in sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **23**, 1407-1425

- HLADÍK, I. (1998). *Efficient solution of Linear and Nonlinear Systems of Equations for Elasticity and Elasto-Plasticity FEM Analyses with Unstructured Irregular Grids*. PhD Thesis, University of Innsbruck, Austria.
- KOLYMBAS, D. - HERLE I. - P.A.VON WOLFFERDORFF (1995). Hypoplastic constitutive equation with internal variables. *Int. J. Num. Analyt. Meth. in Geomechanics*, 19, 415 - 436
- LADE, P. V. - M. K. KIM (1988). Single hardening const. model for frictional materials, I, II, III. *Computers and Geotechnics*, 5, 6
- MOLENKAMP, I. F. (1983). Elasto-plastic double hardening model MONOT. *Research Report, Delft-Geotechnics* Delft, Holland
- SAKURAI, S. (1991). Field measurements and back analysis. 7th Int. Conf. on Computer Methods and Advances in Geomechanics, Cairns
- SWOBODA, G. - TANG Y. - DOLEZALOVA M. - VENCLIK P. (1995). Back analysis of three-dimensional model for geotechnical problems, *Proceedings of ECCOMAS 96*, Innsbruck, John Wiley & Sons, Ltd., 1-6
- SWOBODA, G. - ICHIKAWA, Y. - DONG, Q. - ZAKI, M. (1999). Back analysis of large geotechnical models. *International. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 23, 1455-1472
- VERMEER, P. (1982). A five constant model unifying well established concepts. *International Workshop on Constitutive Relations for Soils*, Balkema, 175-197
- BOJTÁR, I.-VÁSÁRHELYI, B.-ASSZONYI, CS. (2008). A Young-féle rugalmassági modulus és a Poisson-tényező, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **8** (Szerk. Fülöp T.), 101-120
- SZARKA, Z. – ASSZONYI, CS. – FÜLÖP, T. (2008): Anyagok mechanikai tulajdonságai az anyagtörvény alapján. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **6** (Szerk. Asszonyi Cs.), 121-184

A PRIMER FESZÜLTSGÁLLAPOT IN SITU MEGHATÁROZÁSÁRÓL

Asszonyi Csaba – Szarka Zoltán

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Kovács László

KÓMÉRŐ KFT, PÉCS – MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A tanulmány összefoglalja a primer feszültségállapot meghatározására szolgáló mindazon, feszültségmentesítésen alapuló in situ méréseket, amelyekkel a feszültségkomponensek nagysága és iránya is egyidejűleg meghatározható. Olyan, immár a hazai gyakorlatban is sikeresen alkalmazott módszerek példáján keresztül, mint a 2D-s Doorstopper-cellás illetve a 3D-s CSIRO HI-cellás tesztek, vázlatosan ismerteti a mag-körülfűrésos és a mag-tülfűrésos mérések technikáját. (A 2D-s módszerek esetében a teljes, térbeli feszültségállapot kiméréséhez három – nem egy síkba eső – fúrólyukban végzett mérések szükségesek, míg a 3D-s módszerek esetében a szimmetrikus primer feszültségtenzor mind a hat komponense egyidejűleg meghatározható. A tanulmány bemutatja, hogy az aktív feszültségmentesítésen alapuló módszerek milyen esetekben nem alkalmazhatók, és ezek helyettesítésére – friss japán szakirodalmi utalások alapján – egy olyan alternatív módszert is ismertet, ami a fúrólyukból kikerült, orientált magminta reológiai tulajdonságait felhasználva tesz kísérletet a recens feszültségtér rekonstrukciójára.

A tanulmány legfontosabb célja a különböző mérések kiértékeléséhez szükséges összefüggések rögzítése. Ennek során ismerteti a fúrólyuk körül, a fúrómagban, valamint a fúrólyuk talpán kialakuló mechanikai mezőket, kitérve a fúrólyuk körülrelése esetén keletkező kőzetcső mechanikai állapotának matematikai leírására is. Erre a szerzők szerint azért van szükség, hogy a méréseket végző és értékelő szakembereknek ne csak a készen vásárolt számítógépes programokkal legyen módja az értékeléseket elvégezni, hanem legyen lehetőségük azok ellenőrzésére, az esetleges gyenge pontok, megengedhetetlen elhanyagolások feltárására is.

1. FÖLD ALATTI LÉTESÍTMÉNYEK MECHANIKAI TERVEZÉSÉNEK KIINDULÓ ADATAI

Földalatti folyosók, vágatok, alagutak, tározók, stb. létesítéséhez, mindenképp annak megtervezéséhez gyakorlati adatok szükségesek. Ahhoz, hogy melyek legyenek ezek az adatok, szükséges a tervezési modell, amely az elméleti megfontolások és a gyakorlati lehetőségek kompromisszumának eredménye.

A szükséges mechanikai adatokat a következő logikai csoportokba foglalhatjuk, amelyek azonban nem függetlenek egymástól, s legtöbbször ezt a kölcsönhatást fokozatosan szoktuk feltárni:

A TERVEZETT LÉTESÍTMÉNY GEOMETRIAI ADATAI

A létesítmény célja, tervezett élettartama – és lehetőségeink – determinálják a geometriát, amely általában meghatározhatja

- annak a *környezetnek a határait*, amelyben található anyagok jellemzőire a tervezéshez szükség van,
- az *alkalmazható technológiák* (jövesztés, biztosítás, stb. kombinációi) lehetséges *eseteit*,
- a létesítmény telepítési mélységétől függő primer terhelési viszonyokat (primer közetfeszültség, hidraulikai állapot, közet hőmérséklet),
- a *szekunder állapotban kialakuló terhelési viszonyokat* is.

A LÉTESÍTÉS TECHNOLÓGIAI ADATAI

Egy adott technológia csak bizonyos geometria esetén alkalmazható (pl. vannak alagút-jövesztési módok, amelyeknél csak körszelvény jöhet számításba, s ehhez csak néhány biztosítási mód - ideiglenes, végleges - rendelhető). Viszont a technológia meghatározza, hogy

- milyen anyagparaméterek ismeretére van szükség (más kell a gépi-, és megint más a robbantásos jövesztésnél),
- a kialakítandó üreg környezetében milyen vastagságú illetve szelvény menti eloszlású közetöbven kell technogén roncsolódásra, fellazulásra számítani;
- az időfüggő deformációk illetve az ezzel arányos feszültségváltozások milyen mértékben tudnak érvényre jutni, stb.

A LÉTESÍTMÉNY KÖZETKÖRNYEZETÉNEK JELLEMZŐ ADATAI

A tervezett létesítményt körbevevő anyagok jellemző adatai, amelyet az alkalmazott matematikai anyagmodell határoz meg:

- Rugalmas állapot anyagállandói

- Képlékenységi határ
- Képlékeny állapot anyagállandói
- Törési határ
- A tönkrement anyag jellemzői

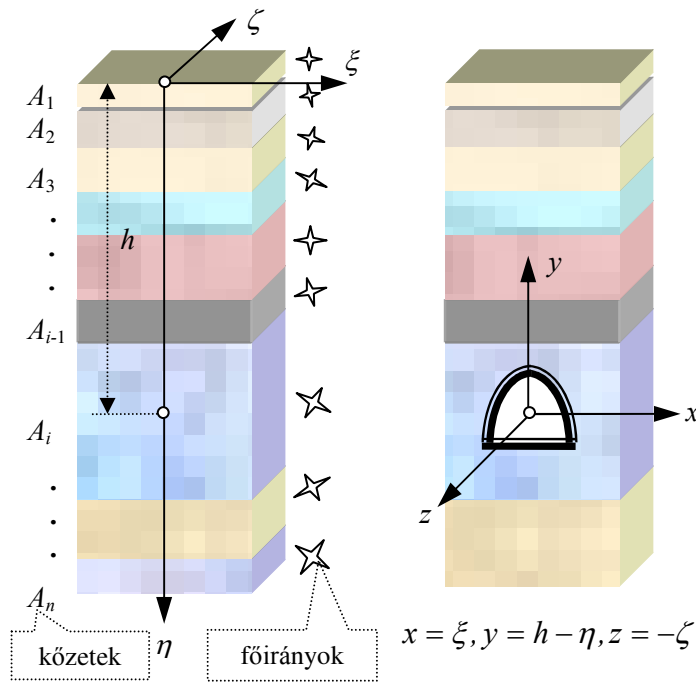
Ezen adatok ismeretében történik meg általában

- a tervezési modell megalkotása,
- a tervezést megalapozó numerikus statikai számítási módszer(ek) kiválasztása,
- a létesítés teljes folyamatának számítása (a modell alapján), és
- az építés közbeni ellenőrzés (mérések: a számított és mért értékek összehasonlítása), stb.

A fentiek szerint a primer feszültségtenzor elemei a tervezési folyamat egyik legfontosabb bemenő adatkörét jelentik. Ahogy a gyakorlati mérési eredményeket összefoglaló nemzetközi adatbázisok (pl. [18], [22], [24]) egyértelműen bemutatják, a primer feszültségter komponenseinek elvi számítására általánosan alkalmazott képletek a legtöbbször nem veszik figyelembe az adott terület regionális és lokális szerkezetföldtani-tektonikai viszonyait, illetve a feszültségteret módosító egyéb hatásokat sem [14]. Éppen ezért egy-egy felszín alatti beruházás előkészítési fázisában ma már nem vitatható a helyszíni méréseken alapuló feszültségter-meghatározások fontossága [17]; [19].

Rövid összefoglalónkban – az alkalmazott közetmodell feltételezése mellett – a primer feszültségállapot *in situ* jellemzőinek meghatározásával foglalkozunk csupán. Cikkünk kizárólag olyan meghatározási módszereket érint, amelyek az 1. ábra szerint egyidejűleg alkalmasak a végtelen feltér adott helyvektorú pontjában (illetve közvetlen környezetében) uralkodó főfeszültségek nagyságának és irányainak (főirányok) meghatározására. Így, noha bizonyos szakmai célokból (pl. szerkezeti és geodinamikai értelmezések, fluidumbányászati termelési módszerek előkészítése, stb.) ezeket kiterjedten alkalmazzák, nem foglalkozunk azokkal a módszerekkel, amelyek kizárólag

- egy vagy több komponens nagyságának mérésére alkalmasak (ilyenek pl. a hidrorepesztés – hydrofracturing – különböző válfajai, a tokrepesztéses – sleeve fracturing – eljárások, a hidraulikus nyomódobozos – flat jack – mérések, a fűrő-lyuk-hornyolós – borehole-slotter – tesztek, stb.), vagy pedig
- egy adott (általában horizontális) síkban uralkodó normálfeszültségek irányainak közvetett meghatározására alkalmasak (pl. földrengések fészekmechanizmusának elemzése, lyukfal-deformáció illetve a lyukfalon szisztematikusan jelentkező közettörések vizsgálata (borehole breakout), a közetmagon szisztematikusan jelentkező közettörések (korongosodás vagy disking) analízise illetve a fiatal felszínfejlődés alakulásának vizsgálata DTM-analízissel és/vagy nagy felbontású ürgeodéziai mérésekkel).



1. ábra. A kőzetekben uralkodó főfeszültségek és főirányok elvi értelmezése

2. A PRIMER FESZÜLTÉGÁLLAPOT IN SITU MEGHATÁROZÁSÁRÓL

2.1. A PRIMER FESZÜLTÉGÁLLAPOT ÉRTELMEZÉSE

A primer feszültségállapot meghatározásánál keressük a földkéreg egy meghatározott $\mathbf{r} = \parallel x, y, z \parallel$ koordinátájú pontjában uralkodó feszültségállapotot jellemző

$$\boldsymbol{\sigma}_{<x,y,z>}^{primer} = \boldsymbol{\sigma}_{<x,y,z>}^p = \begin{pmatrix} p_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & p_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & p_z \end{pmatrix},$$

feszültségtenzor komponenseit a választott koordináta-rendszerben, illetőleg egy főten-gely transzformáció révén az **1, 2** és **3** ún. főfeszültségi főirányokat az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ orto-gonális egységvektorokkal jellemezve (ahol $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = 1$, $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0$, $i \neq j$), és a hozzájuk tartozó főfeszültségeket:

$$\boldsymbol{\sigma}_{<1,2,3>}^p = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Amennyiben a vizsgált felszín alatti térrész az adott képződményre jellemző plasztikus határmélység alatt helyezkedik el, úgy lehetőség van arra, hogy a mesterséges üreg-

tól megfelelő távolságba lemélyített fűrőlyukakba térbeli (vagy több irányban síkbeli) nyomáscellákat telepíthessünk. Amennyiben kivárjuk azt az időt, amíg a plasztikusan deformálódó közet „körülnövi” a cellát, gyakorlatilag helyreállítva a primer állapotot, a nyomáscellán kialakuló stacioner terhelésekből – jó közelítéssel – visszaszámíthatók a primer feszültségtenzor komponensei (természetesen itt is figyelembe kell venni pl. a cella által kifejtett biztosítási reakciót, valamint azt a tényt, hogy a megfigyelési idő ebben a gyakorlatban nem tarthat a végtelenhez. Ilyen lehetőség azonban a gyakorlati beruházások során viszonylag ritkán adódik, hiszen geotechnikai okok miatt a legtöbbször éppen az ilyen állapotok elkerülése a cél.

Minden más esetben csak akkor tudnánk *közvetlenül* meghatározni a primer feszültségállapotot, ha létezne olyan módszer, amely lehetővé tenné a földkéregbe történő beavatkozás nélkül – kívülről – a primer feszültségek értékének és irányának mérését. Ez szinte azt jelentené, hogy a mérőeszközeink már a földkéreg kialakulásakor bekerültek az adott helyekre (ezek ma már a földkéreg szerves részei), s kivezetéseik a külszínről lehetővé tennék a mérést. Ez pillanatnyilag még abszurdnak tűnik, de nincs kizárva ennek lehetősége sem, még ha ma nem is tudjuk, hogy ez hogyan lenne lehetséges. Köztudott, hogy az anyag, – és minden anyag – memóriával rendelkezik (még ha egyes esetekben gyengülő memóriával is), tehát adott esetben nemcsak a mai értékeket, hanem a múltbelieket is megismerhetnénk, ha tudnánk a módját. GÁBOR DÉNES óta tudjuk, hogy egy holografikus fénykép minden pontja az összes információt tartalmazza, most már csak az a kérdés, hogy a közetek mely pontjai azok, amelyek képpontoknak tekinthetők, s mivel kellene megvilágítani őket, s hogyan. A fénysugár nem hatol keresztül a földkérgen, a hanghullámok azonban igen (akusztikus holográfia), de a képalkotásban még feszültségeket, vagy deformációkat nem vagyunk képesek előállítani. Geofizikai módszerek anyagtulajdonság-változásokat (réteghatárokat) már kimutatnak, de a megismerésben még távol vagyunk attól, hogy feszültségi v. deformációs főirányokat, s ezekben az irányokban az ún. sajátértékeket mérni tudjunk.

Nem plasztikus állapotban a primer feszültségteret tehát jelenleg még *közvetlenül* meghatározni nem lehetséges. Másrészt a mérőberendezéseknek a földkéregbe történő bejuttatásával az eredeti feszültségi és alakváltozási állapot megváltozik. Így regisztrálni csupán az adott primer állapothoz tartozó – és a közettömb megzavarásának módjától függő – szekunder állapotot tudjuk. Tehát a meghatározásnak csak *közvetett* módja állhat rendelkezésünkre. Ennek azonban nincs elvi akadálya, mert a kialakuló szekunder állapot többek között a primer állapotnak is függvénye, és ha ismeretes, hogy egy adott behatás – pl. egy állandó keresztmetszetű fűrőlyuk – eredményeként létrejövő, mérhető deformálódás milyen kapcsolatban áll a primer állapottal, akkor annak paraméterei meghatározhatók.

Ezek alapján a szükséges *in situ* közetfeszültség-mérési módszerek kidolgozásánál, vagy megválasztásánál két alapvető szempontot kell szem előtt tartani:

1. a mérendő deformálódás és a primer feszültségállapot közötti függvénykapcsolat ismert, és a lehető legegyszerűbb legyen,
2. lehetőleg minden paramétert in situ, könnyen végrehajtható mérési eredményből lehessen meghatározni.

Ezeknek a feltételeknek leginkább megfelel a

- *fűrőlyukban, az aktív feszültségmentesítés során végzett mérések*, amelyek kivitelezése már régóta ismert,

vagy legújabbban a

- *fúrással kivett magmintán utólagosan, a felszínen történő mérések*.

2.2. A MÉRÉSEK FAJTÁI

Már a hatvanas évek első felében végeztünk fűrőlyukas méréseket [1]–[4] RICHTER professzorral közösen, de akkor még a gondosan kivitelezett fűrőlyuk falára ragasztottuk fel a nyúlásmérő bélyegeket (tangenciális irányú mérés), illetve a fűrőlyuk átellenes pontjai távolságának fajlagos változását is mértük, acélcsíkra ragasztott nyúlásmérő bélyegekkel (radiális irányú mérés). Később DOBRÓKA professzor javasolta [11,12], hogy a mérőbélyegek egy műgyantába ágyazott mérőcellába kerüljenek, mert ezáltal az esetleges ragasztási hibák csökkennek.

Kezdetben – a 60-as évek első felében – az anyagot a

$$\sigma^d = 2G\epsilon^d, \quad \sigma^o = 3K\epsilon^o, \quad (1)$$

HOOKE-moddal leírhatónak vettük. Majd a 60-as évek második felében áttértünk

$$\sigma^d = 2G\epsilon^d + 2\eta\dot{\epsilon}^d - \tau\dot{\sigma}^d, \quad \sigma^o = 3K\epsilon^o, \quad (2)$$

a *klasszikus* POYNTING-THOMSON-féle modellre, amely a térfogati változást időfüggetlennek (nem reológiai) tekintette.

Mai ismereteink szerint a térfogati változások is markánsan időfüggők, ezért foglalkoztunk

$$\sigma^d = 2G\epsilon^d + 2\eta\dot{\epsilon}^d - \tau\dot{\sigma}^d, \quad \sigma^o = 3K\epsilon^o + 3K_v\dot{\epsilon}^o - \tau_o\dot{\sigma}^o, \quad (2a)$$

a POYNTING-THOMSON-féle ún. *standard* modellel, illetve a *tehetetlenségi standard* testnek megfelelő

$$\sigma^d = 2G\epsilon^d + 2\eta\dot{\epsilon}^d + \theta\epsilon^d - \tau\dot{\sigma}^d, \quad \sigma^o = 3K\epsilon^o + 3K_v\dot{\epsilon}^o + \ddot{\theta}\epsilon^o - \tau_o\dot{\sigma}^o \quad (2b)$$

modellel.

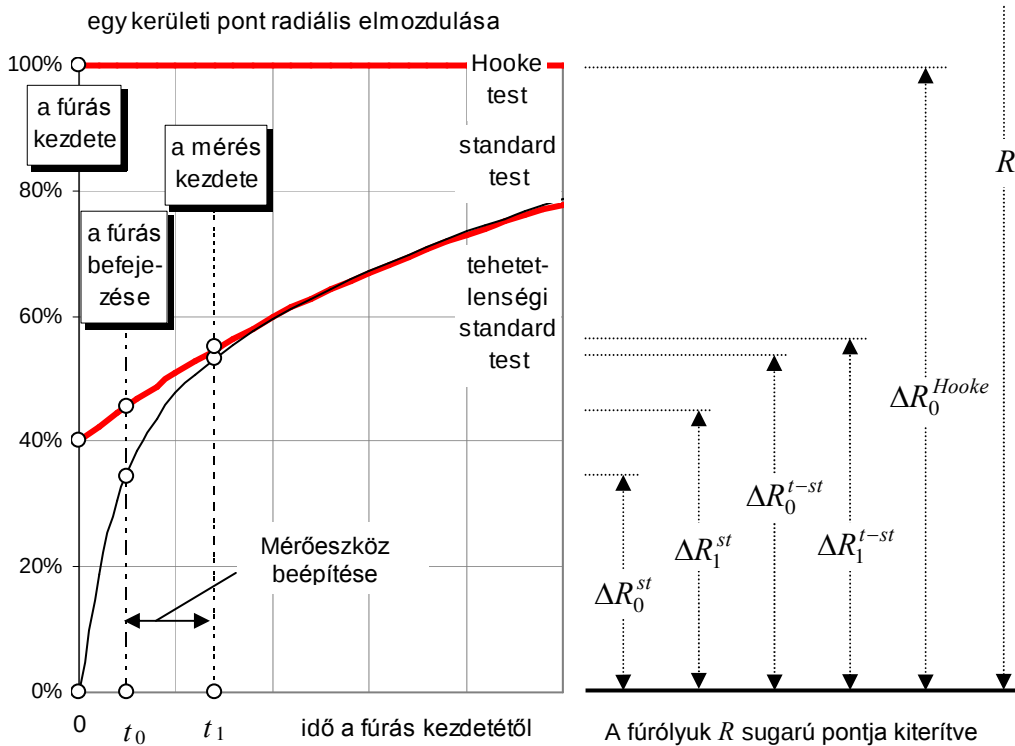
Elvileg a beavatkozás utáni, ún. szekunder deformáció- és elmozdulás-érték mind-egyikét mérhetnénk, azonban az egyszerűség érdekében csupán az ε_φ , illetve ε_r értékek (ill. ez utóbbiból számítással a sugárirányú elmozdulás) rögzítése került előtérbe.

Azonban egy elvi kérdés tisztázásra szorul: Melyik reológiai modellre – (2a) vagy (2b) – alapozzuk méréseinket? A választott modell típusától függően ugyanis eltérő eredményeket kaphatunk. Ez viszont megengedhetetlen. Legyen a fúrás kezdete a $t = 0$ időpont. Ekkor a (2a) modellnél megjelennek az azonnali deformációk, míg a (2b) modellnél még nem, miközben mindkét modellnél az értékük a HOOKE-modellnek megfelelő értékhez konvergálnak:

$$\begin{aligned} st: \quad \varepsilon^d \Big|_{t=0} &= \frac{2\eta}{\tau} \sigma^d, \quad \varepsilon^o \Big|_{t=0} = \frac{3K}{\tau_o} \sigma^o, \quad \text{illetve} \quad \varepsilon^d \Big|_{t \rightarrow \infty} = 2G \sigma^d, \quad \varepsilon^o \Big|_{t \rightarrow \infty} = 3K \sigma^o, \\ t-st: \quad \varepsilon^d \Big|_{t=0} &= 0, \quad \varepsilon^o \Big|_{t=0} = 0, \quad \text{illetve} \quad \varepsilon^d \Big|_{t \rightarrow \infty} = 2G \sigma^d, \quad \varepsilon^o \Big|_{t \rightarrow \infty} = 3K \sigma^o. \end{aligned}$$

Csak az illusztráció kedvéért tekintsük a fúrólyuk egy rögzített pontjának radiális elmozdulását. Ezt elvileg a 2. ábra mutatja, ahol 100% a teljes elmozdulás [$t \rightarrow \infty$], amely a HOOKE-törvény szerinti értéknek felel meg.

A fúrólyuk fúrásakor már jelentkeznek az ún. *azonnali* deformációk, s a kőzetanyag szabad lyukszelvénybe deformálódó részét a fúrószerszám eltávolítja.



2. ábra. A fúrólyuk kerületi pontjának radiális irányú, relatív elmozdulása különböző anyagmodellek esetén (100% a Hooke-modellhez tartozó érték)

A *Hooke* modell esetén a fúrás az összes $[\Delta R_0^{Hooke}]$ elmozdulásnak megfelelő anyagot eltávolítja, s ha mérőeszközt helyeznénk a fúrólyukba, akkor az nem regisztrálna semmit. A *standard* modell (*st*) esetében a fúrás befejezéséig $[\Delta R_0^{st}]$ és a mérőeszköz behelyezéseig (ill. a mérés kezdetéig) lejátszódó $[\Delta R_1^{st}]$ elmozdulás mérhetetlen, vagyis ismeretlen marad számunkra. Ugyanez a helyzet az ún. *tehetetlenségi standard* modell (*t-st*) esetén, csak ekkor a $t = 0$ időpillanatban még nincs elmozdulás, de a mérés kezdetéig eltelt időszak $[\Delta R_0^{t-st}]$, ill. $[\Delta R_1^{t-st}]$ mozgásai szintén ismeretlenek (mérhetetlenek) maradnak számunkra. Az igaz, hogy a mért értékek lefutása a választott anyagmodell függvénye (főleg a kezdeteknél), azonban minden mérési eredmény a HOOKE-törvény szerinti értékhez konvergál.

A kezdeti időszakból hiányzó mérési adatok miatt az olyan mérési módszerek lehetnek igazán informatívak, amelyek ezt a bizonytalanságot kiküszöbölik, erre az időszakra is biztosítanak mérési adatokat. Ezek olyan fordított módszerek lehetnek, amikor a mérőeszköz behelyezése után a fúrólyuk környezetét felszabadítjuk a primer nyomás alól, s az akkor bekövetkező változást regisztráljuk. Az ilyen módszereknek technikai értelemben két fő változatát ismerjük [19]:

1. Az ún. mag-túlfúrásos („undercoring”) módszerek, amikor az arra alkalmas mérőcellát a jól meghatározott geometriájú lyuktalpra (vagy síkfelületre vagy, pedig egy kúpos bemarásba) rögzítjük, majd azzal a változatlan átmérőjű fúroszer számmal történő továbbmélyítés deformációs hatásait érzékeljük.
2. Az ún. mag-körülfúrásos („overcoring”) módszerek, amikor a kisebb átmérőjű fúrólyukba helyezett alkalmas mérőcellát egy nagyobb átmérőjű, koncentrikus helyzetű szerszámmal körbefúrva történik meg a feszültségmentesítés.

A mérőcella típusától, az abban alkalmazott szenzorok számától és geometriájától függően mindkét változat esetében végrehajthatunk

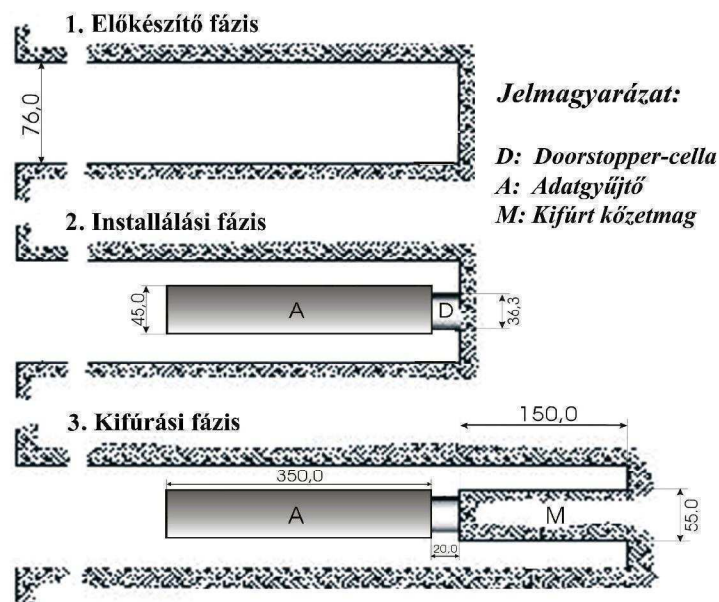
- térbeli (3D-s), tehát a feszültségtenzor valamennyi komponensének egyetlen kísérletből történő meghatározására is alkalmas (pl. CSIRO Hollow Inclusion cellás), illetve
- síkbeli (2D-s), tehát csak egy meghatározott – általában a fúrólyuk tengelyére merőleges – síkban ébredő feszültségek meghatározását lehetővé tevő (pl. USBM- és Doorstopper-cellás) méréseket.

Amennyiben csak 2D-s mérések kivitelezésére van mód, úgy azokból a teljes térbeli feszültségállapotot kizárólag akkor lehet rekonstruálni, ha az azonosnak tekinthető feszültségállapotú közetzónán belül három, nem egy síkba eső fúrólyukban végezhetünk méréseket, és azok eredményeit iteratív számítási eljárással értékeljük (hiszen az értéke-

lés során a vizsgált síkra merőleges, tehát az adott fúrólyukban nem mérhető komponens is befolyásolja a kísérlet számítható eredményét). Ebből következően 2D-s mérésekkel kizárólag földalatti üregrendszer felhasználásával ismerhetjük meg a térbeli feszültség-állapotot (ebben az esetben a kísérleti geometria meghatározásakor figyelemmel kell lenni az üregek jelenlétéből fakadó feszültségmódosító hatásokra illetve azok elkerülésére). 3D-s mérésekkel akár külszínről, akár pedig föld alatti térségekből mélyített fúrólyukakban is dolgozhatunk.

Hazánkban – több sikertelen vagy csak részleges eredményt hozó próbálkozást követően – 2002-ben KOVÁCS L. és munkatársai végeztek először nagyobb (akár 50-60 m) hatótávolságú, tehát a föld alatti üregek feszültségmódosító hatását kiküszöbölni képes, bármilyen orientációjú fúrólyukban is végrehajtható aktív feszültségmentesítésen alapuló feszültség-meghatározási programokat. 2002 és 2009 között Bátaapátiban illetve a Ny-Mecsekben 2D-s, mag-túlfűrésos méréseket végeztek ún. Doorstopper-cellák alkalmazásával [14]. 2010 folyamán Bátaapátiban megtörténtek az első sikeres hazai 3D-s, CSIRO HI-cellával elvégzett tesztek is [15].

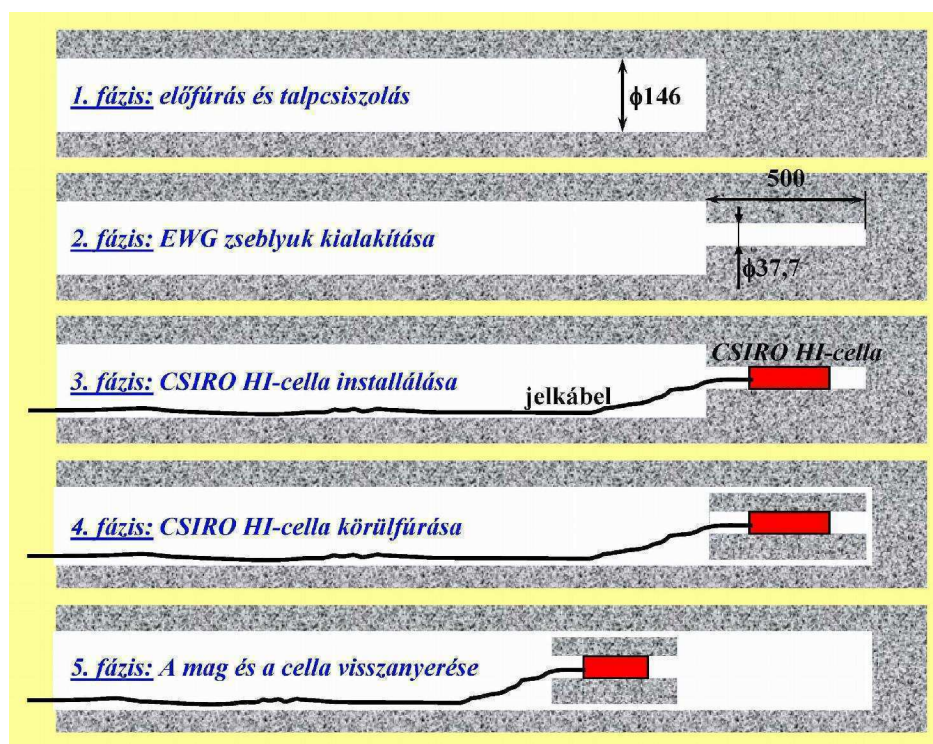
A 3. ábra a Doorstopper-cellás, mag-túlfűrésos mérések végrehajtásának sémáját mutatja be.



3. ábra. A Doorstopper-cellás 2D-s, mag-túlfűrésos mérés kivitelezésének sémája

Az ábra szerint a megfelelő előkészítést követően az installálási fázisban a fúrólyuk talpára ragasztjuk a Doorstopper-cellát. A kötésidő lejártá után, kontrollált körülmények (előrehaladási sebesség, hőmérséklet, stb.) között megtörténik a továbbfűrés, aminek hatására fellépő kőzetdeformációkat a mérő-adatgyűjtő egységgel egybeépített cella érzékeli és rögzíti. A hazai mérések során technikailag fejlett lyuktalpi (downhole) adat-

gyűjtő egységet alkalmaztak, így nem volt szükség a jelkábelek fűrólyukból való kivezetésére ahhoz, hogy a fellépő deformációk illetve hőmérsékletváltozások a kifűrés során is folyamatosan megfigyelhetők legyenek. A 4. ábrán a CSIRO HI-cella alkalmazásával végzett 3D-s, mag-körülfűrésos mérés végrehajtásának fázisait szemléltetjük. Az ábrán jól látható, hogy – szemben a mag-túlfűrésos méréssel – itt az előkészítés során két, eltérő átmérőjű, koncentrikusan mélyített fűrólyukszakaszt kell kialakítani. A kisebb átmérőjű ún. EWG-zseblyukba (annak nem a talpára) kerül beragasztásra a 3D-s mérésekre alkalmas cella. A cella és az azt magába fogadó közetcső kontrollált kifűrése során fellépő közetdeformációkat és a kötésidő lejáta után, kontrollált körülmények (előrehaladási sebesség, hőmérséklet, stb.) között megtörténik a továbbfűrés, aminek hatására fellépő közetdeformációkat és hőmérsékletváltozásokat a fűrószerszámon és az öblítőfejen át a fűrólyukból kivezetett jelkábel közvetítésével egy felszíni mérőadatgyűjtő egység rögzíti (a változó átmérők miatt itt ugyanis nincs lehetőség lyuktalpi adatgyűjtő egység alkalmazására).



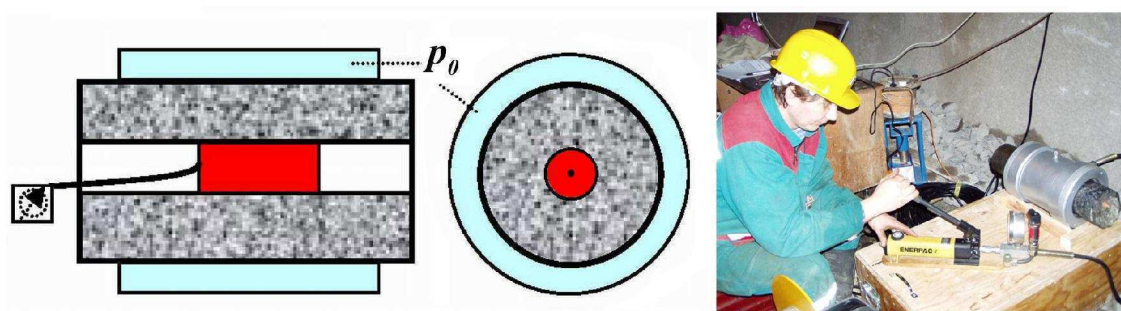
4. ábra. A CSIRO-cellás 3D-s, mag-körülfűrésos mérés kivitelezésének sémája

Minthogy a mérőcellákkal nem közvetlenül feszültséget, pontosabban az eredeti feszültségviszonyok alól a környezeti nyomás (folyadék- vagy légnyomás) szintjére történő feszültségváltozást mérünk, hanem az azt kísérő deformációs válaszokat, ezért mindkét említett esetben szükségünk van arra, hogy ismerjük a vizsgált közet anyagparamétereit; végső soron a terhelés – deformáció összefüggést. Amennyiben az anyagparaméterek meghatározása szabványos egytengelyű terhelési kísérlettel (tehát nem a kifűrt

kőzetcsővel) történne, úgy ez igen jelentős hibához vezetne. Csak néhány példa a lehetséges hibaforrások közül:

- ebben az esetben nincs lehetőség az anizotrop kőzetválaszok meghatározására (anizotrop kőzetek esetén a kétféle mérés eltérő terhelési irányai már amúgy is problémát okozhatnak);
- az egytengelyű kísérlet másféle, eltérő hiba-karakterisztikájú szenzorokkal történne,
- a kőzetek inhomogenitása számos esetben már néhány 10 cm-es léptékben is olyan mértékű lehet, ami nem (vagy csak igen nagy hibával) teszi lehetővé, hogy a viszsza-mérés a „szomszédos” kőzetmagon történjen meg.

A megoldás az, hogy minden esetben a feszültségmentesítés során kifűrt kőzetmagon, az arra (illetve abba) ragasztott szenzorral, ismert – és lehetőleg radiális – terhelés hatására kell felvenni a deformációs válaszokat. Erre a célra a legalkalmasabb az ún. Hoek-féle biaxiális cellában történő visszamérés. Egy 3D-s CSIRO HI-cellával együtt kifűrt kőzetmag alkalmazásával ennek elvi vázlatát és gyakorlati kivitelezését mutatja be az 5. ábra.

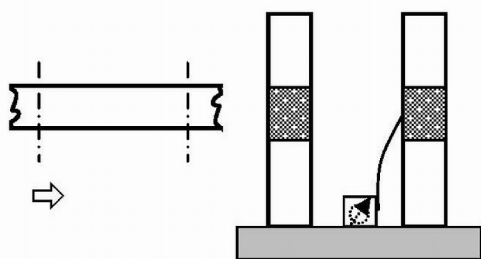


5. ábra. A terhelés-alakváltozás összefüggés meghatározása Hoek-féle cellában, ismert p_0 hidraulikus nyomással elvégzett biaxiális terhelési teszttel

Az ismertetett, aktív feszültségmentesítésen alapuló mérési módszerekkel igen jó minőségű adatok nyerhetők. E módszerek legnagyobb hátránya – a rendkívül komplex, sok hibalehetőséget tartalmazó technológia mellett – azonban az, hogy egy bizonyos hatótávolságon túl (ami általában nem több 100 m-nél) már nem, vagy csak igen magas ráfordítások árán kivitelezhetők. Ez a körülmény leginkább akkor jelent problémát, ha nem áll rendelkezésre a megfelelő mélységű föld alatti üreghrendszer, amiből kiindulva a mérések elvégezhetők lennének. Egy nagyobb mélységbe tervezett föld alatti létesítmény (pl. radioaktív hulladéktároló) előkészítésének első szakaszában például eddig nem volt más lehetőség, mint a sekély mélységben elvégzett mag-túlfúrásos és/vagy mag-körülfúrásos tesztek eredményeiből – a kellő, általános illetve területspecifikus kőzetmechanikai és szerkezetföldtani ismeretek birtokában – extrapolálni a tervezett mélységtartományra. A szénhidrogén-kutatási illetve kitermelési gyakorlatban, ahol később

sem épülnek ki a vizsgálandó mélységtartományban a szükséges üregek, ez a körülmény még nagyobb hibalehetőségeket rejt.

Az említett probléma kiküszöbölésére japán kutatók legújabbán újfajta megközelítéssel próbálkoznak [13]. Ennek lényege az, hogy a kőzetek reológiai tulajdonságait kihasználva a nagyobb mélységű fúrólukakból kikerülő orientált kőzetmagokra különböző orientációjú mérőbéllyegeket ragasztanak. A kőzetmagokat stabil hőmérsékleti viszonyok között és víztelített kőzetfizikai állapotban tartják, hiszen e paraméterek mérés közbeni esetleges változásai jelentős hibával terhelnék a kísérletet. A mérőbéllyegeket és az azokhoz csatlakozó, nagy érzékenységgű mérőműszerek segítségével folyamatosan regisztrálják a maradék deformációkat, egészen azok teljes lecsengéséig (ld. a 6. ábrán). Természetesen a sikeres mérésekhez ebben az esetben egyrészt megfelelő adottságú kőzetváltozatok szükségesek, másrészt pedig az előkészítő műveleteket (beleértve a



kőzetmagok felszínre juttatását, felbéllyegzését és stabilizálását is) rendkívül gyorsan el lehessen végezni. Amennyiben minden feltétel adott, úgy a különböző irányokban lejátszódó deformációkból, a kőzetmag anyagtulajdonságainak ismeretében a primer feszültségtenzor valamennyi komponense elvileg visszaszámítható.

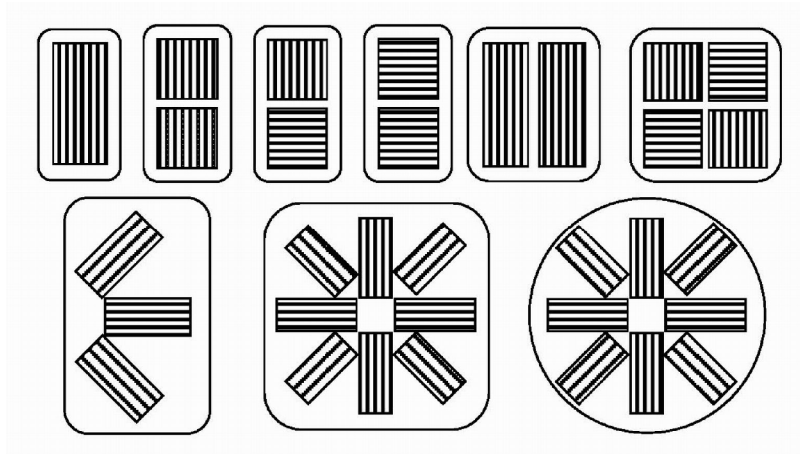
6. ábra. Orientált fúrómagon, a reológiai kőzettulajdonságok kihasználására alapozva végzett primer feszültségmérések

2.3. A MÉRÉSEK ESZKÖZEI ÉS A MÉRT PARAMÉTEREK

Valamennyi, a fentiekben részletezett méréstípus közös jellemzője, hogy szenzorként több, meghatározott geometriába rendezett és egy mérőcellába integrált mérőbéllyegeket használ, amelyek fizikai változásai Wheatsone-híd elvén működő, tehát hibaáramot mérő műszerrel érzékelhetők. Ezen az elven alapesetben csak fajlagos nyúlásokat (deformációkat) mérhetünk, amelyek adott esetben elmozdulásokká is visszaszámíthatók.

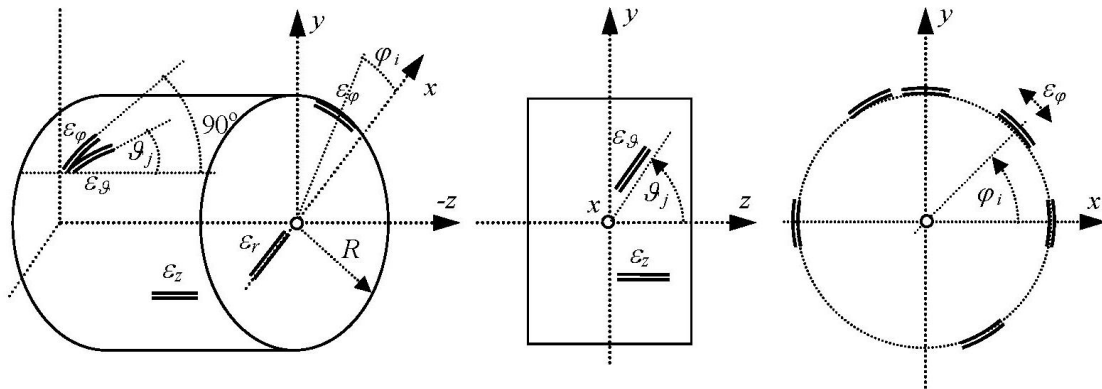
A mérőbéllyegeket a legtöbb cellán (illetve cellában) szabványosított, különböző irányú deformációmérések egyidejű megvalósítására alkalmas ún. rozetták formájában helyezkednek el. Egy mérőcellában egy vagy több rozetta is lehet. Néhány ilyen rozetta-változatot mutat be a 7. ábra.

Az, hogy az adott mérőcellával milyen jellegű illetve irányú deformációkat mérünk, a mérőbéllyegeket felragasztási irányától függ. Ennek alapvariációi a következők lehetnek (az alkalmazott jelölések értelmezését a 8. ábra segíti):



7. ábra. Különböző irányú mérőbélyegeket integráló rozetták néhány alaptípusa

- (a) a keresztmetszet síkjában a felületre ragasztva: $\varepsilon_{\varphi_i}(R, \varphi_i, t)$,
- (b) a paláston a z tengely irányában: $\varepsilon_{z_i}(R, \varphi_i, t)$,
- (c) a z tengely irányával ϑ szöget bezárva: $\varepsilon_{\vartheta_j}(R, \varphi_i, \vartheta_j, t)$,
- (d) a keresztmetszet síkjában (nem a paláston): $\varepsilon_{r_i}(R, \varphi_i, t)$.



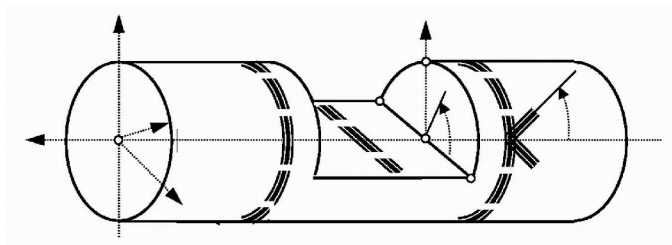
8. ábra. A bélyeg-elrendezések alapváltozatai kapcsán használt jelölések értelmezése

Az R sugarú fűrőlyukba behelyezett mérőszondával, illetve a fűrőmagra ragasztott mérőbélyegekkel regisztráljuk a lyuk falán, illetve a mag palástján bekövetkezett

- $\varepsilon_r|_R := \varepsilon_r$ - radiális irányú fajlagos nyúlást,
- $\varepsilon_\varphi|_R := \varepsilon_\varphi$ - tangenciális irányú fajlagos nyúlást,
- $\varepsilon_z|_R := \varepsilon_z$ - tengelyirányú fajlagos nyúlást,
- $\varepsilon_\vartheta|_R := \varepsilon_\vartheta$ - tengellyel és a keresztmetszettel ϑ irányt bezáró fajlagos nyúlást,

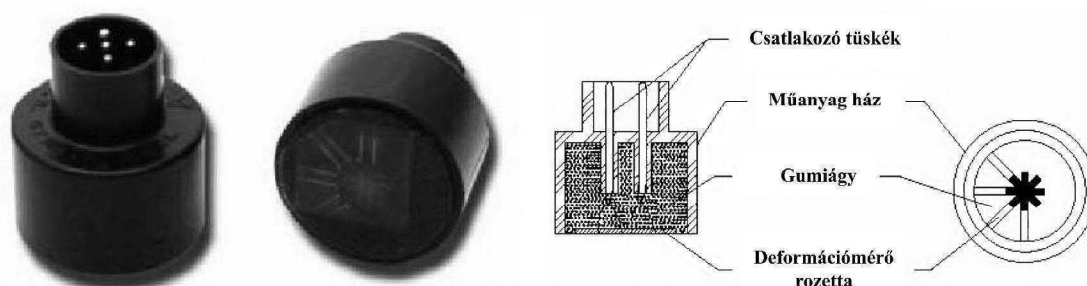
különböző φ_i szögekben.

Az előző fejezetben említett mérőcellák konkrét felépítését a következőkben szemléltetjük. A 9. ábra DOBRÓKA által javasolt 3D-s mérőbéllyeg-elhelyezését mutatja be, ahol a mérőbéllyegeket a gyártás során speciális technológiával epoxy-szondatestbe ágyazták be. Tudomásunk szerint ez a változat elsősorban a kialakított béllyegelrendezés révén mérhető deformációk elvi matematikai leírását célozta, és ennek megfelelően a kísérleti prototípus szintjén maradt.



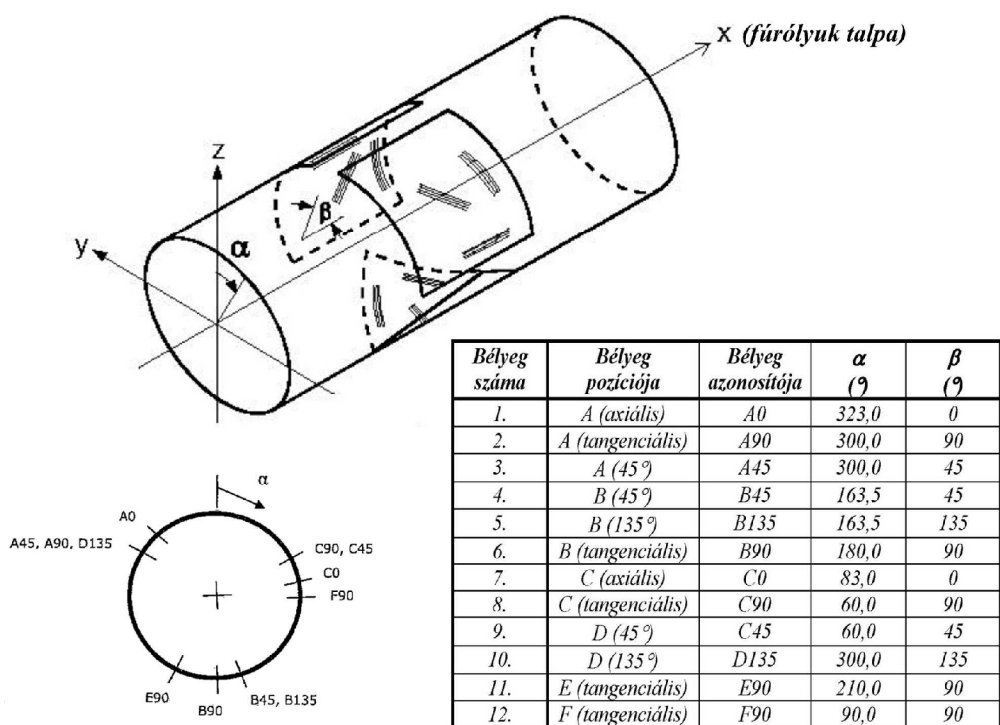
9. ábra. A Dobróka-féle 3D-s szonda felépítése és mérőbéllyegeinek elrendezése

A 2D-s mag-túlfúrásos mérésre alkalmas Doorstopper-cella műanyag házának homloklapfelületén, keménygumi közegbe ágyazva egy 4 darab, egymással 45° szöget bezáró mérőbéllyeget integráló rozetta és egy termisztor található (10. ábra). A rozettát egy hajszálvékony szigetelő réteg választja el a ragasztási felülettől, ami az installálás után közvetlenül érintkezik a közettel. A Doorstopper-cellás mérések szoftveres kiértékeléséhez általában a [20] publikációban közölt algoritmust alkalmazzák.



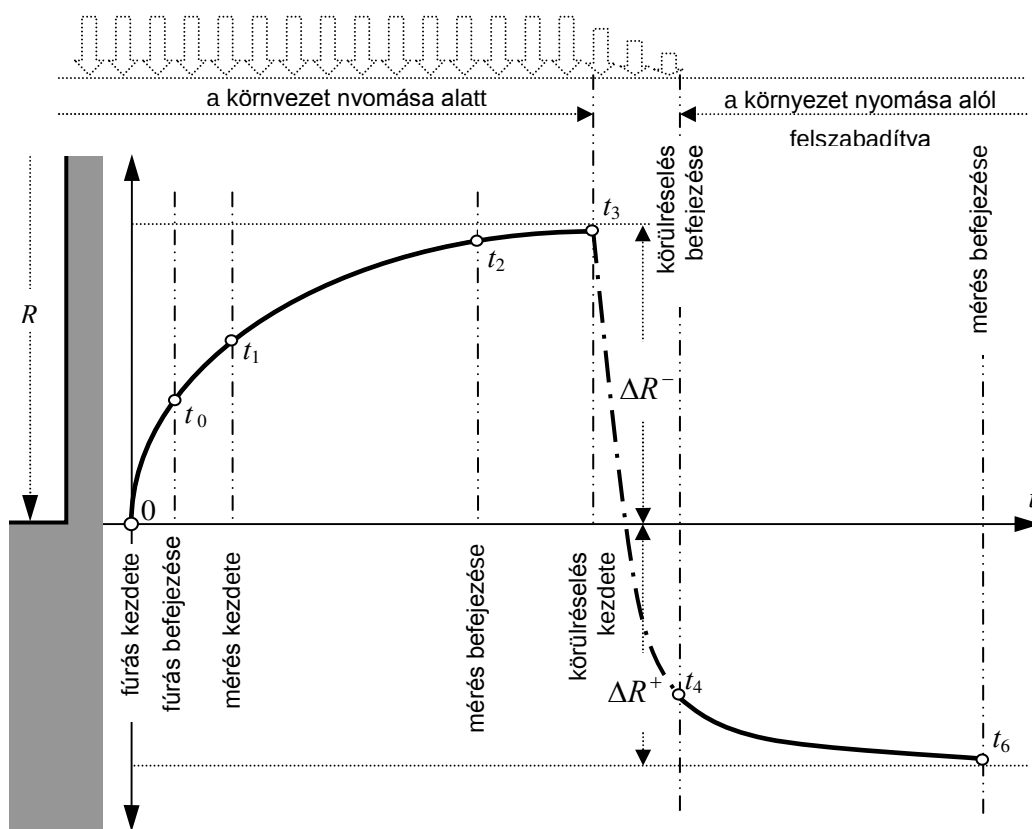
10. ábra. A Doorstopper-cella felépítése és mérőbéllyegeinek elrendezése

A 3D-s, mag-körülfúrásos mérésekre használható CSIRO HI-cella [23] felépítését és béllyeg-elrendezését a 11. ábra mutatja be. Kétféle változata került forgalomba: régebben a 9-béllyeges modellt alkalmazták, de a béllyegek sérülékenysége miatt, a redundáns béllyegek biztosíthatósága érdekében a későbbiekben áttértek a 12 béllyeges modellre, ahol a béllyegek 3 db négy-béllyeges rozettán helyezkednek el, amelyek a 11. ábrán bemutatott geometria szerint a cella hengeres külső felületén találhatók. A „HI” az angol Hollow Inclusion kifejezés rövidítése, ami szabad fordításban üreges belső teret, zárványt jelent. Ennek megfelelően a hengeres, belül üreges cella belsejét kell feltölteni a ragasztóanyaggal, ami az installálás során automatikusan jut ki a cellatest külső felületére, kitöltve a cellatest és a közetmag közti, alig néhány tized mm-es, koncentrikus rést. A CSIRO HI-cellás mérések értékelésére alkalmas alap-algoritmust először a [21] publikáció közölt; és ezt világszerte jelenleg is alkalmazzák.



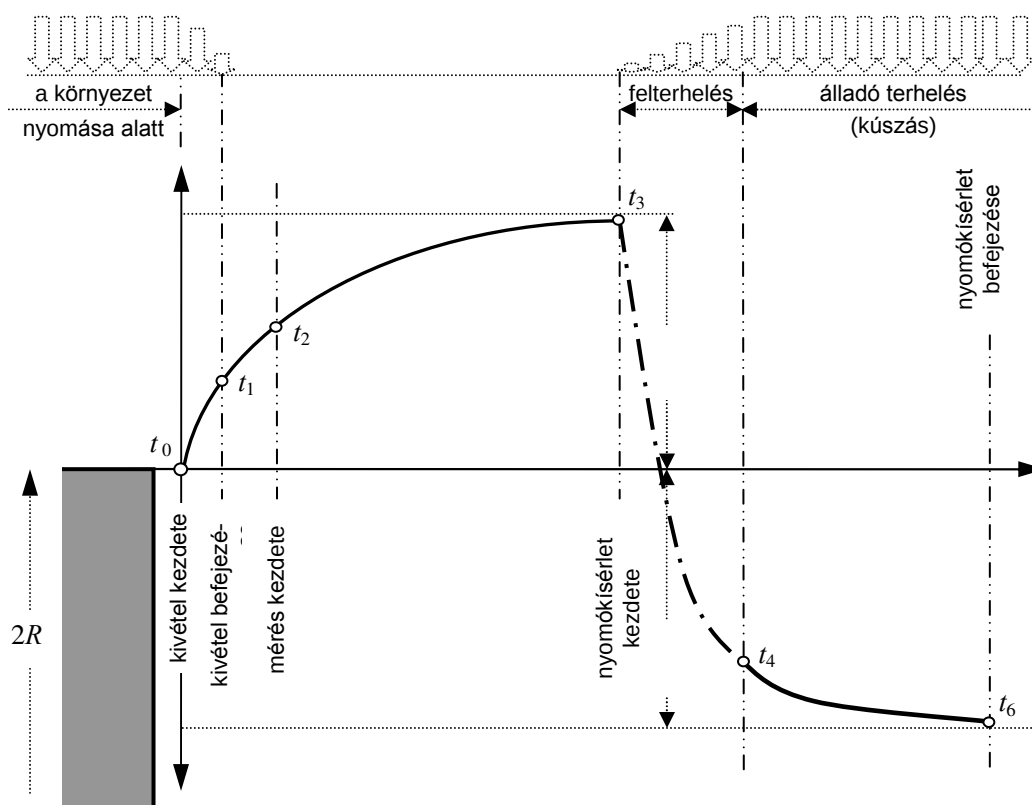
11. ábra. A CSIRO HI-cella felépítése és mérőbélyegeinek elrendezése

A fűrőlyuk egy kerületi pontja elmozdulásának időbeli alakulását a 12. ábra mutatja.



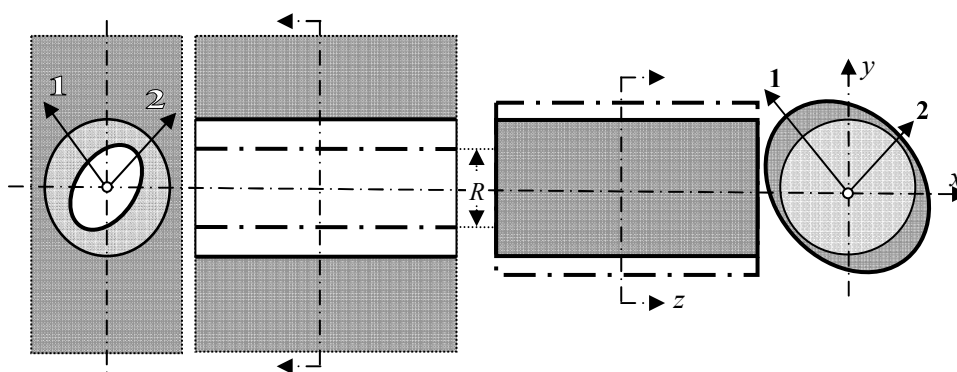
12. ábra. A fűrőlyuk egy kerületi pontjának elmozdulása

A 13. ábra a fűrómagra vonatkozóan mutatja az elmozdulásokat.



13. ábra. A fűrómag egy kerületi pontjának elmozdulása

A 14. ábra a fűrólyuk időben lejátszódó szűkülését és a fűrólyuk tágulását szemlélteti.



14. ábra. A befelé mozduló fűrólyuk és a kifelé táguló fűrómag

A következő pontok összefoglalják a különböző in situ méréseknél jelentkező mechanikai mezők összefüggéseit.

3. A FÚRÓLYUK KÖRÜL KIALAKULÓ MECHANIKAI MEZŐ

A *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár* 9. kötetében bemutattuk az R sugarú, körszelvényű vágat körül kialakuló mechanikai mező meghatározását arra az esetre, ha a közeg vágatnyitás előtti, ún. primer feszültségi állapota az általános térbeli orientációjú

$$\boldsymbol{\sigma}^{primer} := \boldsymbol{\sigma}^p = \begin{Bmatrix} p_r & t_{r\varphi} & t_{rz} \\ t_{\varphi r} & p_\varphi & t_{\varphi z} \\ t_{zr} & t_{z\varphi} & p_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a+b(\varphi) & c(\varphi) & e(\varphi) \\ c(\varphi) & a-b(\varphi) & d(\varphi) \\ e(\varphi) & d(\varphi) & p_z \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

feszültségtenzorral jellemezhető, ahol

$$\left. \begin{aligned} a &:= +\frac{1}{2}(p_x + p_y), \\ b(\varphi) &:= +\frac{1}{2}(p_x - p_y)\cos 2\varphi + t_{xy}\sin 2\varphi, \\ c(\varphi) &:= -\frac{1}{2}(p_x - p_y)\sin 2\varphi + t_{xy}\cos 2\varphi, \\ d(\varphi) &:= t_{yz}\cos \varphi - t_{zx}\sin \varphi, \\ e(\varphi) &:= t_{yz}\sin \varphi + t_{zx}\cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

3.1. A HOOKE-FÉLE MEGOLDÁS

A HOOKE-féle megoldást ismertnek vesszük, s mivel a közegnek csupán a beavatkozás utáni állapotára vagyunk kíváncsiak, ezért csak az ehhez szükséges elemeket soroljuk fel:

A KIEGÉSZÍTŐ FESZÜLTTSÉGEK:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_r &= -a\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \left[4\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]b(\varphi), & \hat{\tau}_{r\varphi} &= \left[2\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]c(\varphi), \\ \hat{\sigma}_\varphi &= +a\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4b(\varphi), & \hat{\tau}_{\varphi z} &= +\left(\frac{R}{r}\right)^2d(\varphi), \\ \hat{\sigma}_z &= -4\frac{3K-2G}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2b(\varphi), & \hat{\tau}_{zr} &= -\left(\frac{R}{r}\right)^2e(\varphi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ezek gömbi része [$\hat{\sigma}^o = \frac{1}{3}(\hat{\sigma}_r + \hat{\sigma}_\varphi + \hat{\sigma}_z)$]:

$$\hat{\sigma}^o = -4\frac{3K}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2b(\varphi), \quad (3.4)$$

deviatorikus része [$\hat{\sigma}_{ij}^d = \hat{\sigma}_{ij} - \hat{\sigma}^o\delta_{ij}$]:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_r^d &= -a\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \left[4\frac{3K+2G}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]b(\varphi), & \hat{\tau}_{r\varphi}^d &= \hat{\tau}_{r\varphi}, \\
\hat{\sigma}_\varphi^d &= +a\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left[4\frac{3K}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]b(\varphi), & \hat{\tau}_{\varphi z}^d &= \hat{\tau}_{\varphi z}, \\
\hat{\sigma}_z^d &= 4\frac{2G}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 b(\varphi), & \hat{\tau}_{zr}^d &= \hat{\tau}_{zr}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

A KIEGÉSZÍTŐ DEFORMÁCIÓK:

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_r &= -\frac{a}{2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{1}{2G}\left[4\frac{3K+4G}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]b(\varphi), \\
\hat{\varepsilon}_\varphi &= +\frac{a}{2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{1}{2G}\left[4\frac{3K-2G}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]b(\varphi), \\
\hat{\varepsilon}_z &= 0, \quad \hat{\gamma}_{r\varphi} = \frac{1}{G}\left[2\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]c(\varphi), \quad \hat{\gamma}_{\varphi z} = \frac{1}{G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 d(\varphi), \quad \hat{\gamma}_{zr} = -\frac{1}{G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 e(\varphi).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ezek gömbi része:

$$\hat{\varepsilon}^o = -\frac{4}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 b(\varphi), \tag{3.7}$$

deviatorikus része:

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_r^d &= -\frac{a}{2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{1}{2G}\left[4\frac{3K+2G}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]b(\varphi), \\
\hat{\varepsilon}_\varphi^d &= +\frac{a}{2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{1}{2G}\left[4\frac{3K}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]b(\varphi), \\
\hat{\varepsilon}_z^d &= \frac{4}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right)^2 b(\varphi), \quad \hat{\gamma}_{r\varphi}^d = \hat{\gamma}_{r\varphi}, \quad \hat{\gamma}_{\varphi z}^d = \hat{\gamma}_{\varphi z}, \quad \hat{\gamma}_{zr}^d = \hat{\gamma}_{zr}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

AZ ELMOZDULÁSOK:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_r &= \frac{aR}{2G}\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{R}{2G}\left[4\frac{3K+4G}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right) - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right]b(\varphi), \\
\hat{u}_\varphi &= +\frac{R}{2G}\left[4\frac{3G}{6K+2G}\left(\frac{R}{r}\right) + \left(\frac{R}{r}\right)^3\right]c(\varphi), \\
\hat{u}_z &= \frac{R}{G}\left(\frac{R}{r}\right)e(\varphi).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2. A REOLÓGIAI MEGOLDÁS

A HOOKE-féle megoldás ismeretében elvileg könnyen meghatározható a reológiai, azaz a t időtől függő megoldás is. Itt azt az elvet követjük, hogy a HOOKE-féle megoldásban szereplő $2G$, ill. $3K$ anyagállandókat – a standard modell esetén – kicseréljük a

$$2\tilde{G} := 2G \frac{\left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t}\right)}{\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)}, \quad \text{illetve} \quad 3\tilde{K} := 3K \frac{\left(1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t}\right)}{\left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right)}$$

jelölésekkel, az ún. *anyagoperátorokkal*, majd az így származtatott lineáris differenciálegyenleteket megoldjuk.

Ezek alapján az időtől függő KIEGÉSZÍTŐ DEFORMÁCIÓK:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_r(t) &= \hat{\varepsilon}_r^d \cdot \alpha(t) + \hat{\varepsilon}^o \cdot \beta(t), & \hat{\gamma}_{r\varphi}(t) &= \hat{\gamma}_{r\varphi} \cdot \alpha(t), \\ \hat{\varepsilon}_\varphi(t) &= \hat{\varepsilon}_\varphi^d \cdot \alpha(t) + \hat{\varepsilon}^o \cdot \beta(t), & \hat{\gamma}_{\varphi z}(t) &= \hat{\gamma}_{\varphi z} \cdot \alpha(t), \\ \hat{\varepsilon}_z(t) &= \hat{\varepsilon}_z^d \cdot \alpha(t) + \hat{\varepsilon}^o \cdot \beta(t), & \hat{\gamma}_{zr}(t) &= \hat{\gamma}_{zr} \cdot \alpha(t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

ahol

$$\alpha(t) = 1 - (1-k)e^{-\frac{G}{\eta}t}, \quad \beta(t) = 1 + \frac{1-l}{D} \left(D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + D_3 e^{\lambda_3 t} \right),$$

$$0 \leq k \leq G\tau/\eta, \quad 0 \leq l \leq K\tau_o/K_v,$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2a} \left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2a} \left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac} \right), \quad \lambda_3 = -\frac{G}{\eta},$$

$$a = 6K_v\tau + 2\eta\tau_o, \quad b = 6K\tau + 6K + 2G\tau_o + 2\eta, \quad c = 6K + 2G,^1$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ K/K_v & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -(K/K_v)^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda_1 & K/K_v & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & -(K/K_v)^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & K/K_v \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & -(K/K_v)^2 \end{vmatrix}.$$

Figyelemre méltó, hogy a karakterisztikus egyenlet $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gyökei esetünkben negatívak, ezért

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 1.$$

¹ Az itt szereplő $a = 6K_v\tau + 2\eta\tau_o$ nem tévesztendő össze a (3.2)-ben szereplő a -val!

Ez azt jelenti, hogy a (3.10) alakváltozások $t \rightarrow \infty$ esetén a (3.6) HOOKE-féle értékekhez tartanak.

Ha a beavatkozás végtelen gyorsan történik, akkor $k = G\tau/\eta$ és $l = K\tau_0/K_v$.

Az időtől függő ELMOZDULÁSOK:

$$\begin{aligned}\hat{u}_r(t) &= \frac{R}{2G} \left\{ a\left(\frac{R}{r}\right) + \left[4 \frac{3K+2G}{6K+2G} \left(\frac{R}{r}\right) - \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right] b(\varphi) \right\} \cdot \alpha(t) + \frac{4R}{6K+2G} \left(\frac{R}{r}\right) b(\varphi) \cdot \beta(t), \\ \hat{u}_\varphi(t) &= \frac{R}{2G} \left[4 \frac{G}{6K+2G} \left(\frac{R}{r}\right) + \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right] c(\varphi) \cdot \alpha(t) + \frac{4R}{6K+2G} \left(\frac{R}{r}\right) c(\varphi) \cdot \beta(t), \\ \hat{u}_z(t) &= \frac{R}{G} \left(\frac{R}{r}\right) e(\varphi) \cdot \alpha(t) .\end{aligned}\tag{3.11}$$

Az in situ mérésekhez szükséges lehet még a fűrőlyuk palástján a $z = 0$ síkkal ϑ szöget bezáró irányban jelentkező ε_ϑ fajlagos nyúlás ismerete is:

$$\hat{\varepsilon}_\vartheta = \hat{\varepsilon}_\varphi \cos^2 \vartheta + \hat{\varepsilon}_z \cos^2 \vartheta + \frac{1}{2} \hat{\gamma}_{\varphi z} \sin 2\vartheta .\tag{3.12}$$

$\hat{\varepsilon}_z = 0$ miatt:

$$\hat{\varepsilon}_\vartheta = \hat{\varepsilon}_\varphi \cos^2 \vartheta + \frac{1}{2} \hat{\gamma}_{\varphi z} \sin 2\vartheta .\tag{3.13}$$

3.3. A FÜRŐLYUKAS MÉRÉS KÉPLETEINEK ÖSSZEFOGLALÁSA

Mivel a mérőeszközök a fűrőlyuk falán (palástján) helyezkednek el, így a kiértékelésnél a képletek az $r = R$ behelyettesítéssel adódnak:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_r \Big|_R &= -(p_x + p_y) \frac{\alpha(t)}{4G} + \left[\frac{1}{2} (p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \left[\frac{(6K-2G) \cdot \alpha(t)}{2G(6K+2G)} - \frac{4 \cdot \beta(t)}{6K+2G} \right], \\ \hat{\varepsilon}_\varphi \Big|_R &= +(p_x + p_y) \frac{\alpha(t)}{4G} - \left[\frac{1}{2} (p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \left[\frac{(6K+6G) \cdot \alpha(t)}{2G(6K+2G)} + \frac{4 \cdot \beta(t)}{6K+2G} \right], \\ \hat{\gamma}_{r\varphi} \Big|_R &= + \frac{\alpha(t)}{G} \left[\frac{1}{2} (p_x - p_y) \sin 2\varphi - t_{xy} \cos 2\varphi \right], \\ \hat{\gamma}_{\varphi z} \Big|_R &= + \frac{\alpha(t)}{G} [t_{yz} \cos \varphi - t_{zx} \sin \varphi], \\ \hat{\gamma}_{zr} \Big|_R &= - \frac{\alpha(t)}{G} [t_{yz} \sin \varphi - t_{zx} \cos \varphi].\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\hat{u}_r|_R &= (p_x + p_y)R \frac{\alpha(t)}{4G} + R \left[\frac{1}{2} (p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \left[\frac{(6K + 6G) \cdot \alpha(t)}{2G(6K + 2G)} + \frac{4 \cdot \beta(t)}{6K + 2G} \right], \\
\hat{u}_\varphi|_R &= -R \left[\frac{1}{2} (p_x - p_y) \sin 2\varphi - t_{xy} \cos 2\varphi \right] \left[\frac{(6K + 6G) \cdot \alpha(t)}{2G(6K + 2G)} + \frac{4 \cdot \beta(t)}{6K + 2G} \right], \\
\hat{u}_z|_R &= [t_{yz} \sin \varphi + t_{zx} \cos \varphi] R \frac{\alpha(t)}{G}.
\end{aligned}$$

4. A FÚRÓMAGBAN KIALAKULÓ MECHANIKAI MEZŐ

Ha a σ^p primer terhelés alatt álló közegből kiemeljük annak egy korlátos (de nem nulla térfogatú) részét, akkor ez a kiemelt rész rögtön tehermentes lesz.

A fúrómag a kiemelés előtt primér állapotban van, tehát feszültségei a

$$\sigma^p = \begin{Bmatrix} p_r & t_{r\varphi} & t_{rz} \\ t_{\varphi r} & p_\varphi & t_{\varphi z} \\ t_{zr} & t_{z\varphi} & p_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a + b(\varphi) & c(\varphi) & e(\varphi) \\ c(\varphi) & a - b(\varphi) & d(\varphi) \\ e(\varphi) & d(\varphi) & p_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_r^d & t_{r\varphi} & t_{rz} \\ t_{\varphi r} & p_\varphi^d & t_{\varphi z} \\ t_{zr} & t_{z\varphi} & p_z^d \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p^o & 0 & 0 \\ 0 & p^o & 0 \\ 0 & 0 & p^o \end{Bmatrix}, \quad (4.1)$$

feszültségtenzorral jellemezhetők, ahol $p^o = \frac{1}{3}(p_r + p_\varphi + p_z) = \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z)$, amelyek nem függnek r -től.

4.1. A PRIMER DEFORMÁCIÓK

A primer deformációk a HOOKE-törvény alapján számíthatók, azaz

$$\epsilon^p = \begin{Bmatrix} \epsilon_r^p & \frac{1}{2}\gamma_{r\varphi}^p & \frac{1}{2}\gamma_{rz}^p \\ \frac{1}{2}\gamma_{\varphi r}^p & \epsilon_\varphi^p & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z}^p \\ \frac{1}{2}\gamma_{zr}^p & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi}^p & \epsilon_z^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p_r^d}{2G} + \frac{p^o}{3K} & \frac{t_{r\varphi}}{2G} & \frac{t_{rz}}{2G} \\ \frac{t_{\varphi r}}{2G} & \frac{p_\varphi^d}{2G} + \frac{p^o}{3K} & \frac{t_{\varphi z}}{2G} \\ \frac{t_{zr}}{2G} & \frac{t_{z\varphi}}{2G} & \frac{p_z^d}{2G} + \frac{p^o}{3K} \end{Bmatrix}, \quad (4.2)$$

amelyek nem függenek az időtől, hiszen a földkéreg kialakulásától eltelt idő alatt a változásoknak volt idejük lejátszódni.

A fúrómag a kiemelés után felszabadul a közetkörnyezet nyomása alól, s rögtön feszültségmentessé és elég hosszú idő eltelte után (elvben $t \rightarrow \infty$) deformációmentessé válik. Ez azt jelenti, hogy idő folyamán a mag deformációi a HOOKE-törvény szerinti értékekhez konvergálnak, azaz a (4.2) mínusz egyszeresévé válnak. Ekkor

$$\mathbf{\varepsilon}|_{t \rightarrow \infty} = -\mathbf{\varepsilon}^p = - \begin{vmatrix} \varepsilon_r^p & \frac{1}{2}\gamma_{r\varphi}^p & \frac{1}{2}\gamma_{rz}^p \\ \frac{1}{2}\gamma_{\varphi r}^p & \varepsilon_\varphi^p & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z}^p \\ \frac{1}{2}\gamma_{zr}^p & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi}^p & \varepsilon_z^p \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{p_r^d}{2G} + \frac{p^o}{3K} & \frac{t_{r\varphi}}{2G} & \frac{t_{rz}}{2G} \\ \frac{t_{\varphi r}}{2G} & \frac{p_\varphi^d}{2G} + \frac{p^o}{3K} & \frac{t_{\varphi z}}{2G} \\ \frac{t_{zr}}{2G} & \frac{t_{z\varphi}}{2G} & \frac{p_z^d}{2G} + \frac{p^o}{3K} \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

A fúrómag deformációja $0 \leq t < \infty$ esetén már az idő függvénye.

4.2. A REOLÓGIAI MEGOLDÁS

Láttuk, hogy a reológiai megoldást a $2G$ és $3K$ anyagállandók $2\tilde{G}$ és $3\tilde{K}$ anyagoperátorokra történő cserélésével, s az így kapott differenciálegyenlet megoldásával kapjuk. Ennek megfelelően:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) &= -\frac{p_r^d}{2G} \cdot \alpha(t) - \frac{p^o}{3K} \cdot \alpha^o(t), & \gamma_{r\varphi}(t) &= -\frac{t_{r\varphi}}{G} \cdot \alpha(t), \\ \varepsilon_\varphi(t) &= -\frac{p_\varphi^d}{2G} \cdot \alpha(t) - \frac{p^o}{3K} \cdot \alpha^o(t), & \gamma_{\varphi z}(t) &= -\frac{t_{\varphi z}}{G} \cdot \alpha(t), \\ \varepsilon_z(t) &= -\frac{p_z^d}{2G} \cdot \alpha(t) - \frac{p^o}{3K} \cdot \alpha^o(t), & \gamma_{zr}(t) &= -\frac{t_{zr}}{G} \cdot \alpha(t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

ahol

$$\alpha(t) \equiv 1 - \left(1 - \frac{G\tau}{\eta}\right) e^{-\frac{G}{\eta}t}, \quad \alpha^o(t) \equiv 1 - \left(1 - \frac{K\tau_o}{K_v}\right) e^{-\frac{K}{K_v}t}, \quad (4.5)$$

$$\begin{vmatrix} p_r^d & t_{r\varphi} & t_{rz} \\ t_{\varphi r} & p_\varphi^d & t_{\varphi z} \\ t_{zr} & t_{z\varphi} & p_z^d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + b(\varphi) - p^o & c(\varphi) & e(\varphi) \\ c(\varphi) & a - b(\varphi) - p^o & d(\varphi) \\ e(\varphi) & d(\varphi) & p_z - p^o \end{vmatrix}. \quad (4.6)$$

Mindezek felhasználásával az elmozdulások:

$$\begin{aligned} u_r(t) &= -r \left[\frac{p_r^d}{2G} \cdot \alpha(t) + \frac{p^o}{3K} \cdot \alpha^o(t) \right], \\ u_\varphi(t) &= -r \frac{t_{r\varphi}}{2G} \cdot \alpha(t), \\ u_z(t) &= -z \left[\frac{p_z^d}{2G} \cdot \alpha(t) + \frac{p^o}{3K} \cdot \alpha^o(t) \right] - r \frac{t_{rz}}{G} \cdot \alpha(t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

A fúrólyuk talpán körülreléssel végzett (*Doorstopper*) méréseknél is ezeket az összefüggéseket tekintjük érvényesnek.

4.3. A FÚRÓMAGOS MÉRÉS KÉPLETEINEK ÖSSZEFOGLALÁSA

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r|_R &= -\frac{1}{4G}(p_x + p_y) \cdot \alpha(t) - \frac{1}{2G} \left[\frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \cdot \alpha(t) + \\
&\quad + \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z) \left(\frac{\alpha(t)}{2G} - \frac{\alpha^o(t)}{3K} \right), \\
\varepsilon_\varphi|_R &= -\frac{1}{4G}(p_x + p_y) \cdot \alpha(t) + \frac{1}{2G} \left[\frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \cdot \alpha(t) + \\
&\quad + \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z) \left(\frac{\alpha(t)}{2G} - \frac{\alpha^o(t)}{3K} \right), \\
\varepsilon_z|_R &= -p_z \frac{\alpha(t)}{2G} + \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z) \left(\frac{\alpha(t)}{2G} - \frac{\alpha^o(t)}{3K} \right), \\
\gamma_{r\varphi}|_R &= + \left[\frac{1}{2}(p_x - p_y) \sin 2\varphi - t_{xy} \cos 2\varphi \right] \frac{\alpha(t)}{G}, \\
\gamma_{\varphi z}|_R &= - \left[t_{yz} \cos \varphi - t_{zx} \sin \varphi \right] \frac{\alpha(t)}{G}, \\
\gamma_{zr}|_R &= - \left[t_{yz} \cos \varphi + t_{zx} \sin \varphi \right] \frac{\alpha(t)}{G}, \\
u_r|_R &= -\frac{R}{4G}(p_x + p_y) \cdot \alpha(t) - \frac{R}{2G} \left[\frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \cdot \alpha(t) + \\
&\quad + R \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z) \left(\frac{\alpha(t)}{2G} - \frac{\alpha^o(t)}{3K} \right), \\
u_\varphi|_R &= + \frac{R}{2G} \left[\frac{1}{2}(p_x - p_y) \sin 2\varphi - t_{xy} \cos 2\varphi \right] \alpha(t), \\
u_z|_R &= z \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z) \left(\frac{\alpha(t)}{2G} - \frac{\alpha^o(t)}{3K} \right) - \frac{R}{2G} [t_{yz} \sin \varphi + t_{zx} \cos \varphi] \alpha(t) - \frac{z}{2G} p_z \alpha(t).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

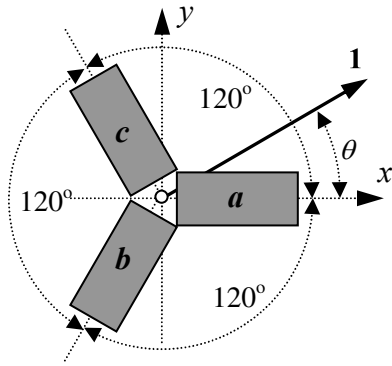
4.4. A DOORSTOPPER-MÉRÉS

A fűrőlyuk talpán körülréseeléssel végzett (*Doorstopper*) méréseknél radiális irányú rozettákat használunk (ld. 11. ábra jobb alsó sor). A körülréseelés miatt a homloklapon feltételezzük a síkalakváltozási állapotot, s ennek megfelelően a (4.8) összefüggés

$$\varepsilon_r(t) = -\frac{1}{4G}(p_x + p_y) \cdot \alpha(t) - \frac{1}{2G} \left[\frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \cdot \alpha(t)$$

formáját használjuk a kiértékeléshez. Ekkor csak a fűrőlyuk z tengelyére merőleges x - y síkban tudjuk meghatározni a feszültségkomponenseket, ezért három nem egy síkba eső fúrás szükséges a teljes feszültségállapot meghatározásához.

Például 120°-os rozettával a z síkban a főirány:



15. ábra

$$A = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^a + \varepsilon_r^b + \varepsilon_r^c),$$

$$B = \frac{1}{3}\sqrt{(2\varepsilon_r^a - \varepsilon_r^b - \varepsilon_r^c)^2 + 3(\varepsilon_r^b - \varepsilon_r^c)^2},$$

$$\varepsilon_1 = A + B,$$

$$\varepsilon_2 = A - B,$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \sqrt{3} \frac{\varepsilon_r^b - \varepsilon_r^c}{2\varepsilon_r^a - \varepsilon_r^b - \varepsilon_r^c}.$$

5. A PRIMER FESZÜLTSEGEK MEGHATÁROZÁSA

Mind a fűrőlyukra vonatkozó (3.10), (3.11) képletekre, mind a fűrómagra vonatkozó (4.4)-(4.7) képletekre jellemző, hogy azokban a $p_x, p_y, p_z, t_{xy}, t_{yz}, t_{zx}$ primer feszültségek lineárisan szerepelnek. Ez lehetőséget ad arra, hogy valamelyik deformáció több időpontban és helyen mért értékének ismeretében elvileg pontosan, képletszerűen meghatározhatók legyenek a $p_x, p_y, p_z, t_{xy}, t_{yz}, t_{zx}$ feszültségek, az anyagállandók ismeretében.²

Elvileg mind a feszültségek, mind az anyagállandók együttes meghatározása is lehetséges lenne, azonban ekkor hatváltozós lineáris feladat helyett, tizenkét-változós nemlineáris feladatot kellene megoldani.

A képletekből az $r = R$ feltétellel az r változó kiesik és csak a φ és t marad, valamint a primer feszültségkomponensek, mint paraméterek. Így a paraméterfüggés a következő:

fűrőlyuk esetén

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_r|_R &= \varepsilon_r(p_x, p_y, t_{xy}), & \hat{\gamma}_{r\varphi}|_R &= \gamma_{r\varphi}(p_x, p_y, t_{xy}), & \hat{u}_r|_R &= u_r(p_x, p_y, t_{xy}), \\ \hat{\varepsilon}_\varphi|_R &= \varepsilon_\varphi(p_x, p_y, t_{xy}), & \hat{\gamma}_{\varphi z}|_R &= \gamma_{\varphi z}(t_{yz}, t_{zx}), & \hat{u}_\varphi|_R &= u_\varphi(p_x, p_y, t_{xy}), \\ \hat{\varepsilon}_z|_R &= 0, & \hat{\gamma}_{zr}|_R &= \gamma_{zr}(t_{yz}, t_{zx}), & \hat{u}_z|_R &= u_z(t_{yz}, t_{zx}), \end{aligned}$$

² A $G, \eta, \tau, K, K_v, \tau_0$ anyagállandókat külön végzett, pl. egytengelyű nyomókísérletből határozzuk meg.

$$\hat{\varepsilon}_g \Big|_R = \varepsilon_g(p_x, p_y, t_{xy}, t_{yz}, t_{zx}),$$

fúrómag esetén

$$\begin{aligned} \varepsilon_r \Big|_R &= \varepsilon_r(p_x, p_y, p_z, t_{xy}), & \gamma_{r\varphi} \Big|_R &= \gamma_{r\varphi}(p_x, p_y, t_{xy}), & u_r \Big|_R &= u_r(p_x, p_y, p_z, t_{xy}), \\ \varepsilon_\varphi \Big|_R &= \varepsilon_\varphi(p_x, p_y, p_z, t_{xy}), & \gamma_{\varphi z} \Big|_R &= \gamma_{\varphi z}(t_{yz}, t_{zx}), & u_\varphi \Big|_R &= u_\varphi(p_x, p_y, t_{xy}), \\ \varepsilon_z \Big|_R &= \varepsilon_z(p_x, p_y, p_z, t_{xy}), & \gamma_{zr} \Big|_R &= \gamma_{zr}(t_{yz}, t_{zx}), & u_z \Big|_R &= u_z(p_x, p_y, p_z, t_{yz}, t_{zx}), \\ \varepsilon_g \Big|_R &= \varepsilon_g(p_x, p_y, p_z, t_{xy}, t_{yz}, t_{zx}). \end{aligned}$$

fúrótalp esetén

$$\varepsilon_r \Big|_R = \varepsilon_r(p_x, p_y, t_{xy}).$$

Ebből a képből több következtetés is levonható:

$$\circ \begin{pmatrix} p_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{xy} & p_y & t_{yz} \\ t_{xz} & t_{yz} & ? \end{pmatrix} - \text{a fúrólyukas kísérlet esetén a primer feszültségállapotnak csak öt}$$

komponense határozható meg, mivel a fúrólyuk tengelyirányába mutató p_z feszültség nem szerepel a képletekben (a síkbeli alakváltozási állapot miatt). E miatt egyetlen fúrólyukból a teljes feszültségállapot nem határozható meg (Azonban a 4. ábra 5. fázisából a z-irányú adatokból mégis következtetnek a p_z értékére.)

$$\circ \begin{pmatrix} p_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{xy} & p_y & t_{yz} \\ t_{xz} & t_{yz} & p_z \end{pmatrix} - \text{a fúrómagnál minden feszültségkomponens meghatározható.}$$

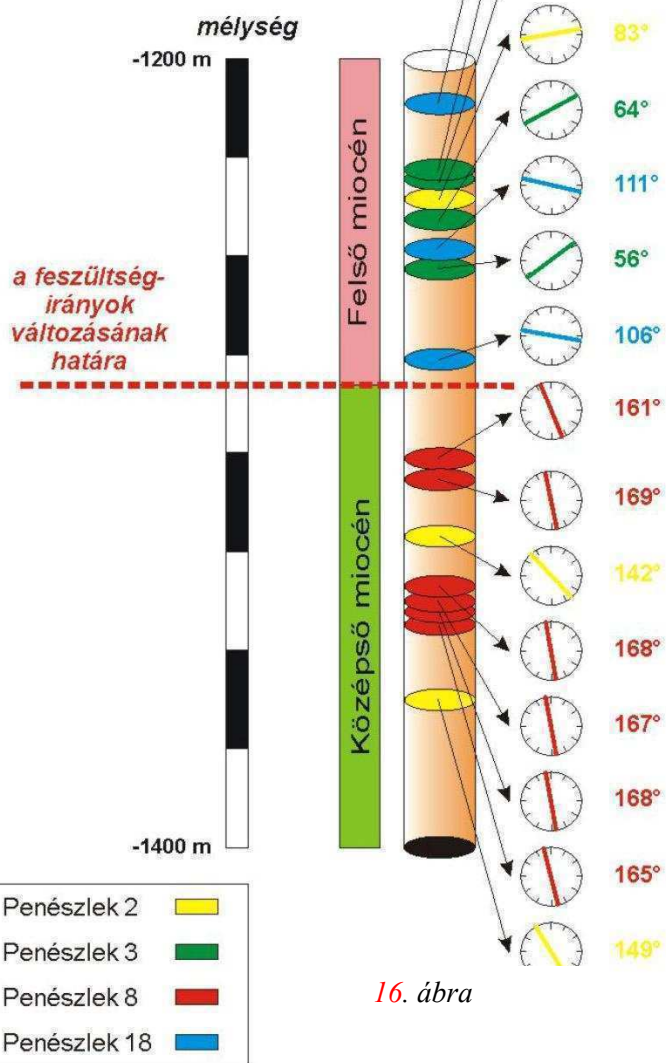
$$\circ \begin{pmatrix} p_x & t_{xy} & \circ \\ t_{xy} & p_y & \circ \\ \circ & \circ & p_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_x & \circ & t_{xz} \\ \circ & p_y & \circ \\ t_{xz} & \circ & p_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_x & \circ & \circ \\ \circ & p_y & t_{yz} \\ \circ & t_{yz} & p_z \end{pmatrix} - \text{egy fúrásból csupán egy csúsztat}$$

tó feszültségkomponens határozható meg, tehát 3 nem egy síkba eső fúrás szükséges a teljes feszültségállapot előállításához.

- Olyan különböző deformációkat kell mérni, amelyek lefedik az összes, vagy a legtöbb feszültségkomponenst, pl. ε_g .

Ezek hangsúlyozása azért is fontos, mert a gyakorlatban még uralkodó tévhitet el kell oszlatni.

PENÉSZLEK 2,3,8,18



16. ábra

A gyakorlat ui. nem mindig aknázza ki a mérésekben lévő lehetőségeket, például azért, mert sokáig azt hittük, hogy a fúrólukban történő mérés, csak a tengelyre merőleges síkban szolgáltat adatokat. Pl. a [10] könyvben is abban a hitben voltak a szerzők, hogy a feszültségtenzor összes komponensének meghatározásához 3 komplanáris fúróluk szükséges.

Erre példát mutat a [14] tanulmány mellékelt 16. ábrája, amely külszínről mélyített fúrólukokban történt mérések egy csoportját mutatja be.

Tételezzük fel, hogy akár a fúrólukban, akár a fúrómagon a mérőeszköz a t_1 időpontban kezdi a mérést úgy, hogy ekkor nulla értéket jelez (jóllehet a vizsgálandó pont mozgása már korábban megkezdődött). A $t_2 > t_1$ időpontban a műszer (mérőbéllyeg) azt a változást méri, amely a t_1 időponttól a

t_2 -ig bekövetkezett. A reológiai megoldás képletei alkalmasak ennek a változásnak a feltárására, ami a mért értékek ismeretében lehetővé teszi a primer feszültségek meghatározását.

Legyen például a mérendő mennyiség a kerületi pontban: ε ,³ amely függ a φ szögtől és t időtől, valamint a $p_x, p_y, \dots$ primer feszültségektől: $\varepsilon(\varphi, t, p_x, p_y, \dots)$. A t időpontban mért érték jelölése legyen $\varepsilon(\varphi, t)$. Ekkor a t_2 időpontban kapott $\varepsilon(\varphi, t_2)$ mért

³ Amellyel tetszőleges deformáció ill. elmozdulás-komponenst jelölünk.

értéknek a képletek szerinti, a t_2 és t_1 időpontokban kapott mennyiségek különbségével kell egyenlőnek lennie, azaz

$$\varepsilon(\varphi, t_2, p_x, p_y, \dots) - \varepsilon(\varphi, t_1, p_x, p_y, \dots) = \varepsilon(\varphi, t_2). \quad (5.1)$$

Kihangsúlyozzuk, hogy az egyenlőség jobb oldalán szereplő $\varepsilon(\varphi, t_2)$ a kapott *mért érték*, míg a bal oldalon a képletek szerinti, $p_x, p_y, \dots$ paramétereket is tartalmazó *formulák* állnak.

A méréseket több (φ, t) értékpár mellett elvégezve, az (5.1) egyenletet felhasználva, tetszőleges számú egyenletet kaphatunk. Az így keletkező lineáris egyenletrendszerből a $p_x, p_y, \dots$ ismeretlenek meghatározhatók. Elvileg elegendő annyi független egyenletet felhasználni, ahány ismeretlenünk van. Célszerű azonban a fölös mérésekből származó egyenleteket is igénybe venni.

Az (5.1) egyenlet egy *általános* módszert ad a primer feszültségek meghatározására, hiszen az ε bármelyik deformációt v. elmozdulást jelölheti attól függően, hogy mit akarunk, vagy tudunk mérni, és független attól, hogy melyik in situ mérésről van szó.

Az (5.1) képletnél a reológiai megoldásokból indulunk ki, hiszen méréseink időbeliségéhez ez illeszkedik. Természetesen használhatnánk a Hooke-féle megoldást is, amely a reológiaiból a $t \rightarrow \infty$ határátmenettel származtatható. Ekkor a mérési adatsorból az utolsó értéket, vagy a $t = \infty$ esetre extrapolált értéket vesszük. Ekkor az (5.1) képlet így módosul:

$$\varepsilon(\varphi, p_x, p_y, \dots) = \varepsilon(\varphi), \quad (5.2)$$

ahol baloldalon az alakváltozások, vagy elmozdulások valamelyike, a jobb oldalon pedig ezek mért értéke szerepel.

6. EGY PÉLDA

Az elmondottak szemléltetésére használjuk a (3.14) képletekből az $r = R$ értéknél az

$$\varepsilon_\varphi(\varphi, t) = \frac{a}{2G} \cdot \alpha(t) - \frac{1}{2G(6K + 2G)} [(6K + 6G) \cdot \alpha(t) + 8G \cdot \beta(t)] b(\varphi) \quad (6.1)$$

formulát. Az $a = \frac{1}{2}(p_x + p_y)$ és $b(\varphi) = \frac{1}{2}(p_x - p_y)\cos 2\varphi + t_{xy}\sin 2\varphi$ értelmezést is felhasználva és a $p_x, p_y, \dots$ paraméterektől való függést is jelölve,

$$\varepsilon_\varphi(\varphi, t; p_x, p_y, \dots) = A(t)(p_x + p_y) - B(t)[(p_x - p_y)\cos 2\varphi + 2t_{xy}\sin 2\varphi],$$

ahol

$$A(t) = \frac{\alpha(t)}{4G}, \quad B(t) = \frac{1}{4G(6K + 2G)} [(6K + 6G) \cdot \alpha(t) + 8G \cdot \beta(t)].$$

Legyen az ε_φ fajlagos nyúlásnak a $\varphi = 0$ ill. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ hengeralkotón mért értéke a t_2 időpontban $\varepsilon_\varphi(0, t_2)$ ill. $\varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{2}, t_2)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi(0, t_2; p_x, p_y, \dots) &= A(t_2)(p_x + p_y) - B(t_2)(p_x - p_y) = \varepsilon_\varphi(0, t_2), \\ \varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{2}, t_2; p_x, p_y, \dots) &= A(t_2)(p_x + p_y) - B(t_2)(p_x - p_y) = \varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{2}, t_2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ha a mérés a t_1 időpontban kezdődött, amikor a mérőműszer nulla értéket mutatott, akkor az (5.1) formula szerint

$$\begin{aligned} \Delta A(p_x + p_y) - \Delta B(p_x - p_y) &= \varepsilon_\varphi(0, t_2), \\ \Delta A(p_x + p_y) + \Delta B(p_x - p_y) &= \varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{2}, t_2), \end{aligned} \quad (6.3)$$

ahol $\Delta A = A(t_2) - A(t_1), \quad \Delta B = B(t_2) - B(t_1).$

A (6.3) egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Delta A} - \frac{1}{\Delta B} \right) \varepsilon_\varphi(0, t_2) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Delta A} + \frac{1}{\Delta B} \right) \varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{2}, t_2), \\ p_y &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Delta A} + \frac{1}{\Delta B} \right) \varepsilon_\varphi(0, t_2) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Delta A} - \frac{1}{\Delta B} \right) \varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{2}, t_2). \end{aligned} \quad (6.4)$$

A t_{xy} meghatározásához vegyük az ε_φ értékét a $\varphi = \frac{\pi}{4}$ hengeralkotón a t_2 időpontban. Legyen ez a mért érték $\varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{4}, t_2)$. Ekkor

$$\varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{4}, t_2; p_x, p_y, \dots) = A(t_2)(p_x + p_y) - 2B(t_2)t_{xy}.$$

Az előbbi gondolatmenetet követve, az (5.2) formula szerint

$$\Delta A(p_x + p_y) - 2\Delta B t_{xy} = \varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{4}, t_2). \quad (6.5)$$

Felhasználva még azt, hogy a (6.4) formulákból

$$p_x + p_y = \frac{1}{2\Delta A} [\varepsilon_\varphi(0, t_2) - \varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{2}, t_2)],$$

így a (6.5) egyenlet megoldása:

$$t_{xy} = \frac{1}{4\Delta B} [\varepsilon_\varphi(0, t_2) + \varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{2}, t_2) - 2\varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{4}, t_2)]. \quad (6.6)$$

A t_{yz} és t_{zx} meghatározásához most az

$$\varepsilon_g = \varepsilon_\varphi \cos^2 \vartheta + \frac{1}{2} \gamma_{\varphi z} \sin 2\vartheta = \varepsilon_\varphi \cos^2 \vartheta + \frac{d(\varphi)}{2G} \alpha(t) \sin 2\vartheta$$

összefüggést használjuk fel $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ mellett, ahol ϑ a furat tengelyére merőleges síkkal bezárt szög, amely érintőleges a henger palástjához. Ekkor a $d(\varphi)$ -nek megfelelően

$$\varepsilon_{\vartheta=\pi/4} = \varepsilon_{\pi/4}(\varphi, t; p_x, p_y, \dots) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\varphi}(\varphi, t) + \frac{1}{2G} (t_{yz} \cos \varphi - t_{zx} \sin \varphi) \cdot \alpha(t).$$

Ha $\varepsilon_{\pi/4}$ és ε_{φ} értékét mérjük a $\varphi = 0$ és $\varphi = \frac{\pi}{2}$ hengeralkotókon a t_2 időpontban, akkor az (5.1) felhasználásával a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon_{\varphi}(0, t_2) + \frac{\Delta \alpha}{2G} t_{yz} &= \varepsilon_{\pi/4}(0, t_2), \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{\varphi}\left(\frac{\pi}{2}, t_2\right) - \frac{\Delta \alpha}{2G} t_{yz} &= \varepsilon_{\pi/4}\left(\frac{\pi}{2}, t_2\right), \end{aligned}$$

ahol $\Delta \alpha = \alpha(t_2) - \alpha(t_1)$. Innen

$$\begin{aligned} t_{yz} &= + \frac{G}{\Delta \alpha} [2\varepsilon_{\pi/4}(0, t_2) - \varepsilon_{\varphi}(0, t_2)], \\ t_{zx} &= - \frac{G}{\Delta \alpha} [2\varepsilon_{\pi/4}\left(\frac{\pi}{2}, t_2\right) - \varepsilon_{\varphi}\left(\frac{\pi}{2}, t_2\right)]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

A (6.4), (6.6) és (6.7) képletekkel tehát előállítottuk a primer feszültségtenzor 5 komponensét, csupán a fűrőlyuk palástján mért ε_{φ} és 2 fajlagos nyúlások segítségével. A p_z feszültségkomponens meghatározásához viszont olyan fajlagos nyúlást is kell mérni, amely függ ettől a komponenstől. Ehhez felhasználhatók a fűrőmag esetére kapott

$$\varepsilon_r(t) = -\frac{p_r^d}{2G} \cdot \alpha(t) - \frac{p^o}{3K} \cdot \alpha^o(t) \quad \text{és} \quad \varepsilon_z(t) = -\frac{p_z^d}{2G} \cdot \alpha(t) - \frac{p^o}{3K} \cdot \alpha^o(t)$$

formulák.

Mint látható számításainkhoz a reológiai megoldásokat használtuk fel. Az eredményeket szemlélve úgy tűnik, mintha a számított $p_x, p_y, \dots, t_{zx}$ primer feszültségek a t változótól függenének. Ez valójában nincs így, mert ezek függetlenek az időtől, tehát akár mekkora is t értéke (jelen esetben t_2), azok értéke nem változhat és nem is változik. Ugyanis a (6.4), (6.6) és (6.7) egyenlőségek azonosságokká változnak, ha a bennük szereplő mérési eredmények helyére azok képlet szerinti alakját helyettesítjük be. Ennek következményeként, ha pl. t_2 változik, akkor változik ugyan a deformáció (vagyis a mért érték), de nem változik a primer feszültség, még akkor sem, ha a $t_2 \rightarrow \infty$. Így a kapott eredményekből könnyen levezethetők a HOOKE-féle megoldásból származtatott eredmények is. Ugyanis, ha $t_1 = 0$, és ebben az időpontban az ε tenzor minden komponense nulla, továbbá ha $t_2 \rightarrow \infty$, akkor a (6.4), (6.6) és (6.7) értékek mindegyikére formailag a HOOKE-féle megoldásból származó feszültségeket kapjuk.

Ennek esetleges ellenőrzéséhez ismételten határozzuk meg a primer feszültségeket, de most a HOOKE-megoldásokból. A p_x és p_y meghatározásához vegyük a (3.6) képletekben szereplő $\hat{\varepsilon}_{\varphi}$ értékét a $r = R$ mellett $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi/2$ helyen:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_\varphi(0) &= \frac{1}{2G} \left[\frac{1}{2}(p_x + p_y) - \frac{6K+14G}{6K+2G} \frac{1}{2}(p_x - p_y) \right], \\ \hat{\varepsilon}_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2G} \left[\frac{1}{2}(p_x + p_y) + \frac{6K+14G}{6K+2G} \frac{1}{2}(p_x - p_y) \right].\end{aligned}$$

Ezt a kétismeretlenes rendszert megoldva,

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{2G}{3K+7G} \left[3G\hat{\varepsilon}_\varphi(0) + (3K+4G)\hat{\varepsilon}_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \right], \\ p_y &= \frac{2G}{3K+7G} \left[(3K+4G)\hat{\varepsilon}_\varphi(0) + 3G\hat{\varepsilon}_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \right].\end{aligned}\tag{6.8}$$

Ezzel két ismeretlent meghatároztunk.

A t_{xy} meghatározásához tekintsük az

$$\hat{\varepsilon}_\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2G} \left\{ \frac{1}{2}(p_x + p_y) - \frac{6K+14G}{6K+2G} t_{xy} \right\}$$

egyenlőséget. Használjuk fel, hogy $p_x + p_y = 2G(\varepsilon_\varphi(0) + \varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{2}))$. Ekkor

$$t_{xy} = G \frac{3K+G}{3K+7G} \left[\hat{\varepsilon}_\varphi(0) + \hat{\varepsilon}_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\hat{\varepsilon}_\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \right].\tag{6.9}$$

A t_{yz} és t_{zx} meghatározásához most a (3.13)-ban felírt

$$\varepsilon_g(\varphi) = \hat{\varepsilon}_\varphi(\varphi) \cos^2 \vartheta + \frac{1}{2} \hat{\gamma}_{\varphi z}(\varphi) \sin 2\vartheta$$

összefüggést használjuk. Ekkor, kihasználva, hogy $r = R$, miközben ε_g értékét vesszük a $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi/4$ hengeralkotókon, a $\vartheta = \pi/4$ irányban,

$$\hat{\varepsilon}_{\pi/4}(0) = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_\varphi(0) + \frac{1}{2G} t_{yz} \quad \Leftrightarrow \quad t_{yz} = +G \left[2\hat{\varepsilon}_{\pi/4}(0) - \hat{\varepsilon}_\varphi(0) \right],\tag{6.10}$$

$$\hat{\varepsilon}_{\pi/4}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2G} t_{zx} \quad \Leftrightarrow \quad t_{zx} = -G \left[2\hat{\varepsilon}_{\pi/4}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \hat{\varepsilon}_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \right].\tag{6.11}$$

Ezekben a formulákban az $\varepsilon_\varphi(0)$, $\varepsilon_\varphi(\frac{\pi}{2})$ stb. mért számértékek a $t_2 = \infty$ -beli értékeknek felelnek meg, azaz például $\varepsilon_\varphi(0) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \varepsilon_\varphi(0, t_2)$. Ez azt jelenti, hogy a mérést csak a teljes nyugalmi állapotban fejezzük be.

Ha a (6.4), (6.6) és (6.7) egyenlőségek jobboldalának képezzük a határértékét ha $t_2 \rightarrow \infty$, továbbá figyelembe vesszük, hogy $t_1 = 0$ és ebben az időpontban $\mathbf{\varepsilon} = \mathbf{0}$, akkor rendre a (6.8), (6.9), (6.10) és (6.11) eredményeket kapjuk. Ekkor felhasználjuk az alábbi összefüggéseket is:

$$\alpha(0) = \beta(0) = 0, \quad \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \alpha(t_2) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \beta(t_2) = 1,$$

$$A(0) = B(0) = 0, \quad \lim_{t_2 \rightarrow \infty} A(t_2) = \frac{1}{4G}, \quad \lim_{t_2 \rightarrow \infty} B(t_2) = \frac{6K + 14G}{4G(6K + 2G)}.$$

A p_z meghatározásához a fűrómagra érvényes ε_φ és ε_z képleteit vegyük, az egyszerűség kedvéért $t \rightarrow \infty$ esetre. Ehhez használjuk a (4.3) és (4.6) egyenlőségekből kiolvasható

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi(\varphi) &= -\frac{p_\varphi^d}{2G} - \frac{p^\circ}{3K} = -\frac{1}{2G} [a - b(\varphi) - p^\circ] - \frac{p^\circ}{3K}, \\ \varepsilon_z(\varphi) &= -\frac{p_z^d}{2G} - \frac{p^\circ}{3K} = -\frac{1}{2G} p_z + \frac{3K - 2G}{6GK} p^\circ \end{aligned} \quad (6.12)$$

összefüggéseket.

Mérjük az ε_φ értékét a $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi/2$ helyen, és a φ -től független ε_z értékét. A (6.12) képleteket használva, átrendezések után a p_x, p_y, p_z ismeretlenekre a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} -(6K + 2G)p_x + (3K - 2G)p_y + (3K - 2G)p_z &= 18GK\varepsilon_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ (3K - 2G)p_x - (6K + 2G)p_y + (3K - 2G)p_z &= 18GK\varepsilon_\varphi(0), \\ (3K - 2G)p_x + (3K - 2G)p_y - (6K + 2G)p_z &= 18GK\varepsilon_z, \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ezt megoldva, a három normális feszültségkomponenst kapjuk:

$$\begin{aligned} p_x &= -\frac{1}{3} \left[\varepsilon_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)(3K + 4G) + \varepsilon_\varphi(0)(3K - 2G) + \varepsilon_z(3K - 2G) \right], \\ p_y &= -\frac{1}{3} \left[\varepsilon_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)(3K - 2G) + \varepsilon_\varphi(0)(3K + 4G) + \varepsilon_z(3K - 2G) \right], \\ p_z &= -\frac{1}{3} \left[\varepsilon_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)(3K - 2G) + \varepsilon_\varphi(0)(3K - 2G) + \varepsilon_z(3K + 4G) \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

A t_{xy} meghatározásához mérjük az ε_φ értékét a $\varphi = \pi/4$ helyen. Ekkor az

$$\varepsilon_\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2G} \left\{ \frac{1}{2}(p_x + p_y) - t_{xy} \right\} + \frac{3K - 2G}{18GK} (p_x + p_y + p_z)$$

egyenletet kapjuk. Innen

$$t_{xy} = 2G\varepsilon_\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}(p_x + p_y) - \frac{3K - 2G}{9K} (p_x + p_y + p_z), \quad (6.15)$$

ahol p_x, p_y, p_z már ismert értékek.

A t_{yz} és t_{zx} meghatározásához felhasználjuk az

$$\varepsilon_\vartheta(\varphi) = \varepsilon_\varphi(\varphi) \cos^2 \vartheta + \varepsilon_z \sin^2 \vartheta + \frac{1}{2} \gamma_{\varphi\vartheta}(\varphi) \sin 2\vartheta$$

formulát, ha $\vartheta = \pi/4$, miközben $\varphi = 0$, majd $\varphi = \pi/2$. Ekkor az

$$\varepsilon_{\pi/4}(0) = \frac{1}{2} \varepsilon_\varphi(0) + \frac{1}{2} \varepsilon_z - \frac{1}{2G} t_{yz}, \quad \varepsilon_{\pi/4}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \varepsilon_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \varepsilon_z + \frac{1}{2G} t_{zx}$$

egyenleteket kapjuk. Innen

$$t_{yz} = -2G\varepsilon_{\pi/4}(0) + G[\varepsilon_{\varphi}(0) + \varepsilon_z] , \quad (6.16)$$

$$t_{zx} = +2G\varepsilon_{\pi/4}\left(\frac{\pi}{2}\right) - G[\varepsilon_{\varphi}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon_z] . \quad (6.17)$$

Ezzel megkaptuk mind a 6 feszültségkomponenst.

7. A FŐFESZÜLTSEGEK ÉS FŐIRÁNYOK

Ha meghatároztuk a primer feszültségállapot

$$\boldsymbol{\sigma}_{<x,y,z>}^p = \begin{vmatrix} p_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & p_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & p_z \end{vmatrix}$$

tenzorának mind a hat független komponensét, akkor a primér főfeszültségek értéke és a főirányai már meghatározhatók. A szimmetrikus tenzorok esetén mindig létezik a térben legalább egy derékszögű koordinátarendszer, amelyben a tenzor diagonálissá válik, tehát a főátlón kívül minden komponens zérus, vagyis ezekben azt irányokban nem ébred csúsztató feszültség. Legyenek a koordináta egységvektorok $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, amelyekre $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = 1$, $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, s ekkor $\boldsymbol{\sigma}^p \mathbf{e}_i = p_i \mathbf{e}_i$, azaz

$$(\boldsymbol{\sigma}^p - p_i \mathbf{I}) \mathbf{e}_i = \mathbf{0} .$$

Ennek a homogén-lineáris egyenletnek akkor van zérustól különböző megoldása, ha determinánsa zérus, azaz ha

$$\det(\boldsymbol{\sigma}^p - p \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} p_x - p & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & p_y - p & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & p_z - p \end{vmatrix} = 0 .$$

A determináns kifejtése után

$$p^3 - S_1 p^2 + S_2 p - S_3 = 0 ,$$

ahol az S_i együtthatók a $\boldsymbol{\sigma}^p$ skaláris invariánsai:

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^p &= p_x + p_y + p_z , \\ S_2 &= \frac{1}{2} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^p)^2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^p : \boldsymbol{\sigma}^p &= p_x p_y + p_y p_z + p_z p_x - t_{xy}^2 - t_{yz}^2 - t_{zx}^2 , \\ S_3 &= \det \boldsymbol{\sigma}^p &= p_x p_y p_z + 2 t_{xy} t_{yz} t_{zx} - p_x t_{yz}^2 + p_y t_{zx}^2 + p_z t_{xy}^2 . \end{aligned}$$

A (2) egyenlet megoldásával megkapjuk a három gyököt, amely a három főfeszültség:

$$p_1 \geq p_2 \geq p_3 ,$$

s az $(\sigma^p - p_i \mathbf{I}) \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ egyenletből pedig a három főirány egységvektorát. Ehhez a

$$\begin{aligned}(p_x - p) e_x + t_{xy} e_y + t_{xz} e_z &= 0, \\ t_{yx} e_x + (p_y - p) e_y + t_{yz} e_z &= 0, \\ t_{zx} e_x + t_{zy} e_y + (p_z - p) e_z &= 0, \\ e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 &= 1.\end{aligned}$$

egyenletrendszer kell megoldani.

IRODALOM

- [1] RICHTER, R. (1960): Measurement of Rock-pressure „in-situ” in Elastic Rocks. *Publications of Technical University for Heavy Industries* **21**, Miskolc.
- [2] RICHTER, R. (1963): Über „in-situ” Messungen der Gebirgsmechanik in kreisförmigen Hohlräumen. *Bergakademie* **5**.
- [3] RICHTER, R. (1966): Kőzetkarakterek in-situ meghatározásáról. *Műszaki Élet Tatabányán* **1**, Tatabánya.
- [4] ASSZONYI, CS. (1966): Primér feszültségi és alakváltozási mező jellemző mutatószámainak in-situ mérésekkel történő meghatározása. *Bányászati Lapok* **10**, Budapest, p. 649-660.
- [5] ASSZONYI, CS. (1967): Vágatbiztosítások tervezése. *Műszaki Élet Tatabányán* **3**. p. 1-29.
- [6] ASSZONYI, CS. – KAPOLYI, L. (1967): Feszültségeloszlás az időtényező figyelembevételével. *Műszaki Élet Tatabányán* **4**. p. 1-17.
- [7] ASSZONYI, CS. – RICHTER, R. (1969): Rheologische Untersuchung von mechanischen Feldern in der Umgebung der Strecken. Teil I. Modellanalyse zur Bestimmung der Zustandfunktion. *Bergbauwissenschaften* **9**. p. 326-333.
- [8] ASSZONYI, CS. (1967): Determination by in situ Measurements of the Characteristic Parameters of the Field of Primary Stresses and Deformations. *Publications of the Technical University for Heavy Industry* **31**. p. 39-60.
- [9] ASSZONYI, CS. – RICHTER, R. (1972): Bevezetés a kőzetmechanika reológiai alapjaiba. Nehézipari Minisztérium Továbbképző Központja, Budapest
- [10] ASSZONYI, CS. – KAPOLYI, L. (1976): Kőzetek mechanikai jellemzőinek meghatározása. *MTA VEAB monográfiái*, Veszprém. p. 192.
- [11] DOBRÓKA, M. (1985): In situ Measurement of Elastic and Rheological Material Characteristics of Rocks. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Rolando Eötvös. Sectio Geophysica et Meteorologica*, Tom. I. p. 143-158.

- [12] DOBRÓKA, M. (2000): Rock stress determination in boreholes without overcoring (in "Intellectual Service for Oil & Gas Industry – Analysis, Solutions, Perspectives", Editors: Besenyei L. and Shammazov A. M. pp.17-27.
- [13] LIN, W. – KUWAHARA, Y. – SATOH, T. – SHIGEMATSU, N. – KITAGAWA, Y. – KIGUCHI, T. – SATO, T. – TSUKAMOTO, T. – ITABA, S. – UMEDA, Y. – SEKI, Y. – TAKAHASHI, M. – MATUMOTO, N. – KOIZUMI, N. (2010): A case study of 3D stress orientation determination in Shikoku Island and Kii Peninsula, Japan. *Rock Engineering in Difficult Ground Conditions – Soft Rocks and Karst*. CRC Press, A. Balkema. p: 277-282.
- [14] KOVÁCS L. – BOGÁR I. (2007): Felszínközeli közettestekben uralkodó primer feszültségállapot meghatározása továbbfejlesztett Doorstopper cellás, mag-túlfúrásos in situ feszültségmérésekkel. *Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár 4*. 2007. (Szerk: Török Á. és Vásárhelyi B.). pp. 281-300.
- [15] KOVÁCS L. (2011): Helyszíni közetmechanikai mérések és monitoring-tevékenység Bátaapátiban. Magyar Alagútépítő Egyesület 2011. évi 2. előadássorozata, Budapest, 2011. május 5.
- [16] ASSZONYI, CS. – SZARKA Z. – BÉDA GY. (2009): Körszelvényű földalatti folyosók körül kialakuló mechanikai mezők. *Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár 9*, Műegyetemi Kiadó Budapest. pp: 115-169.
- [17] BRADY, B. H. G. – BROWN, E. T. (1985): Rock mechanics for underground mining. George Allen & Unwin, London, first edition.
- [18] BROWN, E. T. – HOEK E. (1978): Trends in relationships between measured rock in-situ stresses and depth. *Int. J. Rock Mech. & Mining Sci.* 15. 211-215.
- [19] BROWN, E. T. (editor) (1985): ISRM Suggested methods for in situ rock stress measurements. Pergamon Press, Oxford.
- [20] CORTHESY, R. – GILL D.E. – OUELLET J. (1993): Methodes de mesure des contraintes dans les massifs de roches dures, *Centre de recherches minerales*, p. 61-70.
- [21] FAMA, M. E. D. – PENDER, M. J. (1980): Analysis of the Hollow Inclusion Technique for Measuring In Situ Rock Stress. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol. 17, pp 137-146.
- [22] HEIDBACH, O. – TINGAY, M. – BARTH, A. – REINECKER, J. – KURFEB, D. – MÜLLER, B., The World Stress Map database release 2008. doi:10.1594/GFZ.WSM.Rel2008, 2008. Internet: http://dc-app3-14.gfz-potsdam.de/pub/introduction/introduction_frame.html
- [23] WOROTNICKY G. – WALTON R. J. (1976): Triaxial „Hollow Inclusion” Gauges for Determination of Rock Stresses In Situ. *Proc. ISRM symp. on investigation of stress in rock*, Supplement, 1-8. Sydney. Instn. Engrs. Aust.,
- [24] ZOBACK M. L. és 28 társszerző (1989): Global patterns of tectonic stress. *Nature*, 341, pp. 291-298.

ANYAGOK MECHANIKAI TULAJDONSÁGAINAK MEGHATÁROZÁSA EGYTENGELYŰ LABORATÓRIUMI KÍSÉRLETEKKEL

Asszonyi Csaba – Szarka Zoltán

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Csatár Attila

MEZŐGAZDASÁGI GÉPKÍSÉRLETI INTÉZET, GÖDÖLLŐ

Horváth Róbert – Kocsis Dénes

DEBRECENI EGYETEM MŰSZAKI KAR KÖRNYEZET- ÉS VEGYÉSZMÉRNÖKI TANSZÉK, DEBRECEN,
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Jelen cikkben megpróbáljuk összefoglalni a különböző feszültség- és deformáció-értelmezéseken alapuló laborvizsgálati összefüggéseket.

Az egyszerűség kedvéért csak az ún. tömör anyagokra vonatkozó elemzéseket ismertetjük, a pórusos és töredezett anyagokra vonatkozóan hasonlóképpen járhatunk el, de ezek az újabb (porozitás és töredezettség) változók jelentősen bonyolítják az eljárást.

BEVEZETÉS

Szerkezetek szilárdsági méretezéséhez elengedhetetlen a felhasznált anyagok anyagállandóinak ismerete. Ezeket általában laboratóriumi húzó-nyomó kísérletekkel állapítják meg, kisebb-nagyobb sikerrel. A problémát rendszerint az okozza, hogy ezek az állandók a feszültségek és alakváltozások közötti összefüggésekben nemlineárisan szerepelnek, ezért azok meghatározása nemlineáris egyenletekre, egyenletrendszerekre vezet. Az is gondot okoz, hogy a feszültségek és alakváltozások közötti több nagyságrendi eltérések igen bizonytalaná teszik az ilyen egyenletek megoldását, különösen akkor, ha a felhasznált mérési eredmények nem elég pontosak. Ezen az sem sokat segít, ha mérési eredmények ezreit például a legkisebb négyzetek módszerével próbáljuk kiértékelni, annak ellenére, hogy ennek a módszernek jelentős simító hatása

van, ami azt jelenti, hogy az egyes mérési eredmények hibái mérsékelten öröklődnek a meghatározandó ismeretlenekre, esetünkben az anyagállandókra.

A laboratóriumban egytengelyű kísérletnél ténylegesen *mért* adatok:

- F – tengelyirányú húzó- v. nyomóerő [N],
- $\delta_{||} = \Delta l / l_0 := \delta$ – tengelyirányú fajlagos nyúlás [1],
- $\delta_{\perp} = \Delta d / d_0$ – keresztirányú fajlagos nyúlás [1],

s ezek alapján kell meghatározni az anyagállandók értékét az alapul választott *anyagtörvény* (konstitúciós egyenlet) alapján, amely a feszültségek és a deformációk közötti fizikai összefüggés. Azonban legtöbbször a mérési adatokból szeretnénk meghatározni az anyagtörvényt is, amely már rögzíti a szóba jöhető anyagállandók fajtáit is. Ez azonban az anyagtörvényt alkotó feszültségek és deformációk értelmezésének is függvénye.

Ezért – a tényleges feladat tárgyalása előtt – a következőkben röviden összefoglaljuk a leggyakrabban alkalmazott feszültség és deformáció értelmezéseket, majd a szóba jöhető anyagtörvényeket.

A KÜLÖNBÖZŐ LEGFONTOSABB FESZÜLTSG- ÉS DEFORMÁCIÓ TENZOROK

A LABORATÓRIUMI PRÓBATEST. Legyen körszelvényű hasáb alakú próbatest egytengelyű kísérleténél a tengelyirányú terhelő erő: F [N] a próbatest mérete (sugara és hossza): R [m] és l [m]. A σ tengelyirányú feszültséget: az F erő és az A keresztmetszet hányadosaként értelmezzük:

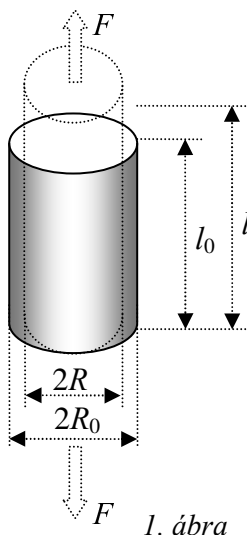
$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (1)$$

Az $F(0) \rightarrow F(t)$ terhelés során a méretek $R(0) = R_0 \rightarrow R(t)$ és $l(0) = l_0 \rightarrow l(t)$ formában változnak, s a $t = 0 \rightarrow t$ folyamatnál a próbatest tengelyirányú és keresztirányú fajlagos nyúlása:

$$\delta = \frac{l(t) - l(0)}{l(0)} = \frac{\Delta l}{l_0} \text{ és } \delta_{\perp} = \frac{2R(t)\pi - 2R(0)\pi}{2R(0)\pi} = \frac{2R(t) - 2R(0)}{2R(0)} = \frac{\Delta R}{R_0},$$

s a keresztmetszet

$$A = A_0 (1 + \delta_{\perp})^2. \quad (2)$$

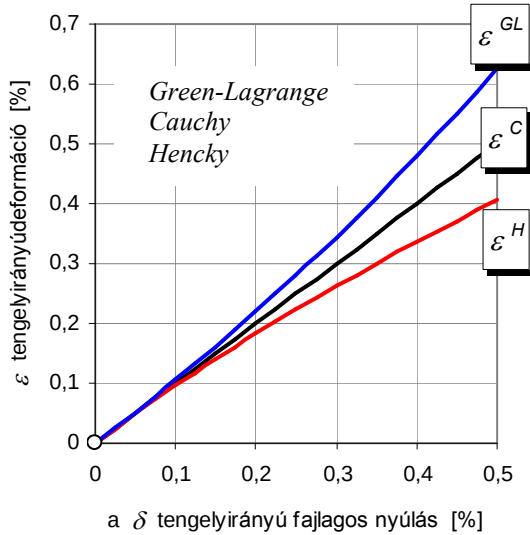


1. ábra

Ebben az esetben a feszültségtenzor, a nyúlástenzor és az ún. deformációgradiens a következő:

$$\boldsymbol{\sigma} := \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta} := \begin{Bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\perp} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} := \mathbf{I} + \boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} 1+\delta & 0 & 0 \\ 0 & 1+\delta_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\delta_{\perp} \end{Bmatrix}.$$

A DEFORMÁCIÓK ÉRTELMEZÉSE. A gyakorlatban leggyakrabban alkalmazott deformációtenzorok: a CAUCHY-féle [C], HENCKY-féle [H] és GREEN-LAGRANGE-féle [GL]. Egytengelyű feszültségállapotnál a



– CAUCHY-féle [C] deformációtenzor:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^C := \mathbf{F} - \mathbf{I} = \boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\perp} \end{Bmatrix},$$

– HENCKY-féle [H] deformációtenzor:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^H := \ln \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \ln(1+\delta) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(1+\delta_{\perp}) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(1+\delta_{\perp}) \end{Bmatrix},$$

4. ábra. A deformáció-értelmezések összehasonlítása

– GREEN-LAGRANGE-féle [GL] deformációtenzor:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{GL} := \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{I})^2 + (\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\delta^2 + \delta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\delta_{\perp}^2 + \delta_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\delta_{\perp}^2 + \delta_{\perp} \end{Bmatrix}.$$

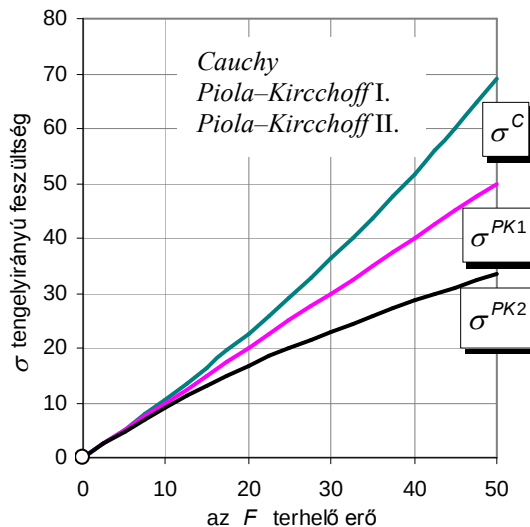
A FESZÜLTSÉGEK ÉRTELMEZÉSE. A gyakorlatban leggyakrabban alkalmazott feszültségtenzorok: a CAUCHY-féle [C], a PIOLA-KIRCCHOFF első [PK-1] és PIOLA-KIRCCHOFF második [PK-2].

Egytengelyű kísérleteknél a CAUCHY-féle feszültségtenzor:

$$\boldsymbol{\sigma}^C = \begin{Bmatrix} \sigma^C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

PIOLA-KIRCCHOFF I. feszültségtenzor:

$$\boldsymbol{\sigma}^{PK-1} = \det(\mathbf{F})\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}, \quad \sigma^{PK-1} = (1+\delta_{\perp})^2 \sigma^C,$$



3.ábra. A feszültség-értelmezések összehasonlítása

PIOLA–KIRCCHOFF II. feszültségtenzor:

$$\boldsymbol{\sigma}^{PK-2} = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}, \sigma^{PK-2} = \frac{(1+\delta_{\perp})^2}{1+\delta}\sigma^C = \frac{1}{1+\delta}\sigma^{PK-1}.$$

A LEHETSÉGES CSOPORTOSÍTÁSOK:

$$\begin{array}{lll} C-C, & PK-1-C, & PK-2-C, \\ C-H, & PK-1-H, & PK-2-H, \\ C-GL, & PK-1-GL, & PK-2-GL. \end{array}$$

Az irodalom szerint a $C-C$ csak kis deformációk esetén alkalmazható, míg a többi már tetszőleges nagy deformációk – tehát véges kis- és nagy deformációk – esetén is. Fel szokták vetni azt is, hogy a $\sigma^i = E\varepsilon^j$ ($i = C, PK1, PK2, j = C, H, GL$) alakú, ún. HOOKE-törvény melyik felírásban melyik a leglineárisabb? A változatok a következők:

(a) CAUCHY-feszültség CAUCHY-deformációval:

$$\sigma^C = \frac{F}{A_0(1+\delta_{\perp})^2}, \quad \varepsilon^C = \delta, \quad \Rightarrow E = E(\delta, \delta_{\perp}) = \frac{F/A_0}{(1+\delta_{\perp})^2 \delta} = \frac{const}{(1+\delta_{\perp})^2 \delta}, \quad [\text{konvex}]$$

(b) CAUCHY-feszültség HENCKY-deformációval:

$$\sigma^C = \frac{F}{A_0(1+\delta_{\perp})^2}, \quad \varepsilon^H = \ln(1+\delta), \quad \Rightarrow E = E(\delta, \delta_{\perp}) = \frac{const}{(1+\delta_{\perp})^2 \ln(1+\delta)}, \quad [\text{konvex}]$$

(c) CAUCHY-feszültség GREEN–LAGRANGE-deformációval:

$$\sigma^C = \frac{F}{A_0(1+\delta_{\perp})^2}, \quad \varepsilon^{GL} = \left(\frac{1}{2}\delta^2 + \delta\right), \quad \Rightarrow E = E(\delta, \delta_{\perp}) = \frac{const}{(1+\delta_{\perp})^2 \left(\frac{1}{2}\delta^2 + \delta\right)}, \quad [\text{konvex}]$$

(d) PIOLA–KIRCCHOFF I.-feszültség CAUCHY-deformációval:

$$\sigma^{PK-1} = \frac{F}{A_0}, \quad \varepsilon^C = \delta, \quad \Rightarrow E = E(\delta, \delta_{\perp}) = const, \quad [\text{lineáris}]$$

(e) PIOLA–KIRCCHOFF I.-feszültség HENCKY-deformációval:

$$\sigma^{PK-1} = \frac{F}{A_0}, \quad \varepsilon^H = \ln(1+\delta), \quad \Rightarrow E = E(\delta, \delta_{\perp}) = \frac{const}{\ln(1+\delta)}, \quad [\text{konvex}]$$

(f) PIOLA–KIRCCHOFF I.-feszültség GREEN–LAGRANGE-deformációval:

$$\sigma^{PK-1} = \frac{F}{A_0}, \quad \varepsilon^{GL} = \left(\frac{1}{2}\delta^2 + \delta\right), \quad \Rightarrow E = E(\delta, \delta_{\perp}) = \frac{const}{\left(\frac{1}{2}\delta^2 + \delta\right)}, \quad [\text{konkáv}]$$

(g) PIOLA–KIRCCHOFF II.-feszültség CAUCHY-deformációval:

$$\sigma^{PK-2} = \frac{1}{1+\delta} \frac{F}{A_0}, \quad \varepsilon^C = \delta, \quad \Rightarrow E = E(\delta, \delta_{\perp}) = \frac{const}{1+\delta}, \quad [\text{konkáv}]$$

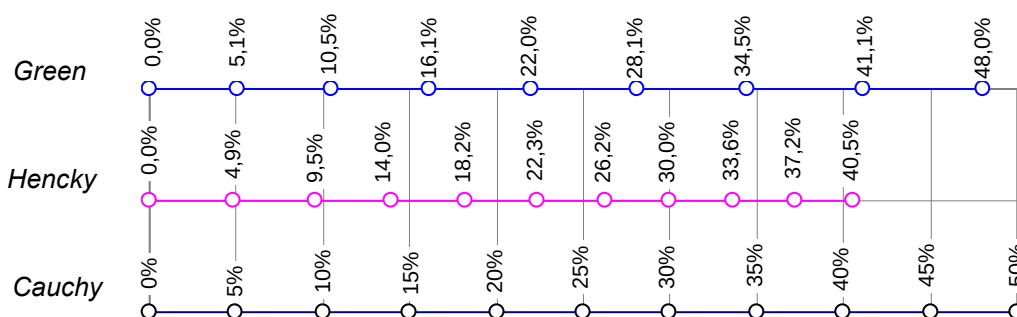
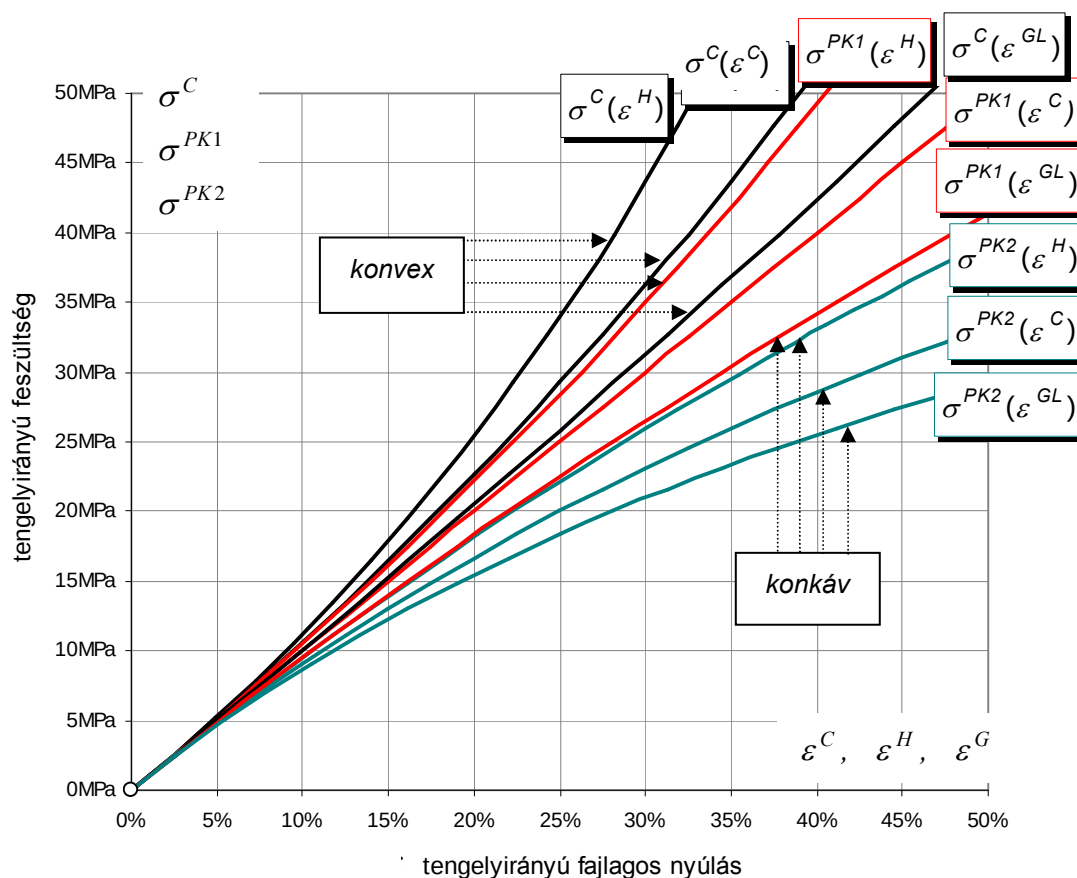
(h) PIOLA–KIRCCHOFF II.-feszültség HENCKY -deformációval:

$$\sigma^{PK-2} = \frac{1}{1+\delta} \frac{F}{A_0}, \quad \varepsilon^H = \ln(1+\delta), \quad \Rightarrow E = E(\delta, \delta_{\perp}) = \frac{const}{(1+\delta)\ln(1+\delta)}, \quad [\text{konkáv}]$$

(i) PIOLA–KIRCCHOFF II.-feszültség GREEN–LAGRANGE-deformációval:

$$\sigma^{PK-2} = \frac{1}{1+\delta} \frac{F}{A_0}, \varepsilon^{GL} = \left(\frac{1}{2} \delta^2 + \delta \right) \Rightarrow E = E(\delta, \delta_{\perp}) = \frac{const}{(1+\delta) \left(\frac{1}{2} \delta^2 + \delta \right)}, \text{ [konkáv]}$$

amelyeket a 4. ábra mutatja, s láthatjuk, hogy az egyetlen lineáris összefüggést a PK1-feszültség ad a C-deformáció függvényében.



4. ábra. σ - ε összefüggések lineáris terhelő erő esetén

Az egytengelyű húzó- v. nyomókísérleteknél – a laboratóriumi berendezések vezérlése – miatt kétféle kísérlet-típus lehetséges:

- az ún. *terhelésvezérelt* eset, amikor a tengelyirányú terhelés $[F(t), \text{ ill. } \Delta F(t)]$ beállításával végzik, és

- az ún. *elmozdulás-vezérelt* eset, amikor a húzó- v. nyomópofák tengelyirányú távolságának beállításával [$l(t)$, ill. $\Delta l(t)$] végzik a kísérletet.

A laboratóriumok az esetek túlnyomó részében

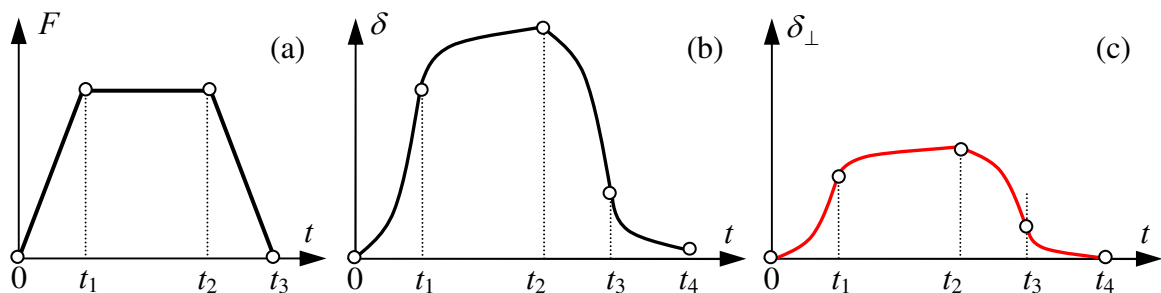
- a *terhelésvezérelt* esetben a tengelyirányú feszültséget legtöbbször a $\sigma(t) = F(t)/A_0$ összefüggéssel számítják és *feszültségvezérelt* esetnek tekintik, pedig ez csak a PIOLA–KIRCHOFF I.-feszültségértelmezés szerint az,
- az *elmozdulás-vezérelt* esetet analóg módon *deformáció-vezéreltnek* hívják, ami csak akkor igaz, ha a tengelyirányú deformációt az $\varepsilon(t) = \Delta l(t)/l_0$ összefüggéssel számítják (ez egyedül a kis deformációknál megszokott CAUCHY-féle deformáció-értelmezésnek felel meg).

Ezek a gondok tovább gyűrűznek, mert pl.

- *kúszásnak* nevezzük a „rögzített (állandó) feszültség” mellett bekövetkező deformációt, s nem pedig a terhelő erő állandósága mellett,
- *relaxációnak* nevezzük a „rögzített (állandó) deformáció” mellett bekövetkező feszültségcsökkenést. Itt nincsen semmi gond, mert az elmozdulás zérus értéke a fajlagos nyúlás állandóságát, s mindegyik deformáció állandóságát jelenti.

Vegyünk példának egy-egy megszokott kúszási és relaxációs kísérletet.

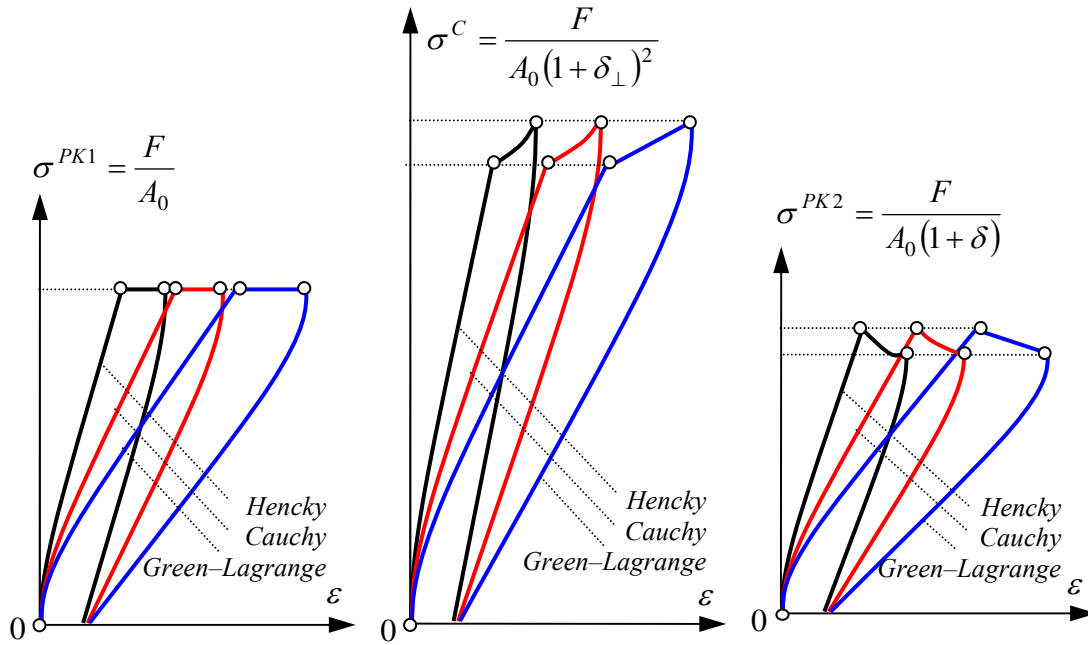
TERHELÉSVEZÉRELTE KÍSÉRLET. Álljon egy vizsgálat az 5. ábra (a) részén látható egyenletes felterhelésből, terheléstartásból és egyenletes sebességű tehermentesítésből. A mérés során rögzítésre kerül a δ tengelyirányú- és $\delta_{\perp}$ keresztirányú fajlagos nyúlás (5. ábra (b) része).



5. ábra. A terhelésvezérelt mérés adatai

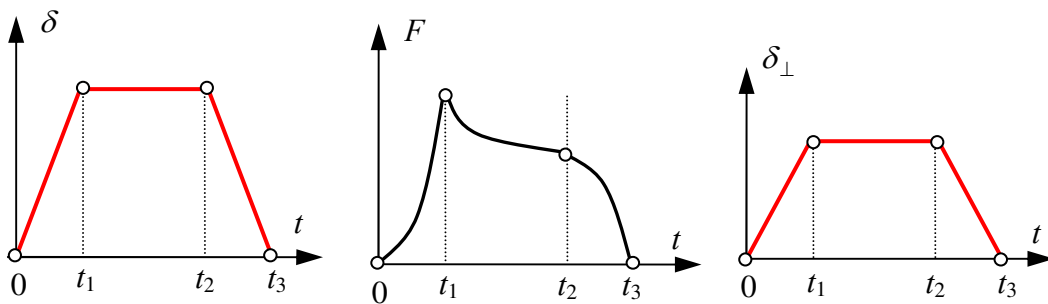
A $[t_1; t_2]$ időtartam alatti változást, amikor a terhelés változatlan, viszont a deformációk folytatódnak, *kúszásnak* neveztük. Ma már ez pongyola megfogalmazás, mert a terhelés változatlansága az A keresztmetszet változása miatt nem jelenti a *feszültség állandóságát*, csupán abban az esetben, ha a feszültség az erő és a kiinduló keresztmetszet hányadosaként értelmezett, mint az a 6. ábrából látható.

Tehát a σ^{Cauchy} és $\sigma^{Pilola-Kirchhoff-1}$ feszültségek esetén, mivel a próbatest keresztmetszete folyamatosan változik, ez a rész is (bár alacsonyabb és nem állandó sebességgű) felterhelési szakasznak tekinthető.



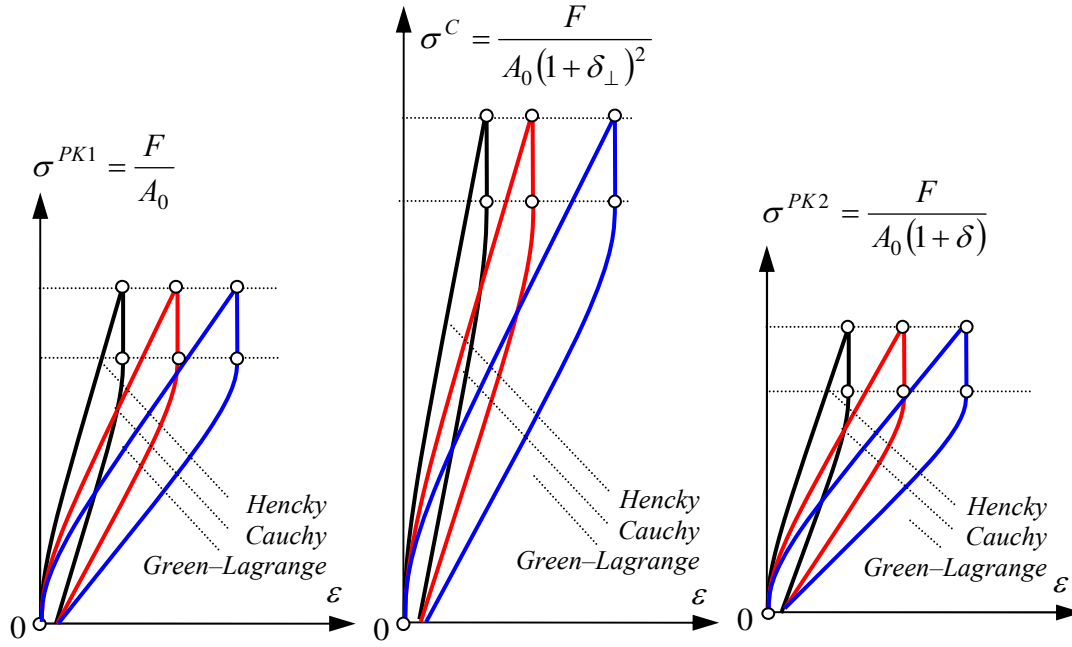
6. ábra A különböző σ - ε görbék ($\varepsilon^C = \delta$, $\varepsilon^H = \ln(1+\delta)$, $\varepsilon^{GL} = \delta + \frac{1}{2}\delta^2$).

ELMOZDULÁS-VEZÉRELT KÍSÉRLET. Álljon egy vizsgálat a 7. ábrán (a) részén látható egyenletes nyújtásból, majd annak állandó értéken tartásából és egyenletes sebességgű csökkentéséből. A mérés során rögzítésre kerül az F tengelyirányú terhelés és $\delta_\perp$ keresztirányú fajlagos nyúlás (6. ábra (b) és (c)).



7. ábra. Az elmozdulás-vezérelt mérés adatai

Az előző változattal ellentétben a $[t_1; t_2]$ időtartam alatti változás nyugodtan nevezhetjük *relaxációnak*, a *feszültség ernyedésének*, mivel $\delta = \text{constans}$ esetben mindegyik deformáció konstans értékű.



8. ábra.

MÉRÉSEK KIÉRTÉKELÉSE

Az egytengelyű kísérlet során kapott mérési eredmények általában az F terhelés és $\dot{F}$ terhelési sebesség, az δ hossz- és $\delta_\perp$ keresztirányú fajlagos nyúlás, valamint azok sebessége, esetleg kivételes esetekben, ha a mérési lehetőség adott, akkor még a gyorsulás is. $\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_\perp$ ($\ddot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}_\perp$)

A mérési adatokból előállítjuk

(i) a választott σ tengelyirányú feszültséget és $\dot{\sigma}$ feszültségváltozási sebességet:

$$\sigma^{PK1} = \frac{F}{A_0}, \quad \sigma^C = \frac{F}{A_0(1+\delta_\perp)^2}, \quad \sigma^{PK2} = \frac{F}{A_0(1+\delta)},$$

$$\dot{\sigma}^{PK1} = \frac{\dot{F}}{A_0}, \quad \dot{\sigma}^C = \frac{\dot{F}}{A_0(1+\delta_\perp)^2}, \quad \dot{\sigma}^{PK2} = \frac{\dot{F}}{A_0(1+\delta)},$$

valamint a deviatorikus és gömbi komponenseket:

$$\sigma^o = \frac{1}{3}\sigma, \quad \sigma^d = \sigma - \sigma^o = \frac{2}{3}\sigma, \quad \dot{\sigma}^o = \frac{1}{3}\dot{\sigma}, \quad \dot{\sigma}^d = \dot{\sigma} - \dot{\sigma}^o = \frac{2}{3}\dot{\sigma},$$

(ii) a választott típusú deformációkat:

$$\varepsilon^C = \delta, \quad \varepsilon^H = \ln(1+\delta), \quad \varepsilon^{GL} = \left(\frac{1}{2}\delta^2 + \delta\right)$$

$$\varepsilon_\perp^C = \delta_\perp, \quad \varepsilon_\perp^H = \ln(1+\delta), \quad \varepsilon_\perp^{GL} = \left(\frac{1}{2}\delta_\perp^2 + \delta_\perp\right),$$

valamint a deviatorikus és gömbi komponenseket:

$$\begin{aligned}\varepsilon^o &= \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_{\perp}), & \dot{\varepsilon}^o &= \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_{\perp}), & \ddot{\varepsilon}^o &= \frac{1}{3}(\ddot{\varepsilon} + 2\ddot{\varepsilon}_{\perp}), \\ \varepsilon^d &= \varepsilon - \varepsilon^o, & \dot{\varepsilon}^d &= \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^o, & \ddot{\varepsilon}^d &= \ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}^o.\end{aligned}$$

A mérési adatok kiértékelése az anyagtörvény egyenletének ismeretében történhet, amely legáltalánosabban a tehetetlenségi POYNTING–THOMSON-féle (ún. standard) modell, s

$$\begin{aligned}\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma}^d &= \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^d - \Psi^d (2G - 2G_{pl}) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) (\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d), \\ \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma}^o &= \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^o - \Psi^o (3K - 3K_{pl}) \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) (\boldsymbol{\varepsilon}^o - \boldsymbol{\varepsilon}_f^o)\end{aligned}\quad (3)$$

formában írható fel. Ez tömör szilárd testeknél

$$\begin{aligned}\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma}^d &= \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^d - \Psi^d (2G - 2G_{pl}) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) (\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d), \\ \left(1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\sigma}^o &= \left(3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\varepsilon}^o\end{aligned}\quad (3a)$$

alakúra egyszerűsödik. Ez azonban azt jelenti, hogy ismerni kéne a torzulási és térfogati képlékenységi küszöböt

$$\begin{aligned}\Psi^d &= \begin{cases} 0, & \text{ha } W^d < W_f, \text{ vagy } \dot{W}^d < 0, \\ 1, & \text{ha } W^d \geq W_f, \text{ és } \dot{W}^d \geq 0, \end{cases} & W_f^d &= \int_0^{\varepsilon_f^d} \boldsymbol{\sigma}^d : d\boldsymbol{\varepsilon}^d, \\ \Psi^o &= \begin{cases} 0, & \text{ha } W^o < W_f^o, \text{ vagy } \dot{W}^o < 0, \\ 1, & \text{ha } W^o \geq W_f^o, \text{ és } \dot{W}^o \geq 0, \end{cases} & W_f^o &= \int_0^{\varepsilon_f^o} \boldsymbol{\sigma}^o : d\boldsymbol{\varepsilon}^o,\end{aligned}$$

amely azonban nem adott, értékét csak a mérési adatok alapján lehetséges előállítani. Ez jelentős gondot okoz a kiértékeléseknél. Ha van $k = 0, 1, \dots, n$ mérési eredményünk, akkor a kérdés az, hogy melyik mérési ponttól kezdődik a képlékeny állapot:

$$k = \underbrace{0, 1, \dots, f-1}_{\text{elasztikus}}, \underbrace{f, \dots, n}_{\text{plasztikus}}.$$

A mérési eredmények felrajzolása alapján, hogy melyik az a bizonyos f pont, általában nem határozható meg. Általában próbálgatásra kényszerülünk, s kénytelenek vagyunk külön értékelést végezni a rugalmas, és külön értékelést a képlékeny zónában, miközben a mérési eredményeket elválasztó pontot tologatjuk mindig eggyel tovább, ameddig a szorosság növekszik. Amikor csökkenni kezd, akkor ráfognak, hogy ott a folyáshatár. Tehát valójában a mérési adatokból az anyagállandók meghatározása és az f pont kijelölése a feladat.

A következőkben szorítkozunk a tömör szilárd testekre, amelyeknél nincs térfogati képlékenység, s ekkor az anyagtörvény

$$\Psi^d = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma^d + \tau \dot{\sigma}^d = 2G\varepsilon^d + 2\eta\dot{\varepsilon}^d + \theta\ddot{\varepsilon}^d, \\ \sigma^o + \tau_o \dot{\sigma}^o = 3K\varepsilon^o + 3K_v\dot{\varepsilon}^o + \theta_o\ddot{\varepsilon}^o, \end{cases} \quad (4el)$$

$$\Psi^d = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma^d + \tau \dot{\sigma}^d = 2G_{pl}\varepsilon^d + 2\eta_{pl}\dot{\varepsilon}^d + \theta\ddot{\varepsilon}^d, \\ \sigma^o + \tau_o \dot{\sigma}^o = 3K\varepsilon^o + 3K_v\dot{\varepsilon}^o + \theta_o\ddot{\varepsilon}^o, \end{cases} \quad (4pl)$$

ahol a rugalmas anyagállandón kívül csak egy képlékeny állandó van a $2G_{pl}$ képlékenységi modulus, ugyanis a képlékeny viszkozitás $2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau$ formában számítható.

A mérési adatokhoz illesztett kiegyenlítő függvény alapján határozhatók meg az anyagállandók.

1. A legegyszerűbb eset, ha olyan laboratóriumban készült az egytengelyű kísérlet, ahol van lehetőség a gyorsulás-adatok mérésére is, ui. ebben az esetben az

$$S_{el}^d(2G, 2\eta, \theta, \tau) \equiv \sum_{k=0}^f [\sigma_k^d - 2G\varepsilon_k^d + 2\eta\dot{\varepsilon}_k^d + \theta\ddot{\varepsilon}_k^d - \tau\dot{\sigma}_k^d]^2 \rightarrow \text{Min!} \quad (5a)$$

$$S_{pl}^d(2G_{pl}, 2\eta_{pl}, \theta, \tau) \equiv \sum_{k=f}^n [\sigma_k^d - 2G_{pl}\varepsilon_k^d + 2\eta_{pl}\dot{\varepsilon}_k^d + \theta\ddot{\varepsilon}_k^d - \tau\dot{\sigma}_k^d]^2 \rightarrow \text{Min!} \quad (5b)$$

$$S^o(3K, 3K_v, \theta_o, \tau_o) \equiv \sum_{k=0}^n [\sigma_k^o - 3K\varepsilon_k^o + 3K_v\dot{\varepsilon}_k^o + \theta_o\ddot{\varepsilon}_k^o - \tau_o\dot{\sigma}_k^o]^2 \rightarrow \text{Min!} \quad (5c)$$

négy-ismeretlenes *lineáris* egyenletrendszerek megoldása szolgáltatja a keresett anyagállandók értékét a tehetetlenségi standard modell esetén.¹ A korrekt megoldás az lenne ha tudnánk az f sorszámot integer változóként kezelni:

$$S(f, 2G, 2\eta, \theta, \tau, 2G_{pl}, 2\eta_{pl}) \equiv \sum_{k=0}^f [\sigma_k^d - 2G\varepsilon_k^d + 2\eta\dot{\varepsilon}_k^d + \theta\ddot{\varepsilon}_k^d - \tau\dot{\sigma}_k^d]^2 + \sum_{k=f}^n [\sigma_k^d - 2G_{pl}\varepsilon_k^d + 2\eta_{pl}\dot{\varepsilon}_k^d + \theta\ddot{\varepsilon}_k^d - \tau\dot{\sigma}_k^d]^2 \rightarrow \text{Min!}$$

2. Ha a deformációgyorsulás értékek nem állnak rendelkezésre, akkor két utat járhatunk:

a) megelégszünk a standard modell szerinti megoldással

$$S^d(2G, 2\eta, \tau) \equiv \sum_{k=0}^n [\sigma_k^d - 2G\varepsilon_k^d + 2\eta\dot{\varepsilon}_k^d - \tau\dot{\sigma}_k^d]^2 \rightarrow \text{Min!}$$

$$S^o(3K, 3K_v, \tau_o) \equiv \sum_{k=0}^n [\sigma_k^o - 3K\varepsilon_k^o + 3K_v\dot{\varepsilon}_k^o - \tau_o\dot{\sigma}_k^o]^2 \rightarrow \text{Min!}$$

feltételezve, hogy a folyamat során a tehetetlenségi tag szerepe csak néhány másodpercig különbözik zérustól,

¹ Ehhez próbálgatással meg kell határozni az f -edik mérési pontot, s a $2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau$ egyenlet kontrollul szolgál még.

b) vagy a mérési eredményekre illesztett kiegyenlítő függvény alapján állítjuk elő számítással (idő szerinti deriválással) a hiányzó gyorsulási adatokat.

3. Nemlineáris illesztéssel keressük meg az anyagállandók értékét. Pl. egyenletes terhelési sebesség esetén, az anyagegyenlet $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_a = \text{állandó}$ feltétel melletti megoldásából, amely a *tehetetlenségi standard* modell esetén:²

$$\varepsilon^d = \frac{2}{3} \frac{\dot{\sigma}_a}{\theta(s_1 - s_2)} \left\{ (\tau + t) \left[\frac{1}{s_1} (e^{s_1 t} - 1) - \frac{1}{s_2} (e^{s_2 t} - 1) \right] - \left[\frac{1 + e^{s_1 t} (s_1 t - 1)}{s_1^2} - \frac{1 + e^{s_2 t} (s_2 t - 1)}{s_2^2} \right] \right\}$$

$$\varepsilon^o = \frac{1}{3} \frac{\dot{\sigma}_a}{\theta_o(s_1^o - s_2^o)} \left\{ (\tau_o + t) \left[\frac{1}{s_1^o} (e^{s_1^o t} - 1) - \frac{1}{s_2^o} (e^{s_2^o t} - 1) \right] - \left[\frac{1 + e^{s_1^o t} (s_1^o t - 1)}{s_1^{o2}} - \frac{1 + e^{s_2^o t} (s_2^o t - 1)}{s_2^{o2}} \right] \right\}$$

ahol $s_{1,2} = -\frac{\eta}{\theta} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2 - 2\frac{G}{\theta}}$ és $s_{1,2}^o = -\frac{3K_v}{2\theta_o} \pm \sqrt{\left(\frac{3K_v}{2\theta_o}\right)^2 - 2\frac{G}{\theta_o}},$

illetve a *standard* modell esetén:

$$\varepsilon^d = \frac{2}{3} \dot{\sigma}_a \left\{ \frac{\tau}{2\eta} t + \frac{2\eta - 2G\tau}{(2\eta)^2} \left[\left(-\frac{e^{-\frac{G}{\eta}t}}{\frac{G}{\eta}} + \frac{t}{\frac{G}{\eta}} \right) - \left(\frac{e^{-\frac{G}{\eta}t}}{\left(\frac{G}{\eta}\right)^2} \left(-\frac{G}{\eta} t - 1 \right) + \frac{1}{\left(\frac{G}{\eta}\right)^2} \right) \right] \right\},$$

$$\varepsilon^o = \frac{1}{3} \dot{\sigma}_a \left\{ \frac{\tau_o}{3K_v} t + \frac{3K_v - 3K\tau_o}{(3K_v)^2} \left[\left(-\frac{e^{-\frac{K}{K_v}t}}{\frac{K}{K_v}} + \frac{t}{\frac{K}{K_v}} \right) - \left(\frac{e^{-\frac{K}{K_v}t}}{\left(\frac{K}{K_v}\right)^2} \left(-\frac{K}{K_v} t - 1 \right) + \frac{1}{\left(\frac{K}{K_v}\right)^2} \right) \right] \right\}$$

formában írható fel. Ekkor az

$$S_{el}^d(2G, 2\eta, \theta, \tau) \equiv \sum_{k=0}^f [\varepsilon_k^d - f(\varepsilon_k^d)]^2 \rightarrow \text{Min!}$$

$$S_{pl}^d(2G_{pl}, 2\eta_{pl}, \theta, \tau) \equiv \sum_{k=0}^f [\varepsilon_k^d - f(\varepsilon_k^d)]^2 \rightarrow \text{Min!}$$

$$S^o(3K, 3K_v, \theta_o, \tau_o) \equiv \sum_{k=0}^n [\sigma_k^o - f(\varepsilon_k^o)]^2 \rightarrow \text{Min!}$$

nemlineáris egyenletrendszerek szolgáltatják az eredményt.

Az is egy kiértékelési lehetőség, hogy a diszkrét mérési eredményeket egy folytonos függvénnyel közelítjük, s a minimumszámításnál integrál-összefüggéssel dolgozunk.

² Csúpn a rugalmas részre felírva, ui. a képlékeny már értelemszerűen adódik, csak a képlékeny modult kell beírni.

$$S_{el}^d(2G, 2\eta, \theta, \tau) \equiv \int_0^{\varepsilon_f^d} [\varepsilon^d - f_{el}(\varepsilon^d)]^2 d\varepsilon^d + \int_{\varepsilon_f^d}^{\varepsilon_n^d} [\varepsilon^d - f_{pl}(\varepsilon^d)]^2 d\varepsilon^d \rightarrow \text{Min!}$$

A mérési eredmények kiértékelése jelentős problémákat okozhat, ezért nagy körültekintéssel kell eljárni. Példaként ezt illusztrálnánk, a Debreceni Egyetem Műszaki Kar, Környezet- és Vegyészmérnöki Tanszék, Biomechanikai Anyagvizsgáló Laboratóriumában 2010. szeptember 27-én végzett egytengelyű nyomókísérlettel. A próbatest: a Borsodchem Zrt. által gyártott LE 411/009 típusú lágy PVC, 7,85 mm kezdeti átmérővel és 120 mm kiindulási hosszal. Terhelésvezérelt kísérlet az INSTRON 8874 biaxiális anyagvizsgáló berendezésen 10 N/perc egyenletes sebességű terheléssel, 150 N-ig.

A paraméterek illesztését – egy nemlineáris program alkalmazásával – két esetre végeztük el: 1. terhelés teljes 0-900 sec időtartamára (711 adatpont), és 2. 100-800 s időtartamra (36 adatpont). Az alábbi táblázatból látható, hogy pl. a standard modell esetében, a két különböző esetre kapott eredmények között jelentős az eltérés:

711 adatpont	36 adatpont	711 adatpont	36 adatpont
$G = 3\,049\,150 \text{ Pa},$	$3\,054\,480 \text{ Pa},$	$K = 4\,309\,090 \text{ Pa},$	$3\,348\,340 \text{ Pa},$
$\eta = 356\,590\,000 \text{ Pas},$	$12\,120\,600 \text{ Pas},$	$K_v = 2\,794\,510\,000 \text{ Pas},$	$4\,707\,190\,000 \text{ Pas},$
$\tau = 128,2554 \text{ s},$	$15,3797 \text{ s},$	$\tau_0 = 322,4779 \text{ s},$	$579,6872 \text{ s}.$

Magyarázatot adni erre nem tudunk, ugyanis az esetleges mérési hibák ezt az eltérést nem indokolják. Az adatsorhoz legjobban illeszkedő eredményt kaptunk (ténylegesen minimum), mert a változtatások növelik a szórást és csökkentik a regresszió értékét. Fakadhat ez a modell differenciálegyenletének sajátosságából? Pedig a matematikai vizsgálat nem mutat több lokális minimumot. Ezért hangsúlyozzuk a nagy körültekintést. Nagyon jó lenne erre magyarázatot találni, egy elfogadható kiértékelési módszert, s megfelelő számítógépes programot hozzárendelni, hogy a különböző reológiai laboratóriumok kiértékelését a mérnöki alkalmazásokhoz alapul lehessen venni.

IRODALOM

- SZARKA, Z. (2006): Izotrop kontinuumok anyagtörvénye. V. Anyagállandók laboratóriumi meghatározása. (Szerk. Asszonyi, Cs.) *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 3*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 131-159.
- ASSZONYI, CS. – KAPOLYI, L. (1976): Kőzetek mechanikai jellemzőinek meghatározása. *MTA VEAB monográfiái*, Veszprém. p. 192.

AZ EGYSZERŰSÍTETT ANYAGTÖRVÉNYRŐL

Asszonyi Csaba

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Jelen tanulmány a MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT munkatársainak az elmúlt hat évben született [1-6], az irreverzibilis termodinamika alapelveire épülő, az anyagtörvényre vonatkozó eredményei egy részét foglalja össze, a legfrissebb felismerések által kiegészítve. A legújabb eredmények számos részletet módosítottak, javítottak, sőt egyszerűsítettek. Ennek a cikknek célja, hogy egyetlen helyen megtalálható legyen minden olyan, a konstitúciós egyenletekre vonatkozó összefüggés, amelyekre a mérnöki alkalmazásoknál építeni érdemes.

A tanulmány izotrop kontinuumok – izotermikus – rugalmas-képlékeny anyagtörvényét írja le, a műszaki gyakorlatban megengedhető egyszerűsítésekkel. Ezek a közelítések megengedettek, de szűkítik az eredmények érvényességi tartományát. Viszont nem szükségszerűek, csupán az egyszerűbb tárgyalás (és a mérnöki alkalmazás) érdekében folyamodunk hozzájuk az eredmények könnyebb áttekinthetősége érdekében, ui. a hivatkozott tanulmányokban az általános megoldások is megtalálhatók.

BEVEZETÉS

ÁLTALÁNOS MEGJEGYZÉSEK. Napjainkban a kontinuumok mechanikai viselkedését leíró modellek száma oly nagy, hogy már szinte lehetetlen eligazodni köztük. Ezeket, bár önkényesen, de két nagy részre lehet osztani:

- a korszerű *irreverzibilis termodinamika* elméletére támaszkodó konstitúciós egyenletekre, amelyek legfőbb előnye, hogy a termodinamikai főtételek nem sérülnek, figyelembe veszik a disszipációs feltételeket, s így bizonyos anyagtulajdonságok, mint a belső súrlódás, relaxáció, tehetetlenség kézzel-

foghatóvá, magyarázhatóvá válnak, s széleskörű alkalmazást tesznek lehetővé,

- a klasszikus, tisztán *mechanikai* jellegű modellekre, amelyeknél legtöbbször a laboratóriumi kísérletek és a természeti megfigyelések alapján, mintegy építőkockaszerűen rakják össze az ún. anyagegyenletet, általában egyre több és több paraméterrel.¹

Ráadásul ez a kétféle út nem is független egymástól, mert a mechanika sok évszázad tudományos kutatásai alapján magasfejltségű tudománnyá vált, amelynek eredményei adott feltételek mellett helytállóak. Például az időfüggetlen (nemreológiai) rugalmas-képlékeny testek diszciplínái többségükben képesek eleget tenni a termodinamikai megfeleltetésnek, a disszipáció-mentes folyamatok törvényszerűségeinek. Azonban mindig tisztában kell lennünk azzal, hogy a termomechanika – és így a mechanika – alapvető fogalma a *follyamat*, nem pedig az egyensúly, amely csupán egy kivételes folyamat. Ezért fizikailag reális „anyagtörvény” csupán a termodinamika főtételeiből vezethető le, semmiképp az ún. egyensúlyi egyenletből, vagy az energia megmaradás tételéből. Ezek az ún. mérlegegyenletek – a természet kettős könyvelése – nem szolgáltatnak a változás irányára vonatkozó információkat, bár ezt a hiányosságot a kutatók realitásérzékükkel áthidalják.

A korszerű anyagfelfogásnak – mások mellett – a kontinuumok irreverzibilis termodinamikájába szervesen kell illeszkednie, és a tudományterület minden törvénye, mint peremfeltétel, meg kell, hogy jelenjen benne. A probléma csak az, hogy a kontinuummechanika és az irreverzibilis termodinamika két, egymástól teljesen külön keletkezett és külön fejlődő terület. Összehangolásuk nem teljes és nem is problémamentes. A fizika két alapvetően eltérő szemléletmódját kell egyeztetni. Az egyikben az

¹ Ezért ezekre azt kell mondanunk, hogy nem fizikai, hanem emberi észkonstrukciók, amelyek megengedhetőségét külön vizsgálni kell. Példa erre az ún. anyagállandókra vonatkozó – a disszipativitás tényéből adódó – nemnegativitási és pozitív definitivitási feltételek. E miatt a tanulópénzt nekünk is meg kellett fizetnünk. Erre egyik példánk, hogy a Mátyási, Nagygyeházi és Lencsehegyi bányákból 1970-75 között kivett sok száz közetmintán végzett reológiai nyomóvizsgálatok „legkisebb négyzetek elve” alapján történő kiértékelése során kapott eredményekről, mintegy húsz év után derült ki, hogy 80%-uk nem teljesíti a termodinamikai feltételeket. Ekkor még a klasszikus standard modell került alkalmazásra, amelynél csak a torzulási állapot volt időfüggő, a térfogati nem. Ennél a modellen az időeltolás, amely a deformációk késési ideje (a viszkozitási együttható és a nyírási modulus hányadosa) és a relaxációs idő különbsége, számos esetben negatívra adódott, ami abszurd (fizikailag lehetetlen). Első reakciónk számítási hiba feltételezése volt, de az ellenőrzések nem mutattak hibát a számításban. Második reakció az volt, hogy a kiértékelésbe ezt a feltételt be kell építeni (pl. *Lagrange*-multiplikátorokkal). Ezt azonban nem hajtottuk végre, mert úgy véltük, hogy az anyag tudja a fizikát, tehát korlátozó feltételt nem szabad kívülről figyelembe venni. Ekkor vezettük le tisztán deduktív következtetések során a második főtételeiből – egyetlen belső dinamikai változóval, amely a levezetés során kiküszöbölhetővé vált – a ma is alkalmazott általános tehetetlenségi POYNTING–THOMSON-féle (standard) modellt, amellyel, a mérésekből már természeti törvényt nem sértő eredményekre jutottunk.

alaptörvények reverzibilisek, a világ tökéletes, és az irreverzibilitás az ideálistól való zavaró eltérés. A másikban az alaptörvények irreverzibilisek, a világ tökéletlen, és a reverzibilis határ soha el nem érhető idea. Mindkét esetben a második főtétel a kulcs, ami meghúzza a határt irreverzibilis és reverzibilis között. Ha úgy is véljük azonban, hogy értjük a második főtétel szellemét, mégis betűvé, matematikai eljárássá formulázni, az adekvát megfogalmazást megtalálni nem egyszerű feladat.

Mindkét csoportba sorolható munkák között számos hibás feltevés, elmélet található. Általánosan kimondható, hogy mindazon eredmények *helyesek fizikailag*, amelyek

- klasszikus *kontinuummechanikában*: a termodinamika második főtétele alapján is levezethetőek egyensúly esetére,
- *reológiában*: kielégítik a disszipációs feltételeket,²
- *termomechanikában*: az egyensúlyi állapotra korlátozva is helyes eredményt szolgáltatnak.³

A [11] alapvető tanulmányban nagyon részletes összefoglalás található a *klasszikus mechanika* asszociatív képlékenységi elméleteinek legfontosabb feltevéseiről:

1. a deformáció felbontható rugalmas és plasztikus komponensekre,
2. a képlékenységi határt kritikus feszültségekkel (feszültségtérben definiált folyásfüggvény egy szintfelületével) jellemzi,
3. a képlékenységi határ állandó,
4. létezik képlékeny potenciál,
5. létezik valamiféle szabály a képlékeny deformáció nagyságának meghatározásához,

A *termodinamikai* képlékenységelméletek az előző 2-5. pontokat a következőképpen módosítják:

- (i) disszipációs potenciálként értelmezik a képlékenységi függvényt, s illesztik a nemegyensúlyi termodinamika elméletéhez,
- (ii) lehetővé teszik a képlékeny alakváltozásra vonatkozó fejlődési egyenlet termodinamikai (vagy variációs mechanikai) alapon történő származtatását.

Nem is nagyon érdemes ezen feltevések helyességével foglalkozni, mert azonnal kiesik közülük néhány, például

² Ld. ¹ lábjegyzet.

³ Erre lehetséges számtalan példából csak kettőt említünk, amelyek nagyhírű szerzőkhöz köthetők. 1. „A rugalmas-képlékeny modell levezethető egy *disszipációs függvényből*”, ami meglehetősen abszurd feltételezés, mivel pl. képlékeny állapot egyensúlyi – azaz disszipáció-mentes – esetben is létezik. 2. Visszanyerhető rugalmas energiáról és disszipált képlékeny energiáról (helyesen: munkáról) beszélnek, csak az a kérdés, hogy ez mit jelent? A képlékeny energia disszipálódik, vagyis a képlékeny állapot csökken? Holott az anyag egy reprezentatív térfogatelemében (RVE) tárolt rugalmas energia képes disszipálódni, de az a rugalmas energia, amely befagyott, helyesebben belső szerkezeti átalakulásra fordítódott, visszaalakulhat önmagától?

- ad 2. – a képlékenységi határfeltételt fizikailag nem lehet önmagában sem feszültségekkel, sem deformációkkal jellemezni, hanem csak a kettővel együtt, vagyis energiával, vagy munkával,
- ad 3. – a képlékenységi határ az anyag előéletétől függően változik, vándorol,
- ad (i) – képlékenység akkor is létezhet, ha nincs disszipáció.

Jelen tanulmányban azon eredményeket foglaljuk össze, amelyek *termodinamikára épülő kontinuummechanikai konstitutív egyenletekre* vonatkoznak.⁴ Ezáltal választ kapunk olyan kérdésekre, hogy vannak-e összefüggések a képlékenységi feltételek és a disszipációs függvények között, milyen legyen az állapotváltozók megválasztása, megengedhető-e a képlékeny alakváltozás állapotváltozóként történő használata, stb., amelyekre számos esetben, helytelen válaszok voltak érvényben.

MEGEGEDHETŐNEK VÉLT KÖZELÍTÉSEK. Az elmúlt években igyekeztünk a tárgyalásnál a szűkítő és korlátozó feltételeket kihagyni, illetve ezekre az általános levezetés után rámutatni.

Ezen összefoglalóban az általánosságot már kezdetben szűkítjük azon közelítések elfogadásával, amelyeket a mérnöki gyakorlat – egyszerűsítésre vonatkozó – igénye megengedhetőnek vél. Ennek oka az is, hogy MATOLCSI [17] alapvető, problémákat felsoroló cikke után nem tehetünk úgy, mintha azt nem olvastuk volna. S mivel az általa felvetett több kérdésre nem ismerjük a választ, kénytelenek vagyunk korlátozni vizsgálataink körét azon egyszerű esetekre, amikor biztosak lehetünk benne, hogy nem vétünk elvi hibát.

Ezek a korlátozó feltevések a következők:

- (a) az anyagtörvény egyensúlyi formájánál az – általánosan bizonyított – kvadratikus alak helyett megengedjük a lineáris (max. hiba 0,5-1%)⁵ formát,
- (b) a deformációknál az $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} := (\mathbf{v} \circ \nabla)^S$ közelítéssel élünk, ami megfelel a kis deformációk feltételezésének. A térfogategységre jutó deformációs teljesítmény (a kinetikusenergia forrássűrűsége) ekkor $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{v} \circ \nabla = \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{v} \circ \nabla)^S = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.⁶
- (c) ennek következtében a rugalmas és képlékeny deformációk additív formában felírhatók: $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_{pl} + \boldsymbol{\epsilon}_{pl}$.

A konstitutív egyenlet általános formájának levezetésénél:

⁴ Ezek nagy része az INTERNATIONAL SOCIETY FOR ROCK MECHANICS hazai konferenciáin került bemutatásra, s a *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár* 2006-2011 sorozatban jelent meg [1-6].

⁵ Ez nagymértékű egyszerűsítést jelent, mert lehetővé teszi az útfüggetlen rugalmas és képlékeny deformációk előállítását, sőt a teljes deformációval való tárgyalást, amely az egyetlen mérhető deformáció.

⁶ Ez lehetővé teszi a rugalmas és képlékeny deformációsebességek összegzését: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{el} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pl}$.

- (d) az objektív időderivált helyett a szubsztanciális időderiváltat vesszük,
- (e) a második főtétele kifejtésénél a – néhányak által kifogásolt és el nem fogadott – entrópiával operálunk, mint az irreverzibilitást, az egyirányú változást kifejező fogalommal, amely bármely folyamatban monoton növekszik,⁷
- (f) egyetlen dinamikai belső változót (dinamikai szabadságfokot), – amely az egyensúlytól való távolodást hivatott kifejezni, – veszünk alapul, amely a számítások során kiküszöbölődik.

A TÁRGYALÁS MENETE. Az általános levezetés után, az elemzéseket két lépcsőben végezzük:

- először egyensúlyi esetre (az időfüggetlen rugalmas-képlékeny testre), hogy a klasszikus mechanikával való egyezést lássuk,
- másodszor az egyensúlytól eltérő – általános – esetre.

A tárgyalás során a képlékenységet csak a deviatorikus (torzulási) állapotra korlátozzuk, ezáltal a talajmechanikai alkalmazás kiesik, nem a vizsgálat, hanem a részletes tárgyalás köréből. Ezt nem elvi szempont indokolja, csupán a tárgyalás rövidítése, ui. jelen kötet több cikkében megtalálhatók a térfogati képlékenységre vonatkozó összefüggések is, így elégséges jelen cikk végén azt csupán megemlíteni.

AZ EDDIGI ELMÉLETEK HIÁNYOSSÁGÁNAK LEGFŐBB OKA, hogy a tudósok bár tudták és tudják, hogy mi is az „anyagtörvény”, azonban lényegéről legtöbbször megfeledkeznek. Sokszor idéztük már, de még egyszer összefoglaljuk:

- (i) Az anyagtörvény, az anyag konstitúciós egyenlete nem függhet semmi mástól csak az anyagtól magától. Tehát nem függhet pl. a különböző terhelési folyamatok sorrendjétől, irányától, a koordinátarendszertől, stb.⁸
- (ii) Az „anyagtörvény”-t a gyakorlatban abból következtethetjük ki, hogy milyen viselkedést tapasztalunk a különféle folyamatokban.⁹
- (iii) Minden anyagnak *van* anyagtörvénye.

⁷ Az entrópia fogalmát, ha elhagynánk, akkor az ún. disszipációs feltételt, a disszipáció monoton növekedését kellene figyelembe vennünk, ami esetünkben megegyezik az entrópia növekedésével. MATOLCSI (2011) az entropikus anyag fogalmát használja, s rámutatott, hogy létezhet olyan anyag is, amelynél az entrópia klasszikus formában nem értelmezhető. (bár erre példát Ő sem tudott mutatni.)

⁸ Egyszerű termodinamikai példa: az anyagnak van állandó nyomáson vett fajhője, állandó térfogaton vett fajhője, és még számtalan más, folyamatától függő fajhője; vagyis az anyag „hőátadási viselkedése” folyamatától függ. Ugyanez igaz a „hőtágulási viselkedésre”, a „kompresszibilitási viselkedésre”, a „torzulási (nyírási) viselkedésre”, stb.

⁹ Vagyis a folyamat egyenletét behelyezzük az anyagtörvény egyenletébe (ha ismerjük), és akkor vissza kell kapnunk a már tapasztalt „viselkedést”. Ha nem ismerjük, akkor keressük azt az anyagegyenletet, amely adekvát a különböző tapasztalati viselkedésekkel.

- (iv) Minden anyagnak csak *egy* anyagtörvénye van. (Esetleg nem ismerjük azt, ezért a különböző esetekre különböző „viselkedéstörvénnyel” kísérjük meg leírni.
- (v) A második főtétele az anyag stabilitásának elve, s ez fejeződik ki az anyagtörvényben.

PÉLDA. A rugalmas-képlékeny mechanikai és termodinamikai diszciplínák túlnyomó többségénél megtalálható az a hibás feltételezés, hogy más anyagegyenlet érvényes rugalmas esetben és más rugalmas-képlékeny esetben. Ez a feltevés abból táplálkozott, hogy felterhelés során a rugalmas tartományban az ún. *rugalmas* összefüggés, majd a képlékenységi határ túllépése után az ún. *képlékeny* összefüggés érvényes, majd ha tehermentesítés következik, akkor ismét a *rugalmas* tartománybeli összefüggés van érvényben. Miközben ez látszólag igaz, mégis a tudományos megismerésnek azzal az esetével állunk szemben, amikor a *látszat elfedi a lényegét*.

Ha *anyagtörvény csak egyetlen lehet*, akkor nincs rugalmas és képlékeny, az anyagnak nem lehet kétféle anyagtörvénye: egy az ún. terhelésre, és egy másik a tehermentesítésre.¹⁰

Tehát *a hiba*: az anyagtörvényt összekeverték az anyag folyamatok mentén történő viselkedésével. Ezt a hibát szavakban – de nem tettekben – mi is elkövettük, pl. amikor azt mondtuk, hogy meghatároztuk a rugalmas folyamatokra vonatkozó anyagmodellt, és keressük a képlékenyre vonatkozót. Holott, ha véletlenül van elfogadható anyagtörvényünk a rugalmas alakváltozásokra, akkor az – bár nehezen hihető – az a képlékenyre is igaz.¹¹

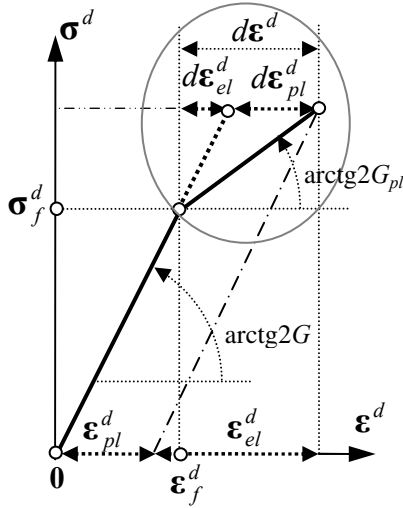
Bár ez a felismerés elég régi, még ma sem jutott el a tudatunkig. Már COULOMB is feltételezte, hogy „minden szilárd anyagnak van egy jellemző molekula-elrendezése, amelyet a kis rugalmas alakváltozás nem befolyásol. Nagyobb alakváltozásnál van egy képlékenységi határ, amely felett a molekulák között elcsúszás jön létre, viszont ez a *rugalmassági tulajdonságot nem befolyásolja*.” Vagyis ő érezte a természeti törvény lényegét, s azt is gondolta, hogy a folyáshatár átlépése után pl. a rugalmassági modulus nem változik, ezért továbbra is vannak rugalmas alakváltozások ugyanazzal az arányossági tényezővel.

FÜLÖP [2011] szavaival: „...durván fogalmazva, a bruttó alakváltozás egy λ -része a nyugalmi szerkezet csuszamlása, a maradék $(1-\lambda)$ -része a rugalmas alakváltozás”. Azaz:

¹⁰ Ez ui. azt jelentené, hogy az anyagtörvény függ az alakváltozási útvonaltól, holott az csak az anyagtól magától függhet. Ez akkor nem anyagtörvény, hanem különböző alakváltozási útvonalakhoz tartozó – viselkedéstörvény.

¹¹ Csupán az egyik esetben az összes deformáció megváltozása: $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}_{el}$, a másik esetben pedig $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}_{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}$.

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^d = d\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d + d\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d = (1-\lambda)d\boldsymbol{\varepsilon}^d + \lambda d\boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad [0 \leq \lambda \leq 1]$$



1. ábra

ahol $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ a teljes, $\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d$ a rugalmas és $\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d$ a képlékeny deformáció deviatorikus része (Ld. 1. ábra).

Ennek a látszólag triviális összefüggésnek messzemenő következményei vannak. Mértük ui. csak az $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ összes deformációt tudjuk. A folyáshatár alatt ez megegyezik a rugalmas deformációval ($\boldsymbol{\varepsilon}^d = \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d$), a folyáshatár fölött pedig: $d\boldsymbol{\varepsilon}^d = d\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d + d\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d$. A mérések pedig kiadják a λ értékét (legegyszerűbben pl. egyensúlyi esetben, a rugalmassági és képlékenységi modulus

értékéből: $\lambda = 1 - G_{pl}/G$).¹² Ennek eredményeképp a mérhető $\boldsymbol{\varepsilon}^d$, és a számítható λ érték ismeretében az $\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d$ egyértelműen adott. Ebből az is következik, hogy elég az $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ -t állapotváltozónak használni, s a képlékeny viselkedés visszaadásához felesleges újabb változók bevezetése, mint azt sokan teszik (HOULSBY, G.T, PUZRIN, A.M, COLLINS, I.F, TAI, A.). Sőt ez nemcsak felesleges, hanem megkímél bennünket attól a hibától, hogy disszipációs függvényekből (esetleg potenciálból) vezessük le a képlékeny állapotot, amely ugyebár disszipáció-mentes esetben (egyensúlyban) is létezik.

Mit is jelent ez? Ha van egy elfogadható, – termodinamikailag helyes – anyagtörvényünk a tisztán rugalmas folyamatokra, akkor ez a rugalmas-képlékeny folyamatokra is érvényes. Kérdés már csak az, hogy van-e?

A fenti 1. ábra és példa a torzulási (deviatorikus) képlékeny változásra utal, de a porózus anyagoknál létezik *térfogati* (gömbi) képlékeny változás is. Ez a képlékenységi lényegileg különböző mechanizmusok következménye lehet. A torzulási képlékenységre úgy tekinthetünk, mint a szerkezeti részek átrendeződésére¹³, a térfogati képlékenységi pedig az anyagban meglévő pórusok záródásának következménye lehet. Bár mindkettő *maradó* változásban jelentkezik, igazi képlékenységnak csak a

¹²

$$\Delta\sigma^d = 2G\Delta\varepsilon_{el}^d, \quad \Delta\sigma^d = 2G_{pl}(\Delta\varepsilon_{el}^d + \Delta\varepsilon_{pl}^d), \quad \Delta\varepsilon_{pl}^d = \left(\frac{2G}{2G_{pl}} - 1 \right) \Delta\varepsilon_{el}^d, \quad \Delta\varepsilon_{pl}^d = \frac{\lambda}{1-\lambda} \Delta\varepsilon_{el}^d, \quad \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{2G - 2G_{pl}}{2G_{pl}},$$

$$\lambda = 1 - \frac{G_{pl}}{G}, \quad 1 - \lambda = \frac{G_{pl}}{G}.$$

¹³ FÜLÖP szavaival a „nyugalmi szerkezet megcsuszamlása”.

torzulásit tekintik. Ennek történetileg kialakult oka, hogy a képlékenységi vizsgálatok kezdetben a fémekre vonatkoztak, amelyek tömörnek tekinthetők, s csupán későbbiekben jelentek meg a talajmechanika porózus anyagaira vonatkozó vizsgálatok.

AZ ANYAGTÖRVÉNY VÁLTOZÓI

Kontinuummechanikai feladatok megoldása során egyrészt a *mérlegegyenletek*, másrészt a kontinuum anyagi tulajdonságát kifejező *anyagtvörvények* állnak rendelkezésre, adott kezdeti és kerületi feltételek (idő- és térbeli peremfeltételek) mellett.

A mérlegegyenletek egyrészt behatárolják azon változók körét, amelyekről az anyagegyenletek függhetnek, másrészt matematikai alakban determinálják a második főtétel lehetséges formáját.

Jelen esetben a termodinamikai kölcsönhatások közül elsősorban a mechanikaival foglalkozunk. Ez azt jelenti, hogy a mechanikai és termikus kölcsönhatáson kívül az összes többit figyelmen kívül hagyjuk, vagyis nincs kémiai effektus, az elektromos és mágneses mező nem változik, stb. A termikus és mechanikai kölcsönhatás a belső energián keresztül állandó kapcsolatban van egymással, mechanikai hatásra is változik a közeg hőmérséklete, és termikus hatásra is felléphet alakváltozás. Nem fogjuk ezt a kapcsolatot részletesen tárgyalni, a vizsgálat egyszerűsítése érdekében feltételezzük, hogy közegünk izotermikusan (vagy adiabatikusan) izolált a környezetétől.

A mérlegegyenletek, amelyek mindegyike az adott fizikai mennyiségre vonatkozó fejlődési egyenlet, szubsztanciális formában a következők:¹⁴,

$$- \text{tömegmérleg:} \quad \dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1a)$$

$$- \text{impulzusmérleg:} \quad \rho \dot{\mathbf{v}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{g}, \quad (1b)$$

$$- \text{kinetikusenergia mérlege:} \quad \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right)^\cdot - \nabla \cdot (\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}) = - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}},^{15} \quad (1c)$$

$$- \text{teljes energia mérlege:} \quad \rho \dot{e}_\Sigma + \nabla \cdot (\mathbf{j}_q - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad (1d)$$

$$- \text{belső energia mérlege:} \quad \rho \dot{e} + \nabla \cdot \mathbf{j}_q = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}},^{14} \quad (1e)$$

$$- \text{entrópiamérleg:} \quad \rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \sigma_s \geq 0, \quad (1f)$$

amelyek mindegyike kontinuitási egyenlet.

A felsorolásból kihagytuk a $\rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v})^\cdot - \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma}^T - \boldsymbol{\sigma}$, impulzusmomentum-, vagy perdületmérleget, ugyanis a számításoknál csak a következményét, vagyis a feszültségtenzor szimmetrikus voltát használjuk fel.

¹⁴ [1] 39-41. old, ill. [2] 30-32. old.

¹⁵ A $(\mathbf{v} \circ \nabla)^S = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ közelítést behelyettesítve.

Az anyagtörvény változói csak a mérlegegyenletekben – mint dinamikai fejlődési egyenletekben – szereplő változók lehetnek. A [3] 18-20. oldalán bemutattuk, hogy sem a származtatott, sem a külső hatásokat jellemző változók nem szerepelhetnek benne, mert az anyagtörvény *csak az anyagtól függhet*. Ezek közül a tömeg, az impulzus és a teljes energia mérlege az alapmérleg, a többi ezekből származtatott. Objektivitási megfontolások miatt a belső energiát szokás alapváltozóként bevezetni [6]. A dinamikai egyenletekben szereplő extenzív¹⁶ változók és anyagfüggvények: az $\mathbf{\epsilon}$ – kis deformáció, másodrendű és szimmetrikus tenzor, illetve az e – fajlagos belső energia és a e_Σ – fajlagos összenergia közül az egyik. Mi a belső energiával dolgozunk.

A termodinamikában vannak MATOLCSI szerint kétféle törvény van és ezekre vonatkozóan a második főtételből származó megszorítás eltér:

- A *belső stabilitási kritériumok* az anyagok olyan tulajdonságai, amelyek a sztatikus konstitúciós függvényekben, az ún. állapotegyenletekben jelennek meg.
- A *disszipációs egyenlőtlenség* a kölcsönhatásokra vonatkozó dinamikai konstitutív függvényekre vonatkozik.

Ezek egymástól függetlenek, de mindkét megszorítást az entrópia segítségével szoktuk megfogalmazni. A belső stabilitási kritériumok az entrópia konkávitásához kapcsolódnak, a disszipációs egyenlőtlenség az entrópia elszigetelt rendszerben történő növekedését biztosítja. Megjegyezzük, hogy a két feltétel lényegi függetlenségét EHRENFEST-AFANASSJEWÁ állapította meg [12] és FÉNYES IMRE vezette be a magyar termodinamikai gondolkodásba [15, 16].

AZ ENTRÓPIAFÜGGVÉNY

Ennek megfelelően a legfontosabb anyagfüggvény az entrópiafüggvény, – mint a konstitúciós egyenlet levezetésére szolgáló függvény, – is csak a fenti változóktól függhet közvetlenül:

$$s = s(e, \mathbf{\epsilon}).$$

Célszerűségi okokból e és $\mathbf{\epsilon}$ kiegészülhet még a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ belső dinamikai változókkal, amelyek másodrendű tenzorok:

$$s = s(e, \mathbf{\epsilon}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k).$$

Azért is hívjuk ezeket belső változóknak, mert nem önállóan, hanem az alapváltozókon keresztül fejtik ki hatásukat. Mi mindössze egyetlen ξ belső változóval dolgozunk, így

$$s = s(e, \mathbf{\epsilon}, \xi). \quad (2)$$

¹⁶ Extenzívek azok a változók, melyeknél a véges kiterjedésű anyagdarab egészére jellemző mennyiségből additívan áttérhetünk lokális jellemzőre, azaz a fizikai mennyiség sűrűsége, vagy fajlagos értéke alkalmas fizikai mennyiség.

A ξ változó a reológiai hatásokat hozza a modellbe, s az egyensúlytól való eltávolodást fejezi ki, vagyis értéke egyensúlyban zérus¹⁷ [$\xi = \mathbf{0}$]. A ξ változóra vonatkozó fejlődési egyenletet nem ismerjük, annak formájára a második főtételel fogunk megszorításokat kapni.

Milyen változó lehet ez a ξ ? Tenzori rangja elvben bármilyen lehetne, de mivel a mechanikai hatásokra vonatkozó nemegyensúlyi tulajdonságokat modellezzük vele, másodrendű tenzornak tekintjük. Ilyen módon az izotrop anyagok viselkedését is észlelhetően befolyásolja, mert ekkor csatolódhat a deformációhoz.

Az entrópiafüggvényt additív formában is felírhatjuk, mint az anyagot egyensúlyban jellemző függvénykapcsolatot

$$s_{eq} := \tilde{s} = s(e, \boldsymbol{\epsilon}, \xi = \mathbf{0}) = \tilde{s}(e, \boldsymbol{\epsilon}),$$

és az egyensúlytól való $\Delta s = -\frac{1}{2}\xi : \xi$ eltérés összegét:

$$s(e, \boldsymbol{\epsilon}, \xi) = \tilde{s} - \Delta s = \tilde{s}(e, \boldsymbol{\epsilon}) - \Delta s(\xi) = \tilde{s}(e, \boldsymbol{\epsilon}) - \frac{1}{2}\xi : \xi. \quad (3)$$

A kinetikus energiához hasonló kvadrátikus forma az elvárt termodinamikai stabilitásnak (entrópia konkávitás) és annak következménye, hogy a ξ dinamikai változó a teljes termodinamikai egyensúlyban nulla. Ekkor a fenti függvénynek *minimuma* van a dinamikai változóban, azaz az állapottér ξ -hez tartozó nemegyensúlyi részén. A fenti egyszerű forma a MORSE-lemma szerint, egyben általános reprezentáció is [VERHÁS (1986)].

A termodinamika második főtétele az entrópia-mérlegen keresztül vezetjük be, s így adódik a dinamikai anyagtörvény meghatározására szolgáló disszipációs egyenlőtlenség.

AZ ENTRÓPIAMÉRLEG

Az (1f) alatti entrópiamérleg

$$\rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \sigma_s \geq 0,$$

szokott formája helyett

$$\rho \dot{s} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}_q}{T} = \sigma_s \geq 0$$

alakban is felírható, figyelembe véve, hogy az entrópia fluxusa a hőáramsűrűség és a hőmérséklet hányadosa:

¹⁷ VERHÁS-féle dinamikai szabadságfok.

$$\mathbf{j}_s = \frac{\mathbf{j}_q}{T}.$$

Az entrópiamérlegben szereplő

$$\rho \frac{ds}{dt} = \rho \dot{s}, \quad \text{illetve} \quad \rho \frac{d}{dt} \left[\tilde{s} - \frac{1}{2} \xi : \xi \right]$$

a következő formában írható fel:

$$\begin{aligned} \rho \dot{s}(e, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}) &= \rho \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e} + \rho \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\xi}} : \dot{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= \rho \frac{d}{dt} \left[\tilde{s} - \frac{1}{2} \xi : \xi \right] = \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial e} \dot{e} + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \xi : \dot{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= -\frac{1}{T} [\nabla \cdot \mathbf{j}_q - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{v} \circ \nabla] + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \xi : \dot{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= -\frac{1}{T} [\nabla \cdot \mathbf{j}_q - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \xi : \dot{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= -\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}_q}{T} + \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \left(\frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} + \rho \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \xi : \dot{\boldsymbol{\xi}}, \end{aligned} \quad (4)$$

felhasználva a belső energia mérlegét, továbbá azt, hogy a hőmérsékletet reciproka az entrópia belsőenergia szerinti deriváltja:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial e} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial e}.$$

Ekkor a fenti (4) számításból kapjuk az entrópiatermelést:

$$\sigma_s = \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\boldsymbol{\sigma} + \rho T (\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \xi : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0, \quad (5)$$

illetve $T = T_0 = \text{constans}$, izotermikus esetben:

$$\sigma_s T_0 = \left(\boldsymbol{\sigma} + \rho T_0 (\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho T_0 \xi : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0. \quad (6)$$

Ez az egyenlőtlenség a további vizsgálódásaink kiindulópontja, a mechanikai kontinuumok közelítő anyagtörvényei meghatározásának az alapja.

Az (5)-(6) összefüggés termodinamikai erők és áramok szorzata. Izotrop anyagokban az entrópiatermelés maga is izotrop függvény, ezért célszerű a másodrendű tenzorokat egy deviatorikus (nyomnélküli) tenzorra és egy gömbi (izotropikus) részre felbontani (amely egy skalár érték és az $\mathbf{I}$ egységtenzor szorzata). Ugyanis ezek szorzatának nyoma nulla, ezért nem csatolódhatnak. A

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^o = \boldsymbol{\sigma}^d + \sigma^o \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^d + \boldsymbol{\varepsilon}^o = \boldsymbol{\varepsilon}^d + \varepsilon^o \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^d + \boldsymbol{\xi}^o = \boldsymbol{\xi}^d + \xi^o \mathbf{I},$$

felbontással, ahol $\sigma^o = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$, $\varepsilon^o = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}$, $\xi^o = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\xi}$, a (6) egyenlőtlenség a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho T_0 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho T_0 \boldsymbol{\xi} : \dot{\boldsymbol{\xi}} = \\
= \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \boldsymbol{\sigma}^o : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o + \rho T_0 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \rho T_0 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^o} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o - \rho T_0 \boldsymbol{\xi}^d : \dot{\boldsymbol{\xi}}^d - \rho T_0 \boldsymbol{\xi}^o : \dot{\boldsymbol{\xi}}^o \geq 0
\end{aligned}$$

alakot ölti.

Feltételezzük, hogy a nyom nélküli tenzori és a skaláris áramoknak külön-külön kell a nemnegativitási feltételt teljesíteni, tehát a (6) két egyenlőtlenséget jelent:

$$\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{\sigma}^d + \rho T_0 \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^d \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \rho T_0 \boldsymbol{\xi}^d : \dot{\boldsymbol{\xi}}^d &\geq 0, \\
\left[\boldsymbol{\sigma}^o + \rho T_0 \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^o \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o - \rho T_0 \boldsymbol{\xi}^o : \dot{\boldsymbol{\xi}}^o &\geq 0
\end{aligned} \tag{7}$$

s ebben az összefüggésében szereplő termodinamikai erők és áramok

egyensúly esetén zérus értékűek, tehát

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{eq}^d = -\rho T_0 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d}, \quad \boldsymbol{\xi}_{eq}^d = \mathbf{0}, \\
\boldsymbol{\sigma}_{eq}^o = -\rho T_0 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^o}, \quad \boldsymbol{\xi}_{eq}^o = \mathbf{0},
\end{aligned} \quad \text{és} \tag{8}$$

egyébként pedig szorzatuk pozitív:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\sigma}^d - \boldsymbol{\sigma}_{eq}^d] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \rho T_0 \boldsymbol{\xi}^d : \dot{\boldsymbol{\xi}}^d &> 0, \\
[\boldsymbol{\sigma}^o - \boldsymbol{\sigma}_{eq}^o] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o - \rho T_0 \boldsymbol{\xi}^o : \dot{\boldsymbol{\xi}}^o &> 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Egyensúlyinak nevezünk egy anyagcsaládot, ha anyagfüggvényei (jelen esetben a nyomás) az egyensúlyban mérhető mennyiségektől (a deformációtól) függenek. Vagyis az ideálisan rugalmas anyag egyensúlyi. Az egyensúlyi jelzőt tehát itt termodinamikai értelemben használjuk, az anyagcsaládot jellemezve, szó sincs arról, hogy a kontinuum mechanikai egyensúlyban lenne, vagy időben állandóak lennének az állapotváltozók [2].

AZ ENERGIA ÉS A MUNKA

A kinetikusenergia mérlegegyenletében a spontán forrás: $\boldsymbol{\sigma}_{kin} \equiv -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{v} \circ \nabla$. Mivel ez negatív, ezért kinetikusenergia-disszipációról van szó, ami a makroszkopikus mozgás fokozatos elhalását eredményezi ([7], 115. old.). A belsőenergia-mérlegében ugyanez a forrás $\boldsymbol{\sigma}_{belső} \equiv \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{v} \circ \nabla$ pozitív, vagyis

a teljes energia megmaradását az a körülmény biztosítja, hogy a kinetikus energia az anyagi rendszer belső energiájává alakul.

Kontinuumok konstitúciós egyenletének, vagyis „anyagtörvényének” meghatározásához, a feszültségtenzor általános alakjának a felírásához ezt a körülményt fel fogjuk használni.

Izotrop kontinuum egy tetszőleges – reprezentatív – térfogatelemében a deformációs teljesítmény (más szavakkal a deformációs munka¹⁸ időegység alatti megváltozása, vagyis a σ feszültség munkasebessége):¹⁹

$$\frac{dW}{dt} \equiv \sigma : \mathbf{v} \circ \nabla \cong \sigma : \dot{\mathbf{\epsilon}} = \frac{d\Phi}{dt} + \mathcal{D}, \quad (10)$$

ahol $d\Phi/dt$ a rugalmas (potenciális) energia változása (teljesítménye), $\mathcal{D}$ pedig az energiadisszipáció sebessége, amely sohasem lehet negatív. Vagyis az anyagi rendszeren végzett munka

- egy része potenciális energiaként $[\Phi]$ tárolódik,
- másik része pedig disszipálódik $[\mathcal{D}]$.

Vegyük észre, hogy a pont nem időderiváltat jelöl (csak dimenzió-kijelölést), termodinamikailag szokásos jelölésekkel írhatnánk, hogy

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\delta \mathcal{D}}{\delta t},$$

ui. ekkor kiemeljük, hogy a $\dot{W}$ deformációs és az $\mathcal{D}$ disszipációs teljesítmény a $\dot{\Phi}$ -tal ellentétben, nem egy állapotfüggvény idő szerinti deriváltja, és ezért idő szerinti integráljuk útfüggő.

Az anyagi rendszerrel közölt impulzus és kinetikus energia következtében a rendszerben tárolt belsőenergia növekedése két részből $[\Phi = \Phi_{el} + \Phi_{pl}]$ áll:

- Φ_{el} – *rugalmas energiából*, amely teljes egészében visszanyerhető,
- Φ_{pl} – *tárolt képlékenységi munkából*, amely „befagy” az inhomogén feszültségeloszlás révén (vagyis befagyott rugalmas energia).

A tenzorok, mechanikában megszokott (^d deviatorikus és ^o gömbi) felbontásával

$$\dot{W} \equiv \sigma : \dot{\mathbf{\epsilon}} = \sigma^d : \dot{\mathbf{\epsilon}}^d + \sigma^o : \dot{\mathbf{\epsilon}}^o = \dot{W}^d + \dot{W}^o,$$

$$\dot{W}^d \equiv \sigma^d : \dot{\mathbf{\epsilon}}^d = \frac{d\Phi^d}{dt} + \mathcal{D}^d,$$

$$\dot{W}^o \equiv \sigma^o : \dot{\mathbf{\epsilon}}^o = \frac{d\Phi^o}{dt} + \mathcal{D}^o.$$

¹⁸ a térfogategységre jutó

¹⁹ ha $(\mathbf{v} \circ \nabla)^S = \dot{\mathbf{\epsilon}}$

írható, vagyis – pongyola terminológiával – a munka is *torzulási munkára* és *térfogatváltozási munkára* bontható.

A potenciális energia *rugalmas* és *képlékeny* részre történő bontásával

$$\begin{aligned}\dot{W}^d &\equiv \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \frac{d\Phi_{el}^d}{dt} + \frac{d\Phi_{pl}^d}{dt} + \mathcal{D}^d, \\ \dot{W}^o &\equiv \boldsymbol{\sigma}^o : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o = \frac{d\Phi_{el}^o}{dt} + \frac{d\Phi_{pl}^o}{dt} + \mathcal{D}^o.\end{aligned}\quad (11)$$

Ha a közeggel impulzust és kinetikai energiát közlünk, akkor az belső energiává alakul. Ha ezután a közeget magára hagyjuk, akkor csak a rugalmas energia nyerhető vissza. Sem a képlékeny munka, amely a belső szerkezeti átalakulásra fordítódott, sem a disszipációs munka, amely hővé alakult, nem képes mechanikai munkává változni. E miatt célszerű ezt a vissza nem alakuló részt *diszperziós munkának* (energiaszóródásnak, energiadiszperzióknak) nevezni:

$$\mathcal{D} = \frac{d\Phi_{pl}}{dt} + \mathcal{D}^i, \quad (12)$$

ui. az anyag tönkremeneteli határa – a tapasztalatok szerint – a diszperziós munkával van összefüggésben.

A *diszperziós munka* (vagy energiadiszperzió) fogalmának bevezetése nagy jelentőségű, mert helyére teszi a dolgokat. A jelentős szerzőknél kifogásolt elnevezés és levezetés abból származik, hogy disszipációs munkának nevezik a diszperziós munkát, ezért állítják, hogy a disszipációs munkából levezethető a képlékeny állapot, ami azért abszurd, mert disszipáció-mentes esetben is létezik képlékenységi. Viszont a diszperziós munkából már kiadódik a képlékeny állapot. Végeredményeik ezért jók mégis, mert – tudva, vagy sem, – de a diszperziós munkára gondolnak fejtegetéseiknél. Vagyis a $\mathcal{D}$ -ből nem vezethető le semmi más: csak a disszipációval összefüggő folyamatok időfüggése (függetlenül attól, hogy rugalmas vagy maradó alakváltozásokról van szó). A képlékenyedés mind a Φ_{pl} -ből, mind az $\mathcal{D}$ -ből levezethető a megfelelő feltételek mellett.

Az egyszerűség kedvéért először a tömör szilárd testekre szorítkozunk, amikor a térfogatváltozás nem okoz képlékeny (maradó) alakváltozást. Ekkor

$$\begin{aligned}\dot{W}^d &\equiv \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \frac{d\Phi_{el}^d}{dt} + \frac{d\Phi_{pl}^d}{dt} + \mathcal{D}^d = \frac{d\Phi_{el}^d}{dt} + \mathcal{D}^d, \\ \dot{W}^o &\equiv \boldsymbol{\sigma}^o : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o = \frac{d\Phi_{el}^o}{dt} + \underbrace{\frac{d\Phi_{pl}^o}{dt}}_{=0} + \mathcal{D}^o = \frac{d\Phi_{el}^o}{dt} + \mathcal{D}^o,\end{aligned}\quad (13)$$

vagyis

$$\frac{d\Phi_{pl}^o}{dt} = 0, \quad \frac{d\Phi_{pl}^d}{dt} + \mathcal{D}^d = \mathcal{L}^d, \quad \mathcal{D}^o = \mathcal{L}^o. \quad (14)$$

(A) ANYAGTÖRVÉNY EGYENSÚLY ESETÉN

Általában a rendszerrel közölt deformációs munka:

$$\begin{aligned} W &= \int_t \boldsymbol{\sigma}(t) : \boldsymbol{\varepsilon}(t) dt = \Phi + \mathcal{D} = \Phi_{el} + \Phi_{pl} + \mathcal{D} = \Phi_{el} + \mathcal{L}, \\ W^d &= \int_t \boldsymbol{\sigma}^d(t) : \boldsymbol{\varepsilon}^d(t) dt = \Phi^d + \mathcal{D}^d = \Phi_{el}^d + \Phi_{pl}^d + \mathcal{D}^d = \Phi_{el}^d + \mathcal{L}^d, \\ W^o &= \int_t \boldsymbol{\sigma}^o(t) : \boldsymbol{\varepsilon}^o(t) dt = \Phi^o + \mathcal{D}^o = \Phi_{el}^o + \mathcal{D}^o = \Phi_{el}^o + \mathcal{L}^o, \quad \Phi_{pl}^o = 0. \end{aligned}$$

Ezek az integrálok általában a terhelési pályától függenek, ezért időintegrálként értelmezhetők.

Egyensúlyi esetben nincs energiadisszipáció. Ekkor a rendszerrel közölt energia teljes egészében potenciális energiaként tárolódik:

$$\begin{aligned} W_{eq} &= \int \boldsymbol{\sigma}_{eq}(t) : \boldsymbol{\varepsilon}(t) dt = \Phi = \Phi_{el} + \Phi_{pl}, \\ W_{eq}^d &= \int \boldsymbol{\sigma}_{eq}^d(t) : \boldsymbol{\varepsilon}^d(t) dt = \Phi^d = \Phi_{el}^d + \Phi_{pl}^d, \\ W_{eq}^o &= \int \boldsymbol{\sigma}_{eq}^o(t) : \boldsymbol{\varepsilon}^o(t) dt = \Phi^o = \Phi_{el}^o, \quad \Phi_{pl}^o = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

s ekkor csak a kezdő és a végpont függvényei.

Az igaz, hogy *egyensúlyi* folyamat lehet *reverzibilis* és *irreverzibilis*, de egyértelmű, hogy minden rugalmas változás reverzibilis, és minden képlékeny változás irreverzibilis.

Azonban az egyensúlyon túl, vagyis nemegyensúlyi folyamatoknál minden folyamat *irreverzibilis*, akár rugalmas, akár képlékeny.

EGYENSÚLYRA VONATKOZÓ ISMERETEINK ÖSSZEFOGLALÁSA. Mit tudunk az *izotrop* anyagokról és azok egyensúlyi állapotáról? Idézzük ide az [ASSZONYI–VÁN–SZARKA (2007)] kötetben mondottakat:

1. Az *anyagtörvény*: a feszültségtenzor és a deformációtenzor közötti $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon})$ összefüggés, vagyis a $\boldsymbol{\sigma}$ csak és egyedül az $\boldsymbol{\varepsilon}$ függvénye.
2. A feszültségtenzor a deformációtenzor izotrop függvénye, csak a deformációtenzor skalár invariánsaitól függhet, tehát $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(D_I, D_{II}, D_{III})$, ahol

$$\begin{aligned}
D_I &= \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon^0, \\
D_{II} &= \frac{1}{2} (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1, \\
D_{III} &= \det \boldsymbol{\varepsilon} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3.
\end{aligned}$$

3. A CAYLEY–HAMILTON-tétel kimondja, hogy egy $\boldsymbol{\varepsilon}$ szimmetrikus tenzor kielégíti a sajátértékek és sajátvektorok meghatározására szolgáló, (háromdimenziós esetben) harmadfokú,:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^3 - D_I \boldsymbol{\varepsilon}^2 + D_{II} \boldsymbol{\varepsilon} - D_{III} \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

ún. karakterisztikus egyenletet.

Izotrop tenzorok felírhatók egy végtelen hatványsor alakjában:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \boldsymbol{\varepsilon}^i = \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 + \dots + \alpha_i \boldsymbol{\varepsilon}^i + \dots$$

módon. Felhasználva a karakterisztikus egyenletet, az

$$\boldsymbol{\varepsilon}^n - \alpha_{n-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{n-1} + \alpha_{n-2} \boldsymbol{\varepsilon}^{n-2} - \alpha_{n-3} \boldsymbol{\varepsilon}^{n-3} = \mathbf{0}$$

rekurzív formulát kapjuk, amely alapján az anyagtörvény legáltalánosabban másodfokú

$$\boldsymbol{\sigma} = f_0 \mathbf{I} + f_1 \boldsymbol{\varepsilon} + f_2 \boldsymbol{\varepsilon}^2,$$

polinomfüggvény lehet, ahol az együtthatók az egyensúlyi entrópiafüggvénnyel írhatók fel ([12] 120.old):

$$f_0 = -\rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial D_{III}}, \quad f_1 = -\rho T \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial D_I} + D_I \frac{\partial \tilde{s}}{\partial D_{II}} \right), \quad f_2 = +\rho T \frac{\partial \tilde{s}}{\partial D_{II}}.$$

Az f_0, f_1, f_2 együtthatók nem lehetnek függetlenek egymástól, ui. ki kell elégíteniük a vegyes parciális deriváltak egyenlőségének feltételét ([2] 68.old).²⁰

4. A másodfokú tag kihagyása az anyagegyenletből – mérnöki szempontból – elhanyagolható hibát eredményez ([2] 70-78. old.), így az anyagtörvény egyensúlyi formája jó közelítéssel lineárisnak tekinthető, azaz

$$\boldsymbol{\sigma} = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ illetve } \boldsymbol{\sigma}^d = \varphi^d \boldsymbol{\varepsilon}^d \text{ és } \boldsymbol{\sigma}^o = \varphi^o \boldsymbol{\varepsilon}^o \quad (16)$$

ahol φ_0, φ_1 és φ^d, φ^o a deformációtensor skalár invariánsainak függvénye.²¹

²⁰ Ez következik abból is, hogy a 81 komponensű negyedrendű impulzusvezetési tenzor 21 vezetési függvényéből izotrop esetben csak kettő lehet független (a μ és λ ún. Lamé-függvények, amelyek egyensúlyi esetben állandók).

²¹ Ennek az egyensúlyi lineáris közelítésnek azonban messzemenő, az egyensúlyon túlmutató, kedvező következményei vannak. Ha a rugalmas viselkedés lineáris, akkor a rugalmas és a képlékeny (befagyott) alakváltozások nem útfüggők, tehát *állapotváltozóknak* tekinthetők annak ellenére, hogy mérni csak a összes alakváltozást lehet, s nemcsak $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}$, hanem $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}$ is.

A RUGALMAS ESET. Amennyiben a folyamat olyan határok között játszódik le, hogy az anyag képes a kapott teljes energiát rugalmas energiaként tárolni, vagyis nem következik be szerkezeti elemeiben *maradó* változás, akkor teljesen rugalmas állapotváltozásról beszélünk. Ekkor $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{pl} = \mathbf{0}$ és

$$\begin{aligned} W_{eq} &= \int \boldsymbol{\sigma}_{eq} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dt = \Phi = \Phi_{el}, \\ W_{eq}^d &= \int \boldsymbol{\sigma}_{eq} : \boldsymbol{\varepsilon}^d \, dt = \Phi^d = \Phi_{el}^d, \\ W_{eq}^o &= \int \boldsymbol{\sigma}_{eq} : \boldsymbol{\varepsilon}^o \, dt = \Phi^o = \Phi_{el}^o. \end{aligned} \quad (15a)$$

Ezek az integrálok nem pályafüggők, a rugalmas potenciál segítségével számolhatóak (8) alapján. Hiszen a rugalmas feszültség a következő – közismert HOOKE-törvénynek megfelelő – formában írható fel

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{eq}^d &= -\rho T_0 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}_{eq}^o &= -\rho T_0 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^o} = 3K \boldsymbol{\varepsilon}^o, \end{aligned} \quad (17)$$

illetve

$$\boldsymbol{\sigma}_{eq}^d = \boldsymbol{\sigma}_{eq}^d + \boldsymbol{\sigma}_{eq}^o \mathbf{I} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d + 3K \boldsymbol{\varepsilon}^o \mathbf{I} = 2G(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d - \boldsymbol{\varepsilon}^o \mathbf{I}) + 3K \boldsymbol{\varepsilon}^o \mathbf{I} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d + (3K - 2G) \boldsymbol{\varepsilon}^o \mathbf{I},$$

s a rugalmas energia:

$$\begin{aligned} \Phi_{el}^d &= \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d} \boldsymbol{\sigma}^d : d\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d} 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d : d\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d = G \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d : \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d, \\ \Phi_{el}^o &= \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^o} \boldsymbol{\sigma}^o : d\boldsymbol{\varepsilon}^o = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^o : \boldsymbol{\varepsilon}^o = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^o} 3K \boldsymbol{\varepsilon}^o : d\boldsymbol{\varepsilon}^o = \frac{3}{2} K \boldsymbol{\varepsilon}^o : \boldsymbol{\varepsilon}^o. \\ \Phi &= \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = G \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d : \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d + \frac{3}{2} K \boldsymbol{\varepsilon}^o : \boldsymbol{\varepsilon}^o. \end{aligned}$$

A rugalmas energia (potenciál) ismeretében az anyag konstitúciós egyenlete (a rugalmas tartományra korlátozva) a potenciálok deriválása révén határozható meg:

$$\frac{\partial \Phi_{el}^d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d} \equiv \boldsymbol{\sigma}^d = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d, \text{ és } \frac{\partial \Phi_{el}^o}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^o} \equiv \boldsymbol{\sigma}^o = 3K \boldsymbol{\varepsilon}^o, \quad (18)$$

illetve

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \boldsymbol{\sigma} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d + 3K \boldsymbol{\varepsilon}^o = 2G(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^o) + 3K \boldsymbol{\varepsilon}^o = 2G \boldsymbol{\varepsilon} + (2G - 3K) \boldsymbol{\varepsilon}^o.$$

RUGALMAS–KÉPLÉKENY ESET. Amennyiben az anyagi rendszerrel közölt energia egy küszöbértéket elér, megjelenik a *maradó* deformáció. A tisztán rugalmas és a képlékeny deformációkat elválasztó felület a *képlékenységi határfelület*.

Jelenlegi felfogásunk szerint az anyag ott kerül képlékeny állapotba, ahol a torzulasi deformációs munka értéke egy W_f^d küszöbértéket meghalad. Ez után jelenik meg a maradó deformáció, a tárolt képlékenységi munka (a befagyott deformációs munka).

A $\psi(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dots) = 0$ differenciálegyenlettel definiált képlékenységi határfeltétel ekkor:

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dots) \equiv W^d - W_f^d = 0.$$

Ha a ψ függvény a képlékenységi határfeltételt reprezentálja, akkor értékének a rugalmas tartományban zérusnak kell lennie, s ezt ideális esetben az egységugrás-függvénnyel írjuk le:

$$\Psi_H(W^d - W_f^d) = \begin{cases} 0, & \text{ha } W^d < W_f^d, \\ 1, & \text{ha } W^d \geq W_f^d. \end{cases}$$

Ez a kifejezés azonban még további pontosításra szorul. Különben is köztudott, hogy ha terhelésnél átlépjük a folyáshatárt, majd tehermentesítést hajtunk végre, akkor az anyag a „visszaút” során a rugalmasan viselkedik. Ennek az összefüggéseinkben kifejezésre kell jutniuk.

„Odaút” során az anyaggal közölt munka növekszik: ΔW^d tehát pozitív ($\dot{W}^d > 0$), míg a visszaútnál ΔW^d negatív ($\dot{W}^d < 0$). Ennek megfelelően a korrekt összefüggés:

$$\Psi^d = \Psi^d(W^d, \dot{W}^d) = \begin{cases} 0, & \text{ha } W^d < W_f^d, \text{ vagy } \dot{W}^d < 0, \\ 1, & \text{ha } W^d \geq W_f^d, \text{ és } \dot{W}^d \geq 0, \end{cases} \quad (19)$$

s ezzel a jelöléssel

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el}^d + \Psi^d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}^d,^{22} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el}^o. \quad (20)$$

Egyensúlyi esetben

$$\Psi^d = \begin{cases} 0, & \text{ha } W^d \leq W_f^d, \text{ vagy } \Delta W^d < 0, \\ 1, & \text{ha } W^d > W_f^d, \text{ és } \Delta \dot{W}^d \geq 0. \end{cases} \quad (19a)$$

Jelöljük a határfelület pontjait $\{\boldsymbol{\sigma}_f^d, \boldsymbol{\varepsilon}_f^d\}$ -el. Ekkor

²² Helyesebben: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d + \Psi^d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}^d$.

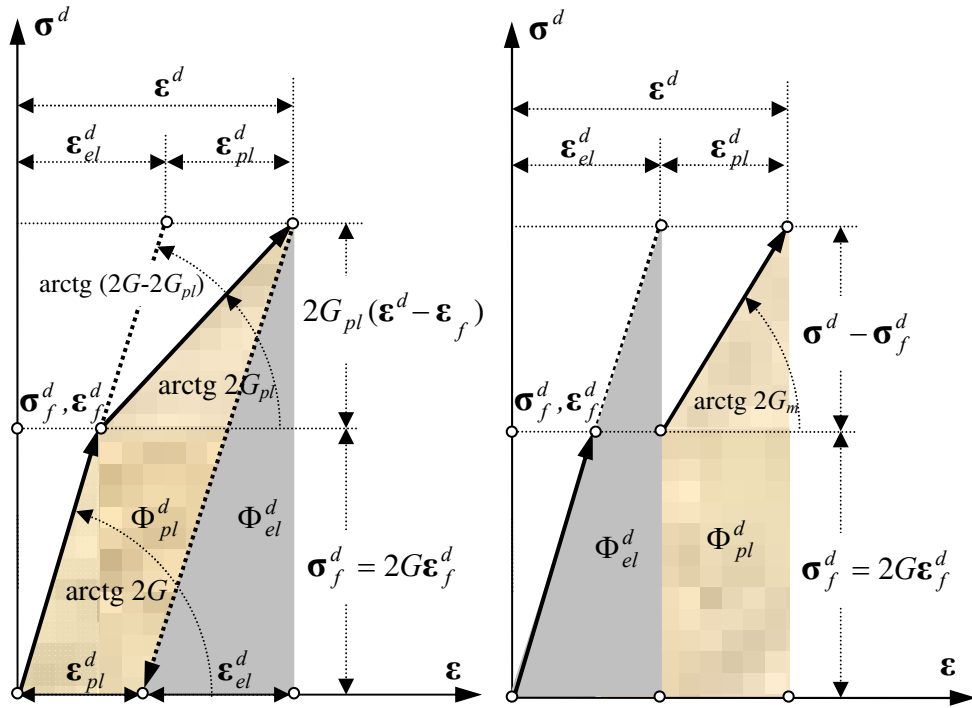
$$\Psi^d = \begin{cases} 0, & \text{ha } \boldsymbol{\varepsilon}^d \leq \boldsymbol{\varepsilon}_f^d, \quad \text{vagy } \boldsymbol{\sigma}^d : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^d < 0, \\ 1, & \text{ha } \boldsymbol{\varepsilon}^d > \boldsymbol{\varepsilon}_f^d, \quad \text{és } \boldsymbol{\sigma}^d : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^d \geq 0. \end{cases} \quad (19b)$$

Ha elfogadjuk azt, a mérnöki szempontból megengedhetőnek vélt közelítést, hogy az anyagtörvény egyensúly esetén *lineáris*, akkor egyúttal kimondjuk mind a rugalmas tartományban, mind a képlékeny tartományban a linearitást (az egyetlen anyagtörvény elve folytán).

A sematikus 2. ábra, a mérnöki gyakorlatban megszokott jelölésekkel a torzulási állapotot tünteti fel, mivel a térfogatváltozási térben nincs maradó deformáció. Az anyagtörvényt leíró egyenes alatti területek reprezentálják a deformációs munkát.

A 2. ábra bal oldali része a szokásos ábrázolás, míg jobb oldalon ugyanaz az összefüggés látható, szétválasztva a rugalmas és képlékeny területeket.²³

Ebben esetben nemcsak a Φ_{el}^d jelent energiát (azaz értéke független az alakváltozási úttól, csupán a két végpont függvénye), hanem a Φ_{pl}^d is.



2. ábra.

²³ Talán szokatlan, hogy a koordinátatengelyeken tenzori jelölés van. Ezzel azt kívántuk jelezni, hogy bármelyik komponensegyenletben ugyanaz az együttható (iránytangens) szerepel $[(\sigma_{el}^d)_{ij} = 2G(\varepsilon_{el}^d)_{ij}]$, ill. $\Delta(\sigma_{pl}^d)_{ij} = 2G_{pl}\Delta(\varepsilon_{pl}^d)_{ij}$.

Tehát ekkor beszélhetünk befagyott, tárolt képlékenységi munka helyett, *képlékenységi potenciálról*.

A torzulási *rugalmas potenciál* és a *képlékenységi potenciál* nagyságát a 2. ábrán látható területek jelzik. Az ábra trigonometriai összefüggései alapján

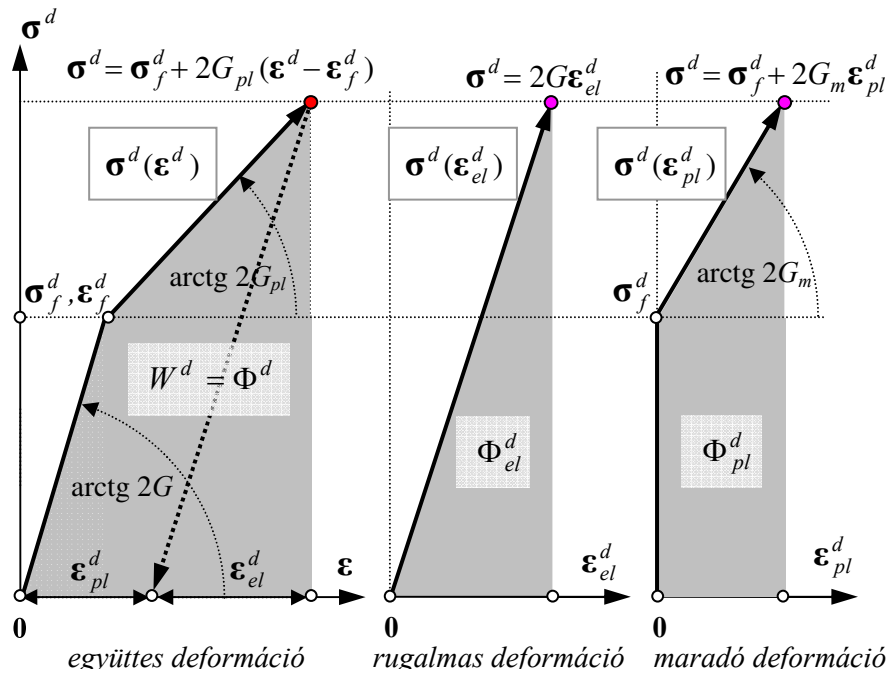
$$\begin{aligned}\epsilon^d &= \epsilon_{el}^d + \epsilon_{pl}^d, \\ \epsilon_{el}^d &= \frac{\sigma^d}{2G}, \quad \epsilon_{pl}^d = \frac{\sigma^d - \sigma_f^d}{2G_m}, \\ \epsilon_f^d &= \frac{\sigma_f^d}{2G},\end{aligned}\tag{21}$$

s a különböző modulusok (anyagállandók) a következők:

$$2G, \quad 2G_{pl} \quad \text{és} \quad 2G_m = \frac{2G2G_{pl}}{2G - 2G_{pl}}.\tag{22}$$

A (22)-ben szereplő jelölések sorrendben: $2G$ *rugalmassági modulus*, $2G_{pl}$ *képlékenységi modulus*, és $2G_m$ az a „nevesincs” modulus, amely a maradó alakváltozásra vonatkoztatva adja meg az iránytangenset.

Ha szétbontjuk az 2. ábrát, a teljes-, a rugalmas és a plasztikus deformációkat külön-külön ábrázoljuk, akkor a 3. ábrát kapjuk.



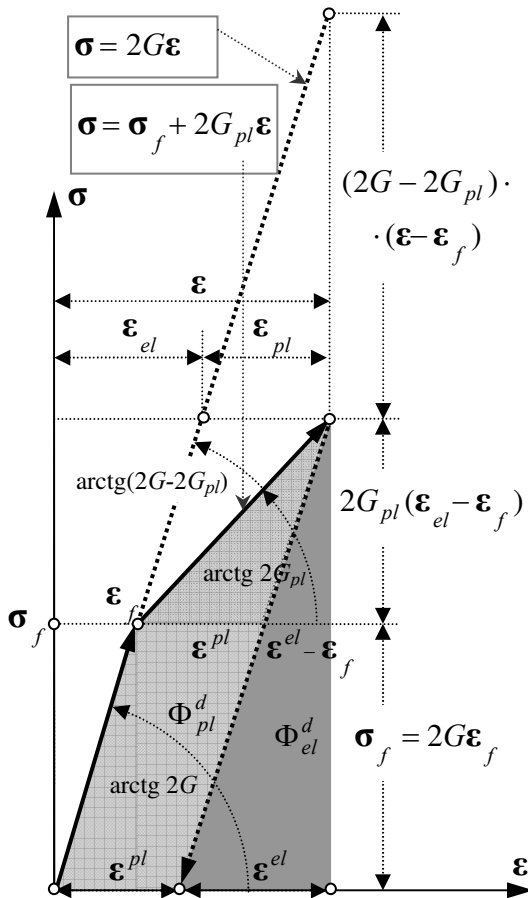
3. ábra

A 3. ábra felső részén az anyagtörvény majdnem egyenértékű egyenletei találhatók. Azért csak majdnem, mert a teljes deformációval, illetve a rugalmas deformáció-

val felírtak a deformációk teljes tartományára megadják az összefüggést, míg a képlékeny (azaz maradó) deformációval felírt csak a képlékenységi határ utánra.

Foglaljuk össze a különböző deformáció formák közötti – (21) és (22) összefüggések alapján felírható – kapcsolatokat:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^d(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d) &= \frac{2G}{2G_{pl}} \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d - \frac{2G - 2G_{pl}}{2G_{pl}} \boldsymbol{\varepsilon}_f^d, & \boldsymbol{\varepsilon}^d(\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d) &= \boldsymbol{\varepsilon}_f^d + \frac{2G}{2G - 2G_{pl}} \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d(\boldsymbol{\varepsilon}^d) &= \frac{2G - 2G_{pl}}{2G} \boldsymbol{\varepsilon}_f^d + \frac{2G_{pl}}{2G} \boldsymbol{\varepsilon}^d, & \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d(\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d) &= \boldsymbol{\varepsilon}_f^d + \frac{2G_{pl}}{2G - 2G_{pl}} \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d(\boldsymbol{\varepsilon}^d) &= \frac{2G - 2G_{pl}}{2G} (\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d), & \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d) &= \frac{2G - 2G_{pl}}{2G} (\boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d).\end{aligned}\quad (23)$$



4. ábra

A POTENCIÁLFÜGGVÉNYEK. A maradó, vagy plasztikus deformáció mindaddig zérus, amíg a torzulási feszültség és torzulási deformáció el nem éri a W_f^d képlékenységi küszöb összetartozó

$$\boldsymbol{\sigma}_f^d, \boldsymbol{\varepsilon}_f^d$$

értékeit.

Jelen esetben térfogatváltozásnál nincs képlékeny állapot, ezért csak *rugalmas térfogati potenciál* létezik (képlékeny nem):

$$\Phi^0 = \Phi_{el}^0 = \frac{3}{2} K \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^0 + C_0, \quad \Phi_{pl}^0 \equiv 0,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^0} \equiv \boldsymbol{\sigma}^0 = 3K \boldsymbol{\varepsilon}^0.$$

A *rugalmas torzulási potenciál* – a deformációk teljes tartományán rugalmas deformációkkal kifejezve –

$$\Phi_{el}^d = G \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d : \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d + C_d,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi_{el}^d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d} \equiv \boldsymbol{\sigma}_{el}^d \equiv \boldsymbol{\sigma}^d = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{el}^d,$$

illetve Φ_{el}^d a teljes deformációval – a különböző egyenértékű variációban – felírva

[ha $\boldsymbol{\varepsilon}^d \geq \boldsymbol{\varepsilon}_f^d$]:

$$\begin{aligned}\Phi_{el}^d &= G\boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d - (2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d) + C_d, \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi_{el}^d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d} &\equiv \boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d - (2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{el}^d &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}_f^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + G_{pl}(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d) + C_d, \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi_{el}^d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d} &\equiv \boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_f^d + 2G_{pl}(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{el}^d &= (2G - 2G_{pl})\boldsymbol{\varepsilon}_f^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + G_{pl}\boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + C_d, \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi_{el}^d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d} &\equiv \boldsymbol{\sigma}^d = (2G - 2G_{pl})\boldsymbol{\varepsilon}_f^d + 2G_{pl}\boldsymbol{\varepsilon}^d,\end{aligned}$$

A képlékeny potenciál a plasztikus deformációkkal kifejezve:

[ha $\boldsymbol{\varepsilon}^d \geq \boldsymbol{\varepsilon}_f^d$]

$$\begin{aligned}\Phi_{pl}^d &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}_f^d : \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d + \frac{2GG_{pl}}{2G - 2G_{pl}}\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d : \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d + C_p, \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi_{pl}^d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d} &\equiv \boldsymbol{\sigma}_{pl}^d \equiv \boldsymbol{\sigma}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_f^d + \frac{2G2G_{pl}}{2G - 2G_{pl}}\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^d,\end{aligned}$$

illetve a teljes deformációkkal:

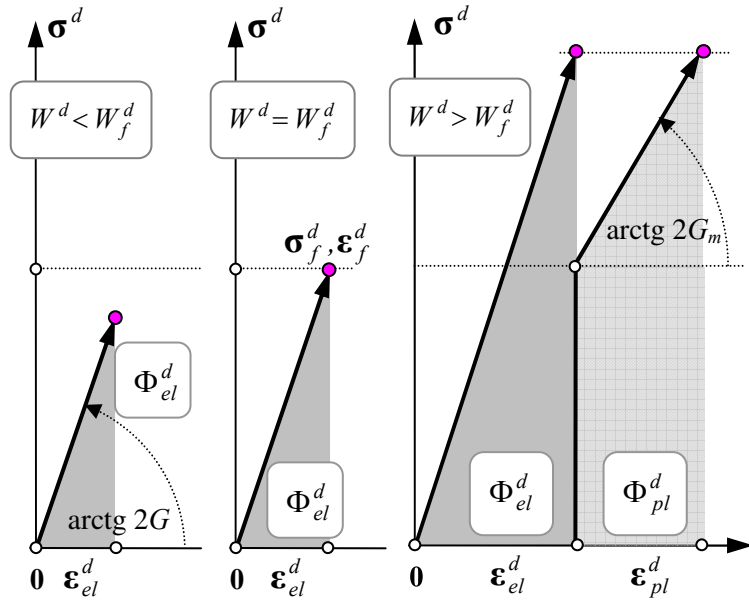
$$\begin{aligned}\Phi_{pl}^d &= (2G - 2G_{pl})\boldsymbol{\varepsilon}_f^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + G_{pl}\boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + C_p, \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi_{pl}^d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^d} &\equiv \boldsymbol{\sigma}^d = (2G - 2G_{pl})\boldsymbol{\varepsilon}_f^d + 2G_{pl}\boldsymbol{\varepsilon}^d.\end{aligned}$$

AZ ANYAGTÖRVÉNY EGYENSÚLY ESETÉN a képlékenységi határt kijelölő Ψ^d felhasználásával

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^d &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d - \Psi^d(2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d), \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^0\end{aligned}\tag{24}$$

formában írható (4. ábra).

A rugalmas és képlékeny potenciálokat az 5. ábrán látható – görbék alatti – területek reprezentálják.



Képlékenységi határ alatt Képlékenységi határ túllépése után

5.ábra

(B) ANYAGTÖRVÉNY ÁLTALÁNOS ESETBEN – EGYENSÚLYTÓL TÁVOL

Nemegyensúlyi esetben az entrópiaprodukció pozitív (9) alatti egyenlőtlensége:

$$\begin{aligned} [\sigma^d - \sigma_{eq}^d] : \dot{\epsilon}^d - \rho T_0 \xi^d : \dot{\xi}^d &> 0, \\ [\sigma^o - \sigma_{eq}^o] : \dot{\epsilon}^o - \rho T_0 \xi^o : \dot{\xi}^o &> 0, \end{aligned} \quad (9a)$$

a kiindulási alap, ahol

$$[\sigma^d - \sigma_{eq}^d] := \sigma_{neq}^d, \quad [\sigma^o - \sigma_{eq}^o] := \sigma_{neq}^o. \quad (25)$$

A (9a) egyenlőtlenség megoldása a LAGRANGE-féle középértéktétel felhasználásával történik a szimmetrikus *onsageri* vezetési mátrixok felhasználásával

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{neq}^d \\ \xi^d \end{pmatrix} &= \mathbf{L}^d \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}^d \\ -\rho T \xi^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L'_{12} \\ L_{12} & L'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}^d \\ -\rho T \xi^d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}^d \\ \xi^d \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \sigma_{neq}^o \\ \xi^o \end{pmatrix} &= \mathbf{L}^o \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}^o \\ -\rho T \xi^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l'_{12} \\ l_{12} & l'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}^o \\ -\rho T \xi^o \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}^o \\ \xi^o \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

oly módon, hogy a ξ_d és ξ_o változókat kiküszöböljük az egyenletekből:

TORZULÁSI EGYENLET	TÉRFOGATVÁLTOZÁSI EGYENLET
$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{neq}^d &= L_{11}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + L_{12}\dot{\boldsymbol{\xi}}^d, \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}^d &= L_{12}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + L_{22}\dot{\boldsymbol{\xi}}^d, \\ \boldsymbol{\xi} &= L_{12}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{neq}^d - L_{12}^{-1}L_{11}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d, \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= L_{12}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + L_{22}\dot{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= L_{12}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d - L_{22}L_{12}^{-1}L_{11}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + L_{22}L_{12}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{neq}^d, \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^d &= L_{11}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + L_{12}\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= L_{11}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + (L_{12}^2 - L_{22}L_{11})\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + L_{22}\boldsymbol{\sigma}_{neq}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}_{neq}^d - L_{22}^{-1}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^d &= \\ &= L_{11}L_{22}^{-1}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + (L_{12}^2 - L_{22}L_{11})\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^d,\end{aligned}$	$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{neq}^o &= l_{11}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o + l_{12}\dot{\boldsymbol{\xi}}^o, \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}^o &= l_{12}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o + l_{22}\dot{\boldsymbol{\xi}}^o, \\ \boldsymbol{\xi}_o &= l_{12}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{neq}^{o,irrev} - l_{12}^{-1}l_{11}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o, \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_o &= l_{12}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o + l_{22}\dot{\boldsymbol{\xi}}_o = \\ &= l_{12}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o - l_{22}l_{12}^{-1}l_{11}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o + l_{22}l_{12}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{neq}^o, \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^o &= l_{11}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^o + l_{12}\ddot{\boldsymbol{\xi}}_o = \\ &= l_{11}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^o + (l_{12}^2 - l_{22}l_{11})\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^o + l_{22}\boldsymbol{\sigma}_{neq}^o, \\ \boldsymbol{\sigma}_{neq}^o - l_{22}^{-1}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{neq}^o &= \\ &= l_{11}l_{22}^{-1}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^o + (l_{12}^2 - l_{22}l_{11})\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^o.\end{aligned}$

Ezek az utolsó egyenletek a deformációk teljes tartományán érvényes összefüggések.

1. Az egyszerűbb áttekinthetőség érdekében vegyük először azt az esetet, amikor tisztán *rugalmas* alakváltozások vannak. A (17) definíciónak megfelelően használjuk fel az egyensúlyi feszültségek (18) értékét:

TORZULÁSI EGYENLET	TÉRFOGATVÁLTOZÁSI EGYENLET
$\boldsymbol{\sigma}_{eq}^d = 2G\boldsymbol{\epsilon}^d, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^d = 2G\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d,$	$\boldsymbol{\sigma}_{eq}^o = 3K\boldsymbol{\epsilon}^o, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^o = 3K\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o,$
$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^d - 2G\boldsymbol{\epsilon}^d - L_{22}^{-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d - 2G\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d) &= \\ &= L_{11}L_{22}^{-1}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^d + (L_{12}^2L_{22}^{-1} - L_{11})\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^d - L_{22}^{-1}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d &= 2G\boldsymbol{\epsilon}^d \\ &+ (L_{12}^2L_{22}^{-1} - L_{11})\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d - 2GL_{22}^{-1}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d \\ &+ L_{11}L_{22}^{-1}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^d.\end{aligned}$	$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^o - 2G\boldsymbol{\epsilon}^o - l_{22}^{-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o - 2G\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o) &= \\ &= l_{11}l_{22}^{-1}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^o + (l_{12}^2l_{22}^{-1} - l_{11})\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^o, \\ \boldsymbol{\sigma}^o - l_{22}^{-1}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o &= 2G\boldsymbol{\epsilon}^o \\ &+ (l_{12}^2l_{22}^{-1} - l_{11})\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o - 2Gl_{22}^{-1}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o \\ &+ l_{11}l_{22}^{-1}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}}^o.\end{aligned}$

Vezessük be a

$$\begin{aligned}\tau &:= -L_{22}^{-1}, & 2\mu &:= L_{12}^2L_{22}^{-1} - L_{11}, & \tau_o &:= -l_{22}^{-1}, & 3K_\mu &:= l_{12}^2l_{22}^{-1} - l_{11}, \\ \theta &:= L_{11}L_{22}^{-1} = -L_{11}\tau, & 2\eta &:= 2\mu - 2G\tau & \theta_o &:= l_{11}l_{22}^{-1} = -l_{11}\tau_o, & 3K_v &:= 3K_\mu - 3K\tau_o\end{aligned}$$

jelöléseket, s akkor a tehetetlenségi POYNTING–THOMSON-féle (standard) testet kapjuk:

TORZULÁSI EGYENLET	TÉRFOGATVÁLTOZÁSI EGYENLET
$\boldsymbol{\sigma}^d + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + 2G\tau\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$	$\sigma^o + \tau_o \dot{\sigma}^o = 3K\varepsilon^o + 3K_\mu\dot{\varepsilon}^o + 3K\tau_o + \theta_o\ddot{\varepsilon}^o$
$\boldsymbol{\sigma}^d + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$	$\sigma^o + \tau_o \dot{\sigma}^o = 3K\varepsilon^o + 3K_v\dot{\varepsilon}^o + \theta_o\ddot{\varepsilon}^o$

illetve átrendezve

$$(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t})\boldsymbol{\sigma}^d = (2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2})\boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad (1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t})\sigma^o = (3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2})\varepsilon^o,$$

amelyek a

$$2\tilde{G} \equiv \frac{2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 3\tilde{K} \equiv \frac{3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}},$$

formális jelölésekkel (ún. anyagoperátorokkal)

$$\boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d, \quad \sigma^o = 3\tilde{K}\varepsilon^o \quad (26)$$

formában írhatók fel. Ez az összefüggés formailag a HOOKE-törvényt idézi, csupán az anyagállandók helyett a reológiai változásokat reprezentáló anyagoperátorok szerepelnek benne.

2. A rugalmas-képlékeny alakváltozások tartományában, vagyis általánosan a

$$\boldsymbol{\sigma}_{eq}^d = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d - \Psi^d(2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d), \quad \sigma_{eq}^o = 3K\varepsilon^o \quad (27)$$

alakú egyensúlyi összefüggéssel, – az előzőekhez teljesen hasonlóan eljárva, – a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^d + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^d &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}^d - \Psi^d(2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d) + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d - \Psi^d(2G - 2G_{pl})\tau\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d + \theta\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d \\ \sigma^o + \tau_o \dot{\sigma}^o &= 3K\varepsilon^o + 3K_v\dot{\varepsilon}^o + \theta_o\ddot{\varepsilon}^o \end{aligned} \quad (28)$$

anyagtörvényhez jutunk. A

$$\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{\sigma}^d = \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^d - \Psi^d(2G - 2G_{pl})\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d)$$

kiemelésekkel, és az anyagoperátorokkal az anyagtörvény

$$\boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d - \Psi^d(2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d), \quad \sigma^o = 3\tilde{K}\varepsilon^o \quad (29)$$

alakra hozható, amely formailag azonos a (27) egyensúlyi alakkal.

A POTENCIÁLOK

Általánosan – tömör (nem porózus) szilárd testek esetén – a térfogategységre jutó deformációs teljesítményre, illetve munkára vonatkozóan a

$$\begin{aligned}\dot{W} &\equiv \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d\Phi_{el}}{dt} + \frac{d\Phi_{pl}}{dt} + \mathcal{D} = \frac{d\Phi_{el}}{dt} + \mathcal{L}, \\ \dot{W}^d &\equiv \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \frac{d\Phi_{el}^d}{dt} + \frac{d\Phi_{pl}^d}{dt} + \mathcal{D}^d = \frac{d\Phi_{el}^d}{dt} + \mathcal{L}^d, \\ W^o &\equiv \boldsymbol{\sigma}^o : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o = \frac{d\Phi_{el}^o}{dt} + \mathcal{D}^o = \frac{d\Phi_{el}^o}{dt} + \mathcal{L}^o,\end{aligned}\tag{30}$$

illetve

$$\begin{aligned}W &\equiv \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\varepsilon} dt = \Phi_{el} + \Phi_{pl} + \mathcal{D} = \Phi_{el} + \mathcal{L} \\ W^d &\equiv \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d dt = \Phi_{el}^d + \Phi_{pl}^d + \mathcal{D}^d = \Phi_{el}^d + \mathcal{L}^d \\ W^o &\equiv \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^o : \boldsymbol{\varepsilon}^o dt = \Phi_{el}^o + \mathcal{D}^o = \Phi_{el}^o + \mathcal{L}^o\end{aligned}\tag{31}$$

összefüggések érvényesek, azaz

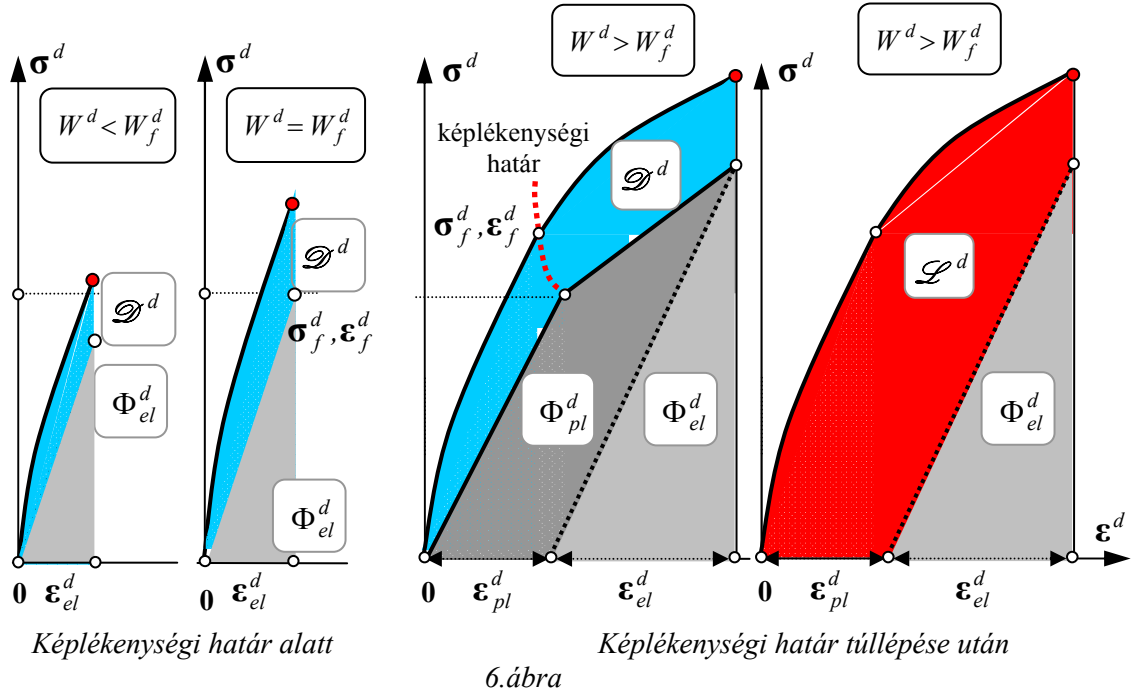
$$\frac{d\Phi^o}{dt} = \frac{d\Phi_{el}^o}{dt}, \quad \frac{d\Phi_{pl}^o}{dt} = 0, \quad \mathcal{L} = \frac{d\Phi_{pl}}{dt} + \mathcal{D}, \quad \mathcal{L}^d = \frac{d\Phi_{pl}^d}{dt} + \mathcal{D}^d, \quad \mathcal{L}^o = \mathcal{D}^o.$$

Eddig csupán egyensúlyi esetben vizsgáltuk a potenciálokat:

$$\begin{aligned}\dot{W}_{eq} &\equiv \boldsymbol{\sigma}_{eq} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d\Phi_{el}}{dt} + \frac{d\Phi_{pl}}{dt} = \frac{d\Phi_{el}}{dt} + \frac{d\mathcal{L}}{dt}, \\ \dot{W}_{eq}^d &\equiv \boldsymbol{\sigma}_{eq}^d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \frac{d\Phi_{el}^d}{dt} + \frac{d\Phi_{pl}^d}{dt} = \frac{d\Phi_{el}^d}{dt} + \frac{d\mathcal{L}^d}{dt}, \\ \dot{W}_{eq}^o &\equiv \boldsymbol{\sigma}_{eq}^o : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o = \frac{d\Phi_{el}^o}{dt} = \frac{d\Phi^o}{dt}, \\ \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}^d}{dt} = \frac{d\Phi_{pl}}{dt} = \frac{d\Phi_{pl}^d}{dt},\end{aligned}$$

s az egyensúlyon túl a disszipációs munka jelentkezik

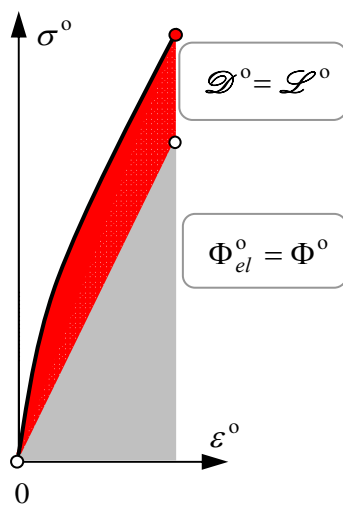
$$\begin{aligned}\dot{W} - \dot{W}_{eq} &\equiv (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{eq}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{D} \geq 0, \\ \dot{W}^d - \dot{W}_{eq}^d &\equiv (\boldsymbol{\sigma}^d - \boldsymbol{\sigma}_{eq}^d) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \mathcal{D}^d \geq 0, \\ \dot{W}^o - \dot{W}_{eq}^o &\equiv (\boldsymbol{\sigma}^o - \boldsymbol{\sigma}_{eq}^o) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o = \mathcal{D}^o \geq 0.\end{aligned}$$



Szemléletesen a 6. ábrán látható területek jelzik a deviatorikus (torzulási) potenciálok és disszipációs és diszperziós munka összefüggéseket:

Mivel gömbi (térfogati) térben nincs képlékeny állapot, így azt egyetlen ábrával lehet reprezentálni (7. ábra).

A POTENCIÁLFÜGGVÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA. Az integrációs állandók elhagyásával a képletek a következők:



W – DEFORMÁCIÓS MUNKA

$$W = \int \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dt = \Phi + \mathcal{L} = \Phi_{el} + \Phi_{pl} + \mathcal{L} = \Phi_{el} + \mathcal{D},$$

W^d – Torzulási deformációs munka

$$W^d = \int \boldsymbol{\sigma}^d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d dt = \Phi^d + \mathcal{L}^d = \Phi_{el}^d + \Phi_{pl}^d + \mathcal{L}^d = \Phi_{el}^d + \mathcal{D}^d,$$

W^o – Térfogati deformációs munka

$$W^o = \int \boldsymbol{\sigma}^o : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^o dt = \Phi^o + \mathcal{L}^o = \Phi_{el}^o + \mathcal{L}^o = \Phi_{el}^o + \mathcal{D}^o.$$

Részleteiben kiírva:

Φ_{el} – RUGALMAS POTENCIÁL

$$\begin{aligned}\Phi_{el} &= \frac{1}{2} \left\{ 2G \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + (3K - 2G) \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^0 - \Psi(4G - 4G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ G \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + (3K - 2G) \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^0 - \Psi(4G - 4G_{pl})[(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d) - \boldsymbol{\varepsilon}^0] \right\},\end{aligned}$$

$$\Phi_{el} \Big|_{W^d \leq W_f^d} = \frac{1}{2} \left\{ 2G \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + (3K - 2G) \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^0 \right\},$$

$$\Phi_{el} \Big|_{W^d > W_f^d} = \frac{1}{2} \left\{ 2G \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + (3K - 2G) \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^0 - \right. \\ \left. - (2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d) \right\},$$

Φ_{el}^d – Rugalmas torzulási potenciál:

$$\Phi_{el}^d = \frac{1}{2} \left\{ 2G \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d - \Psi(4G - 4G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d) : \boldsymbol{\varepsilon}^d \right\},$$

$$\Phi_{el}^d \Big|_{W^d \leq W_f^d} = G \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d,$$

$$\Phi_{el}^d \Big|_{W^d > W_f^d} = G \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d - (2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d),$$

Φ_{el}^0 – Rugalmas térfogati potenciál:

$$\Phi_{el}^0 = \frac{3}{2} K \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^0$$

Φ_{pl} – KÉPLÉKENY POTENCIÁL

$$\Phi_{pl} = \frac{1}{2} \left\{ 2G_{pl} \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + (4G - 4G_{pl}) \boldsymbol{\varepsilon}_f^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d \right\},$$

$$\Phi_{pl} \Big|_{W^d \leq W_f^d} = 0, \quad \Phi_{pl} \Big|_{W^d > W_f^d} = G_{pl} \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + (2G - 2G_{pl}) \boldsymbol{\varepsilon}_f^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d,$$

Φ_{pl}^d – Képlékeny torzulási potenciál

$$\Phi_{pl}^d = \frac{1}{2} \left\{ 2G_{pl} \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + (4G - 4G_{pl}) \boldsymbol{\varepsilon}_f^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d \right\},$$

$$\Phi_{pl}^d \Big|_{W^d \leq W_f^d} = 0,$$

$$\Phi_{pl}^d \Big|_{W^d > W_f^d} = G_{pl} \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + (2G - 2G_{pl}) \boldsymbol{\varepsilon}_f^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d,$$

Φ_{pl}^0 – Képlékeny térfogati potenciál:

$$\Phi_{pl}^0 \equiv 0,$$

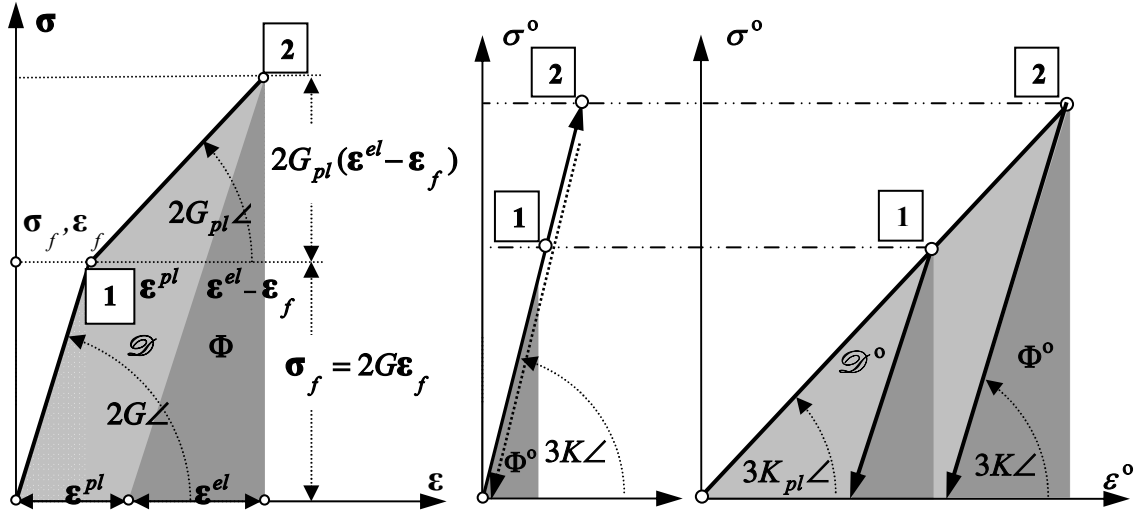
$$\begin{aligned}
\Phi & - \text{RUGALMAS-KÉPLÉKENY POTENCIÁL} \quad \Phi = \Phi_{el} + \Phi_{pl}, \\
\Phi_{el} & = \frac{1}{2} \left\{ 2G \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + \Psi 2G_{pl} \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + (3K - 2G) \boldsymbol{\varepsilon}^o : \boldsymbol{\varepsilon}^o - \Psi (4G - 4G_{pl}) \left[(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d) - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d \right] \right\} \\
\Phi^d & - \text{Rugalmas-képlékeny torzulási potenciál:} \quad \Phi^d = \Phi_{el}^d + \Phi_{pl}^d, \\
\Phi^d & = 2G \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + (1 - \Psi)(2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d), \\
\Phi^o & - \text{Rugalmas-képlékeny térfogati potenciál:} \quad \Phi^o = \Phi_{el}^o + \Phi_{pl}^o, \quad \Phi_{pl}^o \equiv 0, \\
\Phi_{el}^o & = \frac{3}{2} K \boldsymbol{\varepsilon}^o : \boldsymbol{\varepsilon}^o, \\
\mathcal{D} & - \text{DISSZIPÁCIÓS MUNKA} \\
\mathcal{D} & = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\varepsilon} dt - \Phi, \\
\mathcal{D}^d & - \text{Disszipációs torzulási munka} \\
\mathcal{D}^d & = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d dt - \Phi^d, \\
\mathcal{D}^o & - \text{Disszipációs térfogati munka} \quad \mathcal{D}^o = \mathcal{L}^o, \\
\mathcal{D}^o & = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^o : \boldsymbol{\varepsilon}^o dt - \Phi^o = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^o : d\boldsymbol{\varepsilon}^o dt - \frac{3}{2} K \boldsymbol{\varepsilon}^o : \boldsymbol{\varepsilon}^o \\
\mathcal{L} & - \text{DISZPERZIÓS MUNKA} \\
\mathcal{L} & = \int_0^\varepsilon \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\varepsilon} d\boldsymbol{\varepsilon} - \Phi_{el}, \\
\mathcal{L}^d & - \text{Diszperziós torzulási munka} \\
\mathcal{L}^d & = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d dt - \Phi_{el}^d, \\
\mathcal{L}^o & - \text{Diszperziós térfogati munka} \\
\mathcal{L}^o & = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^o : \boldsymbol{\varepsilon}^o dt - \Phi^o = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}^o : \boldsymbol{\varepsilon}^o dt - \frac{3}{2} K \boldsymbol{\varepsilon}^o : \boldsymbol{\varepsilon}^o.
\end{aligned}$$

PORÓZUS TESTEK ANYAGTÖRVÉNYE

Eddigiekben a tömör testek anyagtörvényével foglalkoztunk, amelyek térfogatváltozásánál nem alakul ki képlékeny állapot. Vagyis kiinduló feltevés volt, hogy

- a *térfogati* állapotban minden alakváltozás rugalmas,
- a *torzulási* állapotban van maradó alakváltozás is, a folyáshatár átlépése után.

Izotrop porózus anyagok anyagtörvénye – az előzőekben követettekkel analóg módon írható fel, – csak figyelembe kell venni, hogy van térfogati képlékenységi is, ahogy azt a 7. ábra jobbszélső diagramja mutatja.



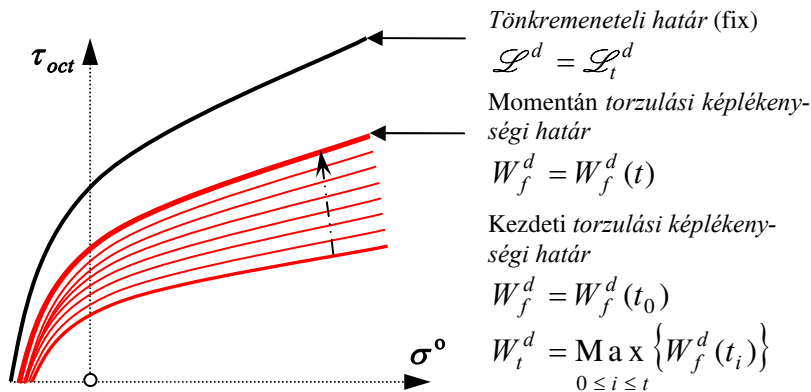
8. ábra

Vagyis porózus anyagoknál kiinduló feltevés:

- a *térfogati* állapotban van maradó alakváltozás, a térfogati folyáshatár átlépése után,
- a *torzulási* állapotban van maradó alakváltozás, a torzulási folyáshatár átlépése után,

s ez a két képlékenységi v. folyáshatár független egymástól.

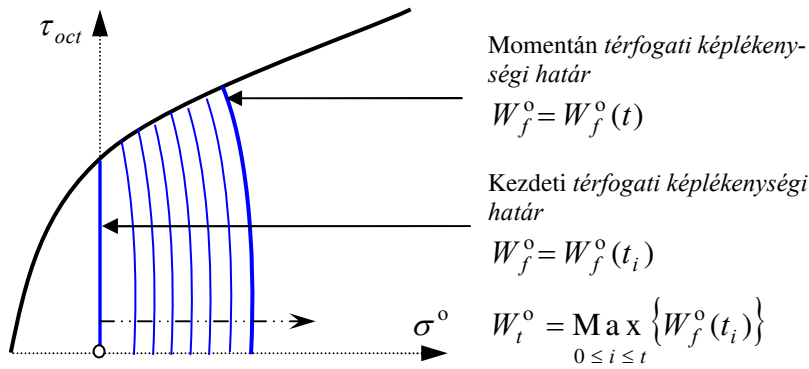
Nyugalmi, tökéletesen relaxált állapotból induló alakváltozási folyamatnál a *torzulási állapot* mindaddig rugalmas, amíg az anyag igénybevétele el nem éri a torzulási képlékenységi küszöböt, amelyet a térfogategységre jutó torzulási deformációs munka egy W_f^d küszöbértékével jellemezhetünk.²⁴



9.a) ábra. A deviatorikus képlékenységi határ vándorlása

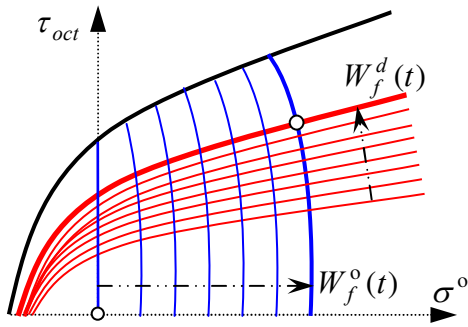
Ugyanez nem mondható el a *térfogatváltozási állapot*ról, mert az a deformálatlan állapotból rögtön képlékeny alakváltozással indul (ui. a meglévő pórusok irreverzibilisen záródni kezdenek).

²⁴ Ennek meghatározása általában laboratóriumi kísérlettel történik.



Ezt szemléltetik – hagyományos határgörbe ábrázolással készített – a [13] cikk 2. ábrájából szerkesztett 9.a), b) és c) ábrák.

9.b) ábra. A gömbi képlékenységi határ vándorlása



9.c) ábra

Mivel semmiféle új ismeretre nincs szükség, így formálisan fel is írhatjuk az anyagtörvényt:

$$\boldsymbol{\sigma}^d = 2\tilde{G}\boldsymbol{\varepsilon}^d - \Psi^d(2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_f^d),$$

$$\boldsymbol{\sigma}^o = 3\tilde{K}\boldsymbol{\varepsilon}^o - \Psi^o(3K - 3K_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^o - \boldsymbol{\varepsilon}_f^o),$$

s a benne szereplő jelölések és anyagállandók a következők:

egységugrás-függvények:

$$\Psi^d = \begin{cases} 0, & \text{ha } W^d < W_f^d, \text{ vagy } \dot{W}^d < 0, \\ 1, & \text{ha } W^d \geq W_f^d, \text{ és } \dot{W}^d \geq 0, \end{cases}$$

$$\Psi^o = \begin{cases} 0, & \text{ha } W^o < W_f^o, \text{ vagy } \dot{W}^o < 0, \\ 1, & \text{ha } W^o \geq W_f^o, \text{ és } \dot{W}^o \geq 0, \end{cases}$$

anyagoperátorok:

$$2\tilde{G} \equiv \frac{2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}}, \quad 3\tilde{K} \equiv \frac{3K + 3K_v \frac{\partial}{\partial t} + \theta_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t}},$$

rugalmassági anyagállandók:

– torzulási modulusok

G – rugalmas csúsztató modulus [MPa],

η – viszkozitási együttható [MPa h],

τ – relaxációs idő [h],

θ – torzulási tehetetlenségi tényező [MPa h²],

– *térfogati modulusok*

- K – kompresszibilitási modulus [MPa],
 K_v – térfogati viszkozitási tényező [MPa h],
 τ_o – térfogati relaxációs idő [h],
 θ_o – térfogati tehetetlenségi tényező [MPa h²],

képlékenységi (torzulási és térfogati) anyagállandók

- G_{pl} – képlékeny csúsztató modulus [MPa],
 K_{pl} – képlékeny kompresszibilitási modulus [MPa],

s mindezek értékét általában laboratóriumi kísérletek alapján határozzuk meg.

Szokás még két származtatott – nem független – képlékenységi állandóval is dolgozni, amelyek az

- η_{pl} – képlékeny viszkozitási tényező, kifejezhető a rugalmas csúsztató modulussal és a relaxációs idővel:

$$2\eta_{pl} = 2\eta - (2G - 2G_{pl})\tau,$$

- $K_{v,pl}$ – a képlékeny térfogati viszkozitási tényező, teljesen analóg módon felírva:

$$3K_{v,pl} = 3K_v - (3K - 3K_{pl})\tau_o.$$

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönet illeti VÁN PÉTERT alapos és lelkiismeretes lektori tevékenységéért, értékes javaslataiért, és a cikk átdolgozásában nyújtott kiemelkedő segítségéért, hálával tartozom FÜLÖP TAMÁS és MATOLCSI TAMÁS észrevételeiért.

IRODALOM

- [1] ASSZONYI, CS. szerk. (2006): Izotrop kontinuumok anyagtörvénye. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 3*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 168. (Szerzők: Asszonyi Csaba, Kertész Pál, Matolcsi Tamás, Szarka Zoltán, Ván Péter, Vásárhelyi Balázs)
- [2] ASSZONYI, CS. – VÁN, P. – SZARKA, Z. (2007): Izotrop kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 5*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 200.
- [3] ASSZONYI, CS. szerk. (2008): Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 192. (Szerzők: Asszonyi Csaba, Fülöp Tamás, Horváth Róbert, Szarka Zoltán, Ván Péter)
- [4] FÜLÖP, T. szerk. (2008): Új eredmények a kontinuumfizikában. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 148. (Szerzők: Asszonyi Csaba, Béda Péter, Bojtár Imre, Fülöp Tamás, Matolcsi Tamás, Ván Péter, Vásárhelyi Balázs)
- [5] ASSZONYI, CS. szerk. (2009): Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 172. (Szerzők: Asszonyi Csaba, Béda Gyula, Fülöp Tamás, Szarka Zoltán)
- [6] FÜLÖP, T. szerk. (2010): Idő- és térderiváltak az anyagtörvényekben. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 152. (Szerzők: Béda Gyula, Béda Péter, Fülöp Tamás, Ván Péter, Vásárhelyi Balázs)
- [7] ASSZONYI, CS.– KAPOLYI, L. (1981): A bányászat mechanikai rendszere. 2. kötet: Kőzetkontinuumok mechanikája.. *Veszprémi Akadémiai Bizottság*, Veszprém, p. 422.
- [8] HOULSBY, G.T.– PUZRIN, A.M. (2000): A thermomechanical framework for constitutive models for rate independent dissipative materials. *Int.J. Plasticity* **16**, p. 1017-1047.
- [9] COLLINS, I. F. – TAI, A (2005): What has thermo-mechanics to offer geo-mechanics? *Proc. of 11th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Ed. G. Barla and M. Barla, Torino, Italy 19-24 June, Vol **1**, 281-288.
- [10] MATOLCSI, T. (2011): Közönséges termodinamika. *Scolar Kiadó*, Budapest.
- [11] VÁN, P. (2010): A képlékenységi termodinamikája. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10* Műegyetemi Kiadó, Budapest, p.15-50
- [12] VERHÁS, J. (1985): Termodinamika és reológia. *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, p.300.
- [13] ASSZONYI, CS.– DOLEŽALOVÁ, M. (2011): Mérnöki létesítmények modellezésének és tervezésének egy módszeréről. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p.????
- [14] EHRENFEST-AFANASSJEW, T. (1925): Zur Axiomatisierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. *Zeitschrift für Physik* **33**, p933-945, **34**, p 638.
- [15] FÉNYES I. (1952): *A termodinamika alapjai*, Akadémiai Kiadó, Budapest.²⁵

²⁵ Ez a könyv soha nem jelent meg, kinyomtatták, de a nyomdából egyenest a zúzdába küldték, csak néhány példány maradt fenn belőle

- [16] FÉNYES I. (1968): *Termosztatika és termodinamika*, Akadémiai Kiadó, Budapest.
- [17] MATOLCSI, T. (2011): Áttekintés a kontinuumfizikáról. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 13*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 165-174.
- [18] FÜLÖP, T. (2011): A képlékenyedés termodinamikája. *A Tudomány Napja – Jubileumi Ülés*, Nyíregyháza, 2111. nov. 25.

ÁTTEKINTÉS A KONTINUUMFIZIKÁRÓL

Matolcsi Tamás

EÖTVÖS LÓRÁND TUDOMÁNYEGYETEM ÁLKALMAZOTT ANALÍZIS TANSZÉK, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Ez a cikk vázolja a kontinuumfizika fejlődése során keletkezett fogalmakat, összefüggéseket, kiemelve ezek egyrészt matematikai, másrészt fizikai problémáit. Nem jelöli ki a kontinuumfizika további útját, de rávilágít, hogy mely kérdésekre kell választ találni, hogy helyes eredményekhez juthassunk a természet megismerésében.

1. A KÖZÖNSÉGES TERMODINAMIKA ALAPJAI

A kontinuumfizika támaszkodik a termodinamika fogalmaira.

A szokásos „kvázisztatikus termodinamika” intuitív fogalmak – egyensúly, kvázisztatikus, reverzibilis, stb. – és az ezek tulajdonságait pontosan meg nem fogalmazó hallgatólagos megállapodások kusza szövevénye, megterhelve még matematikailag nem jól definiált szimbólumok – teljes és nem teljes differenciálok, stb. – használatával.

Ezekből aztán sok-sok téves következtetést vonnak le. A legélesebben mutatja ezt az, hogy be szokták „bizonyítani” a második főtétel KELVIN-PLANCK-féle és CLAUSIUS-féle megfogalmazásának egyenértékűségét, noha egy minden kétséget kizáró pontos megfogalmazásból kiderül [1], nem hogy egyenértékűek lennének, de függetlenek egymástól.

A kontinuum-fizikai tisztán látás-láttatás érdekében kénytelen vagyok gyorsan átfutni a termodinamika tisztességes megfogalmazását [4], amelyet közönséges termodinamikának hívok.

1.1 ANYAGEGYENLETEK (KONSTITÚCIÓS RELÁCIÓK)

A közönséges termodinamika testek hőjelenségeivel foglalkozik úgy, hogy a testeket homogénnek tekinti, azaz úgy veszi, hogy egy test bármely jellemző fizikai mennyisége a test minden pontjában ugyanaz (de az időben változhat).

Egy egyszerű homogén test jellemző mennyiségei a T hőmérséklete, a p nyomása, a V térfogata, az E belső energiája, az N részecskeszáma. Az energiát, térfogatot és részecskeszámot extenzív mennyiségnek szokás nevezni, ami azt fejezi ki, hogy ha a testet (gondolatban) két részre vágjuk úgy, hogy az egyikben N_1 , a másikban N_2 részecske van, akkor az eredeti energia és térfogat N_1/N_2 arányban oszlik meg a részek között.

Ez azonban nem igaz, mert egy test belső energiája a molekulák statisztikus mozgásának mozgási energiáját és a molekulák kölcsönhatási energiáját foglalja magában. A kölcsönhatási tag miatt az energia nem osztható el „igazságosan” az adott arányban a részek között:

Valójában a belső energia nem extenzív mennyiség.

Mindazonáltal a termodinamikában elfogadjuk az energia extenzív mivoltát, és a testek anyagának jellemzésére az $e := E/N$ fajlagos energiát és a $v := V/N$ térfogatot használjuk. Az extenzitivitás elfogadásából eredő hibát a μ kémiai potenciál bevezetésével kompenzáljuk, amely a testek részecskeszám-változásával járó belső energia változását írja le valamiképp. Ez azonban csak akkor járható út, ha a kölcsönhatási energia kicsi a statisztikus mozgási energiához képest.

A felsorolt mennyiségek nem függetlenek egymástól, a közöttük levő összefüggéseket leíró matematikai kifejezések az *anyagegyenletek* vagy *anyagi konstitúciós relációk*. A tapasztalat szerint a v és T függvényeként megadható a többi mennyiség:

$$e = e(v, T), \quad p = p(v, T) \quad \text{és} \quad \mu = \mu(v, T)$$

A belső energia lényeges része a molekuláknak a hőmozgásból eredő kinetikus energiája, ezért természetes feltevés, hogy – ugyanazon térfogat mellett – magasabb hőmérséklethez nagyobb belső energia tartozik. A tapasztalat pedig közvetlenül mutatja, hogy – állandó hőmérsékleten – a térfogat növekedésével a nyomás csökken. Ezeket a tulajdonságokat azzal fejezzük ki, hogy a konstitúciós relációktól megköveteljük a

$$\frac{\partial e(v, T)}{\partial T} > 0, \quad \frac{\partial p(v, T)}{\partial v} < 0$$

tulajdonságokat, amelyeket *belső stabilitási feltételeknek* nevezünk.

Az elméleti megfontolások számára sokszor előnyösebb, ha a hőmérséklet helyett a fajlagos belső energiát használjuk független változónak. Ekkor a belső stabilitási feltételek a

$$\frac{\partial T(e, v)}{\partial e} > 0, \quad \frac{\partial T(e, v)}{\partial e} \frac{\partial p(e, v)}{\partial v} - \frac{\partial p(e, v)}{\partial e} \frac{\partial T(e, v)}{\partial v} < 0$$

alakot öltik.

1.2 FOLYAMATOK

A termodinamika első főtétele állandó részecskeszámú testre a szokásos, pongyola formában

$$de = \delta q + \delta w$$

alakú. Ennek pontos megfogalmazása a következő. Minthogy a test bármely mennyisége megadható az e és v függvényében, a test állapotváltozásait – folyamatait – egyértelműen jellemezhetjük az e és v időbeli változásával, vagyis egy

$$t \mapsto (e(t), v(t))$$

függvénnyel. A belső energia változásának sebessége a q testnek időegység alatt átadott hőből, és a w testen időegység alatt végzett munkából tevődik össze, amelyek a testnek a környezetével való kölcsönhatásától és a test pillanatnyi (e, v) állapotától függnék.

A belső energia időbeli változására tehát a

$$\dot{e} = q(e, v) + w(e, v)$$

mérlegegyenlet áll fenn. Ezt kiegészítve a térfogatra vonatkozó

$$\dot{v} = f(e, v)$$

mérlegegyenlettel, közönséges differenciálegyenlet-rendszert kapunk a folyamatok meghatározására. Itt f a testnek időegység alatt átadott térfogat, szintén a test és környezetének kölcsönhatását jellemzi. A

$$q = q(e, v), w = w(e, v) \text{ és } f = f(e, v)$$

függvényeket *dinamikai konstitúciós relációknak* hívjuk.

Egyszerű mechanikai megfontolás mutatja, hogy lassú térfogatváltozás esetén – amikor elhanyagolható a térfogatváltozással kapcsolatos mozgási energia, – a testen végzett munka a nyomás és térfogatváltozás szorzatának ellentettje; ezért ideálisnak nevezzük a munkavégzési sebességet, ha $w = -pf$.

A tapasztalat szerint „a hő a melegebb testről áramlik a hidegebbre” és „a nagyobb nyomású test végez munkát a kisebb nyomásún”, ezért a dinamikai konstitúciós relációktól megköveteljük a

$$-\frac{q}{T}(T - T_a) - \frac{w}{p}(p - p_a) \geq 0$$

disszipációs egyenlőtlenséget, ahol az a index a környezet mennyiségeire utal.

A belső stabilitási feltételek és a disszipációs egyenlőtlenség függetlenek egymástól, és – mint az bebizonyítható – együtt biztosítják a folyamatok egyensúlyhoz tartását („második főtétele”), más néven az egyensúlyok aszimptotikus stabilitását.

1.3 ENTRÓPIA

A sokszor első főtételnek titulált $de = Tds - pdv$ összefüggés viszont *nem a termodinamika első főtétele*. Ez mindössze azt mondja, hogy az $s := \frac{1}{T}(e + pv - \mu)$ entrópiára mint az e és v függvényére feltesszük, hogy a

$$\frac{\partial s}{\partial e} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{p}{T}$$

tulajdonságokkal rendelkezik.

A belső stabilitási feltételek ekkor egyenértékűnek bizonyulnak azzal, hogy *az entrópia az e és v változók konkáv függvénye*, azaz a második deriváltja negatív definit.

Ha a környezetnek is van s_a entrópiája, analóg formulákkal, akkor *ideális munkavégzés esetén a disszipációs egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy*

$$(s + s_a)' \geq 0, \quad (1)$$

vagyis *az összentrópia nem csökken semmilyen folyamatban* (az entrópia-produkció nem-negatív).

Figyeljünk fel arra, hogy

- az entrópiának a második deriváltja az e és v függvényeként negatív definit; más változók függvényében azonban általában nem,
- az entrópiának az e és v változóbeli tulajdonsága (belső stabilitás) és az összentrópiának növekedése a folyamatokban (disszipáció) függetlenek egymástól.

2. A KONTINUUMFIZIKAI MODELLEZÉS

2.1 MÉRLEGEGYENLETEK

A kontinuum-modellezésben [1] figyelembe vesszük, hogy a test jellemző mennyiségei mind az időben, mind térben – azaz a téridőben – pontonként változhatnak. A nemrelativisztikus téridő-modell [3] fogalmait fogom használni.

Egy test folyamatait a következő, a téridőben értelmezett függvényekkel szokás jellemezni: ρ a test tömeg- (vagy részecskeszám) sűrűsége, $\mathbf{u}$ a test abszolút sebességmezője, e a test fajlagos belső energiája, $\mathbf{P}$ a nyomástenzor és $\mathbf{q}$ a hőáram. A folyamatokat a tömeg (részecskeszám) megmaradását, az impulzus megmaradását és az energia megmaradását kifejező *mérlegegyenletekkel* írják le:

$$D_{\mathbf{u}} \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\rho D_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3)$$

$$\rho D_{\mathbf{u}} e = -(\nabla \cdot \mathbf{q} - \mathbf{P} : \nabla \mathbf{u}) \quad (4)$$

alakba, ahol $D_{\mathbf{u}}$ az $\mathbf{u}$ szerinti (szubsztanciális) időderivált, ∇ pedig a térszerű differenciálás.

Továbbá az impulzusmomentum mérlegegyenletéből az következik, hogy $\mathbf{P}$ szimmetrikus kell legyen.

Ha a sűrűség helyett a $\nu := 1/\rho$ fajlagos térfogatot használjuk, akkor az első egyenlet $D_{\mathbf{u}}\nu = \nu \nabla \cdot \mathbf{u}$ alakú lesz.

Így az első és a harmadik egyenletben felismerjük a közönséges termodinamika egyenleteinek általánosítását.

Az első és második egyenlet pedig a kontinuummechanika ismert egyenleteit jelentik.

Tehát ez az egyenletrendszer a mechanikai és a hőjelenségek együttes folyamatait kívánja modellezni.

Rögtön meg kell jegyezni, hogy a belső energia nem extenzivitása folytán kérdéses, mennyire jogos a fajlagos belső energia használata.

2.2 KONSTITÚCIÓS RELÁCIÓK?

Sok a mennyiség, kevés az egyenlet: a mennyiségek között összefüggéseket, *konstitúciós relációkat* kell megadnunk, hogy az egyenletek egyértelműen meghatározzák a lehetséges folyamatokat.

A konstitúciós relációktól elvárt alapkövetelmény, hogy valamiképp kifejezzék az anyagok belső stabilitását és eleget tegyenek valamiféle disszipációs egyenlőtlenségnek, amelyek – remélhetőleg – együtt biztosítják a folyamatok stabilitását.

A konstitúciós relációk felállítása érdekében a (közönséges) termodinamikához szoktak folyamodni. De a homogén testekre kirótt, működő összefüggéseknek többnyire nincs sem egyértelmű, sem természetes általánosítása az inhomogén esetre. Például a ρ -val elosztott utolsó egyenlet jobb oldalán $-\nu \nabla \cdot \mathbf{q}$ a termodinamikai q hőátadásnak, $-\mathbf{P} : \nabla \mathbf{u}$ pedig a w munkavégzésnek felel meg. Nem látszik azonban, hogyan lehetne kiróni ezekre az ismert disszipációs egyenlőtlenség valamiféle megfelelőjét.

Az entrópia tűnik egyelőre az egyetlen menekülési útnak: entrópiaprodukcióval kifejezni a disszipációs egyenlőtlenséget, és abból következtetni a konstitúciós relációkra.

Az alábbi séma szerinti utat követik az elmélet kezdetétől napjainkig.

Felteszik, hogy létezik a fajlagos entrópia az e fajlagos belső energia és egyéb változók függvénye,

$$s = s(e, \dots), \quad \text{amellyel} \quad \frac{\partial s}{\partial e} = \frac{1}{T}, \quad (5)$$

továbbá a második deriváltja negatív definit. Az entrópia $\mathbf{j}_s$ konduktív áramára

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{q}/T \quad (6)$$

teljesül, és végül fennáll az entrópiaprodukciónak vonatkozó

$$\rho D_{\mathbf{u}} s + \nabla \cdot \mathbf{j}_s \geq 0 \quad (7)$$

egyenlőtlenség.

Ebből és a (4) egyenletből

$$-\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} + \left(-\mathbf{P} : \nabla \mathbf{u} + \rho T \frac{\partial s}{\partial \dots} D_{\mathbf{u}} \dots \right) \geq 0 \quad (8)$$

következik. Ez a disszipációs egyenlőtlenség megfelelője, amely információt ad arról, milyen lehet $\mathbf{q}$ és $\mathbf{P}$.

Kérdés, hogy

- indokolt-e a fajlagos belső energia és a fajlagos entrópia közötti kapcsolat közvetlen átvétele a közönséges termodinamikából,
- mik legyenek az egyéb változók a fajlagos belső energia mellett,
- milyen fizikai tény vagy elméleti meggondolás indokolja egy változó választását,
- miért a választott változókban legyen az entrópia konkáv függvény?

2.3 A VISZKÓZUS MODELL

A kontinuumfizikában elsőként felállított modell, amely gázokra és folyadékokra vonatkozik, a következő:

- az alaplmenyiségek $v = 1/\rho$ fajlagos térfogat, az $\mathbf{u}$ sebességmező és az e fajlagos belső energia,
- érvényben maradnak a közönséges termodinamikából ismert $T = T(e, v)$ és $p = p(e, v)$ függvények,
- a nyomástenzor $\mathbf{P} = p\mathbf{1} - \mathbf{V}$ alakú,
- létezik az $s = s(e, v)$ fajlagos entrópia mint a közönséges termodinamikában.

Ekkor (8) a

$$-\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} + \mathbf{V} : \nabla \mathbf{u} \geq 0$$

CLAUSIUS-DUHEM-relációt adja, amely a disszipációs egyenlőtlenség megfelelője. Ennek a legegyszerűbb kielégítése a szokásos

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad \mathbf{V} = 2\eta \nabla \mathbf{u} + \mu (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{1} \quad (9)$$

konstitúciós relációk ($\mathbf{V}$ a viszkózus feszültségtenzor).

Tehát itt a szokásos termodinamikai függvényekkel érvényben maradnak a belső stabilitási feltételek, amelyek a Clausius-Duhem-relációval együtt (bizonyos esetekben bizonyíthatóan) biztosítják a folyamatok stabilitását.

Ez a modell, gázok és folyadékok folyamataira is csak bizonyos keretek között alkalmazható. Nem írják le például a gyors frekvenciás hullámokat.

Ezért más modell(ek) után kell nézni.

2.4 ÁLTALÁNOSÍTÁSOK

Az előbbi modell különféle típusú általánosításai a konstitúciós relációk különféle típusú általánosításait jelentik. Így jöttek létre a kiterjesztett irreverzibilis termodinamika, a racionális kiterjesztett termodinamika, belső változós termodinamika stb. néven ismert elméletek, amelyeket az határoz meg, hogy mit tekintenek alapváltozónak és mit konstitúciós változónak. Ezeket az elméleteket aztán kifejtik, ragozzák, általános következtetéseket vonnak le belőlük, esetleg még alkalmazzák is őket. Ki az egyik mellett kardoskodik a másik ellen, ki fordítva.

Ez a sokféleség azt mutatja, hogy egyik sem igazán jó. Nyilván, ha valamelyik elég átütő volna, az lesöpörné a többit.

Ezek az általánosítások éppen olyan jelenségek leírására szolgálnának, amelyekben jelentős a molekulák közötti kölcsönhatás; ezért lehetséges, hogy az (5)-(6) séma helyett is valami máshoz kellene folyamodni.

3. SZILÁRD TESTEK

Egy szilárd test életében alapvetően fontos szerepet játszik a test alakja (egyszerű tapasztalat például, hogy kapcsolatban áll egymással a test alakja és a belső energiája, valamint a test alakja és a testben ébredő feszültség is). A test alakja nem jelenik meg az előzőekben ismertetett elméletekben; ez is mutatja, hogy azok szilárd testek leírására alkalmatlanok.

3.1 ALAPPROBLÉMÁK

Se szeri, se száma a próbálkozásoknak, miként vegyük figyelembe a test alakját, alakváltozását, deformációját. Ezek azonban korábban többnyire azon az elméleti szinten maradtak, mint a „kvázisztatikus termodinamika”: intuitív fogalmak, hallgatólagos megállapodások, matematikailag nem jól definiált szimbólumok használata.

A tisztázáshoz a következő kérdéseket kell megválaszolni:

1. Mi a test alakjának, alakja térbeli változásának matematikai leírása?
2. Hogyan jelenik meg a test alakja, alakváltozása a modellben?

3.2 ALAKVÁLTOZÁS

Téridős megfogalmazást használok [3]; M jelöli a téridőt.

Állítsuk elő az $\mathbf{u}$ sebességmező integrálgörbéit úgy, hogy rögzítünk egy t_0 időpontot és vele az E_{t_0} térszerű hipersíkot, vagyis azokat a téridőpontokat, amelyekhez tartozó időpont t_0 .

Legyen $a \in E_{t_0}$ esetén $t \mapsto \chi(t, a)$ az $\dot{x} = \mathbf{u}(x)$ differenciálegyenlet azon megoldása, amely a t_0 időpontban a a értéket veszi fel. Tehát

$$\frac{\partial \chi(t, a)}{\partial t} = \mathbf{u}(\chi(t, a)). \quad (10)$$

Elég sokszor differenciálható $\mathbf{u}$ esetén

$$\chi : I \times E_{t_0} \rightarrow M$$

elég sokszor differenciálható injekció, amelynek az inverze is ilyen.

Fizikai jelentését tekintve: a jellemzi valahogy a test egy pontját, és $\chi(t, a)$ a test a pontjának a téridőbeli helyzete a t pillanatban. Ki nem mondott szokásos elképzelés szerint a t_0 pillanatban a test az alapalakját veszi fel, nincs „meggyötörve”; kérdéses, van-e ilyen pillanat egyáltalán a test életében (lásd [2]).

Minthogy $\chi(t, a) \in E_t$, rögzített t esetén $a \mapsto \chi(t, a)$ egy elég sokszor differenciálható $E_{t_0} \rightarrow E_t$ injekció, amelynek az inverze is ilyen. Vezessük be az

$$\mathbf{F}(t, a) := \left(\frac{\partial \chi(t, a)}{\partial a} \right) \quad (11)$$

mennyiséget („mozgásgradienst”).

(A test pontjainak nincs „az” elmozdulása, csak elmozdulása egy megfigyelőhöz képest, ezért mellőzzük $\mathbf{F}(t, a) - \mathbf{I}$ elmozdulásgradienst.)

Az

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{Q}$$

poláris felbontásokkal értelmezhetők az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ jobb és bal oldali „alakváltozási tenzorok”, és ezekből sok különféle deformációtenzor képezhető.

Ezekkel kapcsolatban alapvető vizsgálatokat végzett FÜLÖP TAMÁS, aki mélyreható elemzéssel megvizsgálta [2] többek között:

- hogyan lehet kiküszöbölni az önkényes t_0 pillanatot a leírásból?
- mennyiben tekinthető $\mathbf{Q}$ a test merevtestszerű elfordulásának?
- mennyiben igaz, hogy $\mathbf{A}$ vagy $\mathbf{B}$ nem tartalmaz elfordulást?
- melyik deformációtenzor miért jó és miért nem?
- milyen tulajdonságokkal kellene rendelkeznie „a” deformációtenzornak?

FÜLÖP [5] megmutatta, hogy jelenlegi tudásunk alapján a bal-HENCKY-féle deformációtenzor a legtermészetesebb választás, de nem jutott végleges következtetésre,

hogy mi is legyen a deformációtenzor. Az viszont elég egyértelműen kiderült, hogy a többnyire elfogadott $\mathbf{D} := \mathbf{A} - \mathbf{I}$ nem az igazán jó választás.

3.3 ALAKVÁLTOZÁS A MODELLBEN

Itt még erőteljesebben előhozom a kétséget: *nem követünk-e el nagy hibát, amikor a belső energiát extenzív mennyiségnek vesszük?* Hiszen szilárd testeknél a molekulák közötti kölcsönhatás igencsak jelentős.

Egyelőre tegyük félre ezt az aggályt, és fogadjuk el a (2)-(4) egyenleteket a nyomástenzor helyett annak negatívját, a feszültségtenzort használva, $\boldsymbol{\sigma} := -\mathbf{P}$.

Most belép egy új mennyiség, az alakváltozás vagy a deformáció, amelyről csak anynyi biztos egyelőre, hogy szoros összefüggésben áll a sebességmezővel.

Viszont mint az eddigi elméletekben is, (5), (6) és (7) szerint az entrópiától és az entrópiatermeléstől várják a választ arra, hogyan illesszék be az alakváltozást vagy deformációt a konstitúciós relációkba.

Tekintsük a legegyszerűbb esetet, amelyben feltételezik, hogy az entrópia az e belső energia és az $\mathbf{A}$ alakváltozás függvénye, $s = s(e, \mathbf{A})$.

Egy kis kérdés: az entrópia második deriváltja legyen negatív definit; valóban az $\mathbf{A}$ változó az, amelyben ez helyes követelmény?

Ekkor a (8) a

$$-\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} + \rho T \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}} D_{\mathbf{u}} \mathbf{A} \right) \geq 0 \quad (12)$$

összefüggést adja.

Itt figyelni kell: az alakváltozást eredetileg a (t, a) függvényében definiáltuk, de a fenti formulákban mint téridőn értelmezett tenzormező szerepel; pontos megkülönböztetéssel, a fenti mezőt $\hat{\mathbf{A}}$ -val jelölve, $\hat{\mathbf{A}}(\chi(t, a)) = \mathbf{A}(t, a)$ röviden $\hat{\mathbf{A}} \circ \chi = \mathbf{A}$.

Egyszerű összefüggés, hogy

$$D_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{A}} \circ \chi = \dot{\mathbf{A}} \quad \text{és} \quad (\nabla \mathbf{u}) \circ \chi = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1},$$

ahol – és a továbbiakban is – az idő szerinti parciális differenciálást pont jelöli.

A (11) poláris felbontással $\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^{-1}$. Tehát a (12) egyenlőtlenség második tagját bekomponálva χ -vel, felhasználva, hogy $\boldsymbol{\sigma}$ szimmetrikus és $\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{-1}$ antiszimmetrikus, valamint a : szorzásban a tényezőket átcsoportosítva ez adódik:

$$\left(\mathbf{Q}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} \circ \chi) \mathbf{Q} + \rho T \mathbf{A} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}} \right) : \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}.$$

A szokásos tárgyalások további meggondolásaiban $(\sigma \circ \chi)$ -t írják $Q^{-1}(\sigma \circ \chi)Q$ helyett, „anyagi objektivitásra” hivatkozva, vagy azzal az indokkal, hogy bizonyos anyagok „forgásfüggetlennek” tekinthetők [6]. Erre semmiképp sem adhat magyarázatot az anyagi objektivitás, mert az itt is alkalmazott megfigyelő-független megfogalmazásban eleve teljesül (egyébként az is megmutatható, hogy az anyagi objektivitás szokásos megfogalmazása helytelen [1], [2]), és az sem világos, hogy mely anyagok tekinthetők „forgásfüggetlennek”.

Ezért nem tudom, mennyire vehetők komolyan az ezt a követő meggondolások.

Megjegyzendő, hogy egy újabb eredmény [7] kiküszöböli a szilárd testek kinematikájából a referencia-időpont szükségességét, helyette a nyugalmi metrika és a pillanatnyi metrika fogalmából építkezik. Ennek az új megfogalmazásnak várhatóan jelentős hatása lesz az egész modell felépítésére, így az anyagi objektivitás ill. forgásfüggetlenség kérdésére is.

Ez az egyszerű modell nem ad számot néhány fontos jelenségről, mint például a képlékeny viselkedésről. Különböző változók bevezetésével (amelyek között lehet „belső változó” is,) igyekeznek megjavítani a modellt. Ezek a próbálkozások azonban egyelőre nem elég tiszták sem fizikailag, sem matematikailag.

IRODALOM

- [1] MATOLCSI, T. (1986): On Material Frame-Indifference, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 91/2, p. 99-118.
- [2] MATOLCSI, T. – VÁN, P. (2006): Can material time derivative be objective? *Physics Letters A*, 353, p. 109-112, (math-ph/0510037).
- [3] MATOLCSI, T. (1993): Spacetime Without Reference Frames, Akadémiai Kiadó, (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest.
- [4] MATOLCSI T. (2012): Közöséges termodinamika, Scholar Kiadó, Budapest
- [5] FÜLÖP, T. (2008): Kontinuumok kinematikájának új értelmezése. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8*, Új eredmények a kontinuumfizikában. (Szerk. FÜLÖP, T.) Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 55-100.
- [6] ASSZONYI, CS. – VÁN, P. – SZARKA, Z. (2007): Izotrop kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 5*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 200.
- [7] FÜLÖP, T. – VÁN, P. (2010): Véges rugalmas és képlékeny deformációk leírása. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10*, Idő- és térderiváltak az anyagtörvényekben. (Szerk. FÜLÖP, T.), Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 99-151.

SZERZŐK

ASSZONYI CSABA DR. (1941) okl. gépészmérnök (NME, 1964), műszaki doktor (NME, 1965), a



műszaki tud. kandidátusa (1972), a műszaki tud. doktora (1976). Kutatási területe: a kontinuumok mechanikája és az irreverzibilis termodinamika. Eredményeit több mint 200 publikációban és 16 könyvben tette közre. Főbb mérnöki eredményei és szabadalmi az alagút- és épület-rekonstrukciók, víz- és környezetvédelem területén találhatók. Volt kutatómérnök, osztályvezető, gazdasági igazgató, tröszt főosztályvezető, kutatóintézeti igazgató, elnöke vezérigazgató.

1112 Budapest, Táncos u.6. Telefon: (06) 309 215 684, (1) 310 2374, asszonyi@gmail.com

CSATÁR ATTILA DR. (1978) kommunikáció-technikai mérnök (2001), okleveles mérnök tanár (2001), okleveles mezőgazdasági gépészmérnök (2001), az agrár-műszaki tudományi doktora PHD. (2008). Munkaterületei az alap- és alkalmazott kutatási, kutatás-fejlesztési, illetve műszaki-technológiai fejlesztési feladatok elvégzése. Szakterületei a tartósítási és tárolási folyamatok csomagolóanyagainak fejlesztése, anyagminőségi- és légkörfizikai jellemzők kölcsönhatásának vizsgálata, fizikai- és reológiai jellemzők meghatározása, különböző szemes- és szálalakú anyagok mechanikai tulajdonságainak vizsgálata. Jelenleg az MGI PhD tudományos főigazgató-helyettese, több tématerület és kutatási program projektvezetője, az INSTRON 5581 típusú mechanikai szilárdságellenőrző készülék laboratóriumának vezetője. Munkásságát számos hazai és külföldi publikáció jelzi.



2100 Gödöllő, Tessedik S. u. 4. Telefon: (28)-511-649; acsatar@fvmmi.hu

DOLEŽALOVÁ MÁRTA DR. (1932) Budapesten született és érettségizett, az egyetemi tanulmányait külföldön végezte, okleveles vízépítőmérnök (1955), a műszaki tudomány kandidátusa (1968) és tiszteletbeli tanár (2006). Kutatási területe: a numerikus módszerek fejlesztése és alkalmazása a talaj- és kőzetmechanikában. Szakterülete: nagy mérnöki létesítmények viselkedésének numerikus vizsgálata és előrejelzése, helyszíni méréshez illeszkedő modellezése. Eredményeit több mint 380 angol, orosz, cseh és magyar nyelvű publikációban tette közre. Vízügyi tervező és kutató mérnök 1969-ig, talaj- és kőzetmechanikai főtanácsadó 1989-ig, tudományos főmunkatárs és osztályvezető 1997-ig, vendégprofesszor Magyarországon és az Egyesült Államokban és meghívott előadó a prágai Károly Egyetemen. Főelőadó, panelista és szekcióvezető 25 nemzetközi konferencián 1988 és 2011 között. Nemzetközi tudományos társaságok tagja és vezetőségi tagja. 1999-től tagja az Oroszországi Építészeti Tudományos Akadémiának. Kilenc kitüntetés, díj és emlékérem tulajdonosa. 1990-től mostanáig a numerikus-modellezésre specializált Dolexpert-Geotechnika Mérnökiroda vezetője.



Nad Belvederem 3, 14800 Prága 4, Cseh Köztársaság, T:+420 241482668, dolexpert@volny.cz

FÜLÖP TAMÁS DR. (1967). okl. fizikus (ELTE, 1991), egyetemi doktor (ELTE, 1996), PhD.



(University of Tokyo, Japán, 2006). 1999-ig az ELTE Elméleti Fizika Tanszéken oktat fizika és matematika tárgyakat, az 1997-99 és 2002-06 években Japánban kutat, 2006-2007 között pedig Csehországban. 2007-től tagja a Montavid Termodinamikai Kutatócsoportnak. 2010-től az MTA KFKI Részecske- és Magfizikai Kutatóintézetben dolgozik, emellett 2011-től óraadó a BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszéken. Fő kutatási témája 2007-ig a határfeltételek fizikai szerepe és alkalmazásai a kvantummechanikában, jelenleg a kontinuumfizika (reológia, elemkapcsolások, közegkinematika, a téridő szerepe, stb.).

Eddig több, mint 20 szakcikke jelent meg, szerző ill. társszerző könyvfejezetben. 1112 Budapest, Igmándi u. 26. Tel: (1)-215-8463, tamas.fulop@gmail.com.

HORVÁTH RÓBERT DR. (1948) okl. gépészmérnök (NME, 1971), okl. matematikus (JATE, 1978), a műszaki tud. kandidátusa (1987), PhD (ME, 2000). 1972 óta dolgozik a DE AMTC Műszaki Karán, ill. jogelőd intézményeiben, jelenleg a Kar Környezet- és Vegyészmérnöki Tanszékének tanszékvezető főiskolai tanára. 1992-1995 között a Gépészeti Intézet igazgatója, 1995-1997 között a Kar tudományos főigazgató-helyettese, 1997-2003 között két ciklusban a Kar főigazgatója volt. Érdeklődési területe a kontinuummechanika elméleti és gyakorlati kérdései, az anyagok reológiai tulajdonságainak a vizsgálata, és alkalmazásuk. Eddig 5 könyv, 4 jegyzet, és 23 szakcikk szerzője szerzője, ill. társszerzője, és 27 hazai és külföldi konferencia előadója volt.



4034 Debrecen, Félégyházi u. 22. Telefon: (30) 349 2021, horvath@mfk.unideb.hu

KOCSIS DÉNES (1985) okleveles műszaki menedzser (BME, 2009), környezetmérnök (DE, 2009), jelenleg a Debreceni Egyetem Kémiai Tudományok Doktori Iskola harmadéves PhD hallgatója. 2011 áprilisától kezdődően a Debreceni Egyetem Műszaki Kar, Környezet- és Vegyészmérnöki Tanszékén tanársegédi beosztásban dolgozik. Oktatási területe: zaj- és rezgésvédelem, vízgazdálkodás és vízminőségvédelem, illetve környezeti analízis.



Kutatási témája: „Természetes és mesterséges, valamint humán anyagok mechanikai tulajdonságváltozásainak vizsgálata rezgésdiagnosztikai módszerekkel”.

4032 Debrecen, Soó Rezső u. 37. Telefon: (30) 443 6096, kocsis.denes@eng.unideb.hu

KOVÁCS LÁSZLÓ (1965) okl. bányamérnök (NME, 1989), okl. környezetvédelmi szakmérnök (Miskolci Egyetem, 1991). 2002-ig a MÉV-nél, illetve annak jogutódjánál, a MECSEKÉRC Zrt-nél dolgozott kőzetmechanikai laborvezetőként illetve fejlesztési részlegvezetőként. 1993



óta a hazai nagyaktivitású radioaktív hulladékok és kiégett fűtőelemek végleges elhelyezését előkészítő kutatási program (BAF) szakmai vezetője. 2002-től saját vállalkozásában (Kútfej Bt.) bekapcsolódott a kis- és közepes aktivitású radioaktív hulladékokat befogadó Mórággyi Gránit Formáció kutatásába. 2008-tól a Kőmérő Kft-t irányítja, ami e program kiemelt geotechnikai kivitelezője. Munkatársaival széles körű in situ kőzetmechanikai-geotechnikai vizsgálati módszeregyüttest fejlesztett ki vagy adaptált; ezeket Magyarországon első ízben alkalmazta sikeresen. Fő kutatási területe a primer feszültségmérések mellett az üregképzés kapcsán végbemenő transziens mechanikai, hidraulikai és termikus folyamatok mérése illetve modellezése. Eddig 25 szakcikke jelent meg.

7636 Pécs, Felső utca 41. Tel: (30) 431 2592 kovacslaszlo@komero.hu

MATOLCSI TAMÁS DR. (1941) 1969-ben végzett az ELTE fizikus szakán, a matematikai tud. kandidátusa (1976). 1969-től 1973-ig az MTA Számítástechnikai Központjának tudományos segédmunkatársa, 1973-tól 1975-ig a szegedi József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetében tudományos munkatárs. 1975-től az ELTE TTK Alkalmazott Analízis tanszékének oktatója, 1981-től docensként. 2005-ben nyugdíjba vonult.

Tudományos munkásságát a matematikai fizika területén fejti ki. Számos hazai és nemzetközi konferencián szerepelt előadóként. Hét egyetemi jegyzetet írt, huszonhárom tudományos cikket és négy angol nyelvű könyvet publikált.

2071 Páty, Tölgyfa utca 14. Telefon: (23) 343 043, (20) 5444 086, matolcsi.tamas@gmail.com



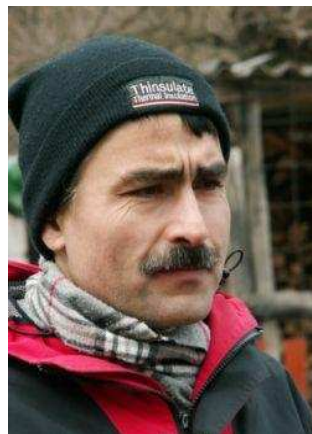
SZARKA ZOLTÁN DR. (1927) okl. mérnök (1950). 1950-től a Nehézipari Műszaki Egyetem – ma Miskolci Egyetem – Matematikai Tanszékének oktatója. 1967-től egyetemi docens, közben két időszakban tanszékvezető, 1991-től nyugdíjas, de oktatói munkáját 2006-ig folytatta. Szakterülete a kiegyenlítésszámítás, de 56 évi egyetemi munkája során a matematika számos területét (analízis, parciális differenciálegyenletek, valószínűségszámítás, komplex függvénytan, stb.) művelte.



Számos hazai és külföldi előadása mellett 46 szakcikke és 32 könyve és egyetemi jegyzete jelent meg, részben társszerzőkkel.

3529 Miskolc, Csabai kapu 34. Telefon: (46) 362 905, mateva@gold.uni-miskolc.hu

VÁN PÉTER DR. (1964). okl. fizikus (ELTE, 1990), egyetemi doktor (BME, 1994), PhD (BME, 2002). 2005-ig a BME Kémiai Fizika Tanszékének munkatársa. Jelenleg a KFKI, RMKI Elméleti Fizika Főosztályán és a BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszékén dolgozik. Több ízben dolgozott külföldön, Olaszországban, Németországban és Észtországban. Kutatási területe a nemegyensúlyi termodinamika mint általános fizikai keretelmélet, ennek alapjai, illetve különféle alkalmazásai. Az alapkérdések közül a nemegyensúlyi termodinamika variációs elveivel és gyengén nemlokális kiterjesztésével, az anyagi objektivitás elvével és a relativisztikus disszipatív folyadékok elméleteivel foglalkozott. Érdeklődési területéhez tartozik ezen kívül a károsodás mechanika és a reológia. Eddig mintegy 70 szakcikke és egy könyve jelent meg. 1012 Budapest, Lovas utca 18. Telefon: 2145243, vpet@rmki.kfki.hu



VÁSÁRHELYI BALÁZS DR. (1969). okl. építőmérnök (BME, 1993), PhD (BME, 2000), jelenleg a Pécsi Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki és Informatikai Kar oktatója. Doktori tanulmányokat folytatott Franciaországban (INPL-Nancy), Svájcban (ETH-Zürich), valamint az Egyesült Államokban (MIT, Boston). Fő kutatási területe a közzettestek osztályozásának lehetőségei és a gyakorlatban való alkalmazhatósága alagutak, illetve sziklarézsűk állékonyságának számításához, a szükséges biztosítási mód optimalizálásához. Kőzetmechanikai kutatásokat folytat még a repedések keletkezésének, terjedésének, valamint összekapcsolódásának témakörben és a víz jelenlétének szilárdságot befolyásoló hatásáról.



1126 Budapest, Hollósy S. u.3. Telefon: (20) 460 1182, vasarhelyib@gmail.com

MONTAVID RESEARCH GROUP

MONTAVID RESEARCH GROUP FOR THEORETICAL AND APPLIED THERMODYNAMICS
MONTAVID ELMÉLETI ÉS ALKALMAZOTT TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT

H-1112 Budapest, Táncos u.6. Telefon: (06) 309 215 684, (1) 310 2374

☆ ASSZONYI CSABA ☆ BÉDA GYULA ☆ BÉDA PÉTER ☆ CSATÁR ATTILA ☆ DOLEŽALOVÁ MARTA ☆
☆ HORVÁTH RÓBERT ☆ FÜLÖP TAMÁS ☆ KERTÉSZ PÁL ☆ KOVÁCS LÁSZLÓ ☆ KOCSIS DÉNES ☆
☆ MATOLCSI TAMÁS ☆ SZARKA ZOLTÁN ☆ VÁN PÉTER ☆ VÁSÁRHELYI BALÁZS ☆ VERHÁS JÓZSEF ☆