Szerkesztette: Fülöp Tamás

Termodinamikai módszertan – kontinuumfizikai alkalmazások



Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 19

Termodinamikai módszertan – kontinuumfizikai alkalmazások



Ing. Marta Doležalová, CSc emlékének szentelve

International Society for Rock Mechanics Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2015 Konferencia, Budapest

TERMODINAMIKAI MÓDSZERTAN – KONTINUUMFIZIKAI ALKALMAZÁSOK

SZERKESZTETTE

Fülöp Tamás PhD

BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, Budapest Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

Írta

ASSZONYI CSABA, CSATÁR ATTILA, FÜLÖP TAMÁS, KOVÁCS RÓBERT, Szarka Zoltán, Szücs Mátyás, Ván Péter

MÉRNÖKGEOLÓGIA-KŐZETMECHANIKA KISKÖNYVTÁR 19. KÖTET Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért 2015

SZERKESZTETTE

DR. FÜLÖP TAMÁS BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, Budapest Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

Írta

ASSZONYI CSABA, CSATÁR ATTILA, FÜLÖP TAMÁS, KOVÁCS RÓBERT, SZARKA ZOLTÁN, SZÜCS MÁTYÁS, VÁN PÉTER

A KUTATÁST ÉS A KÖTET MEGJELENÉSÉT

A MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, AZ EGYESÜLET A TUDOMÁNY ÉS TECHNOLÓGIA EGYSÉGÉÉRT, AZ ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS KUTATÁSI ALAP ÉS AZ MTA BOLYAI JÁNOS KUTATÁSI ÖSZTÖNDÍJ

TÁMOGATÁSA TETTE LEHETŐVÉ

ISBN 978-615-80157-0-7 ISSN 1789-0454

Megjelent az *Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért* gondozásában Nyomdai munkák: Robinco Kft. Felelős vezető: Kecskeméthy Péter

©2015 Budapest, Asszonyi Csaba, Csatár Attila, Fülöp Tamás, Kovács Róbert, Szarka Zoltán, Szücs Mátyás, Ván Péter

International Society for Rock Mechanics Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2015 Konferencia, Budapest

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó	9
Kitüntetett szilárdtest-reológiai modellek egy belső változós	
TERMODINAMIKAI ELMÉLET KERETÉBEN	
(Asszonyi Csaba – Fülöp Tamás – Ván Péter)	
1. Bevezetés	11
2. Az eljárás egy térdimenzióban	14
2.1. A kiinduló rendszer	14
2.2. A belső változó bevezetése	16
2.3. A belső változó kiküszöbölése	18
2.4. Speciális esetek és elemzésük	20
3. Az eljárás három térdimenzióban	22
3.1. A kiinduló rendszer	22
3.2. A belső változó bevezetése	23
4. Összehasonlítás más ismert megközelítésekkel	25
4.1. Kluitenberg elmélete	25
4.2. Kiterjesztett termodinamika	26
5. Összefoglalás	26
A függelék: Egytengelyű reológia származtatása a deviatorikus és gömbi komponensekből	28
B függelék : Ha a belső energiát toljuk el	30
Köszönetmondás	31
Irodalom	31

SZILÁRD ANYAGOK RUGALMAS, HŐTÁGULÁSI, KÉPLÉKENY ÉS REOLÓGIAI FOLYAMATAINAK TERMOMECHANIKÁJA – ELMÉLET ÉS KÍSÉRLET (Asszonyi Csaba – Csatár Attila – Fülöp Tamás)

Bevezetés	35
1. A kinematikai mennyiségek	37
2. A termodinamikai keret a reológia nélkül	39
3. Egytengelyű folyamatok - képletek és kísérleti szemléltetésük	41
4. A reológia termodinamikai bevezetése	45
5. A reológiai együtthatók meghatározása kísérleti adatokból	46
6. Diszkusszió	51
Köszönetmondás	53
Függelék: a mérések kivitelezéséről	53
Irodalom	54

IZOTROP KONTINUUMOK TERMODINAMIKÁJA MÉRNÖKI KÖZELÍTÉSBEN (Asszonyi Csaba – Szarka Zoltán)

Bevezetés	57
Megengedhetőnek vélt közelítések	58
1. Közelítés: Kis deformációk feltételezése	58
A deformációk értelmezése	59
2. Közelítés: A termikus változás izotrópiája és linearitása	60
3. Közelítés: A rugalmas viselkedés izotrópiája és linearitása	60

4. Közelítés: Az anyagállandók linearitása a hőmérséklet függvényében	61
5. Közelítés: A képlékenység deviatorikus volta	61
6. Közelítés: A képlékenységi sebesség homogenitása és linearitása	61
Anyagtörvény egyensúlyi állapotban	62
Anyagtörvény nemegyensúlyi állapotban	62
Megjegyzések	64
Köszönetnyilvánítás	65
Irodalom	65

Szilárdtest-reológiai időfüggés meghatározása a Volterra-elv által inspirálva (Fülöp Tamás – Szücs Mátyás)

1. A célkitűzés megfogalmazása	67
2. Homogén, izotrop feszültségmezőben nyitott alagút	69
3. Homogén, anizotrop feszültségmezőben nyitott alagút	71
4. Az anizotrop eset megoldása Kelvin-Hooke-reológia esetén	73
5. További tennivalók és lehetőségek	75
Köszönetnyilvánítás	75
Irodalom	76

HŐVEZETÉS EGYENLETEINEK ELMÉLETE, NUMERIKUS VIZSGÁLATA ÉS KÍSÉRLETI ELLENŐRZÉSE (Kovács Róbert)

1. Bevezetés	77
2. A hővezetési egyenletek általánosítása	80
2.1. Memória és nemlokális hatások	80
2.2. A hővezetési elmélet általánosítása, a hierarchikus rendszer	81
2.3. A hővezetés kinetikus elmélete	85
2.4. Az egyenletek skálafüggetlensége	88
3. Parciális differenciálegyenletek	90
3.1. Hiperbolicitás	91
3.2. Diszperziós reláció	93
3.2.1. Fourier-egyenlet	94
3.2.2. Guyer-Krumhansl-egyenlet	94
3.2.3. Green-Naghdi-egyenlet	97
3.2.4. Ballisztikus-diffúzív modell	99
4. A lézerimpulzus kísérlet	101
4.1. Kezdeti és peremfeltételek	102
5. Numerikus módszer	104
5.1. Diszkretizálás	105
5.2. Konzisztencia	106
5.3. Stabilitásvizsgálat	108
6. Megoldások és összehasonlítások	111
6.1. A Fourier-egyenlet megoldásai	112
6.2. A Maxwell-Cattaneo-Vernotte-egyenlet megoldásai	113
6.3. A Guyer-Krumhansl-egyenlet megoldásai	114
6.4. A Green-Naghdi-egyenlet megoldásai	115
6.5. A ballisztikus-diffúzív egyenlet megoldásai	117
6.5.1. Fourier-típusú megoldások	118
6.5.2.MCV-típusú megoldások	119
6.5.3. GK-típusú megoldások	120
6.5.4. GN-típusú megoldás	120
6.5.5.Ballisztikus megoldások	121
7. Kísérletek	121
7.1. Ballisztikus modellek összehasonlítása a kísérletekkel	121
7.2. További alkalmazások	125
7.3. Az EGR-kísérlet kiértékelése	126

7.3.1. Fourier-egyenlet illesztése	128
7.3.2. Guyer-Krumhansl-egyenlet illesztése	128
7.3.3. Ballisztikus-diffúzív modell	130
8. Összefoglalás	
Köszönetnyilvánítás	
Irodalom	

GALILEI-RELATIVISZTIKUS FOLYADÉKMECHANIKA (Ván Péter)

2.1. Hányad rendű tenzor vagy kotenzor? 142 3.1. Az idő- és térszerű részek transzformációs szabályai145 4. Az egykomponensű folyadékok alapmérlege és komponensei 147 5. A mozgás termosztatikája, avagy termosztatodinamika 148 5.2. Termodinamikai összefüggések transzformációs szabályai 150 7. Mi a folyadék sebessége? 154 B. 2. Kovektorok C. Függelék: Harmadrendű vegyes kontra-kokotenzor transzformációs szabályai 169 C. 1. A tér- és időszerű részek transzformációs szabályai 170

Előszó

A 2015-ös Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Konferenciára ismét önálló kötettel jelentkezik a Montavid Termodinamikai Kutatócsoport. Az itt közölt írások annak a közös általános gondolkodásmódnak mutatják be különböző újabb eredményeit, amely szerint a mechanikai és kapcsolódó jelenségeket egy egységes, irreverzibilis termodinamikai módszertan keretében szemléljük. Ez rugalmas, univerzális és konzisztens lehetőséget nyújt az érintett változatos aspektusok tárgyalására. Reológia, képlékenyedés, hővezetés: mind ugyanannak az általános kontinuum-termodinamikai modellnek különböző speciális megnyilvánulásaiként láttatható. Ebbe a felfogásba ötvözzük bele a kinematikai, objektivitási, téridővel kapcsolatos hozzávalókat, melyek a konzisztenciának elengedhetetlen részét adják, és következményeik szerteágazóak.

Mindez jól kiderül az egyes fejezetek révén, melyek áttekintése után kirajzolódik az összkép. Az itt bemutatott konkrét elméleti és kísérleti vizsgálatok erre a láncra fűződnek föl. Az eddig elért eredmények megnyugtatóak-biztatóak, hogy jó úton haladunk, és egyben azt is láttatják, hogy sok a további tennivaló, és hogy "bőven van új a nap alatt".

Legutóbbi kötetünkkel a 80 éves Béda Gyulát köszönthettük. Akkor három fejezetben is szerzőként vett részt Marta Doležalová. Tiszteltük, becsültük, szerettük Martát, és nagy szomorúsággal tölt el bennünket, hogy többé nem dolgozhatunk vele együtt – mostani kiadványunkat az ő emlékének szenteljük.

A szerkesztő köszönetet mond Asszonyi Csabának és Ván Péternek a kötet megjelenésében nyújtott segítségéért. Bízva abban, hogy a Kedves Olvasó kellemes és hasznos olvasmánynak találja munkánkat, üdvözlettel ezt kívánja:

Budapest, 2015. január 19.

Fülöp Tamás szerkesztő

KITÜNTETETT SZILÁRDTEST-REOLÓGIAI MODELLEK EGY BELSŐ VÁLTOZÓS TERMODINAMIKAI ELMÉLET KERETÉBEN

Asszonyi Csaba Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest *Fülöp Tamás* BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, Budapest, Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest *Ván Péter* MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont Részecske- és Magfizikai Intézet, Budapest, BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, Budapest, Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

A reológia egy belső változós termodinamikai elméletét mutatjuk be és elemezzük. A kapott modell univerzális, minden olyan esetre érvényes, amikor a mezoszkopikus és/vagy mikroszkopikus háttérfolyamatok kielégítik az alkalmazott termodinamikai elveket: a második főtételt, a mérlegegyenleteket és egyetlen további – tenzori – állapotváltozó jelenlétének feltételezését. Az így kapott modell, melyet Kluitenberg–Verhás-testnek javaslunk hívni, a Poynting–Thomson–Zener-test egy további, inerciális elemmel kiegészítve, vagy másképp fogalmazva, a Jeffreys-modell szilárd testekre történő kiterjesztése. Amellett érvelünk, hogy a reológia természetes termodinamikai építőköve a Kluitenberg–Verhás-test. A bemutatott módszertannak fontos jellegzetessége, hogy nemtriviális, egyenlőtlenség-típusú megszorítások adódnak a modell négy paraméterére. Ezeket a feltételeket és a további jellemzőket összehasonlítjuk a probléma többi ismert termodinamikai megközelítésének, így az ún. kiterjesztett irreverzibilis termodinamikának és Kluitenberg eredeti elméletének tulajdonságaival.¹

1. BEVEZETÉS

A belső változók módszertana a klasszikus, makroszkopikus elméletek egy univer-

¹ A *Continuum Mechanics and Thermodynamics* folyóiratban megjelenés alatt álló, az újság weboldalán 2014.11.20-án megjelent (http://dx.doi.org/10.1007/s00161-014-0392-3) "Distinguished rheological models for solids in the framework of a thermodynamical internal variable theory" cikk fordítása.

zális modellezési eszközének tekinthető. Univerzális, abban az értelemben, hogy minimális szintű feltevéseket tesz a modellezendő jelenségek fizikai mechanizmusáról. A kiindulópont egy extra mező, egy extra változó feltételezése. A megválaszolandó kulcskérdések e változó viszonya és csatolódása az eddig ismert fizikai mennyiségekhez, és a változó fejlődési egyenlete. E szempontból az irreverzibilis termodinamika egy különleges módszert javasol [1, 2]. Az általános ötlet az, hogy a fejlődési egyenlet formája és a többi folyamathoz csatolódás lehetséges módja meghatározható pusztán általános elvek, elsősorban a második főtétel alapján [3, 4, 5]. Eme általános alaknak eleget tevő egyenletek kell adódjanak az extra változó bármely konkrét szerkezeti, mezoszkopikus vagy mikroszkopikus realizálása esetén, hacsak eleget tesz a szóbanforgó általános elveknek. Az első, aki termodinamikai elképzeléseket alkalmazott kontinuumokra, Eckart volt, aki az ideális rugalmasságtól való eltérésekkel - nemrugalmas, anelasztikus viselkedéssel – is foglalkozott [6, 7]. A nemrugalmasság belső változós termodinamikai tárgyalását Biot vezette be [8] és Kluitenberg fejlesztette tovább, állapotváltozós elméletként [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Szilárd testek esetén sok kevésbé szisztematikus alkalmazás ismeretes, néha bármi termodinamikai háttér nélkül [18].

A belső változók fogalma hosszú történetre tekint vissza [19, 20], és számos különböző változata és elnevezése ismeretes. A *belső szabadsági fok* név a konfigurációs tér egy kiterjesztéséhez lett bevezetve a termodinamikában, és eredetileg a determinisztikus mező statisztikai és valószínűségi jellemzőkkel való kiterjesztését jelentette [21, 22]. Ez az ún. mezoszkopikus elméletek [23, 24, 25] alapja. Ez a jelentés szigorúan megkülönböztetendő attól a szintén *belső szabadsági fok* terminológiától, melyet Maugin használt Lagrange-i dinamikájú mezőelméletekre [26, 1]. Ezektől is eltérnek a *belső állapotváltozók*, melyek időfejlődése relaxációs jellegű és termodinamikai eredetű [3, 1]. Ama finom részletek ellenére, amikben ezek a fogalmak eltérnek az egyes szerzőknél (kontrollálhatóság, peremfeltételek, gyenge nemlokálisság stb.), létezik egy elegendően általános keret, ahol ezek a felfogások egybeesnek és a modern kontinuumfizika egy hathatós modellezési eszközeként jelentkeznek [27, 28]. Az alábbiakban nem elemezzük ezeket a szempontokat, ellenben bemutatjuk egy látszólag megszorított érvényű elméleti keret konstruktív modellező erejét.

A belső változós felfogás egy speciális változata a *dinamikai szabadsági fok* [29, 30], mely változó lokális termodinamikai egyensúlyban nullává válik, így egy folyamat mentén mennyiségileg jellemzi az egyensúlytól való pillanatnyi eltérést, úgymond a jelenlevő irreverzibilitás fokát. Ez az egyszerű, természetes és általános feltevés, melyet jelen munkában mi is alkalmazni fogunk, döntő fontosságú. Más megközelítések különböző további feltételezéseket vezetnek be, az állapotváltozók közvetlen interpretálásának megfelelően, így eltérő osztályozásokra és a konstitutív együtthatók különböző megszorításaira jutnak. Így például a kiterjesztett termodinamikában (Extended Irreversible Thermodynamics [31, 32]) a disszipatív feszültség az extra állapotváltozó, míg az eredeti Kluitenbergelméletben egy nemrugalmas deformáció, mely additívan módosítja a reológiai folyamat rugalmas deformációját.

A belső változó tenzori rendje általában kikövetkeztethető a modellezett jelenség tulajdonságaiból. Például a szilárd testek károsodásának egyszerű leírásához elegendő lehet egy skaláris változó, mely a tönkremenetel fokát jellemzi. A Fourier-elméleten túli hővezetési jelenségek leírásához hőáramhoz tartozó korrekciót várunk, ebből kifolyólag egy vektori belső változó kínálja magát [33, 34, 35]. A reológiai jelenségek leírásához, figyelembe véve, hogy a feszültség és a deformáció egyaránt szimmetrikus tenzori rendű mennyiség, természetes – és alább igazolt – várakozás az, hogy a belső változó egy szimmetrikus másodrendű tenzor.

Mint azt meg fogjuk mutatni, lineáris onsageri egyenletek esetén ez a belső állapotváltozó kiküszöbölhető, és egy lineáris összefüggés adódik a feszültség, a deformáció és ezek időderiváltjai között: a feszültség nulladik és az első deriváltja, valamint a megnyúlás nulladik, első és második deriváltjai között. Ezt a $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ módon fogjuk jelölni. Következésképp ez az összefüggés speciális esetként számos klasszikus reológiai modellt lefed: a Kelvin–Voigt-modellt, mely a $(0 \approx 0, 1)$ eset, a $(0, 1 \approx 1)$ Maxwell-modellt, a $(0, 1 \approx 0, 1)$ Poynting–Thomson–Zener-modellt és a $(0, 1 \approx 1, 2)$ Jeffreys-modellt. Ennélfogva a belső változós megközelítés egy univerzális keretet biztosít e modellek közös alapon történő tárgyalására, mindenekelőtt e modellek termodinamikai tulajdonságainak vizsgálatára.

Közelebbről, egy $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ modellt találunk a feszültség és deformáció (és deriváltjaik) deviatorikus részei között, és egy másik, független $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ reláció adódik e tenzorok gömbi részei között. Ez négy anyagi együtthatót jelent a deviatorikus részben, és négy további együtthatót a gömbi részben. Figyelemre méltó módon pontosan ez a 4 + 4 = 8-paraméteres modell az, mely szükségesnek és elégségesnek bizonyult az Anelastic Strain Recovery módszer számára [36, 37, 38], mely egy kísérleti eljárás felszín alatti háromdimenziós *in situ* feszültség meghatározására fúrómagminták reológiai relaxációja alapján. Ugyanez a modell alkalmazható műanyagminták egytengelyű terheléskísérleteinek kiértékelésére is [39, 40]. Egytengelyű folyamatokban a deviatorikus és a gömbi rész keveredik, és a húzófeszültség és hosszirányú nyúlás közötti kapcsolat egy $(0, 1, 2, 3 \approx 0, 1, 2, 3, 4)$ modelnek bizonyul, amint azt a Függelékben megmutatjuk.

Egy $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ modellben az anyagi együtthatók nem lehetnek tetszőlegesek, mert a termodinamika – közelebbről a termodinamikai stabilitás és nemnegatív entrópiaprodukció – feltételeket szab ki rájuk. Egy nemtriviális alábbi eredmény, hogy még e megengedett paramétertartománynak is csak az egyik fele reprezentálható rugók és olajfékek kapcsolásaként. A másik tartományfél szükségessé teszi egy további reológiai elem, a Verhás [41, 29] által bevezetett ($0 \approx 2$) tehetetlenségi elem felhasználását is.

A kiküszöbölési eljárás egy további haszna, hogy a peremfeltételek problémája itt nem lép fel. Ennek oka valójában a konstitutív egyenletek homogén (gradiensmentes) volta. Így a megoldás egyértelműségét ugyanazon peremfeltételek biztosítják, amelyek a megfelelő rugalmasságtani problémáét, csak többlet kezdeti feltételekre van szükség [42]. Ezenkívül a peremfeltételek problémája a Maugin-féle belső szabadsági fokokkal egyesített tárgyalásban és nemlokális kiterjesztés megengedése esetén is kezelhető, akár variációs, akár direkt termodinamikai előírásokkal [27, 28].

Itt bemutatott eljárásunk egy fontos szempontból eltér Kluitenbergétől, a kiterjesztett termodinamikáétól és Verhásétól, sőt, a klasszikus irreverzibilis termodinamikáétól is. Nevezetesen, amikor bevezetjük az entrópiaegyenlőtlenség klasszikus kosntitutív megoldását, lineáris kapcsolatot feltételezve a termodinamikai erők és áram között, az Onsager– Casimir-féle szimmetriarelációkat nem rójuk ki. Ennek elvi oka Occam borotvája: mikroszkopikus interpretáció hiányában Onsager feltételei [43, 44] nem feltétlenül érvényesek. E feltételek Truesdelltől származó jogos kritikája [45] tehát eljárásunkra nem vonatkozik. Ez az általánosabb hozzáállás már a duális belső változók kapcsán is gyümölcsözőnek bizonyult [27], mely egy hatékony egyesítési módszerre vezetett szilárd testekben történő hullámjelenségek esetében [46, 47, 48, 49, 50], és úgyszintén az általánosított mechanika származtatásánál [51, 28].

Az alábbiakban kiépítjük a reológia termodinamikai elméletét kisdeformációs közelítésben. Először egy térdimenzió esetére mutatjuk be az egyes lépéseket, a mechanikai tulajdonságokból kiindulva és a termodinamikai követelményeket bevezetve. Az eljárás lényegi mozzanatai és fő következményei így könnyen átláthatóak. Ezután kifejlesztjük a háromdimenziós teljes elméletet. Végül elemezzük módszerünket, és összehasonlítjuk Kluitenberg, továbbá a kiterjesztett termodinamika megközelítésével. Két függelékben pedig egy-egy technikai vonatkozást mutatunk be: a deviatorikus és gömbi komponensek kombinálódó viselkedését egytengelyű folyamatokra, illetve a belső állapotváltozó bevezetésének egy alternatív lehetőségét.

2. AZ ELJÁRÁS EGY TÉRDIMENZIÓBAN

2.1. A KIINDULÓ RENDSZER

A belső állapotváltozók bevezetésének módszertana szerint először is van egy kiindulási termodinamikai rendszerünk, ezután feltételezünk egy extra belső változót, ennek egy konkáv kifejezésével eltoljuk az entrópiát, és az entrópiaprodukció pozitív definitségét onsageri egyenletekkel biztosítjuk. Jelen céljainkhoz a kiindulási rendszer egy lineárisan rugalmas szilárd test lesz. Hogy a lényegi szempontokra összpontosíthassunk, az egy térdimenziós egyszerű esettel kezdünk.

Legyen tehát egy szilárd testünk, ε rugalmas deformációval (vagy deformáltsággal [52]), mely egy dimenzióban egy skalár változó, és

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon \tag{1}$$

rugalmas feszültséggel, ahol – szintén az egyszerűség kedvéért – az E Young-modulus állandónak van tekintve. Kis deformációkat feltételezve, mely szilárd testek esetén valóban sokszor teljesül, a sebességgradiens közelítőleg $\dot{\varepsilon}$ -tal, a deformáció időderiváltjával egyenlő, és a σ által végzett mechanikai teljesítmény a

$$\sigma \dot{\varepsilon} = E \varepsilon \dot{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{E}{2} \varepsilon^2 \right) = \varrho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{E}{2\varrho} \varepsilon^2 \right) = \varrho \dot{e}_{\mathrm{el}} \tag{2}$$

alakra egyszerűsödik, ahol

$$e_{\rm el}(\varepsilon) = \frac{E}{2\varrho}\varepsilon^2 \tag{3}$$

a fajlagos rugalmas energia, ρ pedig a tömegsűrűség, mely a kisdeformációs tartományban állandó. Ebben a tartományban maradva a parciális, az együttmozgó és a különböző objektív időderiváltak (ld. [53]) között sem kell különbséget tennünk.

A kiinduló rendszer (fajlagos) belső energiáját, a Thőmérséklet és az ε deformáció függvényeként, a

$$e(T,\varepsilon) = e_{\rm th}(T) + e_{\rm el}(\varepsilon) \tag{4}$$

alakban tekintjük, ahol $e_{\rm th}(T)$ az állandó vagy hőmérsékletfüggő fajhővel kapcsolatos $[e_{\rm th}(T) = cT$ a konstans esetben]. A (4)-beli szeparálódó változók jelzik, hogy most a hőtágulástól is eltekintünk.

A termodinamikailag ehhez tartozó (fajlagos) entrópia, szintén a hőmérséklet függvényeként írva, s = s(T), mely ki kell elégítse

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}T} = \frac{1}{T} \frac{\mathrm{d}e_{\mathrm{th}}}{\mathrm{d}T},\tag{5}$$

termodinamikai konzisztenciafeltételt, mely a (4)-ből, (3)-ból és (1)-ből levezethető $\rho de = \rho T ds + \sigma d\varepsilon$, avagy átrendezve

$$\rho \mathbf{d}s = \frac{\rho}{T} \mathbf{d}e - \frac{\sigma}{T} \mathbf{d}\varepsilon \tag{6}$$

Gibbs-relációból következik. Például állandó fajhő esetén

$$s(T) = c \ln \frac{T}{T_0} + s_0,$$
 (7)

 T_0, s_0 segédkonstansokkal.

A teljesítmény (2) alakját használva, a belső energa mérlege – azaz a termodinamika első főtétele –

$$\varrho \dot{e} = -j'_e + \sigma \dot{\varepsilon},\tag{8}$$

ahol j_e a hőáram, a vessző pedig a térderiválást jelöli.

A j_s entrópia
áramra a standard [22] $j_s=j_e/T\,$ választással élünk. Ekkor, a

$$\varrho \dot{s} = -j'_s + \pi_s \tag{9}$$

entrópiamérlegben (5)-öt felhasználva, a π_s entrópiaprodukcióra (6) és (8) révén

$$\pi_s = \varrho \dot{s} + j'_s = \frac{\varrho}{T} \dot{e} - \frac{\sigma}{T} \dot{\varepsilon} + \left(\frac{j_e}{T}\right)' = -\frac{j'_e}{T} + \left(\frac{j_e}{T}\right)' = j_e \left(\frac{1}{T}\right)' \tag{10}$$

nyerhető, melynek pozitív definitségét a

$$j_e = \lambda \left(\frac{1}{T}\right)' \tag{11}$$

Fourier-hővezetési törvénnyel biztosítjuk, ahol a λ hővezetési együttható pozitív.

Dolgozhatunk az e, ε kanonikus termodinamikai változókban is. Ez úgy érhető el, ha kifejezzük *T*-t (4)-ből mint e és ε függvényét, és behelyettesítjük az entrópiába, $s(e, \varepsilon)$ -t nyerve ezáltal. Például az állandó fajhőjű esetben azt kapjuk, hogy

$$s(e,\varepsilon) = c \ln \frac{e - (E/2)\varepsilon^2}{cT_0} + s_0.$$
(12)

A kanonikus változókban a hőmérséklet és a feszültség a

$$\frac{1}{T}(e,\varepsilon) = \frac{\partial s}{\partial e}\Big|_{\varepsilon}, \qquad \frac{\sigma}{\varrho T}(e,\varepsilon) = -\frac{\partial s}{\partial \varepsilon}\Big|_{e}$$
(13)

módokon érhető el [cf. (6)]. Belátható, hogy a kanonikus változókban az entrópia konkáv függvény, ha T > 0, E > 0 és $de_{th}/dT > 0$.

Megjegyezzük, hogy az e, ε kanonikus változók helyett azért a T, ε változókkal indítottunk, mert azokban tudjuk könnyen megfogalmazni a hőtágulás elhanyagolását [ld. (4)].

Az első lépés, a kiinduló rendszer jellemzése ezzel megtörtént.

2.2. A BELSŐ VÁLTOZÓ BEVEZETÉSE

Most következik a második lépés: az e, ε változók mellett feltételezzük egy további ξ változó jelenlétét feltételezzük, és az entrópiát eltoljuk egy ξ -függő taggal. Ez a tag konkáv kell legyen, és el kell tűnnie $\xi = 0$ esetén (egyensúlyban). Feltéve, hogy az entrópia ξ szerinti második deriváltja nemnulla, a Morse-lemma alapján az extra entrópiatagot az egyszerű $-\frac{1}{2}\xi^2$ alakban írhatjuk:

$$\tilde{s}(e,\varepsilon,\xi) = s(e,\varepsilon) - \frac{1}{2}\xi^2;$$
(14)

vagyis választhatjuk ξ -t annak a változónak, amelyben az extra tag ilyen alakú. Figyelem: ezzel a választással csak akkor élhetünk, ha nincs közvetlen fizikai tudásunk a feltételezett belső változó eredetéről, ezért megválasztásában szabadságunk van. Ha rendelkeztünk volna explicit információval ξ -ről – például egy mikroszkopikus értelmezéssel –, akkor nem ragaszkodhattunk volna az extra tag ilyen speciális alakjához, hanem egy általánosabb konkáv kifejezést kellett volna megengednünk, mely esetleg *e*-től és ε -tól is függ [29, 30]. Jelen esetben nem rendelkezünk ilyen háttérinformációval.

A kiterjesztett entrópiára (6) fényében a

$$\rho d\tilde{s} = \frac{\rho}{T} de - \frac{\sigma}{T} d\varepsilon - \rho \xi d\xi$$
(15)

Gibbs-reláció írható fel.

A reológiai effektusok elsősorban a mechanikai viselkedésben jelentkeznek, ezért egy extra feszültségjárulékot is megengedünk:

$$\tilde{\sigma} = \sigma + \hat{\sigma},\tag{16}$$

ahol $\hat{\sigma}$ a reológiai (nemegyensúlyi) eredetű tag, és $\tilde{\sigma}$ jelöli a teljes feszültséget. Ennek következményeként a teljesítményben, így a belső energia mérlegében is megjelenik egy extra $\hat{\sigma}\dot{\varepsilon}$ tag:

$$\varrho \dot{e} + j'_e = \tilde{\sigma} \dot{\varepsilon} = \sigma \dot{\varepsilon} + \hat{\sigma} \dot{\varepsilon}. \tag{17}$$

Ezt és (15)-öt felhasználva az entrópia
produkció kiszámolható, feltételezve $j_{\tilde{s}} = j_e/T$ -t:

$$\pi_{\tilde{s}} = \varrho \dot{\tilde{s}} + j_{\tilde{s}}' = \frac{\varrho}{T} \dot{e} - \frac{\sigma}{T} \dot{\varepsilon} - \varrho \xi \dot{\xi} + \left(\frac{j_e}{T}\right)' \tag{18}$$

$$= -\frac{j'_e}{T} + \frac{\hat{\sigma}}{T}\dot{\varepsilon} - \varrho\xi\dot{\xi} + \left(\frac{j_e}{T}\right)' = j_e \cdot \left(\frac{1}{T}\right)' + \frac{\hat{\sigma}}{T}\dot{\varepsilon} - \varrho\xi\dot{\xi}.$$
 (19)

A jobb oldalon az első (hővezetési) tagban tartsuk meg a korábbi $j_e = \lambda \left(\frac{1}{T}\right)'$ Fourierválasztást; valójában a háromdimenziós tárgyalásban majd látni fogjuk, hogy izotrop anyagokban a hővezetés nem is csatolódhat a reológiai oldalhoz, mert előbbi vektori, utóbbi pedig egy tenzori és egy skalár tag összege. A maradék rész pozitív definitségét, azaz

$$\hat{\sigma}\dot{\varepsilon} - \varrho T\xi\xi \ge 0 \tag{20}$$

fennállását a

$$\hat{\sigma} = l_{11}\dot{\varepsilon} + l_{12}(-\varrho T\xi),\tag{21}$$

$$\dot{\xi} = l_{21}\dot{\varepsilon} + l_{22}(-\varrho T\xi) \tag{22}$$

onsageri egyenletekkel biztosítsuk, melyben az l_{ij} együtthatókra bizonyos feltételek kell fennálljanak. Ezek az együtthatók függhetnek az állapotváltozóktól és a termodinamikai erőktől is. Ennélfogva e konsitutív egyenletek kvázilineárisak, illetve a Gyarmati-féle osztályozás [54] szerint akár nemlineárisak is lehetnek.

Az l_{ij} -kre teljesülendő feltételeket annak a kvadratikus kifejezésnek a pozitív definitsége szabja meg, melyet úgy kapunk, hogy (21)–(22)-t (20)-ba helyettesítjük:

$$l_{11}\dot{\varepsilon}^{2} + (l_{12} + l_{21})\dot{\varepsilon}(-\varrho T\xi) + l_{22}(-\varrho T\xi)^{2} = (\dot{\varepsilon} - \varrho T\xi) \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12}^{S} \\ l_{12}^{S} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} \\ -\varrho T\xi \end{pmatrix} \ge 0, \quad (23)$$

ahol $l_{12}^{S} = \frac{1}{2}(l_{12} + l_{21})$ az *l* mátrix szimmetrikus részének offdiagonális eleme. Így azt találjuk, hogy a követelmény az *l* mátrix l^{S} szimmetrikus részének pozitív definitsége. Ez a Sylvester-kritérium alapján azt írja elő, hogy

$$l_{11} \ge 0, \qquad l_{22} \ge 0, \qquad \det l^{\mathbf{S}} \ge 0.$$
 (24)

(Ez a három feltétel nem független: az első kettő bármelyike következik a másik kettőből.)

Vegyük észre, hogy az antiszimmetrikus rész, l^A nem járul hozzá az entrópiaprodukcióhoz, csak az együtthatómátrix szimmetrikus része generál irreverzibilitást.

2.3. A BELSŐ VÁLTOZÓ KIKÜSZÖBÖLÉSE

Amint azt említettük, az l_{ij} együtthatók nem kell, hogy állandók legyenek, jelen esetben hőmérsékletfüggőek lehetnek. Most tegyük föl, hogy l_{11} , $\rho T l_{12}$, l_{21} és $\rho T l_{22}$ állandók, legalábbis egy folyamat mentén, legalábbis jó közelítéssel – mely egy igen gyakori eset. Ilyenkor könnyű kiküszöbölni a ξ belső változót (21)–(22)-ből (noha a kiküszöbölés menete az általános esetben is értelemszerű). Megjegyzendő, hogy a belső változó kiküszöbölését már Meixner 1954-es cikke is alkalmazza [55].

Azzal kezdjük, hogy átírjuk (22)-t egy olyan alakra, ahol egy differenciáloperátor hat ξ -re:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \varrho T l_{22}\right) \xi = l_{21} \dot{\varepsilon}.$$
(25)

Ekkor, ha $\frac{d}{dt} + \rho T l_{22}$ -t hattatjuk (21)-re, (25)-öt felhasználva

$$\varrho T l_{22} \hat{\sigma} + \hat{\sigma} = \varrho T (\det l) \dot{\varepsilon} + l_{11} \ddot{\varepsilon}$$
(26)

nyerhető. Ezt $\hat{\sigma}=\tilde{\sigma}-E\varepsilon$ alapján a

$$\tilde{\sigma} + \frac{1}{\varrho T l_{22}} \dot{\tilde{\sigma}} = E \varepsilon + \left(\frac{\det l}{l_{22}} + \frac{E}{\varrho T l_{22}}\right) \dot{\varepsilon} + \frac{l_{11}}{\varrho T l_{22}} \ddot{\varepsilon}$$
(27)

végső formára hozhatjuk. Egy $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ reológiai modellt kaptunk tehát:

$$\tilde{\sigma} + \tau \tilde{\sigma} = E_0 \varepsilon + E_1 \dot{\varepsilon} + E_2 \ddot{\varepsilon}, \tag{28}$$

ahol

$$\tau = \frac{1}{\varrho T l_{22}} > 0, \quad E_0 = E, \quad E_1 = \frac{\det l}{l_{22}} + \frac{E_0}{\varrho T l_{22}} \ge \frac{E_0}{\varrho T l_{22}} > 0, \quad E_2 = \frac{l_{11}}{\varrho T l_{22}} \ge 0, \quad (29)$$

melyek a szükséges és elégséges termodinamikai követelmények.

Némi kényelmetlenséget jelent, hogy a $\tau = 0$ és $E_1 = 0$ esetek ki vannak zárva, így a $(0 \approx 0)$ modell, $\tilde{\sigma} = E_0 \varepsilon$ nincs közvetlenül lefedve, csak az $l_{22} \rightarrow \infty$ határesetként érhető el. Könnyen kezelhetjük ezt a kellemetlenséget. Vegyük észre, hogy $l_{22} > 0$ esetén a (21)–(22) egyenletpár átrendezhető a

$$\hat{\sigma} = \frac{\det l}{l_{22}} \dot{\varepsilon} + \frac{l_{12}}{l_{22}} \dot{\xi} = m_{11} \dot{\varepsilon} + m_{12} \dot{\xi}, \tag{30}$$

$$-\varrho T\xi = -\frac{l_{21}}{l_{22}}\dot{\varepsilon} + \frac{1}{l_{22}}\dot{\xi} = m_{21}\dot{\varepsilon} + m_{22}\dot{\xi}$$
(31)

alakba. Nos, a

$$\hat{\sigma} = m_{11}\dot{\varepsilon} + m_{12}\dot{\xi},\tag{32}$$

$$-\varrho T\xi = m_{21}\dot{\varepsilon} + m_{22}\dot{\xi} \tag{33}$$

alakú egyenletek egyszerűen egy másik megengedett onsageri lehetőség (20) pozitív definitségének biztosítására. Ugyanis (32)–(33) felhasználásával (20) a

$$m_{11}\dot{\varepsilon}^2 + (m_{12} + m_{21})\dot{\varepsilon}\dot{\xi} + m_{22}\dot{\xi}^2 = (\dot{\varepsilon} \quad \dot{\xi}) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}^{\mathsf{S}} \\ m_{12}^{\mathsf{S}} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}$$
(34)

alakra hozható, mely kvadratikus kifejezés pontosan akkor pozitív definit, ha

$$m_{11} \ge 0, \qquad m_{22} \ge 0, \qquad \det m^{\mathsf{S}} \ge 0.$$
 (35)

Itt is megfigyelhetjük,, hogy csak m szimmetrikus része járul hozzá az entrópia
produkcióhoz.

Ha (32)–(33)-ból kiküszöböljük ξ -t – ezúttal az $m_{22}\frac{d}{dt} + \rho T$ differenciáloperátort alakítva ki (33) időderiváltjában, és ezt az operátort hattatva (32)-re –, az eredmény

$$\tilde{\sigma} + \frac{m_{22}}{\varrho T}\dot{\tilde{\sigma}} = E\varepsilon + \left(m_{11} + \frac{m_{22}}{\varrho T}E\right)\dot{\varepsilon} + \frac{\det m}{\varrho T}\ddot{\varepsilon}.$$
(36)

Az együtthatók tehát

$$\tau = \frac{m_{22}}{\rho T} \ge 0, \qquad E_0 = E, \qquad E_1 = m_{11} + \frac{m_{22}}{\rho T} E_0 \ge 0, \qquad E_2 = \frac{\det m}{\rho T} \ge 0.$$
(37)

Lényegében ismét az előző reológiai modellcsaládot kaptuk, eltérések csak a termodinamikailag megengedett paramétertartomány szélein vannak. Valóban, e második változatban a (0 \approx 0) Hooke-modell is lefedésre került. Ráadásul a $\tau = 0$, $E_0 = 0$, $E_1 = 0$, $E_2 > 0$ modell – másszóval a (0 \approx 2) test, melyet a (2.4) szakaszban közelebbről is megvizsgálunk, – szintén meg van engedve mint termodinamikailag érvényes eset. Ezzel párhuzamosan a paramétertartomány szélének van egy olyan része, mely itt hiányzik, míg az előző változatban meg volt engedve: $l_{22} = 0$ megengedné az (1 \approx 1,2) modelleket is. A $\tilde{\sigma}$, ε és deriváltjaik közötti ilyen kapcsolat azonban nem tartalmazza a (0 \approx 0) Hooke-esetet, nem nyújt információt a szilárd testek statikus/lassú folyamatairól, így szilárd testekre nem elégségesek.

A továbbiakban az m_{ij} együtthatós változatot fogjuk használni, de az l_{ij} együtthatókra analóg állítások lesznek igazak.

2.4. Speciális esetek és elemzésük

A kapott $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ reológiai model [ld. (28)] számos jól ismert klasszikus esetet lefed. Valóban, tartalmazza a $(0 \approx 0)$ Hooke-modellt, a $(0 \approx 0, 1)$ Kelvin–Voigtmodellt, a $(0, 1 \approx 1)$ Maxwell-modellt, a $(0, 1 \approx 0, 1)$ Poynting–Thomson–Zener-modellt és a $(0, 1 \approx 1, 2)$ Jeffreys-modellt. E szempontból a jelen, belső változós megközelítés fontos hozzájárulása az, hogy e modellek együtthatóira termodinamikai eredetű megszorításokat tár fel. (35), (37) és a

$$\det m = \det m^{\mathbf{S}} + \left(\frac{m_{12} - m_{21}}{2}\right)^2 = \det m^{\mathbf{S}} + \left(m_{12}^{\mathbf{A}}\right)^2$$
(38)

azonosság alapján ezek a feltételek a következőek:

$$\tau \ge 0, \quad E_0 \ge 0, \quad I_1 := E_1 - \tau E_0 = m_{11} \ge 0, \quad E_2 \ge 0,$$
 (39)

ahol bevezettük az I_1 csillapítási indexet. Ez az I_1 kombináció, a hasonlóan definiált

$$I_2 := E_2 - \tau I_1 = -\frac{m_{12}m_{21}}{\varrho T} = \frac{\left(m_{12}^{\rm A}\right)^2 - \left(m_{12}^{\rm S}\right)^2}{\varrho T}$$
(40)

tehetetlenségi indexszel együtt, két fontos jellemzője a $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ modelleknek. $I_1 \ge 0$ egy nemtriviális kombinált feltételt jelent a τ , E_0 és E_1 együtthatókra, mely például kizárja a $(0, 1 \approx 0)$ és $(0, 1 \approx 0, 2)$ modellek létét, termodinamikai alapon. Továbbá, I_2 ugyan lehet pozitív és negatív egyaránt, de e két eset jelentősen eltérő helyzeteket jelent. Amikor

 $I_2 < 0$, másszóval ha az m együtthatómátrix szimmetrikus része dominál az antiszimmetrikus rész fölött, akkor feszültségvezérelt folyamatokra az adódó másodrendű lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének [$\varepsilon_{\text{homog.}}(t) \sim e^{\lambda t} \Rightarrow E_0 + E_1\lambda + E_2\lambda^2 = 0$] két negatív valós gyöke van, így a megoldást két időben exponenciálisan csökkenő tag jellemzi. Ha ellenben $I_2 > 0$, azaz amikor az antiszimmetrikus rész dominál, a két gyök nem valós. A valós részeik negatívak, mely csillapítást biztosít, viszont a képzetes részek oszcillálást jelentenek a megoldásban. Ez lehetőséget nyit arra, hogy alkalmas, a reológiai anyag sajátfrekvenciájához közeli periodikus gerjesztéssel rezonanciába hozzuk az anyagot. Fontos észrevenni, hogy ez a rezonancia teljesen más, mint a rugalmas rezonancia, mely akkor lép fel, ha a test geometriai méretei, a rugalmas hullámok anyagbeli sebessége és a gerjesztő erő frekvenciája alkalmas összhangban van. A reológiai rezonancia teljesen lokális jelenség, független a test geometriai méreteitől, a rugalmasságtani E_0 és a reológiai E_1 , E_2 együtthatók közti viszony következménye. A tehetetlenségi jellegű E_2 együttható nem a szokásos mechanikai tehetetlenségel kapcsolatos, hanem egy más, reológiával kapcsolatos tehetetlenség.

Az, hogy a *túlcsillapított* (avagy *alultehetetlen*), vagyis $I_2 < 0$ modellek jelentősen különböznek az alulcsillapított/túltehetetlen ($I_2 > 0$) esetektől, egy másik módon is szemléltethető. Belátható ugyanis – az A. függelékben láthatóhoz hasonló lépések segítségével [56] -, hogy ha két reológiai kapcsolást párhuzamosan kapcsolunk, a csillapítási indexük összege megegyezik az eredő rendszerével, és a tehetetlenségi indexre ugyanilyen additivitás teljesül [hacsak az eredő nem lép ki a $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ keretből]. Soros kapcsolás esetén pedig nemnegatív csillapítási indexek nemnegatív eredő csillapítási indexhez vezetnek (és pozitívak pozitívhoz), és nempozitív tehetetlenségi indexek nempozitívhoz (és negatívok negatívhoz). Ezeknek egy megnyugtató következménye, hogy rugók és olajfékek soros és párhuzamos kapcsolásai mindig pozitív csillapítási indexűek, összhangban a termodinamikai feltétellel. Egy nemtriviális másik következmény azonban az, hogy rugók és olajfékek – nulla tehetetlenségi indexű elemek – semmilyen soros-párhuzamos kombinációja nem eredményezhet pozitív tehetetlenségi indexű kapcsolást. Így például az általánosított Kelvin-Voigt- és általánosított Maxwell-Wiechert-modellek - melyek Kelvin-Voigt- ill. Maxwell-modellek soros ill. párhuzamos kapcsolásai, és melyeket előszeretettel használnak általános reológiai szituációk modelljeként - nem képesek reprodukálni az ilyen, termodinamikailag teljesen legitim modelleket.

Ez szükségessé teszi egy új reológiai elem bevezetését, a $(0 \approx 2)$ modellhez kapcsolódóan. Ismereteink szerint Verhás volt az első [41, 29], aki eme új elem szükségességére rámutatott. A továbbiakban ezt *tehetetlenségi* elemnek fogjuk nevezni, és Verhás ábráját fogjuk rá használni (ld. 1. ábra).



1. ÁBRA. A tehetetlenségi elem, mely a ($0 \approx 2$), $\tilde{\sigma} = E_2 \tilde{\varepsilon}$ elemi modellhez kapcsolódik.

3. AZ ELJÁRÁS HÁROM TÉRDIMENZIÓBAN

Most a háromdimenziós esetet tárgyaljuk, teljes analógiában az egydimenziós változattal.

3.1. A KIINDULÓ RENDSZER

Három dimenzióban az $\boldsymbol{\varepsilon}$ deformáció és a $\boldsymbol{\sigma}$ feszültség szimmetrikus tenzorok. Ha izotrop Hooke-rugalmasságot feltételezünk, a feszültség lineárisan függ a rugalmas deformációtól, két skalár rugalmas együttható révén, melyek egyike a deviatorikus tenzori komponenseket köti össze, a másik a gömbieket:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = E^{d} \boldsymbol{\varepsilon}^{d} + E^{s} \boldsymbol{\varepsilon}^{s}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{s} = \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{d} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{s}, \quad E^{d} = 2G, \quad E^{s} = 3K.$$
(41)

A kisdeformációs tartományban maradunk, ahol a ρ sűrűség (közelítőleg) konstans, és a sebességgradiens tenzor $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ -tal egyenlő. Így $\boldsymbol{\sigma}$ mechanikai teljesítménye így írható:

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{d}}) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{s}}) = \varrho\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{el}}, \tag{42}$$

ahol

$$e_{\rm el}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{E^{\rm d}}{2\varrho} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\rm d} \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm d}) + \frac{E^{\rm s}}{2\varrho} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\rm s} \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm s}).$$
(43)

A teljes fajlagos energiát a

$$e(T, \boldsymbol{\varepsilon}) = e_{\rm th}(T) + e_{\rm el}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{44}$$

alakban választjuk. A $\rho de = \rho T ds + tr(\boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon})$, átrendezve

$$\varrho ds = \frac{\varrho}{T} de - \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon})$$
(45)

Gibbs-relációnak eleget tesz a s = s(T) fajlagos entrópia, ha

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}T} = \frac{1}{T} \frac{\mathrm{d}e_{\mathrm{th}}}{\mathrm{d}T}.$$
(46)

A teljesítmény (42) alakjával a belső energia mérlege (az első főtétel)

$$\varrho \dot{e} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_e + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}). \tag{47}$$

A \mathbf{j}_s entrópiaáram és a \mathbf{j}_e hőáram között a standard $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}_e/T$ kapcsolatot választjuk. Ekkor a

$$\varrho \dot{s} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_s + \pi_s \tag{48}$$

entrópiamérlegben a π_s entrópa
produkció (45) és (47) alapján számolva

$$\pi_{s} = \varrho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{s} = \frac{\varrho}{T} \dot{e} - \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}_{e}}{T}\right) = -\frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{j}_{e} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}_{e}}{T}\right) = \mathbf{j}_{e} \cdot \nabla \left(\frac{1}{T}\right),$$
(49)

melynek pozitív definitségét a

$$j_e = \lambda \nabla \left(\frac{1}{T}\right), \qquad \lambda > 0$$
 (50)

Fourier-hővezetéssel biztosítjuk. A $(T, \boldsymbol{\varepsilon})$ állapotváltozókról a kanonikus $(e, \boldsymbol{\varepsilon})$ változókra áttéréshez T kifejezendő (44)-ből, és az entrópiába helyettesítendő, így kapva $s(e, \boldsymbol{\varepsilon})$ -t. Megfordítva, a kanonikus változókból indulás esetén a hőmérséklet

$$\frac{1}{T}(e, \boldsymbol{\varepsilon}) = \left. \frac{\partial s}{\partial e} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$
(51)

révén kapható meg. Az entrópia konkáv a kanonikus változókban [a természetes T > 0, E > 0, $de_{th}/dT > 0$ feltételek teljesülése esetén].

Ha rendelkezésünkre áll a kiinduló rendszer a kanonikus változókban, készen állunk a kiterjesztésére.

3.2. A BELSŐ VÁLTOZÓ BEVEZETÉSE

A kiterjesztett állapotteret a következő változók feszítik ki: az *e* belső energia, az ε deformáció és egy $\boldsymbol{\xi}$ belső változó. Ez utóbbit másodrendű szimmetrikus tenzornak választjuk, a célból, hogy a kiinduló rendszer mechanikai tulajdonságait ("anyagtörvényét") terjesszük ki, korrekciókat nyerve a feszültség és a deformáció – két szimmetrikus tenzor – között.

Az entrópiát egy konkáv nemegyensúlyi taggal toljuk el, mely csak $\boldsymbol{\xi}$ -től függ, kvadratikusan. A Morse-lemma szerint ez az extra tag egyszerű négyzetes alakúnak választható, így a kiterjesztett entrópiafüggvény

$$\tilde{s}(e, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}) = s(e, \boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\xi}^2).$$
(52)

A kiterjesztett entrópiára a Gibbs-reláció

$$\rho d\tilde{s} = \frac{\rho}{T} de - \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon}) - \rho \operatorname{tr}(\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\xi}).$$
(53)

Hogy a kiterjesztés a mechanikai aspektusokban is érvényesüljön, a feszültséget is kiterjesztjük egy reológiai (nemegyensúlyi) taggal:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}.$$
 (54)

Következésképp, a (42) mechanikai teljesítmény, és így az energiamérleg a

$$\underline{\varrho}\dot{e} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{e} = \operatorname{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$$
(55)

módon változik. A $\mathbf{j}_{\tilde{s}} = \mathbf{j}_e/T$ választással élve, és felhasználva (53)-at és (55)-öt, az entrópiaprodukció:

$$\pi_{\tilde{s}} = \varrho \dot{\tilde{s}} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\tilde{s}} = \frac{\varrho}{T} \dot{e} - \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \varrho \operatorname{tr}(\boldsymbol{\xi}\dot{\boldsymbol{\xi}}) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}_{e}}{T}\right)$$

$$= -\frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{j}_{e} + \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \varrho \operatorname{tr}(\boldsymbol{\xi}\dot{\boldsymbol{\xi}}) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}_{e}}{T}\right)$$

$$= \mathbf{j}_{e} \cdot \nabla \left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{d}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d}) + \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{s}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{s}) - \varrho \operatorname{tr}(\boldsymbol{\xi}^{d}\dot{\boldsymbol{\xi}}^{d}) - \varrho \operatorname{tr}(\boldsymbol{\xi}^{s}\dot{\boldsymbol{\xi}}^{s}).$$
(56)

A jobb oldalon vektorok szerepelnek az első tagban, skalárok a harmadik és ötödik tagban, és szimmetrikus, nyom nélküli tenzorok a második és negyedik tagban. Izotrop anyagban e háromfajta mennyiség nem csatolódhat egymáshoz a Curie-elv, azaz az izotrop függvények reprezentációs tétele [29] értelmében. Ennek megfelelően a vektorokat tartalmazó taghoz Fourier-hővezetést választunk: $\mathbf{j}_e = \lambda \nabla (\frac{1}{T})$. A további két tagpárhoz a legáltalánosabb onsageri megoldás

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{d} = l_{11}^{d} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d} + l_{12}^{d} \left(-\varrho T \boldsymbol{\xi}^{d}\right), \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{s} = l_{11}^{s} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{s} + l_{12}^{s} \left(-\varrho T \boldsymbol{\xi}^{s}\right), \tag{57}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^{d} = l_{21}^{d} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d} + l_{22}^{d} \left(-\varrho T \boldsymbol{\xi}^{d}\right), \qquad \dot{\boldsymbol{\xi}}^{s} = l_{21}^{s} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{s} + l_{22}^{s} \left(-\varrho T \boldsymbol{\xi}^{s}\right), \tag{58}$$

vagy ennek az m^d, m^s együtthatókat használó változata, mely (30)–(31) általánosítása.

Azt láthatjuk tehát, hogy amit egy dimenzióban kaptunk, három dimenzióban egyszerűen megkettőződik, ahol a két komponens egymástól független. A nyom nélküli, szimmetrikus tenzorokat tartalmazó két tag összegének önállóan kell pozitív definitnek lennie, a skalárokat tartalmazó két tag összegének pedig szintén. Az együtthatókra ebből következő feltételek ugyanazok, mint az egydimenziós esetben.

Állandó hőmérséklet esetén a belső változó kiküszöbölése szintén két független $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ modellre vezet:

$$\boldsymbol{\sigma}^{d} + \tau^{d} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{d} = E_{0}^{d} \boldsymbol{\varepsilon}^{d} + E_{1}^{d} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d} + E_{2}^{d} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{s} + \tau^{s} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{s} = E_{0}^{s} \boldsymbol{\varepsilon}^{s} + E_{1}^{s} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{s} + E_{2}^{s} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{s}, \qquad (59)$$

termodinamikai eredetű egyenlőtlenség-feltételekkel az összesen nyolc együtthatóra.

Egytengelyű folyamatok esetén mind a deviatorikus, mind gömbi reológia aktív, és egy meglehetősen komplikált eredő egytengelyű reológiai viselkedés alakul ki – a részleteket ld. az A. függelékben.

Két megjegyzéssel zárjuk ezt a szakaszt. Az első, hogy a bemutatott termodinamikai eljárás egy potenciálon (az entrópián, ill. következésképp a szabadenergián) alapul, ezért tárgyalásmódunk hiperelasztikus – a teljes állapottér szemszögéből. A redukció/kiküszöbölés során nyert feszültség–deformáció-reláció azonban nem kapható meg potenciálból.

A másik megjegyzés az, hogy az entrópiaelv általánosabb kihasználásán [57] alapuló módszerek ebben a klasszikus irreverzibilis termodinamikai esetben ugyanerre a szerkezetre vezetnek, mint a forrástag itt alkalmazott egyszerű szeparációja.

4. ÖSSZEHASONLÍTÁS MÁS ISMERT MEGKÖZELÍTÉSEKKEL

Kluitenberg [12] egy hozzánkéhoz hasonló eredményt, két $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ modellt kapott, de a mienkétől eltérő feltételezésekkel, és a $(0, 1 \approx 0, 1)$ Poynting–Thomson–Zenertest a kiterjesztett termodinamikában is levezethető [31]. A következő szakaszban ezeket a megközelítéseket és feltételezéseiket vizsgáljuk meg.

4.1. Kluitenberg elmélete

Mint láttuk, a bemutatott termodinamikai keret a tehetetlenség, relaxáció és kúszás egy kitüntetett kombinációjára, a $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ modellre mint reológiai alaptestre vezet. A belső változós nemegyensúlyi termodinamikát először Kluitenberg alkalmazta szisztematikusan a lineáris viszkoelaszticitásra [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15], aki szintén a $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ testet kapta a termodinamikai modellezés alapvető építőköveként.

A Kluitenberg-elmélet eltér a mi megközelítésünktől. A különbségek a következők:

 A Kluitenberg-elméletben a belső változónak rögzített fizikai jelentése van: a deformációhoz hozzáadódó direkt – anelasztikusnak nevezett – járulékként van értelmezve [9]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\rm el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\rm anel}. \tag{60}$$

A mi fenti megközelítésünk szerint ez az interpretáció nem szükséges, a deformációt egy tetszőleges tenzori mennyiség befolyásolja, az entrópiaprodukció disszipatív tagjaiban történő lineáris relációk révén.

 Kluitenberg, a deformációs értelmezés következményeként, kapcsolatot tesz fel az anelasztikus és a rugalmas feszültség között. Nevezetesen, nála ez a két feszültség egyenlő {[11], (4.4)}. Részletesebben kiírva, felteszi, hogy

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{anel}}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{anel}}) = \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{anel}}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{anel}}) - \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{anel}}) = 0.$$
(61)

Itt $\hat{s}(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}, \boldsymbol{\varepsilon}_{anel}) = \hat{s}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{anel}, \boldsymbol{\varepsilon}_{anel}) = s(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_{anel}).$

Amint azt mi fentebb találtuk, ezek a feltételezések nem szükségesek a termodinamikai konzisztenciához, és a reológiai együtthatók egy eltérő elemzéséhez vezetnek. Így például a Kluitenberg-reprezentációban nem adódik megszorítás E_1 , a deformációsebesség együtthatójának előjelére. Továbbá, ha Kluitenberg rugalmas és anelasztikus deformációi kvadratikusan szerepelnek az entrópiában, akkor a $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ test helyett csak a $(0, 1 \approx 1, 2)$ Jeffreys-modell vezethető le {[11], (4.25)–(4.26)}. A Jeffreys-test azonban nem egy szilárd anyag reológiája (a Jeffreys-modell lassú folyamatok esetén egy viszkózus folyadékot ír le), így szilárd testek viszkoelasztikusságához nem kielégítő. A valódi elemi építőkő a $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ test.

Verhás folyadékok esetére vezetett be egy, a miénkkel analóg eljárást egyetlen belső változóval [41, 29]. Emellett ő volt az, aki a tehetetlenségi elem fontosságát termodinamikai alapon hangsúlyozta. Kluitenberg és Verhás, e két előfutár feltüntetésére a $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ reológiai modellt a továbbiakban *Kluitenberg–Verhás-testnek* nevezzük.

4.2. KITERJESZTETT TERMODINAMIKA

Az ún. kiterjesztett termodinamikában a disszipatív áramokat állapotváltozóknak tekintik [58]. Ezért a viszkózus vagy anelasztikus feszültség, $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}$ egy termodinamikai állapotváltozó, nem pedig konstitutív mennyiség (ld. pl. [31]). A mi megközelítésünkben $l_{11} = 0$ esetén a $\boldsymbol{\xi}$ belső változó arányos a $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ disszipatív feszültséggel [ld. (29)], így $\boldsymbol{\xi}$ egy átskálázása a kiterjesztett termodinamika reprezentációját és reológiai egyenleteit eredményezi. Az így nyerhető reológiai test a $(0, 1 \approx 0, 1)$ Poynting–Thomson–Zenertest, a $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ teljes valódi lehetőségcsaládnak egy részcsaládja. Megjegyzendő, hogy az ehhez nullává tett anyagi paraméter, l_{11} a Kelvin-test viszkozitási együtthatója (21) értelmében, mely általában a disszipáció fő forrása. Ebben az értelemben a helyzet hasonlít a hővezetéshez, ahol a Fourier-együttható eltérően reprezentálódik a belső változós tárgyalásban, mint ahogy a kiterjesztése eltér a belső változós elmélet további belső változókkal történő kiterjesztésétől.

5. Összefoglalás

Ebben az írásban a szilárd anyagok reológiai tulajdonságait egy belső változós termodinamikai elméletként tárgyaltuk. Egy egyszerű nemlineáris viszkoelasztikus elméletet kaptunk. Beazonosítottuk az alapvető termoreológiai testet, és vizsgáltuk tulajdonságait. Az egyetlen termodinamikai belső változós reprezentáció a standard Poynting–Thomson– Zener-test egy tehetetlenségi elemmel történő kiegészítését tünteti ki a lineáris viszkoelasztikusság alapvető építőköveként. Ennek az anyagi modellnek a Kluitenberg–Verhástest elnevezést javasoltuk.

Egyrészről a legegyszerűbb feltételezésekkel éltünk, ahol egyetlen, termodinamikai feltételekkel megszorított tenzori dinamikai szabadsági fok jellemzi az egyensúlyi állapottól való eltérést. Másrészről viszont a lehető legáltalánosabb lineáris onsageri egyenleteket tekintettük. Ennek előnye az így nyerhető *univerzalitás*, abban az értelemben, hogy hacsak a tenzori reprezentáció és a második főtétel érvényes, bármely konkrét mikrosz-kopikus vagy mezoszkopikus mechanizmus ugyanerre a reológiai modellcsaládra kell vezessen a lineáris tartományban.

A belső változó izotermikus esetben elvégzett kiküszöbölése után megfogalmazhattuk és elemezhettük a reológia jelenlétének mérhető következményeit feszültségben és deformációban.

A mi megközelítésünkben a belső változó nem szükségképpen "anelasztikus deformáció", mint a klasszikus Kluitenberg-elméletben, és nem szükségképpen a disszipatív feszültség, mint a kiterjesztett termodinamikában. Az utóbbi választás egy speciális esetnek, az általunk kapott modellcsalád egy részcsaládjának bizonyult. A belső változó rugalmas deformációtól való eltéréseként történő értelmezése egyébként egy mélyebb elemzést igényelne a kinematikai kontinuum-mennyiségek szemszögéből, ideértve a véges deformáció esetét, és az anyagi objektivitás szempontjából is. E szempontból érdemes felhívni a figyelmet, hogy vonatkoztatásirendszer-független és objektív megközelítésünk [52], mely Noll klasszikus tárgyalását fejleszti tovább [59, 60], a deformációsebesség rugalmas és képlékenyedési (maradó) tagokra történő additív szétválására vezet. Ennek fényében az alapkérdés a deformáció rugalmas, reológiai (helyreállítható) és képlékeny (maradó) részeinek világos megkülönböztetése kísérletekben.

Tárgyalásunk egy másik jellegzetessége volt, hogy nem tételeztük fel a fenomenológiai együtthatómátrixnak sem szimmetriáját, sem antiszimmetriáját. Mikroszkopikus interpretáció híján nincs ok feltételezni az Onsager–Casimir-reciprocitást.

Mi több, a 2.4. szakasz részletes elemzése azt találta, hogy a különböző rugós– olajfékes jellegű "áramköri" kapcsolások különböző, szimmetrikusrész-dominálta illetve antiszimmetrikusrész-dominálta termodinamikai modelleknek felelnek meg. Mindkét esetben a termodinamika nemnegatív rugó- és olajfék-együtthatót követel meg, és az alulcsillapított-túltehetetlen családban egy új, tehetetlenségi elemre is szükség van.

Végül hangsúlyozzuk, hogy mind az általunk talált feltételek, mind a Kluitenberg-féle és a kiterjesztett termodinamikai megközelítésektől való eltérések kísérletileg tesztelhetők. A Kluitenberg-modell együtthatóira adódott megszorítások hullámterjedéses kísérletes tesztelése már megkezdődött Ciancio és munkatársai révén [61, 62, 63], kielégítő eredménnyel. Kúszás és relaxáció közvetlen mérése az izotrop, egy belső változós anyag gondos kiválasztását igényli, és a gömbi és deviatorikus változások szeparálása is fontos. Kevert terhelési feltételek és effektív modellek esetén a helyzet bonyolult lehet, különösen ha térfogati anelasztikusság is szerepet játszik (ld. A. függelék). E szempontból figyelem-reméltóak a Lin és munkatársai [36, 37, 38] által végzett fúrómagmintás kőzetkísérletek, melyek mind deviatorikus, mind térfogati szempontból Kluitenberg–Verhás-test jelenlétét azonosították.

A. Egytengelyű reológia származtatása a deviatorikus és gömbi komponensekből

Szilárd testek egytengelyű folyamatai esetén a feszültség- és a deformációtenzor alkalmas Descartes-koordinátarendszerben

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{\parallel} & \\ & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{s} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sigma^{\parallel} & \\ & \sigma^{\parallel} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{d} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sigma^{\parallel} & \\ & -\sigma^{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (62)$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\parallel} & \\ & \varepsilon^{\perp} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{s} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \varepsilon^{\parallel} + 2\varepsilon^{\perp} & \\ & \varepsilon^{\parallel} + 2\varepsilon^{\perp} \\ & \varepsilon^{\parallel} + 2\varepsilon^{\perp} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{d} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp}) & \\ & -(\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp}) \\ & -(\varepsilon^{\parallel} - \varepsilon^{\perp}) \end{pmatrix}$$

alakú mátrixokkal írható le, ahol minden nem-kiírt mátrixelem nulla.

Teljesüljenek szilárd anyagunkra az

$$S^{d} \boldsymbol{\sigma}^{d} = \mathcal{E}^{d} \boldsymbol{\varepsilon}^{d}, \tag{64}$$

$$S^{s}\boldsymbol{\sigma}^{s} = \mathcal{E}^{s}\boldsymbol{\varepsilon}^{s} \tag{65}$$

lineáris reológiai törvények, ahol az S^d , S^s , \mathcal{E}^d , \mathcal{E}^s differenciáloperátorok a d/dt időderiváló operátor polinomjai, állandó együtthatókkal. Így például (59) esetén

$$\mathcal{S}^{\mathbf{d}} = 1 + \tau^{\mathbf{d}} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}, \qquad \qquad \mathcal{E}^{\mathbf{d}} = E_0^{\mathbf{d}} + E_1^{\mathbf{d}} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} + E_2^{\mathbf{d}} \frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}t^2}, \qquad (66)$$

$$\mathcal{S}^{\mathrm{s}} = 1 + \tau^{\mathrm{s}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \qquad \qquad \mathcal{E}^{\mathrm{s}} = E_0^{\mathrm{s}} + E_1^{\mathrm{s}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + E_2^{\mathrm{s}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}. \tag{67}$$

Ekkor egytengelyű folyamatok esetén (64) az

$$\mathcal{S}^{\mathsf{d}}\sigma^{\mathbb{I}} = \mathcal{E}^{\mathsf{d}}\left(\varepsilon^{\mathbb{I}} - \varepsilon^{\perp}\right) \tag{68}$$

skaláregyenletre egyszerűsödik, (65) pedig az

$$\mathcal{S}^{\mathsf{s}}\sigma^{\mathbb{I}} = \mathcal{E}^{\mathsf{s}}\left(\varepsilon^{\mathbb{I}} + 2\varepsilon^{\perp}\right) \tag{69}$$

egyenletre. A célunk ε^{\perp} kiküszöbölése ebből az egyenletpárból. Hasson a $2\mathcal{E}^{s}$ operátor (68)-ra, \mathcal{E}^{d} pedig (69)-re, és tekintsük az eredmények összegét. Észrevéve, hogy

$$\mathcal{E}^{\mathrm{s}}\mathcal{E}^{\mathrm{d}} = \mathcal{E}^{\mathrm{d}}\mathcal{E}^{\mathrm{s}},\tag{70}$$

és hogy általánosabban is $\frac{d}{dt}$ bármely két polinomja felcserélhető egymással, az eredmények összege írható a következő módon:

$$\left(\mathcal{S}^{\mathsf{s}}\mathcal{E}^{\mathsf{d}} + 2\mathcal{S}^{\mathsf{d}}\mathcal{E}^{\mathsf{s}}\right)\sigma^{\mathbb{I}} = 3\mathcal{E}^{\mathsf{d}}\mathcal{E}^{\mathsf{s}}\varepsilon^{\mathbb{I}}.$$
(71)

A (66)–(67) példa esetén (71) a következő, σ^{\parallel} együtthatójának 1-re normálása után:

$$\sigma^{\parallel} + \frac{E_{1}^{d} + 2E_{1}^{s} + \tau^{s}E_{0}^{d} + 2\tau^{d}E_{0}^{s}}{E_{0}^{d} + 2E_{0}^{s}} \dot{\sigma}^{\parallel} + \frac{E_{2}^{d} + 2E_{2}^{s} + \tau^{s}E_{1}^{d} + 2\tau^{d}E_{1}^{s}}{E_{0}^{d} + 2E_{0}^{s}} \ddot{\sigma}^{\parallel} + \frac{\tau^{s}E_{2}^{d} + 2\tau^{d}E_{2}^{s}}{E_{0}^{d} + 2E_{0}^{s}} \ddot{\sigma}^{\parallel} = \frac{3E_{0}^{s}E_{0}^{d}}{E_{0}^{d} + 2E_{0}^{s}} \varepsilon^{\parallel} + \frac{3\left(E_{0}^{s}E_{1}^{d} + E_{0}^{d}E_{1}^{s}\right)}{E_{0}^{d} + 2E_{0}^{s}} \dot{\varepsilon}^{\parallel} + \frac{3\left(E_{0}^{d}E_{2}^{s} + E_{1}^{s}E_{1}^{d} + E_{0}^{s}E_{2}^{d}\right)}{E_{0}^{d} + 2E_{0}^{s}} \ddot{\varepsilon}^{\parallel} + \frac{3\left(E_{0}^{d}E_{2}^{s} + E_{1}^{s}E_{1}^{d} + E_{0}^{s}E_{2}^{d}\right)}{E_{0}^{d} + 2E_{0}^{s}} \ddot{\varepsilon}^{\parallel} + \frac{3\left(E_{0}^{d}E_{2}^{s} + E_{1}^{s}E_{2}^{d}\right)}{E_{0}^{d} + 2E_{0}^{s}} \ddot{\varepsilon}^{\parallel} + \frac{3E_{2}^{s}E_{2}^{d}}{E_{0}^{d} + 2E_{0}^{s}} \ddot{\varepsilon}^{\parallel}.$$

$$(72)$$

Az eredő egytengelyű reológia tehát láthatóan egy $(0, 1, 2, 3 \approx 0, 1, 2, 3, 4)$ modell.

Egy egyszerű, de fontos speciális esetként, ha deviatorikusan egy $(0 \simeq 0, 1)$ Kelvin– Voigt-modellünk van, gömbi oldalról pedig egy $(0 \simeq 0)$ Hooke-modellünk, akkor az eredő egytengelyű reológia egy Poynting–Thomson–Zener-modell lesz, mely kúszást és relaxációt ír le. Eszerint *deviatorikus kúszásra képes anyag egytengelyű relaxációt is mutat*.

Természetesen ε^{\parallel} szintén kiküszöbölhető, analóg módon, és akkor σ^{\parallel} és deriváltjai és ε^{\perp} és deriváltjai között kapunk összefüggést. Ha pedig σ^{\parallel} -t küszöböljük ki, ε^{\parallel} , ε^{\perp} és deriváltjaik között nyerünk összefüggést. Előbbi képlet feszültségvezérelt helyzetekben lehet hasznos, hogy láthassuk a keresztirányú deformáció alakulását, utóbbi pedig ahhoz, hogy láthassuk, reológia esetén mennyivel bonyolultabb a kapcsolat ε^{\perp} és ε^{\parallel} között annál, amit az állandó Poisson-hányadosú Hooke-várakozás javasolna.

Az egytengelyű eredő reológia itt mutatott származtatása hasonló ahhoz, ahogy reológiai modellek soros és párhuzamos kapcsolásainak egyenletei származtathatóak [56]. Mi több, ez nemcsak egyszerűen hasonlóság: a fenti lépések *pontosan azok*, amikkel a

$$(D \sim D \sim S) \parallel (D \sim D \sim S) \parallel (D \sim D \sim S)$$

$$(73)$$

elrendezés eredő reológiája meghatározható, ahol D jelöli a (62) deviatorikus modellt, S a (65) gömbit, és ~ jelöli a soros és || a párhuzamos kapcsolást. Az egytengelyű reológia tehát a deviatorikus és a gömbi reológia egy bizonyos soros–párhuzamos kombinációja.

B. HA A BELSŐ ENERGIÁT TOLJUK EL

A reológia belső változós származtatásának egy olyan változatát mutatjuk most be, mely ugyanúgy a $(0, 1 \approx 0, 1, 2)$ modellre vezet az állandó hőmérsékletű esetben végzett kiküszöbölés után. Az egyszerűség kedvéért csak az egydimenziós esetet tekintjük.

Ebben a változatban az entrópia helyett a belső energiát toljuk el egy ζ belső változó egy kvadratikus kifejezésével (ld. a [11, 12, 15] munkákat is), mely kifejezés megőrzi a konvexitást:

$$\tilde{e} = e + \frac{1}{2}\zeta^2,\tag{74}$$

mely a kanonikus változók nyelvén a belső energia változó eltolását jelenti bármely konstitutív függvényben, így az entrópiában is:

$$\tilde{s}(\tilde{e},\varepsilon,\zeta) = s\left(\tilde{e} - \frac{1}{2}\zeta^2,\varepsilon\right).$$
(75)

Mint előbb [ld. (54)], a feszültségben is egy új járulék felbukkanását tételezzük fel. Véve ezen \tilde{s} mennyiség időderiváltját, az entrópiaprodukció ezúttal a

$$\frac{1}{T} \left(\hat{\sigma} \dot{\varepsilon} - \varrho \zeta \dot{\zeta} \right) \tag{76}$$

kifejezéssel egészül ki. Következésképp egy T szorzótól eltekintve az onsageri megoldás az eddigiekhez hasonlóan történik. Az állandó T-jű esetben ζ kiküszöbölése szintén a lineáris $(0, 1 \simeq 0, 1, 2)$ reológiára vezet, ugyanazon feltételekkel az együtthatókra.

Ami jelentősen más a két út esetén, az a belső energia mérlege, mert ezúttal jelen van egy extra, potenciálszerű $\frac{1}{2}\zeta^2$ belsőenergia-tag, így a mechanikai teljesítmény (és a bejövő hőáram) egy része most ezt az extra tagot változtatja, és csak a maradék rész változtatja a fajhővel kapcsolatos $e_{\rm th}$ eredeti belsőenergia-részt és a $e_{\rm el}$ rugalmasenergia-részt. Ennélfogva a hőmérséklet máshogy változik, mint az entrópiaeltolásos esetben. Ez kísérleti lehetőséget ad a két eset megkülönböztetésére.

Végül az is lehetséges, hogy kombináljuk a két utat: mind az entrópiát, mint a belső energiát eltolhatjuk egy-egy kvadratikus taggal. Ekkor egy extra együtthatót kell megengedni legalább az egyik kvadratikus kifejezésben: ez az általános eset az

$$\tilde{e} = e + \frac{a}{2}\xi^2, \qquad \tilde{s}(\tilde{e}, \varepsilon, \xi) = s\left(\tilde{e} - \frac{a}{2}\xi^2, \varepsilon\right) + \frac{b}{2}\xi^2 \tag{77}$$

módon írható. Az entrópiaprodukció továbbra is egy $-\xi \dot{\xi}$ -vel arányos taggal egészül ki, melynek együtthatójában most a és b is szerepel. Az onsageri megoldás ismét olyan alakú, mint az eddigi esetekben, és a kiküszöbölés is analóg módon zajlik. Az a, b együtthatókat a belsőenergia-mérlegben játszott szerepük, így a hőmérséklet fejlődési egyenlete alapján lehet megkülönböztetni. Ez lehet kísérleti meghatározásuk alapja.

KÖSZÖNETMONDÁS

Jelen munkát az OTKA K81161, K82024, K104260 számú pályázatai támogatták.

IRODALOM

- [1] Maugin, G.A., Muschik, W.: Thermodynamics with internal variables. Part I. General concepts. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics 19, 217–249 (1994)
- [2] Maugin, G.A., Muschik, W.: Thermodynamics with internal variables. Part II. Applications. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics 19, 250–289 (1994)
- [3] Coleman B.D., Gurtin, M.E.: Thermodynamics with internal state variables. The Journal of Chemical Physics 47(2), 597–613 (1967)
- [4] Kestin, J.: Internal variables in the local-equilibrium approximation. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics 18, 360–379 (1993)
- [5] Muschik, W.: Comment to J. Kestin: Internal variables in the local-equilibrium approximation. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics 18, 380–388 (1993)
- [6] Eckart, C.: The thermodynamics of irreversible processes, I. The simple fluid. Physical Review 58, 267–269 (1940)
- [7] Eckart, C.: The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. Physical Review 73(4), 373–382 (1948)
- [8] Biot, M.A.: Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. Journal of Applied Physics 25(11), 1385–1391 (1954)
- [9] Kluitenberg, G.A.: Thermodynamical theory of elasticity and plasticity. Physica 28, 217–232 (1962)
- [10] Kluitenberg, G.A.: A note on the thermodynamics of Maxwell bodies, Kelvin bodies (Voigt bodies), and fluids. Physica 28, 561–568 (1962)
- [11] Kluitenberg, G.A.: On rheology and thermodynamics of irreversible processes. Physica 28, 1173–1183 (1962)
- [12] Kluitenberg, G.A.: On the thermodynamics of viscosity and plasticity. Physica 29, 633–652 (1963)
- [13] Kluitenberg, G.A.: A unified thermodynamic theory for large deformations in elastic media and in Kelvin (Voigt) media, and for viscous fluid flow. Physica 30, 1945–1972 (1964)
- [14] Kluitenberg, G.A.: A thermodynamic derivation of the stress-strain relations for Burgers media and related substances. Physica 38, 513–548 (1968)
- [15] Kluitenberg, G.A., Ciancio, V.: On linear dynamical equations of state for isotropic media. Physica A 93, 273–286 (1978)

- [16] Ciancio, V., Kluitenberg, G.A.: On linear dynamical equations of state for isotropic media II – Some cases of special interest. Physica A 99, 592 (1979)
- [17] Kuiken, G.D.C.: Thermodynamics of Irreversible Processes (Applications to diffusion and rheology). John Wiley and Sons, Chicester–etc. (1994)
- [18] Horstmeyer, M.F., Bamman, D.J.: Historical review of internal state variable theory for inelasticity. International Journal of Plasticity 26, 1310–1334 (2010)
- [19] Bridgman, P.W.: The Nature of Thermodynamics. Harvard University Press, Cambridge– Massachusetts (1943)
- [20] Maugin, G.: The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviors (An introduction). World Scientific, Singapore–New Jersey–London-Hong Kong (1999)
- [21] Prigogine, I., Mazur, P.: Sur l'extension de la thermodynamique aux phénomènes irreversibles liés aux degrés de liberté internes. Physica 19(1), 241–254 (1953)
- [22] de Groot, S.R., Mazur, P.: Non-equilibrium Thermodynamics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1962)
- [23] Blenk, S., Ehrentraut, H., Muschik, W.: Statistical foundation of macroscopic balances for liquid crystals in alignment tensor formulation. Physica A 174, 119–138 (1991)
- [24] Reguera, D., Rubí, J.M., Vilar, J.M.: The mesoscopic dynamics of thermodynamic systems. Journal of Physical Chemistry B 109, 21502–21515 (2005); arXiv:cond-mat/0511651
- [25] Papenfuss, C.: Dynamics of internal variables from the mesoscopic background. In: Quak, E., and Soomere, T. (eds.) Applied Wave Mathematics (Selected Topics in Solids, Fluids, and Mathematical Methods), Chapter II, pp. 89–125. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg (2009)
- [26] Maugin, G.A.: Internal variables and dissipative structures. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics 15, 173–192 (1990)
- [27] Ván, P., Berezovski, A., Engelbrecht, J.: Internal variables and dynamic degrees of freedom. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics 33(3), 235–254 (2008); arXiv:condmat/0612491.
- [28] Ván, P., Papenfuss, C., Berezovski, A.: Thermodynamic approach to generalized continua. Continuum Mechanics and Thermodynamics 25(3), 403–420 (2014) Erratum: 421–422; ar-Xiv:1304.4977.
- [29] Verhás, J.: Thermodynamics and Rheology. Akadémiai Kiadó and Kluwer Academic Publisher, Budapest (1997)
- [30] Ciancio, V., Verhás, J.: On the representation of dynamic degrees of freedom. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics 18(1), 39–50 (1993)
- [31] Dauby, P.C., Lebon, G.: Constitutive equations of rheological materials: towards a thermodynamic unified approach. Applied Mathematics Letters 3(4), 45–48 (1990)
- [32] Lebon, G., Jou, D., Casas-Vázquez, J.: Understanding non-equilibrium thermodynamics. Springer (2008)
- [33] Ciancio, V., Verhás, J.: A thermodynamic theory for radiating heat transfer. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics 15(1), 33–43 (1990)

- [34] Ciancio, V., Verhás, J.: A thermodynamic theory for heat radiation through the atmosphere. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics 16(1), 57–65 (1991)
- [35] Ván, P., Fülöp, T.: Universality in heat conduction theory: weakly nonlocal thermodynamics. Annalen der Physik 524(8), 470–478 (2012); arXiv:1108.5589
- [36] Matsuki, K., Takeuchi, K.: Three-dimensional in situ stress determination by anelastic strain recovery of a rock core. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. 30, 1019–1022 (1993)
- [37] Matsuki, K.: Anelastic strain recovery compliance of rocks and its application to in situ stress measurement. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. 45, 952–965 (2008)
- [38] Lin, W., Kuwahara, Y., Satoh, T., Shigematsu, N., Kitagawa, Y., Kiguchi, T., Koizumi, N.: A case study of 3D stress orientation determination in Shikoku Island and Kii Peninsula, Japan. In: Vrkljan, I. (ed.) Rock Engineering in Difficult Ground Conditions (Soft Rock and Karst), Proceedings of Eurock'09, Cavtat, Croatia, 28–29th Oct. 2009, pp. 277–282. London, Balkema (2010)
- [39] Kocsis, D., Horváth, R.: Experience acquired in tensile tests of plastics. Scientific Bulletin Series C: Fascicle Mechanics, Tribology, Machine Manufacturing Technology 27, 79–82 (2013)
- [40] Asszonyi, Cs., Csatár, A., Fülöp, T.: Szilárd anyagok rugalmas, hőtágulási, képlékeny és reológiai folyamatainak termomechanikája – elmélet és kísérlet. In: Fülöp, T., (szerk.), Termodinamikai módszertan – kontinuumfizikai alkalmazások, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 19, Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért, Budapest, pp35–56 (2015) (jelen kötetben).
- [41] Verhás, J.: Thermodynamics and rheology. (In Hungarian.) Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1985)
- [42] Fülöp, T.: Linear problems of elasticity and rheology. (In Hungarian.) In: Asszonyi, Cs. (ed.) On the solution of problems in continuum mechanics, Vol. 9 of the book series Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár, Chapter I, pp. 11–52. Műegyetemi Kiadó, Budapest (2009)
- [43] Onsager, L.: Reciprocal relations of irreversible processes I. Physical Review 37, 405–426 (1931)
- [44] Onsager, L.: Reciprocal relations of irreversible processes II. Physical Review 38, 2265– 2279 (1931)
- [45] Truesdell, C.: Rational Thermodynamics. 2nd enlarged edition. Springer, New York-etc. (1984)
- [46] Berezovski, A., Engelbrecht, J., Berezovski, M.: Waves in microstructured solids: a unified viewpoint of modelling. Acta Mechanica 220, 349–363 (2011)
- [47] Engelbrecht, J.: Nonlinear wave motion and complexity. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences 59(2), 66–71 (2010)
- [48] Engelbrecht, J., Berezovski, A.: Internal structures and internal variables in solids. Journal of Mechanics of Materials and Structures 7(10), 983–996 (2012)

- [49] Berezovski, A., Engelbrecht, J.: Thermoelastic waves in microstructured solids: Dual internal variables approach. Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics 1(1), 112–119 (2013)
- [50] Engelbrecht, J., Berezovski, A.: On modelling of wave propagation in microstructured solids. Estonian Journal of Engineering 19(3) (2013)
- [51] Berezovski, A., Engelbrecht, J., Maugin, G.A.: Generalized thermomechanics with dual internal variables. Archive of Applied Mechanics 81(2), 229–240 (2011)
- [52] Fülöp, T., Ván, P.: Kinematic quantities of finite elastic and plastic deformations. Mathematical Methods in the Applied Sciences 35, 1825–1841 (2012); arXiv:1007.2892
- [53] Ván, P.: Objective time derivatives in non-equilibrium thermodynamics. Proceedings of Estonian Academy of Sciences 57(3), 127–131 (2008) Lecture held at CPEA'07.
- [54] Gyarmati, I.: The wave approach of thermodynamics and some problems of non-linear theories. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics 2, 233–260 (1977)
- [55] Meixner, J.: Thermodynamische theorie der elastischen relaxation. Zeitschrift f
 ür naturforschung 9a, 654–663 (1954)
- [56] Fülöp, T.: Rheological circuits. (In Hungarian.) In: Asszonyi, Cs. (ed.) Material properties of isotropic continua, Vol. 6 of the book series Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár, Chapter III, pp. 93–120. Műegyetemi Kiadó, Budapest (2008)
- [57] Ván, P.: Weakly nonlocal irreversible thermodynamics. Annalen der Physik 12(3), 146–173 (2003); arXiv:cond-mat/0112214
- [58] Jou, D., Casas-Vázquez, J., Lebon, G.: Extended Irreversible Thermodynamics. Springer Verlag, Berlin–etc. (1992) 3rd, revised edition (2001)
- [59] Noll, W.: Space-time structures in classical mechanics. In: The foundations of mechanics and thermodynamics (Selected papers by Walter Noll), pp. 204–210. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1974) Originally: Delaware Seminar in the Foundations of Physics, pp. 28–34. Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1967)
- [60] Noll, W.: A frame free formulation of elasticity. Journal of Elasticity 83, 291-307 (2006)
- [61] Ciancio, V., Bartolotta, A., Farsaci, F.: Experimental confirmations on a thermodynamical theory for viscoanelastic media with memory. Physica B 394(1), 8–13 (2007)
- [62] Ciancio, V.: Non equilibrium thermodynamics with internal variables in Kluitenberg's theory. AAPPlPhysical, Mathematical, and Natural Sciences 86(S1) (2008)
- [63] Ciancio, V., Ciancio, A., Farsaci, F.: On general properties of phenomenological and state coefficients for isotropic viscoanelastic media. Physica B 403(18), 3221–3227 (2008)

SZILÁRD ANYAGOK RUGALMAS, HŐTÁGULÁSI, KÉPLÉKENY ÉS REOLÓGIAI FOLYAMATAINAK TERMOMECHANIKÁJA – ELMÉLET ÉS KÍSÉRLET

Asszonyi Csaba Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest *Csatár Attila* Mezőgazdasági Gépesítési Intézet, Gödöllő, Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest *Fülöp Tamás*

BME ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BUDAPEST, MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Szilárd anyagok rugalmas, hőtágulási, képlékeny és reológiai jelenségeinek egy termodinamika-alapú elméletét mutatjuk be. Megközelítésünk egyrészről az érintett kinematikai mennyiségek egy újszerű definícióján alapul. Eszerint a rugalmas deformáltság a test pillanatnyi metrikájának a relaxált metrikájától való eltérését fejezi ki,a hőtágulás a relaxált metrika egy hőmérsékletfüggő változása, míg a képlékenyedés egy tartós változása. Tárgyalásmódunk másik pillére a nemegyensúlyi termodinamika. A konstitutív egyenleteket úgy választjuk meg, hogy tiszteljék a termodinamikai konzisztenciát, és a második főtételt konstruktív, kvantitatív módon használjuk ki. A képlékenyedés szokásosan elvárt tulajdonságai természetes módon illeszkednek az elméletbe. A reológiát az irreverzibilis termodinamika belső változós módszertanával vezetjük be. A különböző jellegzetes viselkedéseket kísérleti eredményeken illusztráljuk, mely kísérletekben megnyújtott műanyag minták rugalmas, hőtágulási, képlékeny és reológiai változásokon mennek keresztül. A mért adatokból meghatározzuk a reológiai együtthatókat. A mechanikai mennyiségek mellett a hőmérséklet változásait is nyomon követjük, és az elmélettel is számot adunk róluk.¹

BEVEZETÉS

Az elmúlt években kutatásunk egyik fő célja az volt, hogy ötvözzük az anyagi objektivitás problémájára adott, Matolcsi munkásságán [1][2][3][4] alapuló megoldásun-

¹ Az "Elastic, thermal expansion, plastic and rheological processes – theory and experiment", folyóirathoz közlésre benyújtott cikk fordítása.
kat [5][6][7][8] azzal az irreverzibilis termodinamikai módszertannal, mely a termodinamikai stabilitásra és a második főtétel konstruktív, kvantitatív kiaknázására fókuszál [9][10][11][12]. Jelen írásban e program eredményét mutatjuk be szilárd anyagok kontinuum-termodinamikájára.

Az elmélet által jelenleg lefedett jelenségek:

- a (prompt) rugalmasság, mely egy mechanikai terhelésre adott azonnali válasz, és melynek során a mechanikai energia megmarad (ld. pl. Hooke törvényét);
- a reológia, mely az előzővel ellentétben egy késleltetett válasz, a mechanikai energia részbeni disszipációjával jár, és például viszkózus csillapításból eredhet;
- a képlékenyedés, mely egy tartós alakváltozás, a terheletlen alak megváltozása;
- a hőtágulás, és az általa generált hőfeszültség;
- a hővezetés.

Az általános szint – nagydeformációs tárgyalás, általános konstitutív egyenletek – ellenére célunk a hasznos gyakorlati példákon való alkalmazás (és ezek során az elmélet folyamatos tesztelése, fejlesztése is). Ennek érdekében kísérleteket végzünk, és az itt bemutatott mérési adatokkal is az elmélet kvalitatív és kvantitatív illusztrálása és ellenőrzése volt a célunk. Ezen az egyszerű, de jó bepillantást adó kísérleten – poliamid-6 műanyag minta egytengelyű nyújtása során mért mechanikai és hőmérsékleti változások – a különböző termomechanikai effektusok jól megfigyelhetőek és mennyiségileg is jól magyarázhatónak bizonyulnak.

A kísérlettel való könnyebb összevethetőség érdekében formalizmusunk minden részletében a legegyszerűbb plauzibilis feltételezésekkel élünk: kis deformációk, Hooke-rugalmasság állandó rugalmasságtani együtthatókkal, állandó fajhő, hőtágulási együttható és hővezetési együttható, és állandó képlékenyedési ráta és képlékeny küszöbfeszültség. E feltételezéseket a mérési adatok a kísérleti pontosság keretén belül megnyugtatóan igazolják, amint azt látni fogjuk.

Beszámolónkban először az imént említett, objektivitás-tisztelő kinematikai menynyiségeket ismertetjük. Ezután köréjük építjük a rugalmasság, hőtágulás és képlékenyedés kontinuum-termodinamikai tárgyalását. Szemléltetjük, hogyan mutatkoznak meg a jósolt viselkedésformák kísérleti adatokon. Ezt követően a reológiát illesztjük az elméletbe, és rávilágítunk, hogyan jelentkeznek a reológiai hatások a mérési eredményeken mind a mechanikai, mind a hőmérsékleti oldalról. A példaként használt kísérleti minta reológiai együtthatóit meghatározzuk, és ismertetjük az ennek során fellépő numerikus nehézségeket és az áthidalásukra kidolgozott megoldásunkat. Végül összegezzük a legfontosabb eredményeket és tanulságokat, és vázoljuk a jövőbeli feladatokat és lehetőségeket. A Függelékben a kísérleti körülményeket mutatjuk be közelebbről.

1. A KINEMATIKAI MENNYISÉGEK

Kezdjük tehát az objektivitásbarát kinematikai mennyiségek definíciójának [5][6][7][8] tömör ismertetésével. Szilárd, folyékony és gáz halmazállapotú közegekre egyaránt igaz, hogy a közeg mozgása során bármely két anyagi pont között egy pillanatnyi távolság határozódik meg. Ez egy $\tilde{\mathbf{h}}$ pillanatnyi metrikát értelmez az anyagi sokaságon. Itt és a továbbiakban felülhullám jelzi az anyagi sokaságon értelmezett tenzorokat, melyek az anyagi érintőtérhez kötődnek. Szilárd közegek esetén az újszerű és fontos fogalom a $\tilde{\mathbf{g}}$ relaxált avagy sajátmetrika, mely a feszültségmentes, relaxált állapotban adja meg az anyagi pontok távolságait. Egy ilyen állapotban tehát $\tilde{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{g}}$. A relaxált metrika a szilárd test relaxált alakját jellemzi.

A rugalmas állapotjelző céljára alkalmas kinematikai mennyiség a szimmetrikus

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{g}}^{-1} \widetilde{\mathbf{h}} \tag{1}$$

rugalmas alaktenzorból – a jobb-Cauchy-Green tenzor objektív általánosításából – definiálható:

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \ln \widetilde{\mathbf{A}}.$$
(2)

Ez a $\tilde{\mathbf{D}}$ rugalmas deformáltságtenzor az, melytől a rugalmas feszültség, $\tilde{\mathbf{\sigma}}$ függ majd, lineárisan (Hooke-törvény) vagy nemlineárisan (pl. neo-Hooke-modell). Ez a logaritmikus – objektíven általánosított Hencky-deformáció – típusú (2) definíció kitüntetett, mind geometriailag ($\tilde{\mathbf{D}}$ gömbi része jellemzi a térfogati és a deviatorikus rész az állandó térfogatú változásokat, még nagy deformációk esetében is [5][13][14]), mind kísérletileg (így például kemény gumi és hasonló anyagok esetén a nagydeformációs feszültség ebben a logaritmikus tenzorban a leginkább lineáris [15][16], a nemlineáris rugalmasság ötparaméteres Murnaghan-modellje szintén ebben a logaritmikus változóban működtethető a legjobban [17], és egyéb érvek is felsorakoztathatóak [18]).

A deformációgradiens (objektív általánosítása) révén az anyagi érintővektorok a lokális/laborrendszerbeli/téridőbeli térvektorokba szállíthatók át. Ennek révén anyagi tenzoraink ($\mathbf{\tilde{h}}$, $\mathbf{\tilde{A}}$ stb.) térszerű megfelelőikbe (\mathbf{h} , \mathbf{A} stb.) vihetők át. A $\mathbf{\tilde{h}}$ tenzor időbeli változása, és így \mathbf{A} időderiváltja az $\mathbf{L} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{\nabla}$ sebességgradiens (és transzponáltja, $\mathbf{L}^{T} = \mathbf{\nabla} \otimes \mathbf{v}$) segítségével fejezhető ki: az $\mathbf{\dot{A}}$ együttmozgó időderiváltra

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{L}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

adódik, ha csakis rugalmas változásokra szorítkozunk ($\tilde{\mathbf{g}} = \text{const.}$).

A hőtágulás az a jelenség, amikor a feszültségmentes és relaxált méretek, így a szilárd anyag relaxált metrikája hőmérsékletfüggő: $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{g}}(T)$, ahol *T* az abszolút hőmérsékletet jelöli. Ha az anyag izotrop, amit a továbbiakban feltételezünk, akkor ez a hőmérsékletfüggés egy egyszerű skaláris átskálázódás:

$$\tilde{\mathbf{g}}(T_2) = \Lambda(T_1, T_2)^2 \tilde{\mathbf{g}}(T_1), \qquad \alpha(T) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Lambda(T, T + \Delta T) - 1}{\Delta T}, \tag{4}$$

ahol utóbbi definiálja az α lineáris hőtágulási együtthatót. Következésképp, amikor a hőmérséklet időben változik egy anyagi pontban,

$$\dot{\tilde{\mathbf{g}}} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\tilde{\mathbf{g}}\right)\dot{T} = 2\alpha(T)\dot{T}\tilde{\mathbf{g}}$$
(5)

írható a relaxált metrika együttmozgó időderiváltjára, (3) pedig a

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{L}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} - 2\alpha\dot{T}\mathbf{A}$$
(6)

képletre bővül.

A képlékenyedés (ld. pl. a [19] monográfiát) a mi nyelvünkön szintén egy olyan jelenség, mely $\tilde{\mathbf{g}}$ változásához kötődik: elegendően erős mechanikai feszültség hatására a relaxált alak és metrika tartós változást szenved. Ezt a változást a

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{g}}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{g}}}_{\text{plastic}}$$
(7)

képlékenyedési sebesség tenzorral jellemezhetjük, mellyel a teljes kinematikai fejlődési egyenlet

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{L}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} - 2\alpha\dot{T}\mathbf{A} - 2\mathbf{Z}\mathbf{A}.$$
(8)

A továbbiakban a, $\|\mathbf{D}\| \ll 1 \Rightarrow \mathbf{A} = e^{2\mathbf{D}} \approx \mathbf{1} + 2\mathbf{D}$ kisdeformációs tartományra szorítkozunk, ahol (8) **D** vezető rendjében a $2\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{L} + \mathbf{L}^{T} - 2\alpha \dot{T}\mathbf{1} - 2\mathbf{Z}$ kifejezésre egyszerűsödik, mely az

$$\mathbf{L}^{\text{sym}} = \dot{\mathbf{D}} + \alpha \dot{T} \mathbf{1} + \mathbf{Z} \tag{9}$$

alakra rendezhető át (^{sym} a szimmetrikus részt jelöli). Ezenfelül további céljainkhoz a hőtágulási együttható állandónak tételezhető fel.

A megnyúlások, deformációk referenciaidő-függő fogalmak, ezért nem objektív mennyiségek. Ezek (9) egyes tagjainak időintegráljaiként értelmeződnek referenciaidőtől pillanatnyi időig: a teljes megnyúlás a bal oldal időintegrálja, a rugalmas deformáció a jobb oldal első tagjáé, a hőtágulás a második tagé, a képlékeny deformáció pedig a harmadiké.

2. A TERMODINAMIKAI KERET A REOLÓGIA NÉLKÜL

Választott rugalmas konstitutív egyenletünk a Hooke-törvény:

$$\boldsymbol{\sigma} = E^{\text{dev}} \mathbf{D}^{\text{dev}} + E^{\text{sph}} \mathbf{D}^{\text{sph}},\tag{10}$$

ahol a gömbi és deviatorikus komponensek és a rugalmasságtani együtthatók:

$$\mathbf{D}^{\text{sph}} = \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{1}, \quad \mathbf{D}^{\text{dev}} = \mathbf{D} - \mathbf{D}^{\text{sph}}, \quad E^{\text{sph}} = 3K, \quad E^{\text{dev}} = 2G.$$
(11)

Számunkra most E^{dev} és E^{sph} állandónak tételezhetőek fel. (10)-ből könnyű megmutatni [6], hogy a termorugalmasság klasszikus Duhamel–Neumann-képlete [20] speciális esetként adódik (a rugalmas deformáltság változóról a teljes megnyúlásra áttérve és feltételezve, hogy a referencia-időpontban nulla a rugalmas deformáltság, továbbá hogy képlékenyedés sem zajlik).

A kontinuum-termodinamika első főtétele, azaz a belső energia mérlege

$$\varrho \dot{e} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_e + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^{\operatorname{sym}}), \tag{12}$$

ahol $e(\mathbf{D}, T)$ a fajlagos belső energia és \mathbf{j}_e az árama, mindkettő konstitutíve megadandó (és ϱ a tömegsűrűség, mely állandó a kisdeformációs tartományban). Hasonlóan, a $s(\mathbf{D}, T)$ fajlagos entrópia mérlege

$$\varrho \dot{s} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_s + \sigma_s, \tag{13}$$

melyhez a legegyszerűbb és legszokásosabb $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}_e/T$ feltételezéssel élünk a \mathbf{j}_s entrópiaáramra, *s* termodinamikailag konzistens kell legyen *e*-vel (vagyis a Gibbs-reláció fenn kell álljon köztük), és az entrópiaprodukció pozitív definit kell legyen: $\sigma_s \ge 0$. Konkretizálva, a

$$\mathbf{j}_e = \lambda \nabla \frac{1}{T} \tag{14}$$

Fourier-hővezetést választjuk pozitív λ hővezetési állandóval, és

$$e = cT + \left\{ \frac{E^{\text{dev}}}{2\varrho} \operatorname{tr}\left[\left(\mathbf{D}^{\text{dev}} \right)^2 \right] + \frac{E^{\text{sph}}}{2\varrho} \operatorname{tr}\left[\left(\mathbf{D}^{\text{sph}} \right)^2 \right] \right\} + \frac{E^{\text{sph}}}{\varrho} T \alpha \operatorname{tr} \mathbf{D}^{\text{sph}}$$
(15)

a belső energia kifejezése, ahol az első tag tartalmazza a *c* állandó fajhőt, a középső rész a tisztán rugalmas energia és a harmadik tag magyarázza a hőtágulás jelenségét. Az ehhez tartozó entrópiafüggvény egy additív konstans erejéig a következő:

$$s = c \ln \frac{T}{T_*} + \frac{E^{\rm sph}}{\varrho} \alpha {\rm tr} \mathbf{D}^{\rm sph}, \qquad (16)$$

egy tetszőleges T* segédkonstanssal. Az ezekből levezethető

$$\sigma_{s} = \mathbf{j}_{e} \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\mathbf{\sigma}\mathbf{Z}) = \mathbf{j}_{e} \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{E^{\operatorname{dev}}}{T} \operatorname{tr}(\mathbf{D}^{\operatorname{dev}}\mathbf{Z}) + \frac{E^{\operatorname{sph}}}{T} \operatorname{tr}(\mathbf{D}^{\operatorname{sph}}\mathbf{Z})$$
(17)

entrópiaprodukcióban az első tag nemnegatív (14) miatt, a továbbiak pozitív definitségét pedig a

$$\mathbf{Z} = \Gamma \dot{\mathbf{D}}^{\text{dev}}, \qquad \Gamma = \gamma H \left(\text{tr} \left[\left(\mathbf{D}^{\text{dev}} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} D_{\text{crit}}^2 \right) \cdot H \left(\text{tr} \left(\mathbf{D}^{\text{dev}} \dot{\mathbf{D}}^{\text{dev}} \right) \right)$$
(18)

képlékeny konstitutív összefüggéssel biztosítjuk, ahol γ és D_{crit} pozitív állandók, H pedig a Heaviside-függvény.

A (18) választás egy standard képlékenyedéselméletet fogalmaz meg:

• a képlékenyedési sebesség arányos a deviatorikus rugalmas sebességgel,

• a folyási feltétel a von Mises-féle (vegyük észre, hogy most a feszültség Hookeféle kapcsolatban van a rugalmas deformáltsággal, tehát **D** helyett szabadon helyettesíthetjük be σ -t, így D_{crit} ekvivalens egy von Mises-féle σ_{crit} határfeszültséggel),

• a képlékeny változás leáll tehermentesítés során, a második Heaviside-szorzó révén, mellyel a $\sigma_s \ge 0$ termodinamikai követelményt biztosítjuk.

Megjegyezzük, hogy hőmérsékletfüggő E^{sph} , E^{dev} , α , c együtthatók esetén, általánosabb rugalmasenergia-kifejezés esetén, nagy deformációk esetén ill. anizotrop közegek esetén hasonló, csak némileg bonyolultabb képletek vezethetők le ugyanezzel a módszertannal.

A hőmérséklet változását meghatározó egyenlet (15)-ből vezethető le (12), (10) és (9) behelyettesítésével:

$$\rho c \dot{T} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_e - E^{\mathrm{sph}} \alpha T \mathrm{tr} \dot{\mathbf{D}}^{\mathrm{sph}} + E^{\mathrm{dev}} \mathrm{tr} (\mathbf{D}^{\mathrm{dev}} \mathbf{Z}).$$
(19)

Itt a jobb oldal első tagja a hőhatásról ad számot. A második tag a szilárd anyagok Joule–Thomson-jelenségét okozza: hűlést nyújtás és melegedést összenyomás esetén. Ez egy reverzibilis változásfajta, a hőtágulás egy kevésbé nyilvánvaló, de elkerülhetetlen megnyilvánulási formája. A harmadik tag ellenben, nemnegatív lévén, egy irreverzibilis jelenség – az entrópiaprodukció nemnegatív voltának egy következménye –, így mindig melegedést okoz, amikor csak képlékeny változás is zajlik.

A fenti mérleg- és konstitutív egyenletekhez hozzávéve a

$$\boldsymbol{\varrho} \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{20}$$

mechanikai mozgásegyenletet, vagy ennek (a továbbiakban alkalmazott)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0} \tag{21}$$

erőegyensúlyi közelítését, egy zárt dinamikai egyenletrendszerhez jutunk. Így tehát minden konkrét folyamatot ki tudunk számolni, ha rendelkezésre áll a szükséges menynyiségű kezdeti és peremfeltétel.

3. Egytengelyű folyamatok – képletek és kísérleti szemléltetésük

Az előállt elméleti keret alkalmazhatóságát egytengelyű folyamatokon mutatjuk be. Az ilyen esetek két okból nevezetesek: könnyű velük számolni, és számos kísérlet eredményeit képesek leírni. Ilyen speciális geometriájú testekre, és adiabatikusságot és szimmetriaőrző peremfeltételeket feltételezve, minden mennyiség eloszlása homogén. Más szóval, a mennyiségek időfüggőek, de helyfüggetlenek. Alkalmas koordinátarendszert választva, a tenzoroknak csak longitudinális (||) és transzverzális (\perp) komponenseik lehetnek:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{||} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D^{||} & 0 & 0\\ 0 & D^{\perp} & 0\\ 0 & 0 & D^{\perp} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{||} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon^{\perp} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon^{\perp} \end{pmatrix} \text{ stb.}$$
(22)

Következésképp, a deviatorikus és gömbi részek – a **D** tenzor példáján mutatva:

$$\mathbf{D}^{\text{dev}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(D^{||} - D^{\perp}) & 0 & 0\\ 0 & -(D^{||} - D^{\perp}) & 0\\ 0 & 0 & -(D^{||} - D^{\perp}) \end{pmatrix},$$
(23)

$$\mathbf{D}^{\text{sph}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} D^{||} + 2D^{\perp} & 0 & 0\\ 0 & D^{||} + 2D^{\perp} & 0\\ 0 & 0 & D^{||} + 2D^{\perp} \end{pmatrix}.$$
 (24)

Tekintsünk mechanikai egyensúlyi kezdeti feltételt: $\mathbf{D}(t_0) = \mathbf{0}$ a t_0 kezdeti időben – amikor, természetesen, képlékeny változás sincs: $\mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{0}$, és a tisztán rugalmas feszültség nulla –, és jelölje T_0 a kezdeti hőmérsékletet. Az $\mathbf{\varepsilon}$ teljes megnyúlás – melyet kísérletekben mérni tudunk –, mint korábban említettük, $\mathbf{L}^{\text{sym}} t_0$ -től vett időintegrálja, tehát kezdetben szintén nulla. Véges differenciás numerikus szemszögből tekintve a megoldás a következőképpen határozható meg. Tekintsünk erővezérelt folyamatot, ahol $\sigma^{||}(t)$ van előírva (figyelembe véve, hogy a kisdeformációs tartományban a keresztmetszet változása elhanyagolható). [Nyúlásvezérelt folyamat esetén egy hasonló, de némileg rafináltabb sémára van szükség.] Fontos konstatálni, hogy az itt vázolt végesdifferencia-séma egyszerűsége ellenére is alkalmas demonstrálni, hogy az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Emellett számos szilárdtestmechanikai alkalmazásban elegendő az általa nyújtott pontosság közepesen kis időlépésekre is.

Ha t ideig minden mennyiséget ismerünk, az előírt $\sigma^{||}(t + \Delta t)$ -ből, mely tulajdonképpen $\sigma(t + \Delta t)$ ismeretét jelenti, (10)-ből meghatározzuk $\mathbf{D}(t + \Delta t)$ -t. Ezután, $[\mathbf{D}(t + \Delta t) - \mathbf{D}(t)]/\Delta t$ -t $\dot{\mathbf{D}}$ egy közelítéseként használva a $[t, t + \Delta t]$ intervallumon, (18) alkalmazásával \mathbf{Z} kiadódik erre az intervallumra. Ezt követően (19) \dot{T} -re ad jóslatot, amely $T(t + \Delta t)$ -t nyújtja, továbbá lehetővé teszi, hogy meghatározzuk $\mathbf{L}^{\text{sym}} = \dot{\mathbf{\epsilon}}$ -t (9)-ből, így végül előáll $\mathbf{\epsilon}(t + \Delta t)$ (mely adat kísérleti adatokkal való összevetéshez hasznos).

Ha egy minta a tekintett kezdeti feltételekből, azaz relaxált és egyensúlyi állapotból indul, majd növekvő erővel nyújtják, az elmélet a következő kvalitatív viselkedést jósolja (ld. az 1a. ábrát). A képlékenyedési küszöb alatt a Joule–Thomson-jelenség jól megfigyelhető, és a csökkenő hőmérséklet némi negatív hőtágulást eredményez, mely részben csökkenti a rugalmas megnyúlást. Amikor a képlékenyedés belép, hozzájárul a teljes megnyúláshoz, továbbá a vele járó disszipáció a hőmérsékletet is növelni kezdi.



1. ábra. (a) Az egyes megnyúlásfajták és a hőmérséklet az idő függvényében, növekvő erővel történő egytengelyű nyújtás esetén (jelleggörbék az elmélet alapján). A hőmérséklet (pont-szaggatott vonal) eleinte csökken – egy adiabatikusan táguló gázhoz hasonlóan – majd növekedni kezd – a képlékeny disszipáció miatt –, a rugalmas megnyúlás (pontozott vonal) a növekvő feszültséget követve növekszik, a képlékeny megnyúlás (szaggatott vonal) csak a kritikus feszültség felett jelenik meg, ezzel hozzájárulva a teljes megnyúlás (folytonos vonal) növekedéséhez. (b) A kísérleti minták vázlata. A középső szakasz kikeskenyített, és ezt a tartományt egy termokamera filmezi. Két kiszemelt pont hőmérsékletét és a figyelt tartomány maximális hőmérsékletét numerikusan is kijelzi.

Ezek a fázisok szépen bemutathatóak kísérletileg, ha a folyamat során a hőmérsékletet is figyeljük. Öt pillanatfelvételt mutatunk be, melyeket egy termokamera rögzített egy poliamid-6 műanyag mintán elvégzett húzókísérlet (ld. 1b. ábra) során, e felvételek az egyes fontos stációkat ábrázolják (ld. 2. ábra). Az utolsó fázist, a tönkremenetelt az itt bemutatott elmélet még nem tudja leírni, de eddigi tanulmányok alapján [9][10] szintén beilleszthetőnek tűnik majd a termodinamikai tárgyalásmódba. A tönkremenetelt ugyanis egy termodinamikai stabilitásvesztés magyarázhatja.



2. ábra. Hőkamera pillanatfelvételei. Az első mutatja a kiindulási állapotot (a), ezután a kvázi-adiabatikus hűlés figyelhető meg (b), majd hődisszipáció lép fel a képlékenyedés megindulása miatt (c), később a képlékeny változás a teljes kikeskenyített tartományra kiterjed (d), végül a minta elszakad (e).

Ugyanezek a jellegzetességek figyelhetők meg a 3a. ábrán, ahol egy ugyanilyen mintán mért feszültség- és hőmérsékletértékek vannak ábrázolva az idő függvényében. Ez alkalommal két felterhelési-leterhelési ciklust alkalmaztunk, a másodikat magasabb feszültségértékig vittük el, de még garantáltan a folyáshatár alatt maradva. A harmadik felterhelést tönkremenetelig vittük el, átkelve közben a képlékeny szakaszon. Ennek megfelelően az első két ciklus során a hőmérséklet esik egy kicsit, majd visszaemelkedik. A harmadik ciklus szintén hűléssel kezdődik, majd a képlékenyedés beindulásakor (ld. a kis tranzienst a feszültséggörbén) a disszipáció megindul és dominálni kezd, hőmérsékletemelkedést eredményezve. A (18)–(19) egyenleteknek megfelelően [ill. lásd hamarosan a (25) egyenletet is] a hűlési szakaszok a terhelés függvényében lineárisak, a melegedési szakasz pedig kvadratikus/parabolikus.

A 3b. ábrán az első fel- és leterhelési szakaszon felnagyítva látható a mért hőmérsékletfutás és a rá adott elméleti jóslat, utóbbit a

$$\varrho c \dot{T} = -\alpha T \dot{\sigma}^{||} \tag{26}$$

képlet alapján számolva, mely (19)-ből következik, ha nincs képlékeny változás és hőforgalom. A számításhoz a $\rho = 1150 \text{ kg/m}^3$, c = 1700 J/(kg K), $\alpha = 0.8 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ irodalmi értékeket használtuk. A méréssel való jó egyezés jelzi, hogy az elmélet jól teljesít, és az alkalmazott közelítések jogosak.



3. ábra. (a) A mért feszültség (fekete vonal) és hőmérséklet (szürke vonal) az idő függvényében, két – rugalmas tartományban maradó – nyújtás-visszaengedés, majd egy képlékenyedésig és szakadásig elvitt felterhelés során. (b) Mért (szürke) és jósolt (fekete) hőmérséklet az első terhelési ciklus alatt.

Alaposabb szemrevételezéssel megfigyelhetjük, hogy egy fel-leterhelési ciklus végén a hőmérséklet nem pontosan a kezdő értékre tér vissza, hanem egy kicsit megemelkedik. Ez a megemelkedés a második, magasabb terhelési ciklus során nagyobb. A képlékenyedést kizárhatjuk e disszipáció okaként. Zajlik azonban egy másik viselkedésfajta, a reológia is a szilárd anyagokban. A következő szakaszban bemutatjuk, hogy a kísérleti eredmények hogyan teszik szükségessé a reológia hozzáadását az elmélethez, ez hogyan tehető meg irreverzibilis termodinamikia módszertanunkkal, hogyan határozhatók meg a reológiai együtthatók a kísérleti adatokból, és hogy a reológia nemcsak a mechanikai viselkedést módosítja, hanem a hőmérséklet alakulásához is egy további disszipációforrásként jelentkezik.

4. A REOLÓGIA TERMODINAMIKAI BEVEZETÉSE

A reológia termodinamikai megfogalmazása belső változók (konkrétabban: dinamikai szabadsági fokok [21]) segítségével tehető meg. A hőtágulás és képlékenyedés nélküli egyszerűbb esetre a módszertant a [12] munka ismertette. Mi itt ezt fogjuk kiterjeszteni, hőtágulást és képlékenyedést is megengedve. A [12]-belihez hasonló részleteket csak tömören ismételjük meg, a különbségekre fogunk fókuszálni.

A módszertan szerint egy további mennyiség létét tételezzük fel, melyet szimmetrikus tenzorként keresünk, annak megfelelően, hogy a reológia elsősorban a mechanikai viselkedésben jelentkezik, egy további feszültségforrásként – gondoljunk például egy belső csillapító erőre. A feszültség általánosításán túl azt is feltételezzük, hogy a fajlagos entrópia, mely eddig megadható volt **D** és *e* függvényeként, most ettől a ξ új menynyiségtől is függ, egy kvadratikus additív tag formájában, mely biztosítja, hogy termikus egyensúlyban az entrópia továbbra is maximális, a második főtételnek megfelelően. Azaz

$$s(\mathbf{D}, e, \boldsymbol{\xi}) = s_{\text{eddigi}}(\mathbf{D}, e) - \frac{1}{2} \text{tr} \boldsymbol{\xi}^2.$$
(27)

Ennek az együttmozgó időderiváltját képezve azt találjuk, hogy (17)-en túlmenően az entrópiaprodukció két extra tagot kap:

$$\frac{1}{T} \operatorname{tr}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{L}^{\operatorname{sym}}) - \varrho \operatorname{tr}(\boldsymbol{\xi}^2), \qquad (28)$$

ahol $\hat{\sigma}$ jelöli a reológiai eredetű feszültségjárulékot. E többlet-entrópiaprodukció nemnegatívságának Onsager-féle biztosításaként a következő összefüggéseket tételezzük fel:

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}} = l_{11}^{\text{dev}} \mathbf{L}^{\text{sym}} + l_{12}^{\text{dev}} (-\varrho T \boldsymbol{\xi}^{\text{dev}}), \qquad \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{sph}} = l_{11}^{\text{sph}} \mathbf{L}^{\text{sym}} + l_{12}^{\text{sph}} (-\varrho T \boldsymbol{\xi}^{\text{sph}}),$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^{\text{dev}} = l_{21}^{\text{dev}} \mathbf{L}^{\text{sym}} + l_{22}^{\text{dev}} (-\varrho T \boldsymbol{\xi}^{\text{dev}}), \qquad \dot{\boldsymbol{\xi}}^{\text{sph}} = l_{21}^{\text{sph}} \mathbf{L}^{\text{sym}} + l_{22}^{\text{sph}} (-\varrho T \boldsymbol{\xi}^{\text{sph}})$$

$$(29)$$

a pozitív definit

$$\begin{pmatrix} l_{11}^{\text{dev}} & l_{12}^{\text{dev}} \\ l_{21}^{\text{dev}} & l_{22}^{\text{dev}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} l_{11}^{\text{sph}} & l_{12}^{\text{sph}} \\ l_{21}^{\text{sph}} & l_{22}^{\text{sph}} \end{pmatrix}$$
(30)

együtthatómátrixokkal. Megjegyzendő, hogy megengedhetnénk onsageri csatolódást (17) tenzori, képlékenyedéssel kapcsolatos részéhez is. Mindazonáltal jelenlegi céljainkra az általánosság eme szintje elegendő lesz. Azt fogjuk ugyanis találni, hogy az itt mutatott kísérleti adatok reológiai vonatkozásait ez az egyszerűbb keret is már sikeresen magyarázza. A továbbiakban a képlékeny küszöb alatti folyamatokat tekintünk. Ezenkívül elhanyagoljuk (9)-ben a kis hőtágulási részt, amely a 3. ábrán látottakhoz hasonló kis hőmérsékletváltozásokhoz tartozik. Ekkor a

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{L}^{\text{sym}} = \dot{\mathbf{\epsilon}} \tag{31}$$

közelítésbe jutunk. Ezzel párhuzamosan, a lényegében állandó abszolút hőmérséklet mellett az l együtthatók konstansnak tekinthetők, és ekkor ξ kiküszöbölhető a (29) egyenletrendszerből. Az eredmény

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} + \tau^{\text{dev}} \boldsymbol{\dot{\sigma}}^{\text{dev}} = E_0^{\text{dev}} \mathbf{D}^{\text{dev}} + E_1^{\text{dev}} \dot{\mathbf{D}}^{\text{dev}} + E_2^{\text{dev}} \ddot{\mathbf{D}}^{\text{dev}},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}} + \tau^{\text{sph}} \boldsymbol{\dot{\sigma}}^{\text{sph}} = E_0^{\text{sph}} \mathbf{D}^{\text{sph}} + E_1^{\text{sph}} \dot{\mathbf{D}}^{\text{sph}} + E_2^{\text{sph}} \ddot{\mathbf{D}}^{\text{sph}}$$
(32)

a teljes feszültségre, ahol az új szorzók a korábbi *l* együtthatók egyszerű kombinációi. Amit kaptunk, az két független lineáris reológiai modell, mely σ , $\dot{\sigma}$, **D**, **D**, **D** tagokat tartalmaz. Eszerint a klasszikus Kelvin–Voigt-, Maxwell- és Jeffrey-modell mind speciális esete az ilyen ún. Kluitenberg–Verhás-modelleknek (az elnevezés eredetét és további analízist ld. [12]-ben). E reológiai modellek termodinamikai származtatásának egyik fontos haszna, hogy a második főtételből megszorító feltételek derülnek ki a (32)beli együtthatókra (mely feltételek nem mások, mint a (30) mátrixok pozitív definitsége, lefordítva ezekre az új együtthatókra – az egyszerű levezetést ld. [12]-ben). E feltételek némelyike nemtriviális és figyelemre méltó:

$$\tau^{\text{dev}} \ge 0, \qquad E_0^{\text{dev}} \equiv E^{\text{dev}} \ge 0, \qquad E_1^{\text{dev}} \ge \tau^{\text{dev}} E_0^{\text{dev}}, \qquad E_2^{\text{dev}} \ge 0,$$

$$\tau^{\text{sph}} \ge 0, \qquad E_0^{\text{sph}} \equiv E^{\text{sph}} \ge 0, \qquad E_1^{\text{sph}} \ge \tau^{\text{sph}} E_0^{\text{sph}}, \qquad E_2^{\text{sph}} \ge 0.$$
 (33)

5. A REOLÓGIAI EGYÜTTHATÓK MEGHATÁROZÁSA KÍSÉRLETI ADATOKBÓL

Kísérletileg mért feszültség- és megnyúlásadat okból a τ , E_i konstansok meghatározhatóak. Ehhez az első lépés a **D** és ε közti különbség kezelése. Egy kísérletben **D** nem feltétlenül indul nulláról – általában szükség van valamennyi előfeszítésre a megfelelően egytengelyű kezdeti állapot biztosításához –, és a nyúlásmérő bélyegek (vagy más nyúlásmérő eszközök) adatai is sokszor egy nemnulla értékről indulnak a kísérlet kezdő pillanatában. E körülmények legegyszerűbb (és sokszor megkerülhetetlen) kezelése az, ha nem kézi nullázásokat hajtunk végre, hanem elfogadjuk, hogy **D** és ε kezdeti értéke között egy **S** eltolódás van:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} + \boldsymbol{\tau}^{\text{dev}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}} = \boldsymbol{\delta}^{\text{dev}} + E_0^{\text{dev}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dev}} + E_1^{\text{dev}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}} + E_2^{\text{dev}} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}} + \boldsymbol{\tau}^{\text{sph}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{sph}} = \boldsymbol{\delta}^{\text{sph}} + E_0^{\text{sph}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}} + E_1^{\text{sph}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{sph}} + E_2^{\text{sph}} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{sph}}.$$
(34)

A konkrét δ értékek tehát nem hordoznak semmi elvi információt, nem anyagi vagy más fontos mennyiségek, hanem egyszerűen a kísérleti körülmények egy technikai jellemzője.

A következő lépés annak felismerése, hogy egytengelyű kísérletekben az ε^{\perp} keresztirányú nyúlás értékek mérése nagyfontosságú. Igaz ugyan, hogy egytengelyű folyamatokra lehetséges [12] (34)-ból egy összefüggést állítani fel $\sigma^{||}$ és $\varepsilon^{||}$ között. A kapott összefüggés azonban deriváltakat is tartalmaz, $\sigma^{||}$ harmadik és $\varepsilon^{||}$ negyedik deriváltja rendjéig, és helyet kap benne mind a nyolc τ , E_i konstans. Mind a konstansok nagy száma és az ilyen magas deriváltak diszkrét kísérleti adatsorokból történő előállítása olyan magas hibával jár, mely komoly gyakorlati nehézségeket jelent. Ráadásul még ha sikerülne is a $\sigma^{||}$ és $\varepsilon^{||}$ közti összefüggés együtthatóit nagy pontossággal előállítani, a τ , E_i konstansokra való invertálás is problematikus, tekintve köztük fennálló nemlineáris összefüggéseket. Kulcsfontosságú tehát, hogy megbízható ε^{\perp} értékek is rendelkezésünkre álljanak, melyek segítségével kiszámolhatjuk a deviatorikus és gömbi részeket és így két független illesztési problémára redukáltuk a feladatot, ahol mindkettőben csak 4 együtthatót kell meghatározni.

A (34) egyenletek lineárisak az ismeretlen paraméterekben, tehát egy legkisebb négyzetes illesztés kivitelezhetőnek tűnik, ahol az adatpontok diszkrét sok pillanatban állnak rendelkezésre, és a deriváltakat is ezekből az adatokból származtatnánk. A harmadik elébünk álló nehézség az, hogy egy ilyen adatsorból már az első és második deriváltak származtatása is problémás, már akkor is, ha maguk a mért adatok hibája kicsi: ezek a hibák nagymértékben felerősödnek differenciák képzésekor, és az illesztett együtthatók nagymértékben megbízhatatlannak bizonyulnak. Az eljárás, melyet a 3a. ábrán látottakhoz hasonló adatsorok esetére kidolgoztunk, a következő.

Valamilyen simítást szeretnénk végrehajtani. Ezért, ahelyett, hogy egy (34) típusú egyenletet közvetlenül használnánk fel, tekintsük egy időintegrálját. Közelebbről, az t időpontra felírt egyenletet megszorozzuk egy t közepű ablakfüggvénnyel, és a szorzatot integráljuk. Az újdonság az, hogy olyan w(t) ablakfüggvényt választunk, mely csak egy $[t_1, t_2]$ intervallumban nemnulla, és a két végpontban olyan simán tart nullához, hogy még első és második deriváltja is nullához tart. Ennek az az előnye, hogy a deriváltakat tartalmazó tagokon úgy hajthatunk végre parciális integrálást, hogy a felületi tagok nullák lesznek, pl.

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\sigma}^{||}(t) w(t) dt = \left[\sigma^{||}(t) w(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sigma^{||}(t) \dot{w}(t) dt = -\int_{t_1}^{t_2} \sigma^{||}(t) \dot{w}(t) dt.$$
(35)

Ezzel az eljárással a deriváltak integráljait az eredeti függvények integráljaira vezethetjük vissza (ahol az ablakfüggvény első vagy második deriváltjával vannak összeintegrálva, melyek még szintén szép simán viselkednek). Ezt a trükköt a disztribúcióelmélet ún. tesztfüggvényei motiválták. Gyors és kényelmes számítások céljából *w*-t polinomként kerestük, és némi kísérletezés után a [-1, 1] intervallum szélein elegendően gyorsan eltűnő (ld. 4. ábra), a teszteken jól teljesítő

$$p(u) = (u+1)^3(u-1)^3(u^2+1)$$
(36)

polinomot választottuk. Ezután tetszőleges $[t_1, t_2]$ intervallumokhoz átskáláztuk a változóját. Legalább öt különböző intervallumot választunk, és az integrált értékekre végzünk el legkisebb négyzetes illesztést.



4. ábra. (a) Az ablakfüggvény (fekete vonal) és első (szaggatott vonal) és második (pontozott vonal) deriváltja. Láthatóan mindhárom függvény elegendően egyenletesen vesz mintát az intervallumból (az intervallum semelyik rész sincs különösebben előnyben részesítve más részekhez képest).

Az adatsorok integráljai numerikusan lettek kiszámolva, de itt is javítani akartuk a számítás jóságát. Ennek oka az, hogy a gyakorlatban sokszor csak pár tucat adatpont áll rendelkezésünkre. Legalább öt különböző intervallumra van szükség az öt ismeretlen konstans meghatározásához, de ha hibát is szeretnénk az illesztett értékekhez rendelni (mégpedig valami informatív, hiteles szinten), legalább hét intervallum ajánlatos. Ekkor a numerikus integráloknak meglehetősen megbízhatóaknak kell lenniük, mert értékeik nem fognak nagyon eltérni egymástól, így fennáll a numerikus megbízhatatlanság veszélye.

E célból módosítottuk a numerikus integrálás klasszikus trapézszabályát. A trapézszabály ugyanis az integrandust (szakaszonként) lineáris függvénnyel közelíti. A mi esetünkben azonban egy szorzatot kell integrálni, és ablakfüggvényünk második deriváltja már elkerülhetetlenül elég gyorsan változik. Ez már önmagában jelentősen érvényteleníti a (szakaszonkénti) lineáris közelítést. Ezért az ötlet az, hogy csak magát az adatsort közelítsük lineáris szakaszokkal, az ablakfüggvényt (ill. megfelelő deriváltját) viszont egzaktul vesszük figyelembe. Így például

$$\int_{t_a}^{t_b} \sigma^{||}(t) w(t) dt \approx \int_{t_a}^{t_b} \left[\sigma^{||}(t_a) + \frac{\sigma^{||}(t_b) - \sigma^{||}(t_a)}{t_b - t_a} (t - t_a) \right] w(t) dt, \quad (37)$$

melynek kiszámítása w(t) és tw(t) integráljára vezethető vissza, amiket egzaktul határozhatunk meg.

Mindezen előkészületek után a 3a. ábrához hasonló adatsorok feldolgozhatónak bizonyulnak. Reológiai konstansok céljára a folyamatok olyan szakaszai a leginformatívabbak, ahol gyors változás történik, így a második deriváltakra is megbízható információt kapunk. Demonstrációs célból most a 3a. ábra első fel-leterhelésének egy kis részére illesztünk: a felterhelés végére és a leterhelés elejére. A terhelésből visszaterhelésbe történő meredek váltást kockázatosnak tűnhet felhasználni, de igazából az ilyen erősen változó szakaszok nyújtanak a legtöbb információt a deriváltas tagokról, az integrálos simítás pedig intelligensen kezeli a vadul változó szakaszokat.

A legkisebb négyzetes illesztés módszere hibaszámítást is biztosít, és az illeszkedés jóságát jellemző R^2 érték is számolható, de mindemellett az a legjobb, ha az illesztés jósága vizualizálható is.. E célból, az egyszerű

$$\sigma_n^{\rm sph} + \tau^{\rm sph} \frac{\sigma_n^{\rm sph} - \sigma_{n-1}^{\rm sph}}{\Delta t} = \delta^{\rm sph} + E_0^{\rm sph} \varepsilon_n^{\rm sph} + E_1^{\rm sph} \frac{\varepsilon_n^{\rm sph} - \varepsilon_{n-1}^{\rm sph}}{\Delta t} + E_2^{\rm sph} \frac{\varepsilon_{n+1}^{\rm sph} - 2\varepsilon_n^{\rm sph} + \varepsilon_{n-1}^{\rm sph}}{\Delta t^2}$$
(38)

numerikus sémát megoldva σ_n^{sph} -re, jósolt σ^{sph} értékeket számítottunk a kísérleti ε^{sph} adatok és egy kezdeti σ^{sph} érték segítségével (és a deviatorikus résznél ugyanígy jártunk el). Ennek az előrelépő sémának előnye, hogy akkor is megbízhatóan alkalmazható, ha az illesztett együtthatók némelyike kicsi, vagy *a priori* nulla.

Ahogy már említettük, a teljes folyamatnak csak egy kicsi szakaszát analizáljuk itt, hogy éles helyzetben lássuk és láttassuk numerikus eljárásunk teljesítőképességét. Harminc adatpontot használunk, és hét intervallumra integrálunk. Ennélfogva mindegyik intervallum hat pontból áll. (A szomszédos intervallumok között két pontnyi átfedés van.) Nyilvánvaló, hogy hat pont egy intervallumnak elég durva diszkretizációját jelenti, tehát a helyzet valóban elég éles. Az illesztéssel kapott együtthatókat és az általuk jósolt folyamatszakaszt az alábbi táblázatban és ábrán láthatjuk.

anyagi paraméter	illesztett érték	standard hiba
$ au^{ m dev}$ [s]	0,3600	±0,0659
E_0^{dev} [Gpa]	0,8612	±0,0556
E_1^{dev} [Gpa·s]	0,4724	±0,0686
E_2^{dev} [Gpa·s ²]	0,0029	±0,0010

anyagi paraméter	illesztett érték	standard hiba
$ au^{\mathrm{sph}}[\mathrm{s}]$	0,2329	±0,0904
$E_0^{\rm sph}$ [Gpa]	4,5708	±1,0392
E_1^{sph} [Gpa·s]	1,8566	±0,4401
$E_2^{\rm sph} [{\rm Gpa} \cdot {\rm s}^2]$	0,0013	±0,0220



5. ábra. Táblázat:az illesztéssel nyert reológiai együtthatók és hibáik. Görbék: az együtthatók alapján számolt elméleti jóslat (folytonos vonal) illeszkedése a mért értékekre (pontok). Tájékoztatásképpen ábrázolásra került a relatív nyúlás mért adatsora is, alkalmas átskálázásban (üres körök).

A kapott reológiai együtthatókra számos további ellenőrzés végezhető el. Először is megnyugtatóan azt találjuk, hogy a (33) termodinamikai feltételek valóban teljesülnek. Másodszor, a E_0^{dev} , E_0^{sph} rugalmasságtani együtthatók lehetővé teszik a Poisson-tényező és a Young-modulus meghatározását (ld. [12], Függelék). Előbbire az így adódó 0,37 érték szépen egyezik a 0,38 irodalmi adattal. A Young-modulus (1,2 GPa) a tipikus irodalmi értéktartomány (1,9 GPa ~ 3,3 GPa) alá esik, de erről az együtthatóról tudható, hogy erősen függ a páratartaomtól (ezért olyan széles az irodalmi értéktartomány). Emellett azt sem szabad elfelejteni, hogy a Young-modulus szokásos mérése véges felterhelési sebesség mellett történik, és a longitudinális feszültség–nyúlás-görbét a reológia alaposan befolyásolja. Így például már a legegyszerűbb reológiai szituációban, egy deviatorikus Kelvin–Voigt-modell és gömbi Hooke-modell esetén az eredő egytengelyű egyenletben nemcsak $\sigma^{||}$ és $\varepsilon^{||}$, hanem első deriváltjaik is szerepelnek ([12], Függelék). E deriváltak hányadosa, $\dot{\sigma}^{||}/\dot{\varepsilon}^{||}$ dominálja a longitudinális feszültség–nyúlás-görbét a terhelés kezdeti szakaszán és, nem túl lassú terhelések esetén, a további részt is. Másszóval, e deriváltak együtthatóinak hányadosa (szisztematikus jelöléssel, $E_1^{||}/\tau_1^{||}$) egy dinamikai Young-modulus szerepét játssza. Namármost, a fent kapott reológiai együtthatókkal ez a dinamikai Young-modulus 1,47 GPa-nak bizonyul, mely 24%-kal magasabb a sztatikusnál. Megjegyezzük, hogy (33) következményeképp a dinamikai Young-modulus mindig nagyobb a statikusnál [12]. Bonyolultabb reológiák – mint az itt bemutatott műanyagé – esetén magasabbrendű dinamikai Young-modulusok (magasabb deriváltak együtthatóinak hányadosai) is jelen vannak. A másodrendű Young-modulus például az itt bemutatott esetben már 1,84 GPa.

A szilárdtest-reológia egy általános figyelmeztetése, hogy a Young-modulus szokásos, a feszültség–nyúlás-görbéből származtatása hibásan magas értékekre vezethet, ha reológiát elhanyagoljuk. Felhívjuk a figyelmet, hogy reológiával nemcsak műanyagok [22] és hasonló anyagok esetén találkozhatunk: így például a kőzetek mechanikai leírása szintén a teljes (34) reológiai modellpárt igényli (ld. [23][24][25]).

6. DISZKUSSZIÓ

Az itt felállított elmélet elég gazdag hozzá, hogy megragadja a szilárd anyagok rugalmas, hőtágulási, reológiai és képlékeny aspektusait. Mindazonáltal ezek mindegyikét a lehető legegyszerűbb konkrét kinematikai és konstitutív választások esetén mutattuk be, hogy megkönnyítsük a kísérleti adatokkal való összevetést. Ezek a választások jól vizsgáztak az itt bemutatott mérési adatokkal való összehasonlítás során. Ennek ellenére az elmélet sokkal általánosabb folyamatokat és anyagi viselkedéseket is le tud írni, mint a nagydeformációs folyamatok, anyagi anizotrópia, nemlineáris rugalmasság, kifinomultabb képlékenyedési viselkedések, és mindezek nemkonstans rugalmasságtani, hőtágulási, reológiai és más együtthatókkal.

Az elmélet jövőben kivitelezhető általánosításait illetően először is a képlékeny és reológia onsageri csatolása említendő meg. Másodszor, a nem-Fourier-hővezetés szintén beilleszthető, egyesítve a merev hővezetőkre alkalmazott belső változós eljárást [11] az itt bemutatott termomechanikai oldallal. A tönkremenetel ugyanilyen termodinamikai módszertannal történő bevezetése – a [9][10] előfutár munkákra támaszkodva – egy távolabbi, de szintén ésszerű jelölt.

A kísérleti oldalon, célunk itt az volt, hogy példákat mutassunk az egyes szóba kerülő jelenségekre. Ezek az aspektusok, mint például a Joule–Thomson-jelenség és a Kluitenberg–Verhás-reológia jó mennyiségi egyezést mutattak az elméleti várakozásokkal. A jövőben, hasonló, de nagyobb pontossággal és megbízhatósággal megvalósított kísérletekkel egy teljes kvantitatív egyezés is elérhető lehet. Így például már a jelenlegi adatok lehetővé teszik, hogy a képlékeny folyáshatárt beazonosítsuk 100 MPa körülre (a feszültségszintre, ahol a 3a. ábrán a tranziens megfigyelhető, a hőmérséklet pedig emelkedni kezd a képlékeny disszipáció megindulása miatt), és a képlékenyedés utáni és előtti meredekségek hányadosából a képlékeny sebességi együttható értékére adhatunk közelítő becslést [$\gamma \approx 0,17$, ld. (18)], de ezekből a szempontokból nagyobb pontosságra van szükség. Ha a kísérleti elrendezés képes elegendően gyors fel- és leterhelést biztosítani (melyre a reológia tanulmányozása miatt van szükség), miközben minden nyúlási, erő- és hőmérsékletadat megbízhatóan és nagy pontossággal rendelkezésre áll, akkor az összes anyagi együttható leillesztése után az 5. szakaszban látott numerikus séma az egész időbeli folyamatot reprodukálni tudhatja.

Az időfüggések jóslására mutatott numerikus séma mellett módszert mutattunk a reológiai együtthatók leillesztésére, mely kevés adat esetén is jól vizsgázott. Hangsúlyoztuk annak fontosságát, hogy a keresztirányú megnyúlás is mindig mérve legyen, mert ez óriási mértékben megkönnyíti az illesztés feladatát, mert felosztja a problémát két kisebb és közvetlenebbül elvégezhető részre (deviatorikus és gömbi), míg a nyolc paramétert nemlineárisan tartalmazó egytengelyű eredő szituáció gyakorlatilag kezelhetetlen lehet.

A mechanikai mennyiségek nyomon követésén felül értékes további információt szolgáltat a hőmérséklet mérése. A rugalmas, reológiai és képlékeny viselkedésformák ugyanis a hőmérséklet időbeli alakulásán is jól látható nyomot hagynak. A termikus és mechanikai aspektusok összefüggése miatt valójában csak úgy nyerhetünk zárt, megoldható egyenletrendszert, ha a hőmérséklet is teljes jogú tagként van kezelve. A termodinamika-alapú megközelítés rávilágít a hőmérséklet jelentőségére olyan folyamatok esetén is, melyek hagyományosan pusztán mechanikainak voltak tekintve.

A kísérleti adatok elemzése egyértelműen láttatta a reológia jelentőségét a vizsgált műanyag minta esetén, de hasonló tapasztalatok ismertek jóval "szilárdabb" anyagok, így kőzetek esetén is [23][24][25]. Ami első ránézésre nemlineáris rugalmasságnak tűnik egy feszültség–megnyúlás-görbén, az időbeliség elemzése után könnyen bizonyulhat reológiának. Fontos viszont arra is odafigyelni, hogy a kísérleti elrendezésben (a terhelés kivitelezésében és kontrollálásában, a mérőeszközök viselkedésében stb.) fellépő késleltetéseket ne keverhessük össze a mintán belüli reológiai késleltetésekkel. Nagy kísérleti gondosságra van szükség – a megfelelő elméleti értelmezés mellett – a szilárd anyagokban zajló reológia megbízható kimutatásához. A megbízható reológiai információk alkalmazási következményei messzenyúlóak (alagutak hosszútávú viselkedése, szerkezeti anyagok biztonsági kérdései stb.). A termikus, rugalmas és reológiai jelenségek közti összjáték szintén jelentős. A szilárd testek termodinamika-alapú tárgyalása mindezen jelenségek leírására megbízható elméleti keretet biztosít.

Köszönetmondás

Jelen munkát a Bolyai János Kutatási ösztöndíj, valamint az OTKA K81161 pályázata támogatta.

Függelék: a mérések kivitelezéséről

A mérések a gödöllői Mezőgazdasági Gépesítési Intézetben történtek, egy Instron 5581 univerzális anyagvizsgáló berendezésen. Az elrendezést a 6. ábra mutatja be.



6. ábra. A mérési összeállítás.

A minták (ld. 1b. ábra) hossz- és keresztirányú méretváltozásait HBM 3/350 XY11 típusú nyúlásmérő bélyegek mérték (7. ábra). A bélyegek ellenállása $R=350 \Omega$, a bélyegtényező értéke $k=1,98 (\pm 1\%, a gyártó szolgáltatta technikai paraméterek szerint).$



7. ábra. A felbélyegzett minta.

A próbatestre felbélyegzett nyúlásmérő bélyegek félhídban kerültek bekötésre, oly módon, hogy az aktív bélyeg a próbatestre felragasztott bélyeg volt, a hídág másik fele pedig egy tehermentesített fémlemezre került felbélyegzésre. A mérések során a félhíd a Spider-8 mérőerősítő SR-55 vivőfrekvenciás moduljának bemenetére csatlakozott.

A mérésekhez egy ThermaCAM PM695 típusú valósidejű termokamerát használtunk (ld. 1b. ábraaláírás). Emellett egy infravörös hőmérsékletérzékelővel (forgalmazó: Optrics GmbH, OPTCTLT10FCB3 típus) is gyűjtöttünk adatokat.

Szabvány mintákat használtunk, méretezésüket az 1b. ábra mutatja. A megmunkálás után a mintákat tehermentesítés céljából pihentettük, majd a bélyegek felragasztása után kalibráltuk.

IRODALOM

- [1] Matolcsi T. A concept of mathematical physics: models for spacetime. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1984.
- [2] Matolcsi T. Spacetime without reference frames. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1993.
- [3] Matolcsi T. On material frame-indifference. Arch. Rat. Mech. Anal. 1986;91:99-118.
- [4] Matolcsi T, Gruber T. Spacetime without reference frames: an application to the kinetic theory. Int. J. Theor. Phys. 1996;35:1523-1539.

- [5] Fülöp T, Ván P. Kinematic quantities of finite elastic and plastic deformation. Math. Meth. Appl. Sci. 2012;35:1825-1841.
- [6] Fülöp T. Thermal expansion, elastic stress and finite deformation kinematics. In: 10th HEEP International Conference. Budapest: Budapest University of Technology and Economics, Department of Energy Engineering 2011, 227-232.
- [7] Fülöp T, Ván P, Csatár A. In Proceedings of the 12th Joint European Thermodynamics Conference, JETC 2013, Brescia, Italy, July 1-5, 2013, eds. M. Pilotelli and G.P. Beretta, Snoopy, Brescia, 2013, 525-530.
- [8] Fülöp T, Ván P, Csatár A. In Proceedings of the 11th International Conference on Heat Engines and Environmental Protection, Balatonfüred, Hungary, June 3-5, 2013, ed. Gróf Gy., Budapest University of Technology and Economics, Department of Energy Engineering, Budapest, 2013, 147-152.
- [9] Ván P. Internal thermodynamic variables and the failure of microcracked materials. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics 2001;26(2):167-189.
- [10] Ván P, Vásárhelyi B. Second Law of thermodynamics and the failure of rock materials. In Rock Mechanics in the National Interest V1. 2001, Proceedings of the 9th North American Rock Mechanics Symposium, Washington, USA, 2001, eds. D. Elsworth, J. P. Tinucci and K. A. Heasley, Balkema Publishers, Lisse-Abingdon-Exton(PA)-Tokyo, 767-773.
- [11] Ván P, Fülöp T. Universality in heat conduction theory: weakly nonlocal thermodynamics. Annalen der Physik 2012;524:470-478.
- [12] Asszonyi Cs, Fülöp T, Ván P. Distinguished rheological models in the framework of a thermodynamical internal variable theory. Continuum Mechanics and Thermodynamics, megjelenés alatt, internetes megjelenés: 20 November 2014, DOI:10.1007/s00161-014-0392-3. E-print-változat: arXiv:1407.0882.
- [13] Neff P, Eidel B, Osterbrink F, Martin R. A Riemannian approach to strain measures in nonlinear elasticity. C. R. Acad. Sci. 2014;342:254-257.
- [14] Neff P, Ghiba ID, Lankeit J. The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy. Part I: Constitutive issues and rank-one convexity. Preprint, 2014.
- [15] Beatty MF, Stalnaker DO. The Poisson function of finite elasticity. Journal of Applied Mechanics 1986;108:807-813.
- [16] Horgan CO, Murphy JG. A generalization of Hencky's strain-energy density to model the large deformations of slightly compressible solid rubbers. Mechanics of Materials 2009;79:943-950.
- [17] Plešek J, Kruisová A. Formulation, validation and numerical procedures for Hencky's elasticity model. Computers and Structures 2006;84:1141-1150.
- [18] Bruhns OT, Xiao H, Mayers A. Constitutive inequalities for an isotropic elastic strain energy function based on Hencky's logarithmic strain tensor. Proc. Roy. Soc. London A 2001;457:2207-2226.

- [19] Rusinko A, Rusinko K. Plasticity and creep of metals. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [20] Lubarda VA. On thermodynamic potentials in linear thermoelasticity. International Journal of Solids and Structures 2004;41(7):7377-7398.
- [21] Verhás J. Thermodynamics and rheology. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1997.
- [22] Kocsis D, Horváth R. Experience acquired in tensile tests of plastics. Scientific Bulletin Series C: Fascile Mechanics, Tribology, Machine Manufacturing Technology 2013;27.
- [23] Matsuki K, Takeuchi K. Three-dimensional in situ stress determination by anelastic strain recovery of a rock core. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. 1993;30:1019-1022.
- [24] Matsuki K. Anelastic strain recovery compliance of rocks and its application to in situ stress measurement. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. 2008;45:952-965.
- [25] Lin W, Kuwahara Y, Satoh T, Shigematsu N, Kitagawa Y, Kiguchi T, Koizumi N. A case study of 3D stress orientation determination in Shikoku Island and Kii Peninsula, Japan. In Ivan Vrkljan, editor, Rock Engineering in Difficult Ground Conditions (Soft Rock and Karst), Proceedings of Eurock'09 Cavtat, Croatia, October 28-29, 2009, Balkema, 2010, 277–282.

IZOTROP KONTINUUMOK TERMODINAMIKÁJA mérnöki közelítésben

Asszonyi Csaba – Szarka Zoltán Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

Ez a tanulmány a MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT munkatársainak az elmúlt 9 évben született [1–7], az irreverzibilis termodinamika alapelveire épülő, az anyagtörvényre vonatkozó eredményei egy részét foglalja össze, a legfrissebb felismerések által kiegészítve. Ennek a cikknek két célja van: Egyrészt, hogy egyetlen helyen megtalálható legyen minden olyan, a konstitúciós egyenletekre vonatkozó összefüggés, amelyekre a mérnöki alkalmazásoknál építeni érdemes. Másrészt, mivel az eddigiekben vizsgálatainkat (a [9] kivételével) mindig izotermikus esetre vonatkoztattuk, most először lépünk ezen túl. Jelen cikkben az eddigi gondolatmenetet követjük, kiegészítve a hőmérsékletfüggéssel. Emiatt számos magyarázatot nem ismételünk, visszautalunk a [7]-re.

A termodinamika második főtétele az anyag stabilitásának elve, s ez fejeződik ki az anyagtörvényben. Így a jelen tanulmány a második főtételből levezetve írja le az izotrop kontinuumok rugalmas– képlékeny anyagtörvényét mechanikai és termikus kölcsönhatás esetén, a műszaki gyakorlatban megengedhető egyszerűsítésekkel.

BEVEZETÉS

Jelen tanulmányban azon eredményeket foglaljuk össze, amelyek t*ermodinamikára épülő kontinuummechanikai konstitutív egyenletekre* vonatkoznak, *mechanikai és termikus* kölcsönhatás esetére. A korábbiakban tisztán mechanikai hatásokat vettünk figyelembe, vagyis izotermikus [$T = T_0 = constans$] estre vonatkoztak az eredmények annak ellenére, hogy az anyagok mechanikai igénybevétele mindig együtt jár az anyag hőmérsékletének változásával.

A legutóbbi időben CSATÁR ATTILA kísérletei döbbentettek rá bennünket arra, hogy a hőmérséklet változása a képlékeny állapotban igen jelentős lehet, s ekkor már az izotermikus



1. ábra. Egytengelyű húzókísérlet (F - húzóerő, $\varepsilon - összes deformáció,$ $\varepsilon_{el} - rugalmas deformáció, <math>\varepsilon_{pl} - ma$ radó deformáció, T - hőmérséklet)

feltételezés nem engedhető meg.

A [9]-ben [FÜLÖP – VÁN – CSATÁR, 2013] illusztrációként bemutatott – egyenletes terhelésnövekedéssel végzett – egytengelyű húzókísérletnél a próbatest kiindulási hőmérséklete 24,6 °C volt, amely a képlékenységi határig 24,0 °C-ra csökkent, majd a képlékenyedés során intenzíven növekedett, és a próbatest elszakadásakor már 68,0 °C lett. (Az eredeti kísérlet néhány hőkamerás pillanatfelvételét a [15] 2. ábrája mutatja.)

A 24 °C – 68 °C közötti hőmérsékletnövekedés mindössze 7 másodperc alatt játszódott le. (Figyelembe kell venni azt is, hogy a mérés a próbatest felületén történt, tehát nem tükrözi a test belsejének hőmérsékleteloszlását).

Ez a hatalmas hőmérsékletváltozás nem engedi meg, hogy eltekinthessünk ettől a hatástól, még akkor sem, ha

az anyag csak mechanikai igénybevételnek van kitéve, vagyis nincs sem hőközlés, sem hőelvonás.

MEGENGEDHETŐNEK VÉLT KÖZELÍTÉSEK

Az elmúlt években igyekeztünk a tárgyalásnál a szűkítő és korlátozó feltételeket kihagyni, illetve ezekre az általános levezetés után rámutatni.

Ezen összefoglalóban az általánosságot már kezdetben szűkítjük azon közelítések elfogadásával, amelyeket a mérnöki gyakorlat – egyszerűsítésre vonatkozó – igénye megengedhetőnek tekint. Ezek a korlátozó feltevések az elfogadhatónak vélt linearizálásból következnek.

1. KÖZELÍTÉS: KIS DEFORMÁCIÓK FELTÉTELEZÉSE. Az [1–7] tanulmányokban bemutattuk, hogy ez a feltevés a mérnöki gyakorlatban általában megengedhető. Ebből a deformáció-sebességek összeadhatósága következik, azaz

$$\underbrace{(\mathbf{v} \circ \nabla)^{S}}_{\substack{a \text{ sebesség}\\ gradiense}} = \underbrace{\dot{\mathbf{D}}}_{\substack{rugalmas\\ deformáció}} + \underbrace{\Psi \mathbf{Z}}_{\substack{képlékeny\\ deformáció}} + \underbrace{\alpha \dot{T} \mathbf{I}}_{\substack{termikus\\ deformáció}}.$$
(1)

Tehát a kinetikusenergia-mérlegben, ill. a belsőenergia-mérlegben szereplő P (térfogategy-ségre jutó) deformációs teljesítmény

$$P \equiv \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{v} \circ \nabla)^{S}}_{\substack{a \text{ deform}\acute{a}ci\acute{o}-\\ teljesítm\acute{e}ny}} = \underbrace{\underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{D}}}_{rugalmas}}_{\substack{rugalmas\\ deform\acute{a}ci\acute{o}\\ deformic}$$

formában írható fel,¹ ahol Ψ a már megismert kettős HEAVISIDE-féle egységugrás-függvény, amely a képlékenységi határt jelöli ki [rugalmas tartományban: $\Psi = 0$, tehát nincs maradó deformáció, míg a képlékeny tartományban $\Psi = 1$, vagyis a rugalmas mellett megjelenik a maradó deformáció is]. Ha a képlékenységi határ a torzulási deformációs munka W_f^d értékéhez köthető [2], akkor

$$\Psi = \Psi \left(W^d, \dot{W}^d \right) = \Psi_H \left(W^d - W_f^d \right) \cdot \Psi_H \left(\dot{W}^d \right) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad W^d < W_f^d, & \text{vagy} \quad \dot{W}^d < 0, \\ 1, & \text{ha} \quad W^d \ge W_f^d, & \text{és} \quad \dot{W}^d \ge 0. \end{cases}$$
(3)

Az (1) jelöléseiből látszik, hogy míg **D**, a *rugalmas deformáltság*, és $\alpha \dot{T}$, a hőtágulás – *állapotjellemzők* (teljes differenciálok), addig nincs olyan függvény, amelyből idő szerinti deriválással a képlékeny sebesség előállítható lenne, tehát a képlékeny deformálódás *általában* folyamatfüggő – vagyis *változásjelző*. (Kivételt képez az az eset, amikor létezik képlékeny potenciál, tehát a képlékenyedés is teljes differenciál, s ekkor ez is *állapotjellemző*.)

A DEFORMÁCIÓK ÉRTELMEZÉSE. Egy mechanikai (és/vagy termikus) folyamat esetén legyen t = 0 a folyamat kezdő időpontja, amikor az anyag hőmérséklete egy tetszőleges pontban T_0 . Legyen $t_f \ge 0$ az az időpillanat, amikor az anyag tetszőleges pontja eléri a képlékenységi határt, vagyis megjelenik a maradó alakváltozás. Az (1)-ből idő szerinti integrálással kapjuk a deformálódás mértékét:

$$- a rugalmas deformáció:
$$\int_{t=0}^{t} \dot{\mathbf{D}} dt = \mathbf{D}(t) = \mathbf{\varepsilon}_{el},^{2}$$

$$- a termikus deformáció:
$$\int_{t=0}^{t} \alpha \dot{T} \mathbf{I} dt = \alpha (T(t) - T_{0}) \mathbf{I} = \mathbf{\varepsilon}_{th},^{2}$$

$$- a képlékeny deformáció:
$$\int_{t=0}^{t} \Psi \mathbf{Z} dt = \int_{t=0}^{t_{f}} \Psi \mathbf{Z} dt + \int_{t=t_{f}}^{t} \Psi \mathbf{Z} dt = \int_{t=t_{f}}^{t} \mathbf{Z} dt = \mathbf{\varepsilon}_{pl} \Big|_{t_{f}}^{t},^{3}$$

$$- az összes deformáció: \int_{t=0}^{t} (\mathbf{v} \circ \nabla)^{S} dt = \mathbf{\varepsilon}_{\Sigma} \Big|_{t=0}^{t} := \mathbf{\varepsilon}_{l}^{t},$$
vagyis
$$\mathbf{\varepsilon} \Big|_{t_{0}}^{t} = \mathbf{D} + \mathbf{\varepsilon}_{th} + \mathbf{\varepsilon}_{pl} \Big|_{t_{f}}^{t}, \text{ illetve röviden } \mathbf{\varepsilon} = \mathbf{\varepsilon}_{el} + \mathbf{\varepsilon}_{th} + \mathbf{\varepsilon}_{pl}.$$$$$$$$

¹ A tömegegységre jutó ún. fajlagos deformációs teljesítmény: $p = P/\rho$.

² független az alakváltozási úttól, csak a kezdő- és végpont függvénye.

³ függ az alakváltozási útvonaltól.

A következőkben mindhárom összetevőt vegyük sorban vizsgálat alá.

A termikus viselkedés:

2. KÖZELÍTÉS: A TERMIKUS VÁLTOZÁS IZOTRÓPIÁJA ÉS LINEARITÁSA. Mivel ekkor a hőtágulás csupán a térfogatváltozás függvénye, ezért az

 $\alpha \dot{T} \mathbf{I}$



Az 1. ábra leg-

(4)

alsó hőmérsékleti diagramja, amelyet a 2. ábra részletez, két részből tevődik össze:

(a) – a térfogatváltozásból adódó lehűlésből, v. melegedésből,

(b) – a képlékeny változás okozta hőmérséklet-növekedésből (minden esetben melegedésből, akár húzásról akár nyomásról van szó). Látható, hogy az α -ból adódó hőtágulás (α 10⁻⁵ ...10⁻⁶ 1/K nagyságrendje miatt) a rugalmas tartományban általában elhanyagolható. Ezért figyelembe vételére csak a képlékeny zónában van szükség, ahol jelentős a hőmérsékletnövekedés.

A hőmérséklet-növekedés képlékeny állapotban olyan markáns, hogy felhasználható a maradó változások megjelenésének (a képlékenységi határ) meghatározásához. Ezidáig a folyáshatár meghatározása *mindig* a deformáció mérése alapján történt laboratóriumi kísérle-tekből. Mivel mérni csak az összes változást tudjuk, ezért az eddigi kísérletek során mindig szükség volt tehermentesítésre, hogy megállapíthassuk, hogy az összdeformációból mennyi a maradó. Most már a hőmérsékletmérésből is meghatározhatjuk a folyáshatár értékét akkor is, ha a kísérlet során nincs tehermentesítés, vagyis ha a vizsgálatot a tönkrementelig végezzük.

A rugalmas viselkedés:

3. KÖZELÍTÉS: A RUGALMAS VISELKEDÉS IZOTRÓPIÁJA ÉS LINEARITÁSA. Ismert és általánosan (CAYLEY–HAMILTON-tétel) bizonyított, hogy a feszültségtenzor és a rugalmas deformáltság tenzora között a kapcsolat kvadratikus. Ehelyett megengedjük a lineáris formát, amely a gyakorlatban maximálisan 0,5–1 százalékos hibát okoz. Ez a lineáris összefüggés (Hooketörvény):

 $\boldsymbol{\sigma}^{d} = 2G\mathbf{D}^{d} \text{ és } \boldsymbol{\sigma}^{\circ} = 3K\mathbf{D}^{\circ}, \text{ azaz } \boldsymbol{\sigma} = 2G\mathbf{D}^{d} + 3K\mathbf{D}^{\circ} = 2G\mathbf{D} + (3K - 2G)\mathbf{D}^{\circ}, \quad (5)$ ahol a *G* és *K* anyagállandók csak a *T* hőmérséklet függvényei, és

$$G \ge 0, K \ge 0.$$

Ekkor a Φ_{el} (a térfogategységre jutó) rugalmas energia – potenciálos

$$\Phi_{el} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(2G\mathbf{D}^d : \mathbf{D}^d + 3K\mathbf{D}^o : \mathbf{D}^o \right) = G\mathbf{D}^d : \mathbf{D}^d + \frac{3}{2}K\mathbf{D}^o : \mathbf{D}^o = \underbrace{G\mathbf{D}^d : \mathbf{D}^d}_{\Phi_{el}^d} + \underbrace{\frac{3}{2}K(D^o)^2}_{\Phi_{el}^o},$$

amely potenciálos. Ebből következően

$$\boldsymbol{\sigma}^{d} = \frac{\partial \Phi_{el}}{\partial \mathbf{D}^{d}}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{o} = \frac{\partial \Phi_{el}}{\partial \mathbf{D}^{o}}, \text{ (illetve } \boldsymbol{\sigma}^{o} = \frac{\partial \Phi_{el}}{\partial D^{o}})$$

(Ugyanígy a (tömegegységre jutó) e_{el} fajlagos rugalmas energia esetén:

$$\boldsymbol{\sigma}^{d} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_{el}}{\partial \mathbf{D}^{d}}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{o} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_{el}}{\partial \mathbf{D}^{o}}, (\text{azaz } \boldsymbol{\sigma}^{o} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_{el}}{\partial \boldsymbol{D}^{o}})$$

4. KÖZELÍTÉS: AZ ANYAGÁLLANDÓK LINEARITÁSA A HŐMÉRSÉKLET FÜGGVÉNYÉBEN. A gépészeti, bányászati és mélyépítési gyakorlatban feltételezhetjük, hogy G és K a hőmérséklet függvényében lineáris:

$$G = G_0 + \frac{\partial G}{\partial T}(T - T_0)$$
 és $K = K_0 + \frac{\partial K}{\partial T}(T - T_0)$.

Ekkor írható, hogy

$$2G = 2G_0 - a_G(T - T_0) \quad \text{és} \quad 3K = 3K_0 - a_K(T - T_0), \tag{6}$$

ahol a $_0$ index ismert hőmérsékleten mért értékeket jelöl, a_G és a_K pedig az illető közegtől függő állandók. [A cikk végén látni fogjuk, hogy a többi (ún. reológiai) anyagállandónál is feltételezzük a linearitást.]

A képlékeny viselkedés:

5. KÖZELÍTÉS: A KÉPLÉKENYSÉG DEVIATORIKUS VOLTA. A maradó (képlékeny) deformáció sebessége nem függ a térfogatváltozástól [1-7], csak a torzulási állapot függvénye, vagyis

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^d \quad \text{és} \quad \mathbf{Z}^\circ = \mathbf{0} \,. \tag{7}$$

A tárgyalás során a képlékenységet csak a deviatorikus (torzulási) állapotra korlátozzuk, ezáltal a talajmechanikai alkalmazás kiesik, nem a vizsgálat, hanem a részletes tárgyalás köréből. Ezt nem elvi szempont indokolja, csupán a tárgyalás rövidítése, ui. [7] kötet több cikkében megtalálhatók a térfogati képlékenységre vonatkozó összefüggések is, így elégséges utalni rá.

6. KÖZELÍTÉS: A KÉPLÉKENYSÉGI SEBESSÉG HOMOGENITÁSA ÉS LINEARITÁSA. Legegyszerűbb és legkézenfekvőbb feltételezés, hogy

$$\mathbf{Z} = \Psi \gamma \dot{\mathbf{D}}, \text{ azaz } \mathbf{Z}^{d} = \Psi \gamma \dot{\mathbf{D}}^{d}, \qquad (8)$$

ahol a γ állandó, és ez a hőmérsékleten kívül csak a csúsztató rugalmassági modulus és képlékenységi modulus függvénye lehet.

Már COULOMB is feltételezte, hogy "minden szilárd anyagnak van egy jellemző molekulaelrendezése, amelyet a kis rugalmas alakváltozás nem befolyásol. Nagyobb alakváltozásnál van egy képlékenységi határ, amely felett a molekulák között elcsúszás jön létre, viszont ez a *rugalmassági tulajdonságot nem befolyásolja.*" Vagyis ő érezte a természeti törvény lényegét, s azt is gondolta, hogy a folyáshatár átlépése után pl. a rugalmassági modulus nem változik, ezért továbbra is vannak rugalmas alakváltozások ugyanazzal az arányossági tényezővel. Fü-LÖP szerint: "…durván fogalmazva, a bruttó (deviátoros) alakváltozás egy része a nyugalmi szerkezet csuszamlása (maradó változás), a maradék része a rugalmas alakváltozás". A (8) időszerinti integrálásával és az (5) figyelembe vételével:

$$\boldsymbol{\sigma}^{d} - \boldsymbol{\sigma}_{f}^{d} = 2G_{pl} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{d} - \boldsymbol{D}_{f}^{d} \right),$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{pl} = \int_{t_{0}}^{t} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{Z} dt = \int_{t_{f}}^{t} \boldsymbol{Z} dt = \int_{t_{f}}^{t} \Gamma \dot{\boldsymbol{D}}^{d} dt = \frac{2G - 2G_{pl}}{2G_{pl}} \boldsymbol{D}^{d} \quad \left[t \ge t_{f} \right],$$
(8a)

ahol a képlékenységi határ elérésének idejét t_f -fel jelöljük, s rögzítjük a hozzá tartozó feszültség [$\boldsymbol{\sigma}_f^d$] és deformáció [$\boldsymbol{\epsilon}_f^d = \mathbf{D}_f^d$] értékét.

A képlékenyedés teljesítménye $\mathbf{\sigma} : \mathbf{Z}$, amelyből integrálással állítjuk elő a képlékenységi munkát: $\int_{t=0}^{t} \mathbf{\sigma} : \Psi \mathbf{Z} dt = \int_{t=0}^{t} \mathbf{\sigma} : \underbrace{\Psi}_{0} \mathbf{Z} dt + \int_{t=t_{f}}^{t} \mathbf{\sigma} : \underbrace{\Psi}_{1} \mathbf{Z} dt = \int_{t=t_{f}}^{t} \mathbf{\sigma} : \mathbf{Z} dt = \int_{t=t_{f}}^{t} \mathbf{\sigma} : d\mathbf{\varepsilon}_{pl} dt = \left[\mathbf{\sigma} : \mathbf{\varepsilon}_{pl}\right]_{t_{f}}^{t}$

Ennek a közelítésnek az a következménye, hogy az ε_{pl} is teljes differenciál, vagyis a képlékenységi munka: *energia*, ún. *képlékenységi energia* (befagyott – vissza nem nyerhető, a maradó változással az anyagszerkezetben lekötött – rugalmas energia).

ANYAGTÖRVÉNY EGYENSÚLYI ÁLLAPOTBAN

Az (5) és (8) összefüggés felhasználásával a rugalmas-képlékeny tartományon a mechanikai viselkedéstörvény

$$\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{d} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^{d} - \Psi \left(2G - 2G_{pl} \right) \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{d} - \boldsymbol{\varepsilon}_{f}^{d} \right),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{o} = 3K [\mathbf{D}^{o} + \alpha (T - T_{0})\mathbf{I}],$$

(9)

ahol $\boldsymbol{\varepsilon}_{f}^{d} = \mathbf{D}_{f}^{d}$, illetve

$$\boldsymbol{\sigma}_{eq} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^{d} - \Psi \left(2G - 2G_{pl} \right) \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{d} - \boldsymbol{\varepsilon}_{f}^{d} \right) + \left(3K - 2G \right) \mathbf{D}^{o} + 3K\alpha \left(T - T_{0} \right) \mathbf{I}$$
(10)

alakú lesz. (Egyensúlyban a hőmérséklet állandó.)

ANYAGTÖRVÉNY NEMEGYENSÚLYI ÁLLAPOTBAN

A [14] tanulmányban ismertetett belső változós [$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^d + \boldsymbol{\xi}^o$] módszer szerint az entrópiaproduktum a [$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{eq} + \boldsymbol{\sigma}_{noneq} = \boldsymbol{\sigma}_{eq} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}$] nemegyensúlyi feszültségtenzorra a

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{d}: \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d} - \rho T \boldsymbol{\xi}^{d}: \dot{\boldsymbol{\xi}}^{d} \ge 0, \qquad \qquad \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{\circ}: \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\circ} - \rho T \boldsymbol{\xi}^{\circ}: \dot{\boldsymbol{\xi}}^{\circ} \ge 0$$

összefüggéseket eredményezi, amelyből az onsageri relációk

Ezek az egyenletek a d és \circ indexek elhagyásával, hogy ne kelljen kétszeresen leírni:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = l_{11} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - l_{12} \rho T \boldsymbol{\xi},$$
$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = l_{21} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - l_{22} \rho T \boldsymbol{\xi}$$

alakú onsageri egyenletek, amelyekből

$$\begin{split} \boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{\rho T} \left(\frac{l_{11}}{l_{12}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{l_{12}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right), \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = l_{21} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - l_{22} \left(\frac{l_{11}}{l_{12}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{l_{12}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right) = \left(l_{21} - \frac{l_{11} l_{22}}{l_{12}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{l_{22}}{l_{12}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}, \\ \boldsymbol{\xi} &= \left[\frac{1}{\rho T} \left(\frac{l_{11}}{l_{12}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{l_{12}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right) \right]^{\bullet} = \left(\frac{1}{\rho T} \right)^{\bullet} \left(\frac{l_{11}}{l_{12}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{l_{12}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right) + \frac{1}{\rho T} \left(\frac{l_{11}}{l_{12}} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{l_{12}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right), \\ \left(l_{21} - \frac{l_{11} l_{22}}{l_{12}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{l_{22}}{l_{12}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\dot{T}}{T^2} \left(\frac{l_{11}}{l_{12}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{l_{12}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right) + \frac{1}{\rho T} \left(\frac{l_{11}}{l_{12}} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{l_{12}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right). \end{split}$$

Ezeket felhasználva, a $\hat{\sigma}$ nemegyensúlyi feszültségtenzor a belső változók kiküszöbölésével a következő alakot ölti:

$$\widehat{\mathbf{\sigma}} + \frac{T}{l_{22}\rho T^2 + \dot{T}} \dot{\widehat{\mathbf{\sigma}}} = \left(\frac{l_{11}\rho T^2}{\rho T^2 + \dot{T}} - \frac{l_{21}l_{12}\rho T^2}{l_{22}\rho T^2 + \dot{T}} - \frac{l_{11}}{l_{22}\rho T^2}\right) \dot{\mathbf{\varepsilon}} + \frac{l_{11}T}{l_{22}\rho T^2 + \dot{T}} \ddot{\mathbf{\varepsilon}}, \tag{11}$$

vagyis a feszültségek és deformációk együtthatói, az ún. anyagállandók már nem állandók, hanem a T hőmérsékletnek és a \dot{T} időderiváltnak a függvénye. Ennek a tenzornak a deviátoros és gömbi része:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{d} + \frac{T}{l_{22}^{d}\rho T^{2} + \dot{T}} \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^{d} = \left(\frac{l_{11}^{d}\rho T^{2}}{\rho T^{2} + \dot{T}} - \frac{l_{21}^{d}l_{12}^{d}\rho T^{2}}{l_{22}^{d}\rho T^{2} + \dot{T}} - \frac{l_{11}^{d}}{l_{22}^{d}\rho T^{2}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d} + \frac{l_{11}^{d}T}{l_{22}^{d}\rho T^{2} + \dot{T}} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d},$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{o} + \frac{T}{l_{22}^{o}\rho T^{2} + \dot{T}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{o} = \left(\frac{l_{11}^{o}\rho T^{2}}{\rho T^{2} + \dot{T}} - \frac{l_{21}^{o}l_{12}^{o}\rho T^{2}}{l_{22}^{o}\rho T^{2} + \dot{T}} - \frac{l_{11}^{o}}{l_{22}^{o}\rho T^{2} + \dot{T}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{o} + \frac{l_{11}^{o}T}{l_{22}^{o}\rho T^{2} + \dot{T}} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{o},$$

$$(12)$$

illetve egyszerűbb jelölésekkel

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{d} + \tau \, \dot{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}^{d} = 2\mu(T, \dot{T})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d} + \theta(T, \dot{T})\, \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d},$$

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{o} + \tau_{o}\dot{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}^{o} = 2\mu_{o}(T, \dot{T})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{o} + \theta_{o}(T, \dot{T})\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{o}.$$
(13)

Mérnöki feladatoknál megengedhetőnek tartjuk ebben az esetben is a 4. KÖZELÍTÉS-t, vagyis azt, hogy \dot{T} állandó. Ekkor jó közelítéssel

$$\mu = \mu_0 + \frac{\partial \mu}{\partial T}(T - T_0) = \mu_0 + \alpha_\mu (T - T_0), \quad \theta = \theta_0 + \frac{\partial \theta}{\partial T}(T - T_0) = \theta_0 + \alpha_\mu (T - T_0), \dots \text{ stb}$$

A végeredmény az egyensúlyi

$$\begin{aligned} \mathbf{\sigma}_{eq}^{d} + \tau \, \dot{\mathbf{\sigma}}_{eq}^{d} &= 2G \mathbf{\epsilon}^{d} - \Psi \Big(2G - 2G_{pl} \Big) \Big(\mathbf{\epsilon}^{d} - \mathbf{\epsilon}_{f}^{d} \Big) + \Big[2G \tau - \Psi \Big(2G - 2G_{pl} \Big) \tau \Big] \dot{\mathbf{\epsilon}}^{d} ,\\ \mathbf{\sigma}_{eq}^{o} &+ \tau_{o} \dot{\mathbf{\sigma}}_{eq}^{o} = 3K \big[\mathbf{\epsilon}^{o} + \alpha \big(T - T_{0} \big) \mathbf{I} \big] + 3K \tau \big[\dot{\mathbf{\epsilon}}^{o} + \alpha \dot{T} \mathbf{I} \big], \end{aligned}$$

és a (13) nemegyensúlyi összefüggések összeadásával írható fel:

$$\boldsymbol{\sigma}^{d} + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{d} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^{d} - \Psi \left(2G - 2G_{pl}\right) \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{d} - \boldsymbol{\varepsilon}_{f}^{d}\right) + \left[2\eta - \Psi \left(2G - 2G_{pl}\right)\tau\right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d} + \theta \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{o} + \tau_{o} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{o} = 3K \left[\boldsymbol{\varepsilon}^{o} + \alpha \left(T - T_{0}\right)\mathbf{I}\right] + 3K_{v} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{o} + 3K\tau \alpha \dot{T} \mathbf{I} + \theta_{o} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{o},$$

$$(14)$$

ahol $2\eta = 2G\tau + 2\mu$ és $3K_v = 3K\tau + 2\mu_o$.

Tisztán rugalmas (képlékenységi határ alatti) esetben:

$$\Psi = 0: \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{d} + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{d} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^{d} + 2\eta \, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d} + \theta \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{o} + \tau_{o} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{o} = 3K[\boldsymbol{\varepsilon}^{o} + \alpha(T - T_{0})\mathbf{I}] + 3K_{v} \, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{o} + 3K\tau\alpha\dot{T}\,\mathbf{I} + \theta_{o} \, \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{o}. \end{cases}$$

míg képlékeny (képlékenységi határ fölötti) esetben:

$$\Psi = 1: \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{d} + \tau \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{d} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^{d} - (2G - 2G_{pl})(\boldsymbol{\varepsilon}^{d} - \boldsymbol{\varepsilon}_{f}^{d}) + [+2\mu - (-2G_{pl})\tau] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d} + \theta \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{d}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{o} + \tau_{o} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{o} = 3K[\boldsymbol{\varepsilon}^{o} + \alpha(T - T_{0})\mathbf{I}] + (3K\tau + 2\mu_{o})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{o} + 3K\tau\alpha\dot{T}\mathbf{I} + \theta_{o}\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{o}. \end{cases}$$

Megjegyzések

A mérnöki létesítmények tervezésénél szükségünk van az anyag ρ tömegsűrűségén kívül a a rugalmas és képlékeny anyagállandók, valamint a képlékenységi és törési határ ismeretére, amelyeket legtöbbször törésig végzett egytengelyű laborkísérletből határozunk meg:

(a) rugalmassági anyagállandók:

ıgi modulus,
idő,
i tényező,
égi tényező,
;;

(b) a képlékenységi határ:

 W_f^d – képlékeny deformációk megjelenéséhez kapcsolható torzulási deformációs munka,

(c) a képlékenységi csúsztató modulus:

 G_{pl} – a képlékenységi modulus, $\eta_{pl} = \eta + 2G_{pl}\tau$ képlékeny viszkozitási tényező,

(d) a tönkremeneteli határ:

 \mathcal{L}_t^d – a töréshez kapcsolható torzulási deformációs munka.

- 1. A kísérletnél közvetlenül a $\Delta l/l_0$ hosszirányú ill. $\Delta d/d_0$ keresztirányú nyúlást, az *F* terhelést és a próbatest palástjának *T* hőmérsékletét mérjük az idő függvényében.
- 2. Ezen adatok ismeretében számítással előállítjuk az ε^{\parallel} hosszirányú ill. ε^{\perp} keresztirányú deformáltságot és a σ^{\parallel} hosszirányú feszültséget az idő függvényében.
- 3. Az $\varepsilon^{\parallel}, \varepsilon^{\perp}$ és σ^{\parallel} ismeretében meghatározzuk a deviatorikus és gömbi komponenseket az idő függvényében.
- 4. Erre illesztve pl. a legkisebb négyzetek módszerével számoljuk ki az anyagállandók értékét.
- 5. A képlékenységi határt a hőmérséklet jelentősebb megnövekedéséhez kapcsoljuk (ahol ugrás jelentkezik a dT/dt értékében). Ezt a hőmérsékletet T_f -fel, az időt pedig t_f -fel jelöljük,

s rögzítjük a hozzá tartozó feszültség $[\sigma_f^d]$ és deformáció $[\varepsilon_f^d]$ értékét. Ezáltal kiszámíthatjuk a folyáshatárhoz tartozó torzulási deformációs munka értékét:

$$W_f^d = \int_{t=0}^{t_f} \left[\sigma^d(t) - 2G\varepsilon^d(t) \right] \varepsilon^d(t) dt = \int_{t=0}^{t_f} \sigma^d(t) \varepsilon^d(t) dt - G\left[\varepsilon^d(t_f) \right]^2.$$

6. A törési határt a töréshez tartozó feszültség $[\sigma_t^d]$ és deformáció $[\varepsilon_t^d]$ értékéhez tartozó torzulási disszipációs munkához kapcsoljuk:

$$\mathcal{L}_{f}^{d} = \int_{t=0}^{t_{t}} \left[\sigma^{d}(t) - 2G\varepsilon^{d}(t) \right] \varepsilon^{d}(t) dt = \int_{t=0}^{t_{t}} \sigma^{d}(t) \varepsilon^{d}(t) dt - G\left[\varepsilon^{d}(t_{t})\right]^{2} dt$$

Köszönetnyilvánítás

A Szerzők hálásan köszönik FÜLŐP TAMÁS és VÁN PÉTER segítő megjegyzéseit, ötleteit, gondolatait, amelyeket jelentősen hozzájárultak ennek az előadásnak a létrejöttéhez.

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. szerk. (2006): Izotrop kontinuumok anyagtörvénye. Mérnökgeológia– Kőzetmechanika Kiskönyvtár 3, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 168. (Szerzők: Asszonyi Csaba, Kertész Pál, Matolcsi Tamás, Szarka Zoltán, Ván Péter, Vásárhelyi Balázs)
- [2] ASSZONYI, CS. VÁN, P. SZARKA, Z. (2007): Izotrop kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota. Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 5, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 200.
- [3] ASSZONYI, CS. szerk. (2008): Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai. Mérnökgeológia– Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 192. (Szerzők: Asszonyi Csaba, Fülöp Tamás, Horváth Róbert, Szarka Zoltán, Ván Péter)
- [4] FÜLÖP, T. szerk. (2008): Új eredmények a kontinuumfizikában. Mérnökgeológia– Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 148. (Szerzők: Asszonyi Csaba, Béda Péter, Bojtár Imre, Fülöp Tamás, Matolcsi Tamás, Ván Péter, Vásárhelyi Balázs)
- [5] ASSZONYI, CS. szerk. (2009): Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról. Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 172. (Szerzők: Asszonyi Csaba, Béda Gyula, Fülöp Tamás, Szarka Zoltán)
- [6] FÜLÖP, T. szerk. (2010): Idő- és térderiváltak az anyagtörvényekben. Mérnökgeológia– Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 152. (Szerzők: Béda Gyula, Béda Péter, Fülöp Tamás, Ván Péter, Vásárhelyi Balázs)
- [7] ASSZONYI, CS (2012): Az egyszerűsített anyagtörvényről. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár* **13**, Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 137-171.
- [8] ASSZONYI, CS.- KAPOLYI, L. (1981): A bányászat mechanikai rendszere. 2. kötet: Kőzetkontinuumok mechanikája. Veszprémi Akadémiai Bizottság, Veszprém, p. 422.
- [9] FÜLÖP, T. VÁN, P. CSATÁR, A. (2013): Szilárd testek rugalmas, hőtágulási és képlékeny folyamatainak termodinamikája. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár* 16, Hantken Kiadó, Budapest, p. 333–338.

- [11] VÁN, P. (2010): A képlékenység termodinamikája. Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10. Műegyetemi Kiadó, Budapest, p. 15–50.
- [12] VÁN, P. (2013): Nemegyensúlyi termomechanika. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 16, Hantken Kiadó, Budapest, p. 339–344.
- [13] VERHÁS, J. (1985): Termodinamika és reológia. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, p. 300.
- [14] FÜLÖP, T. VÁN, P. ASSZONYI, CS. (2015): Megkülönböztetett reológiai modellek a termodinamikai változók keretelméletében. *Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár* 19, Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért, Budapest, p. 11–34 (jelen kötetben).
- [15] FÜLÖP, T. CSATÁR, A. ASSZONYI, CS. (2015): Szilárd anyagok rugalmas, hőtágulási, képlékeny és reológiai folyamatainak termodinamikája – elmélet és kísérlet. Mérnökgeológia– Kőzetmechanika Kiskönyvtár 19, Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért, Budapest, p. 35–56 (jelen kötetben).

SZILÁRDTEST-REOLÓGIAI IDŐFÜGGÉS MEGHATÁROZÁSA A VOLTERRA-ELV ÁLTAL INSPIRÁLVA

Fülöp Tamás – Szücs Mátyás BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, Budapest Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

A Volterra-elv egy olyan módszer, mellyel egy lineáris reológiai anyagtörvényű szilárd közeg mechanikai folyamatát egy egyszerűbb feladat: a megfelelő Hooke-rugalmasságtani probléma megoldásából származtathatjuk. A Volterra-elv sajnos korlátozott érvényességi körű, például időfüggő peremfeltételek esetén – így például egy alagútnyitás okozta reológiai időfüggés meghatározására – nem alkalmazható. Ad azonban egy ötletet: a Hooke-állandók időfüggővé tételét, mellyel bizonyos időfüggő peremfeltételű reológiai problémák megoldhatóak, amint azt itt két alagútnyitási példán bemutatjuk. A módszer általánosításával a jövőben remélhetőleg bonyolultabb, csak numerikusan kezelhető Hooke-feladatok reológiai kiterjesztései is megoldhatók lesznek – e törekvésünkhöz a motivációt Marta Doležalová munkássága adta.

1. A CÉLKITŰZÉS MEGFOGALMAZÁSA

Tekintsünk egy homogén, izotrop Hooke-rugalmas közeget, azaz melyben bármely **r** helyen a σ feszültségtenzor és az ε deformációtenzor között

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} = E^{\text{dev}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dev}}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}} = E^{\text{sph}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}}, \qquad E^{\text{dev}} = 2G, \quad E^{\text{sph}} = 3K$$
(1)

alakú anyagtörvény – konstitúciós összefüggés – teljesül, ahol ^{dev} és ^{sph} a tenzorok deviatorikus (nyom nélküli) és gömbi (az **1** egységtenzorral arányos) részét jelölik:

$$\varepsilon^{\text{sph}} = \frac{1}{3}(\text{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}), \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}} = \varepsilon^{\text{sph}}\mathbf{1}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dev}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}}.$$
 (2)

Ha ezt kiegészítjük a mechanikai mozgásegyenlet erőegyensúlyi közelítésével és a deformációtenzor "duplaörvény-mentességével":

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot \overleftarrow{\nabla} = \boldsymbol{0}, \qquad \overrightarrow{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \overleftarrow{\nabla} = \boldsymbol{0}, \qquad (3)$$

továbbá a közeg által kitöltött tartomány peremére kirótt megfelelő peremfeltételekkel – alábbi példáinkban: a feszültség normálirányú komponensének előírt értékével –, akkor a probléma megoldása létezik és egyértelmű.

Ez a megoldás létezik és egyértelmű, de nem feltétlenül könnyű megkapni ezt a bizonyos megoldást. Ugyan lineáris egyenletrendszerrel van dolgunk, de míg (1)-ben a tenzorok deviatorikus része közötti kapcsolat eltér a gömbi részek közöttitől ($E^{\text{dev}} \neq E^{\text{sph}}$ esetén), addig a (10)-beli mindkét egyenlet a deviatorikus és gömbi komponens összecsatoltjára, összegére ró ki feltételt – a peremfeltételek pedig szintén. Ennek megfelelően a feladat jóval komplikáltabb, mint egy egyszerű potenciálfeladat.

Ezért amikor egy ilyen szituáció reológiai általánosításával találkozunk, ahol az időbeliség is bejön a képbe, ésszerű törekvés, hogy a feladat térbeli bonyolultságával ne kelljen foglalkozni: próbáljunk meg a megfelelő rugalmasságtani megoldásra támaszkodni. Hogyan néz ki egy (lineáris) reológiai általánosítás: (1) helyett

$$\mathcal{S}^{\text{dev}}\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} = \mathcal{E}^{\text{dev}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dev}}, \qquad \qquad \mathcal{S}^{\text{sph}}\boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}} = \mathcal{E}^{\text{sph}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}}$$
(4)

áll előttünk, ahol S^{dev} , S^{sph} , \mathcal{E}^{dev} és \mathcal{E}^{sph} a $\frac{\partial}{\partial t}$ időderiváló operátor polinomjai: az elméletileg és kísérletileg egyaránt kitüntetett [1, 2, 3] Kluitenberg–Verhás-modellcsalád esetén például

$$\mathcal{S}^{\text{dev}} = 1 + \tau^{\text{dev}} \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \qquad \mathcal{E}^{\text{dev}} = E^{\text{dev}} + \hat{E}^{\text{dev}} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{E}^{\text{dev}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2, \qquad (5)$$

$$\mathcal{S}^{\text{sph}} = 1 + \tau^{\text{sph}} \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \qquad \mathcal{E}^{\text{sph}} = E^{\text{sph}} + \hat{E}^{\text{sph}} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{E}^{\text{sph}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2, \qquad (6)$$

melyben az együtthatók további anyagi paraméterek. A peremfeltételek mellett pedig már kezdeti feltételekre is szükség van.

Láthatóan itt a deviatorikus és a gömbi rész még sokkal függetlenebbül akar alakulni, jóval nehezebb biztosítani, hogy továbbra is minden időpillanatban teljesítse az összegük a (10) feltételeket, továbbá a peremfeltételeket is. Ezért nagy értékű tehát, ha Hooke-rugalmasságtani információkra támaszkodva nem kell a térbeli feltételekkel bajlódnunk, hanem koncentrálhatunk az időfüggés behozta bonyodalmakra.

Egy ilyen lehetőséget nyújt a Volterra-elv [4, 5, 6], mely szerint a reológiai megoldás megkapható úgy, hogy a Hooke-rugalmas megoldásban az E^{dev} , E^{sph} állandókat az S^{dev} , S^{sph} , \mathcal{E}^{dev} , \mathcal{E}^{sph} -ból képzett megfelelő operátorokkal helyettesítjük, és a kapott időbeli differenciálegyenleteket megoldjuk. Sajnos a Volterra-elv nem tétel, azaz nem ismeretesek pontos matematikai szinten, hogy ez az út mikor járható és mikor nem. Az elvégzendő számítás módja is felvet matematikai kérdéseket. Emellett több szerző is felhívja a figyelmet, hogy az elv időfüggő peremfeltételek esetén nem alkalmazható [5, 6]. Alagútreológiai feladatok megoldásához tehát például nem használható, ahol az üregnyitás – mint megkerülhetetlenül időfüggő, sőt többnyire igencsak rövid időskálán változó peremfeltétel – indítja el a közeg időbeli folyamatát (mely aztán hónapokig-évekig tartó mozgást jelent).

Azonban ha közvetlenül nem is alkalmazhatjuk a Volterra-elvet ilyen helyzetekben, a benne rejlő mélyebb gondolatot – hogy próbáljunk támaszkodni a térbeli feltételekre ismert megoldásra – más módon is kiaknázhatjuk. Ebben az alternatív változatban a Hooke-állandókat nem operátorokkal, hanem időfüggő függvényekkel helyettesítenénk. Mintha az anyag rugalmasságtani állandói időfüggővé válnának. Ekkor minden pillanatban kielégítettük a térbeli feltételeket – egy épp aktuális $E^{dev}(t)$, $E^{sph}(t)$ értékpárral –, így csak az ezekre generálódó időbeli differenciálegyenleteket kell megoldani.

Közelebbről megnézve, a térbeli feltételek egy része $\boldsymbol{\sigma}$ -ra vonatkozik (ilyen a mozgásegyenlet és a feszültségperem – a továbbiakban ilyen peremfeltételekre fogunk szorítkozni), másik része $\boldsymbol{\varepsilon}$ -ra (a duplaörvény-mentesség). Így a térbeli feltételrendszer úgy is teljesíthető, ha megengedjük, hogy a feszültség rugalmasságtani megoldásába tett $E_{\sigma}^{\text{dev}}(t)$, $E_{\sigma}^{\text{sph}}(t)$ pár eltérhet a deformáció megoldásába tett $E_{\varepsilon}^{\text{dev}}(t)$, $E_{\varepsilon}^{\text{sph}}(t)$ pártól. Ha ez a négy szabad függvény nem lenne elegendő a (4) jelentette feltételek kielégítésére, akkor több ilyen feszültség-megoldás szuperpozíciójaként is kereshetjük a megoldást, különböző $E_{\sigma}^{\text{dev}}(t)$, $E_{\sigma}^{\text{sph}}(t)$ párokkal, és a deformáció ugyanígy kereshető szuperpozícióként. Az itt vizsgált egyszerűbb geometriájú konkrét esetekben erre nem lesz szükség, viszont bonyolultabb helyzeteket a jövőben majd ilyen megoldáskombinációk formájában szeretnénk megpróbálni tárgyalni.

2. HOMOGÉN, IZOTROP FESZÜLTSÉGMEZŐBEN NYITOTT ALAGÚT

Az "időfüggő állandók" ötletének működését először egy olyan egyszerű eseten mutatjuk meg, melyre a megoldás más úton már ismert [8, 9]. Egy végtelen, hengerszerű alagút nyitását tekintjük izotrop (csak gömbi részt tartalmazó), helyfüggetlen feszültségmezőben. A nyitást úgy modellezzük, hogy a hengerpalást mentén előírt peremfeltételt, a normális feszültségkomponenst egy időfüggő

szorzó révén egy $[t_1, t_2]$ időintervallum során fokozatosan nullává tesszük. A $t < t_1$ időkre a kiinduló, ún. primer feszültségmező uralkodik: a hengerhez illeszkedő r, φ, z hengerkoordinátarendszerben egyetlen komponens értékével az egész feszültség – és így az egész deformáció – jellemezhető:



$$\boldsymbol{\sigma}(t < t_1) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{sph}} = \bar{\sigma}_{rr} \mathbf{1}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(t < t_1) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{sph}} = \frac{1}{E^{\text{sph}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{sph}}.$$
(7)

A megnyitott ($t > t_2$), R sugarú alagút esetén két peremfeltétel van jelen:

$$\sigma_{rr}(R,\varphi,z) = 0, \qquad \lim_{r \to \infty} \boldsymbol{\sigma}(r,\varphi,z) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$
(8)

(utóbbi egy aszimptotikus feltétel). A nyitás során $\sigma_{rr}(R,\varphi,z)$ -t csökkentenénk le $\bar{\sigma}_{rr}$ -ről nullára.

Az itt bemutatandó módszerhez olyan időfüggő peremfeltételek lesznek szükségesek, ahol minden peremfeltétel ugyanazzal a $\lambda(t)$ időfüggő függvénnyel kell átskálázódjon. Ha a helyzet nem ilyen, mint jelen példánkban (mert a végtelenbeli feltétel időfüggetlen marad), akkor a problémát szétszedjük ilyenek összegére. Esetünkben ez egyszerűen a primer mező levonásával érhető el, ezért a továbbiakban a

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} := \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} := \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$
 (9)

ún. kiegészítő mezőkre átfogalmazott

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \stackrel{\leftarrow}{\nabla} = \boldsymbol{0}, \qquad \stackrel{\rightarrow}{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \stackrel{\leftarrow}{\nabla} = \boldsymbol{0}, \qquad \hat{\sigma}_{rr}(R,\varphi,z) = -\bar{\sigma}_{rr}, \qquad \lim_{r \to \infty} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(r,\varphi,z) = \boldsymbol{0}$$
(10)

Hooke-rugalmasságtani feladat lesz a kiindulópontunk, melynek ismert megoldása [9, 8]

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}(\mathbf{r}) = \bar{\sigma}_{rr} \begin{pmatrix} -\frac{R^2}{r^2} & \\ & \frac{R^2}{r^2} & \\ & & 0 \end{pmatrix} =: \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}), \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{E^{\text{dev}}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r})$$
(11)

(az elmozdulásmezőnek nevezett mennyiséggel nem lesz szükséges foglalkoznunk). Az alábbiak szempontjából két fontos tulajdonságot figyeljünk itt meg: hogy a feszültség tisztán deviatorikus, és hogy független a rugalmasságtani állandóktól. Dimenziós alapon annyit tudhattunk számolás nélkül, hogy mivel a peremfeltétel feszültséget ír elő, a megoldás ezzel arányos kell legyen, következésképp csak a dimenziótlan

$$\eta := \frac{E^{\text{dev}}}{E^{\text{sph}}} \tag{12}$$

kombinációtól [avagy a $\nu = (1 - \eta)/(2 + \eta)$ Poisson-tényezőtől] függhet. Történetesen az eredmény ennél speciálisabbnak bizonyul: η -függetlennek.

Az alagútnyitást a már mondottak alapján a

$$\hat{\sigma}_{rr}(t, R, \varphi, z) = \lambda(t) \cdot [-\bar{\sigma}_{rr}]$$
(13)

módon modellezzük, ahol $\lambda(t)$ -ről elég annyit megkötnünk, hogy



Az ehhez tartozó - továbbra is rugalmasságtani - megoldás

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{el}(t,\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{el}^{dev}(t,\mathbf{r}) = \lambda(t) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{1}(\mathbf{r}), \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el}(t,\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el}^{dev}(t,\mathbf{r}) = \frac{\lambda(t)}{E^{dev}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{1}(\mathbf{r}).$$
(15)

Ezzel előkészítettük a terepet az "időfüggő állandók" módszeréhez egy (4) reológiai közeg tárgyalásához: a (15) megoldásban egyedül előforduló E^{dev} Hookerugalmasságtani együttható helyére helyettesítünk egy ismeretlen időfüggő függvényt:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{reol}}(t,\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{reol}}^{\text{dev}}(t,\mathbf{r}) = \lambda(t) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{1}(\mathbf{r}), \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{reol}}(t,\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{reol}}^{\text{dev}}(t,\mathbf{r}) = \frac{\lambda(t)}{E_{\varepsilon}^{\text{dev}}(t)} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{1}(\mathbf{r}).$$
(16)

Egy ilyen megoldás minden pillanatban kielégíti a térbeli feltételeket, hiszen minden pillanatban egy Hooke-rugalmasságtani probléma megoldása: az egyetlen tennivalónk (4) kirovása.

Esetünkben ez is egyszerű: a gömbi egyenlet triviálisan teljesül, egyedül az

$$S^{\text{dev}}\lambda = \mathcal{E}^{\text{dev}}\kappa, \qquad \kappa(t) := \frac{\lambda(t)}{E_{\varepsilon}^{\text{dev}}(t)}$$
 (17)

10

egyenlet oldandó meg, olyan kezdeti feltételekkel, sőt, előélettel, hogy $\kappa(t < t_1) = 0$ (üregnyitás előtt a kiegészítő feszültség és deformáció nulla). Ennek az egyenletnek egyértelmű megoldása van, tehát készen vagyunk. Az eredményt összehasonlíthatjuk az ismert, más úton nyert megoldással [8, 9], és megnyugtató egyezést találunk.

3. HOMOGÉN, ANIZOTROP FESZÜLTSÉGMEZŐBEN NYITOTT ALAGÚT

A második, bonyolultabb példánk az előző általánosítása: tetszőleges – de továbbra is helyfüggetlen – $\bar{\sigma}$ primer mezőben nyitunk hengerszerű üreget. A nyitás utáni kiegészítő mezők Hooke-rugalmas esetben [7]¹:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) = c(\eta)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2(\mathbf{r}), \qquad c(\eta) = \frac{1-\eta}{2+\eta}, \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & -4\left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\boldsymbol{\sigma}}_-(\varphi) \end{pmatrix},$$
(18)

$$= \begin{pmatrix} -\left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_+ - \left[4\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right] \bar{\sigma}_-(\varphi) & \left[2\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right] \bar{\sigma}_{r\varphi}(\varphi) & -\left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_{rz}(\varphi) \\ \left[2\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right] \bar{\sigma}_{r\varphi}(\varphi) & \left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_+ - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4 \bar{\sigma}_-(\varphi) & \left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_{\varphi z}(\varphi) \\ -\left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_{rz}(\varphi) & \left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_{\varphi z}(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$$
(19)

¹ Megoldásukat ellenőriztük és néhány kisebb sajtóhibát kijavítottunk.

 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2(\mathbf{r}) =$

、
a $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ primer feszültségmezővel kapcsolatos

$$\bar{\sigma}_{+} = \frac{1}{2} \left(\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy} \right), \qquad \bar{\sigma}_{-}(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy} \right) \cos(2\varphi) + \bar{\sigma}_{xy} \sin(2\varphi), \tag{20}$$

$$\bar{\sigma}_{r\varphi}(\varphi) = -\frac{1}{2} \left(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy} \right) \sin(2\varphi) + \bar{\sigma}_{xy} \cos(2\varphi), \qquad (21)$$

$$\bar{\sigma}_{rz}(\varphi) = \bar{\sigma}_{xz}\cos\varphi + \bar{\sigma}_{yz}\sin\varphi, \quad \bar{\sigma}_{\varphi z}(\varphi) = -\bar{\sigma}_{xz}\sin\varphi + \bar{\sigma}_{yz}\cos\varphi, \quad (22)$$

segédjelölésekkel, és

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{E^{\text{sph}}} \left\{ \frac{c(\eta)}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{1}^{\text{dev}} + \frac{1}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{2}^{\text{dev}} + c(\eta) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{1}^{\text{sph}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{2}^{\text{sph}} \right\}$$
$$= \frac{1}{E^{\text{sph}}} \left\{ \frac{c(\eta)}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{1}^{\text{dev}} + \frac{1}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{2}^{\text{dev}} + [c(\eta)+1] \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{1}^{\text{sph}} \right\},$$
(23)

ahol felhasználtuk azt az észrevételt is, hogy $\hat{\sigma}_1^{\text{sph}} = \hat{\sigma}_2^{\text{sph}}$. Értelemszerűen a hengerpalást menti peremfeltétel itt is a primer mező rr-komponensének ellentettjével való egyenlőség.

Az üregnyitást is az előző esethez hasonlóan egy $\lambda(t)$ szorzóval modellezzük, és ekkor ez a szorzó kerül rá a fenti feszültség- és deformáció-megoldásra, ugyanúgy, ahogy az előbb (11)-ből (15)-re jutottunk:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{el}(t,\mathbf{r}) = \lambda(t) \left\{ c(\eta) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2(\mathbf{r}) \right\},\tag{24}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el}(t,\mathbf{r}) = \frac{\lambda(t)}{E^{sph}} \left\{ \frac{c(\eta)}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{dev} + \frac{1}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^{dev} + [c(\eta)+1] \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{sph} \right\}.$$
(25)

A reológiai eset megoldását ismét a Hooke-rugalmasságtani állandók helyére helyettesített időfüggvényekkel reméljük megtalálni: jelen esetben a feszültségbeli η -t is helyettesítjük, egy

$$\eta_{\sigma}(t) := \frac{E_{\sigma}^{\text{dev}}(t)}{E_{\sigma}^{\text{sph}}(t)}$$
(26)

ismeretlen függvénnyel, a deformációbelit pedig egy másik,

$$\eta_{\varepsilon}(t) := \frac{E_{\varepsilon}^{\text{dev}}(t)}{E_{\varepsilon}^{\text{sph}}(t)}$$
(27)

kombinációval, és természetesen maga a deformációban szereplő $E^{\rm sph}$ helyére is $E_{\varepsilon}^{\rm sph}(t)$ -t írunk. Mivel a feszültség $E_{\sigma}^{\rm dev}(t)$ -nek és $E_{\sigma}^{\rm sph}(t)$ -nek csak a hányadosától függ, e két függvény egyike szabadon megválasztható vagy éppen rögzíthető, ezért élhetünk a legegyszerűbb, $E_{\sigma}^{\rm sph}(t) := E^{\rm sph}$ választással.

Három szabad, keresett függvényünk van tehát. Ezekre a (4) reológiai összefüggések épp három egyenletet rónak ki. Ugyanis a deformációban három lineárisan független tenzormező szuperponálódik: $\hat{\sigma}_1^{\text{dev}}(\mathbf{r})$, $\hat{\sigma}_2^{\text{dev}}(\mathbf{r})$ és $\hat{\sigma}_1^{\text{sph}}(\mathbf{r})$. Így mindegyik független mező időfüggővé vált együtthatójára egy-egy egyenlet fog származni: az első kettőére a deviatorikus, a harmadikéra a gömbi reológiai összefüggésből. Lássuk is ezeket az egyenleteket konkrétan:

$$\mathcal{S}^{\text{dev}}\left[\lambda c(\eta_{\sigma})\right] = \mathcal{E}^{\text{dev}}\left(\frac{\lambda}{E_{\varepsilon}^{\text{sph}}}\frac{c(\eta_{\varepsilon})}{\eta_{\varepsilon}}\right),\tag{28}$$

$$\mathcal{S}^{\text{dev}}\lambda = \mathcal{E}^{\text{dev}}\left(\frac{\lambda}{E_{\varepsilon}^{\text{sph}}}\frac{1}{\eta_{\varepsilon}}\right),\tag{29}$$

$$\mathcal{S}^{\rm sph}\left\{\lambda\left[c(\eta_{\sigma})+1\right]\right\} = \mathcal{E}^{\rm sph}\left\{\frac{\lambda}{E_{\varepsilon}^{\rm sph}}\left[c(\eta_{\varepsilon})+1\right]\right\}.$$
(30)

Ez az egyenletrendszer egy kissé zűrösen néz ki, de valójában jelentősen leegyszerűsíthető. Bevezetve ugyanis a

$$\lambda_1 := \lambda c(\eta_{\sigma}), \qquad \kappa := \frac{\lambda}{E_{\varepsilon}^{\text{sph}}} \frac{1}{\eta_{\varepsilon}}, \qquad \kappa_1 := \frac{\lambda}{E_{\varepsilon}^{\text{sph}}} \frac{c(\eta_{\varepsilon})}{\eta_{\varepsilon}}$$
(31)

segédfüggvényeket, továbbá észrevéve, hogy

$$c(\eta) + 1 = \frac{1}{\eta} [1 - 2c(\eta)],$$
 (32)

a következő letisztult, lineáris differenciálegyenlet-rendszert kapjuk e három ismeretlen segédfüggvényre (λ pedig ugyebár előírt):

$$\mathcal{S}^{\text{dev}}\lambda_1 = \mathcal{E}^{\text{dev}}\kappa_1,\tag{33}$$

$$\mathcal{S}^{\text{dev}}\lambda = \mathcal{E}^{\text{dev}}\kappa,\tag{34}$$

$$\mathcal{S}^{\text{sph}}\left(\lambda_{1}+\lambda\right)=\mathcal{E}^{\text{sph}}\left(\kappa-2\kappa_{1}\right).$$
(35)

Kezdeti feltételként a kiegészítő mezők nulláról indulnak, ez mindhárom segédfüggvényre azonosan nulla előéletet jelent. Ekkor e differenciálegyenlet-rendszer megoldása egyértelmű. A segédfüggvényekből pedig az eredeti keresett E_{σ}^{dev} , $E_{\varepsilon}^{\text{dev}}$, $E_{\varepsilon}^{\text{sph}}$ függvények egyértelműen határozhatók meg.

4. AZ ANIZOTROP ESET MEGOLDÁSA KELVIN–HOOKE-REOLÓGIA ESETÉN

Általános vizsgálatok helyett most a legegyszerűbb reológia, a deviatorikusan Kelvin-, térfogatilag Hooke-modell esetére mutatjuk meg a megoldást, amikor is (4) konkrétan a következő egyenletpárt jelenti:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} = E^{\text{dev}}\boldsymbol{\varepsilon} + \hat{E}^{\text{dev}}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dev}}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}} = E^{\text{sph}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}}.$$
 (36)

Az üregnyitás menetét jellemző λ függvény menetét a következőnek választottuk:

(37)



1. ÁBRA. Lassú, közepes és gyors üregnyitás

Bár egy lineáris egyenletrendszer ilyen speciális inhomogén taggal analitikusan is megoldható, szemléltetés céljából elegendő egy numerikus, egyszerű időléptetéses megoldás is.

A feladatban két időskála van, a reológiai $\hat{E}^{\text{dev}}/E^{\text{dev}}$ és az üregnyitás sebességét jellemző $t_2 - t_1$. Az időlépésközt a kisebbik időskála pl. 1/100-adrészének választhatjuk.

Kíváncsiak voltunk lassú, a közepes és a gyors üregnyitás esetére egyaránt (ez alatt a két időskála viszonya értendő). Egy közepes Poisson-tényező-értéket választottunk:

$$\nu = 0.25 \implies \eta = 0.4.$$
 (38)

A három keresett függvényt, E_{σ}^{dev} -t, $E_{\varepsilon}^{\text{dev}}$ -t és $E_{\varepsilon}^{\text{sph}}$ -t a rögzített $E_{\sigma}^{\text{sph}} = E^{\text{sph}}$ -vel leosztva a három hányados egyértelműen határozódik meg a megoldásból, ezeket ábrázoltuk három nyitási sebesség esetére: amikor a reológiai időskála jóval kisebb a nyitás időskálájánál, amikor összemérhetőek, és amikor a nyitás ideje a sokkal rövidebb.

Főleg a gyors nyitás esetén szembeszökő, hogy mindhárom keresett függvény még jóval a nyitás után is időfüggően viselkedik. Ez látszik tehát $E_{\sigma}^{\text{dev}}(t)/E^{\text{sph}} = \eta_{\sigma}(t)$ -n, így a megfelelő $\nu_{\sigma}(t) := [1 - \eta_{\sigma}(t)]/[2 + \eta_{\sigma}(t)]$ "időfüggő effektív Poisson-tényezőn" is. Ezt látva leszűrhetjük, hogy megoldásunk eltér a [7]-ben található, a Volterra-elvet alkalmazni próbáló megoldástól, amelyben a nyitás után $\nu_{\sigma}(t)$ állandó, értéke a Hooke-rugalmas értékkel egyezik.

5. TOVÁBBI TENNIVALÓK ÉS LEHETŐSÉGEK

Vizsgálatainkban egyelőre idáig jutottunk. Egy következő feladat az anizotrop esetre más módon kiszámolt reológiai megoldással [7] való részletesebb összevetés.

Egy másik továbblépési lehetőség más analitikusan ismert Hooke-rugalmasságtani megoldások reológiai kiterjesztése, a módszer további tesztelése. Bonyolultabb, több helyfüggő tenzormezőből szuperponálódó megoldások esetén a legfeljebb négy szabad időfüggvény kevés lehet a sok független időbeli egyenlet megoldásához. Meg lehet viszont próbálni több ilyen megoldás időfüggő együtthatós szuperpozíciójaként keresni a megoldást.

Logikusan ezután következik az a cél, hogy a módszert használhatóvá tegyük numerikusan – például végeselemes módon – meghatározott Hooke-rugalmasságtani megoldásokból építkezésre. Ennek gyakorlati haszna jelentős lenne. Megjegyezzük mindamellett, hogy már az analitikusan tárgyalható feladatok megoldása is értékes, mert tesztelni lehet velük más analitikus vagy numerikus megoldások jóságát is.

Köszönetmondás

Köszönettel tartozunk Marta Doležalovának, aki csoportjával az itt tárgyaltaknál sokkal bonyolultabb, összetettebb problémákat oldott meg, és aki magyarázataival sokat segített, hogy átláthassuk a talaj- és kőzetmechanikai számítási feladatokban rejlő kihívásokat. Munkássága komoly motiváció és inspiráló erő volt.

Köszönjük Asszonyi Csabának, hogy ilyen erősen ambícionálta, hogy a Montavid Termodinamikai Kutatócsoport foglalkozzon az itt vizsgált feladatkörrel. Intuíciója, kérdésfelvetései sokat segítettek kutatásunkban. Béda Gyula pedig a Volterra-elv megvilágításában volt nagy segítségünkre.

Munkánkat az OTKA K81161 pályázata támogatta.

IRODALOM

- Asszonyi, Cs. Ván, P. Szarka, Z.: Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 5, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest, 2007.
- [2] Asszonyi, Cs. Fülöp, T., Ván, P.: Distinguished rheological models for solids in the framework of a thermodynamical internal variable theory, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, megjelenés alatt, online megjelent: 2014.11.20, http://dx.doi.org/10.1007/s00161-014-0392-3.
- [3] Asszonyi, Cs. Fülöp, T., Ván, P.: Kitüntetett szilárdtest-reológiai modellek egy belső változós termodinamikai elmélet keretében, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2015 ISRM Konferencia. In: Fülöp, T., (szerk.), Termodinamikai módszertan – kontinuumfizikai alkalmazások, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 19, *Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért*, Budapest, 2015, pp11–34 (jelen kötetben).
- [4] Béda, Gy. Kozák, I. Verhás, J. (1986): Kontinuummechanika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, p208.
- [5] Rabotnov, Ju. N.: Elements of hereditary solid mechanics, Mir Publishers, Moscow, 1980.
- [6] Gromov, V. G.: On the mathematical content of Volterra's principle in the boundary value problem of viscoelasticity, PMM 35, 1971, pp869–878.
- [7] Asszonyi, Cs. Szarka, Z. Béda, Gy.: Körszelvényű földalatti folyosók körül kialakuló mechanikai mezők, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 ISRM Konferencia. In: Asszonyi, Cs. (szerk.), Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009, pp115–171.
- [8] Fülöp, T. Béda, Gy.: Hengerszimmetrikus alagút körüli reológiai időfüggés, Mérnökgeológia–Kőzetmechanika 2010 ISRM Konferencia. In: Asszonyi, Cs. (szerk.), Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009, pp99–114.
- [9] Fülöp, T. Béda, Gy.: Rheological dynamics of tunnels an analytical investigation, in: I. Vrkljan (ed.), Rock Engineering in Difficult Ground Conditions – Soft Rocks and Karst, Proceedings of the Regional Symposium of the International Society for Rock Mechanics (ISRM), 29–31 October 2009, Cavtat near Dubrovnik, Croatia, *Taylor & Francis Group*, London, 2010, pp441–447.

HŐVEZETÉS EGYENLETEINEK ELMÉLETE, NUMERIKUS VIZSGÁLATA ÉS KÍSÉRLETI ELLENŐRZÉSE

Kovács Róbert Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, MSc 2. évf. Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

A hővezetés, mint jelenség és mechanizmus többféle megközelítését vizsgáltam és hasonlítottam össze. Ezek közül a fő modellcsalád a Fourier-egyenlet termodinamikai alapú gyengén nemlokális általánosításai.

A vizsgált egyenletekben lévő paraméterek szerepét a diszperziós reláció származtatásával elemeztem. A megoldásokhoz véges differencia sémát dolgoztam ki, melyet a lézerimpulzus kísérletnek megfelelő kezdeti- és peremfeltételekre oldottam meg. Bizonyítottam a séma konvergenciáját és becslést adtam a séma pontosságára tetszőleges frekvencia tartományra vonatkozólag. A vizsgált modelleket kvalitatív módon hasonlítottam össze egymással a hőterjedés anyagi mechanizmusaira koncentrálva. A lézerimpulzus kísérletre vonatkozó megoldások segítenek a valóságban is azonosítani a vizsgált jelenségeket. Ennek megfelelően az eredményeket összevetettem az irodalomban fellelhető és az Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszéken végzett kísérletek eredményeivel. A dolgozat az egyes modellek alkalmazhatósági lehetőségeinek elemzésével zárul.¹

1. BEVEZETÉS

A technika fejlődésének köszönhetően elkezdődött a mikroszkopikus léptéknél is kisebb "világ" alakítása, ahol a folyamatok karakterisztikus ideje kicsi. Az attoszekundum karakterisztikus idejű lézerek [1] kifejlesztése és alkalmazása (ELI-ALPS nagyberendezés; például az atomi szintű kémiai reakciók követésére használható); a nanotechnológia fejlődése nanomérnököket követel. Ismert, hogy az a leíró elmélet, ami makroszkopikus léptékű jelenséget megfelelően ír le, nem feltétlen - sőt szinte biztosan - nem működik molekuláris léptékű jelenség esetén. Ennek oka, hogy ilyen kis anyagi léptékű vizsgálat

¹ A BME 2014. november 11-i Tudományos Diákköri Konferenciájára készült dolgozat. Konzulens: Ván Péter.

esetén nagyon ritkán tételezhetünk fel izotróp tulajdonságokat, a karakterisztikus hosszak nagyon kicsik. A különböző transzport folyamatok leírása más megközelítést igényel.

Ebben a dolgozatban speciálisan a hőterjedésről, mint transzport mechanizmusról lesz szó. Nem tárgya viszont a különböző hőátadási módozatok (hősugárzás, hőátadás) részletezése és az ezekre való alkalmazása a különböző hővezetési modelleknek. Jóllehet, már több, mint 60 éve kimutatták a második hang létezését szuperfolyékony² héliumban [2, 3], ezt a hullámjelenséget ezidáig nem sikerült hétköznapi környezetben, hétköznapi anyagok esetén kimutatni. De ami még fontosabb, azóta sincs egy egységes, mindenki által elfogadott olyan kontinuumelmélet, ami megfelelően írná le a kívánt jelenségeket. A fononok kinetikus elméletéből származtatott momentum sorfejtés egyenletei – bár a legjobb kontinuum modellt adják a ballisztikus hőterjedés leírására – több szempontból sem megfelelőek. A legfontosabb hiányosságuk, hogy a kísérletileg megfigyelt terjedési sebességet csak 30 db növekvő tenzori rendű csatolt egyenlet megoldásával képesek reprodukálni (tehát a legmagasabb rendű egyenlet 30-ad rendű tenzorokra vonatkozik).

A Fourier-egyenlet egyik legfőbb problémája az egyenlet parabolikus volta, mely paradoxonként végtelen sebességű jelterjedéshez vezet [4]. Ennek első módosítása a Maxwell-Cattaneo-Vernotte-egyenlet (MCV) volt [5], előnye az egyenlet hiperbolikussága³, azaz véges jelterjedési sebessége. Barletta, Zanchini, Dedeurwaerdere és munkatársai felhívják rá a figyelmet, hogy az irreverzibilis termodinamika keretein belül a lokális egyensúlyi leírásban nem kompatibilis, az egyensúlyhoz közeledve csökken az entrópia [6, 7, 8], azonban ezt a problémát a kiterjesztett irreverzibilis termodinamika általánosított entrópia alkalmazásával kiküszöböli [9, 10]. A második hang terjedését bár képes modellezni, de még mindig hiányzik a longitudinális és a transzverzális ballisztikus jelterjedés leírása. Guyer és Krumhansl a Boltzmann-egyenlet linearizálásával számaztattak a fononok hidrodinamikai leírására alkalmas egyenletet [11], amellyel megjósolhatóvá vált a második hang megjelenési hőmérséklet tartománya, ez az úgynevezett ablakfeltétel. Tzou az egyszeres fáziskésésű modellt javasolta [12], de ez csak az időtartományra vonatkozott, mint egyfajta memória hatás, és a ballisztikus terjedéshez szükséges térbeli nemlokalitás leírásához ez még nem elegendő. Chen a tranziens Boltzmann-egyenlet közelítésével származtatta a ballisztikus-diffúzív modellt; továbbá részletesen vizsgálta a Fourier-, a MCV- és a Boltzmann-egyenlet viselkedését különböző Knudsen-számok esetén [13]. Ezzel megmutatta, hogy a MCV-egyenlet mesterséges oszcillációt idéz elő a hőáramban, így az nem alkalmas nanostruktúrák modellezésére. Cimmellinek és munkatársainak munkássága a nanorendszerekben jellemző nemegyensúlyi nemlokális fonon transzportra koncentrálódik [14, 15, 16]. Wang és Guo a hőtömeg elmélet alapján szár-

² A jelenség rendkívül alacsony hőmérsékleten (1-3 K) jelentkezik, ilyenkor elvben viszkozitás mentes lesz a folyadék. Leírására a kvantummechanikát használják.

³ A hiperbolicitás vizsgálatáról és előnyeiről később bővebben szó lesz.

maztatták a saját nem-Fourier-egyenletüket [17, 18, 19]. Munkájukat Tolman általános relativitáselméleti megfontolása inspirálta, mely szerint létezik a hő - tömeg dualitás és a hőterjedés szintén rendelkezik tehetetlenséggel [20]. E számos modell sem képes egyértelműen, tisztán leírni a ballisztikus jelterjedést, mivel ez összességében tekintve rendkívül összetett, ennek egyik oka:

A hőterjedést 3 módus (a terjedés "sajátirányai") írja le, 1 longitudinális és 2 transzverzális, különböző jelterjedési sebességekkel. Ebből kifolyólag a ballisztikus terjedés anizotróp, azaz irányfüggő. Yanbao Ma itt felhívja a figyelmet arra, hogy sok modellben nem tesznek különbséget ezen módusok között [21].

Landau komplex viszkozitási elmélete [22] alapján Rogers egy olyan fonongáz modellt származtatott [23], amely megtudja magyarázni az első és a második hang közötti természetes átmenetet az alacsony hőmérsékletű lézerimpulzus kísérletek kapcsán. Hátránya, hogy nem tesz különbséget a longitudinális és a transzverzális módusok között. Ma egy hibrid modellt alkalmaz, mely felhasználja a komplex viszkozitást, de mellé egy új fenomenológiai leírást is kidolgozott a longitudinális fonon terjedésre [21, 24]. Az irreverzibilis termodinamikailag konzisztens elméletek eddig a MCV-egyenletet tudták származtatni [25, 10], illetve a Guyer-Krumhansl-egyenletet disszipatív kiterjesztéssel [26, 27]. A ballisztikus jelterjedésnek nincs (eddig nem volt) irreverzibilis termodinamikai elmélete.

A célunk egy egységes modellcsalád bevezetése, melyre csak a termodinamika második főtétele jelent megszorítást, az entrópiaprodukció pozitivitása. Az ebből származtatható, a már eddig ismert modellek összehasonlítása alapján kiválasztjuk azt, amiről úgy gondoljuk, hogy az igazolni kívánt jelenségkört kellőképp és hiteles módon leírja. A megoldások során olyan jellegzetes, karakterisztikus, Fourier-jellegű megoldástól való eltéréseket keresünk, amelyeket kísérleti szempontból makroszkópikus léptékben is meg lehet találni és ki lehet mutatni, azaz támpontként szolgál arra nézve, hogy mit és hol keressünk. Az egyenleteket a lézerimpulzus kísérletnek megfelelő peremfeltételek mellett fogjuk tesztelni. Ez a munka a tavalyi TDK dolgozatomban [28] kezdődött, ez annak egy jelentős továbbfejlesztése.

A dolgozat két nagyobb részre tagolható. Az első részben bemutatjuk a leíró keretelméleteket, a modellek származtatását. A dolgozatban kizárólag parciális differenciálegyenletek megoldásáról lesz szó, így az elméleti összefoglalásban röviden a különböző típusokról is szót ejtünk a numerikus problémákra való tekintettel. A matematikai jellegű vizsgálatok szükségesek a gyakorlati problémák megoldásához, a modellek tulajdonságainak részletes feltérképezéséhez, ezért részletesen tárgyaljuk a rendszerre jellemző jelterjedési sebességeket a hiperbolicitás és a diszperziós relációk fejezetekben. A dolgozat második nagy részében a megoldásokat fogjuk tárgyalni, illetve elemezni. Ehhez feltétlen be kell mutatni a kidolgozott numerikus módszert és kulcsfontosságú lesz az algoritmus stabilitási kérdése. Emellett bizonyítjuk a séma konzisztenciáját, mely a konvergencia és a hibabecslés szempontjából lényeges. Ezután kísérleteket elemzünk, részletesen tárgyaljuk a NaF kísérleteket és az Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszéken végzett méréseket is.

Végezetül a további kutatási lehetőségek összegzésével és az eddigi eredmények összefoglalásával zárjuk a dolgozatot.

2. A HŐVEZETÉSI EGYENLETEK ÁLTALÁNOSÍTÁSA

Az általánosítás célja magasabb rendű mennyiségek bevezetése a konstitutív egyenletekbe. Hogyan is kell ezt érteni? A konstitutív egyenletek az anyagra vonatkozó, annak viselkedését leíró egyenletek, szigorúan anyagi paramétereket és objektív mennyiségeket felhasználva. A fizikai érzékünk is azt súgja, hogy a közeg egy pontjának tulajdonságai függnek a pont környezetétől valamilyen módon, de ezt még nem ismerjük. Továbbá joggal feltételezhetjük azt is, hogy a közeg előélete is szerepet játszhat. Az előbb felsorolt tulajdonságokat nevezzük térbeli és időbeli nemlokalitásnak. Nézzük ezt kicsit részletesebben.

2.1. Memória és nemlokális hatások

A valóságban egy valamilyen módon – legyen most hőáram-impulzus – gerjesztett közegben a zavarás, azaz a hőmérséklet változása nem végtelen sebességgel terjed. Ezt jól szemlélteti a Fourier-egyenlet példája. A rendszer⁴ parabolikus volta (matematikailag kissé pongyolán fogalmazva, egy időderivált hiánya) eredményezi a végtelen jelterjedési sebességet. Makroszkopikus skálán, a mérnöki problémák jelentős hányadában viszont jól alkalmazható elmélet, a rendszer egyszerű, alaposan kidolgozott megoldási módszerek állnak rendelkezésre a megoldásához, és ami a legfontosabb, ilyen lépték esetén kontinuumokra helyes eredményt szolgáltat, mivel a konstitutív egyenletekben megjelenő magasabb rendű (idő- és térderiváltak) tagok egyáltalán nem dominálnak és a hővezetés diffúzív jellege lesz a mérvadó.

Másik fontos szempont a térbeli nemlokalitás. Ahogy már említettem, az elgondolás hasonló, de itt nem időben, hanem térben terjesztjük ki a modellt, azaz a szomszédos pontok állapotait is figyelembe vesszük. Erre többféle módszer is létezik, a három legfontosabb elmélet:

- 1. Belső változók elmélete: új változók bevezetésén alapul.
 - ⁴ Rendszer alatt mindig a belső energia mérlegegyenletét és a konstitutív egyenlet(ek)et értem.

- Erősen nemlokális elmélet: memóriafunkcionálokon és térintegrálokon alapul. Kevésbé elterjedt, mivel nem könnyű használni.
- 3. Gyengén nemlokális elmélet: a klasszikusnál magasabb rendű tér és időderiváltak bevezetésén alapul.

Ezek közül mi az első és a harmadik elmélet egyesítését fogjuk alkalmazni. A következő fejezetet a [9, 25, 29, 30, 31, 27] alapján foglalom össze.

2.2. A HŐVEZETÉSI ELMÉLET ÁLTALÁNOSÍTÁSA, A HIERARCHIKUS RENDSZER

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy az anyag merev és izotróp. A levezetés során az indexes jelölésmódot alkalmazom az Einstein-féle összegzési konvencióval. A belső energia mérlegegyenletéből indulunk ki:

$$\rho \dot{e} + \partial^i q^i = 0, \tag{1}$$

ahol ρ az anyag sűrűsége, e jelöli a fajlagos belső energiát, konstans fajhő esetén e = cT, ahol c és T az izokor fajhő és a hőmérséklet. A ∂^i a térderiváltat jelenti, a q^i pedig a belső energia áramsűrűségének a konduktív része, azaz a hőáram. A pont jelöli a szubsztanciális időderiváltat. A kiindulási feltételünk – miszerint merev közeget vizsgálunk – eredményezi, hogy a szubsztanciális időderivált megegyezik a parciális időderiválttal, valamint az áramsűrűségnek nincs konvektív része.

A klasszikus elmélet kiterjesztéséhez felhasználtunk egy belső változót, méghozzá vektorként. De miért pont vektorként? A belső változók elméletében erre vonatkozólag nincs konkrét kikötés, viszont gondoljuk el, mit is szeretnénk elérni. Kiakarjuk egészíteni a már ismert Fourier-egyenletet. Az egyenlet minden tagja vektoriális, a hőáram vektor mennyiség, a hőmérséklet gradiense szintén vektoriális. Célszerűvé válik a kiterjesztést vektoriális rendben feltételezni. A belső változó további szerepe, hogy egyensúlyban eltűnik, vagyis az egyensúlytól való eltérést mutatja, ezért nevezik még dinamikai szabadságfoknak is [32]. A kiterjesztésnek egy másik módja kerül most bemutatásra.

Az entrópia függvényét másképp definiáljuk, mint [27, 33, 28] irodalmakban; az alábbi megfontolás [34] által egyszerűbb módon érhetjük el a kompatibilitást a kinetikus elmélettel és a kiterjesztett termodinamikával [4, 9]. Ebben az esetben nem használunk vektori belső változót, helyébe a hőáramot helyettesítettük és kvadratikus az új tagban, azaz a hőáram, mint alapváltozó és nem, mint belső változó jelenik meg a modellben

$$s(e,q^{i},Q^{ij}) = \hat{s}(e) - \frac{m_1}{2}q^{i}q^{i} - \frac{m_2}{2}Q^{ij}Q^{ij}.$$
(2)

Legyen az entrópia áramsűrűsége

$$J^i = B^{ij}q^j + C^{ijk}Q^{jk} . aga{3}$$

Az első tag már ismert, a második tag most az érdekes; a Q^{ij} a hőáramnál magasabb tenzoriális rendű mennyiség, mint belső változó vezetjük be a modellbe. Figyeljük meg, hogy az egyensúlytól való eltérés minimális, de termodinamikailag kompatibilis [35]. Továbbá azt is vegyük észre, hogy mindig egy tenzoriális renddel magasabb mennyiséggel szorozzuk ezeket az áramokat; a C^{ijk} szerepe is hasonló a B^{ij} -hez, szintén konstitutív függvény. Ez a fajta kiterjesztés vezet a hővezetési egyenletek hierarchikus szerkezetéhez. Helyettesítsünk be az entrópia mérlegegyenletébe

$$\rho \dot{s} + \partial^i J^i = \sigma \ge 0, \tag{4}$$

így megkapjuk az entrópiaprodukció egyenlőtlenségét, azaz

$$\partial^{i}q^{j}\left(B^{ij}-\frac{1}{T}\delta^{ij}\right) + B^{ij}(\partial^{i}q^{j}) + q^{j}\left(\partial^{i}B^{ij}-m_{1}\dot{q^{i}}\right)$$

$$+ Q^{jk}\left(\partial^{i}C^{ijk}-m_{2}\dot{Q^{ij}}\right) + C^{ijk}(\partial^{i}Q^{jk}) \ge 0.$$

$$(5)$$

	Klasszikus	Kiterjesztett	Belső változós I	Belső változós II
Áramok	$\dot{q^i} - \partial^i B^{ij}$	$B^{ij} - \frac{1}{T}\delta^{ij}$	$\dot{Q^{jk}} - \partial^i C^{ijk}$	C^{ijk}
Erők	q^i	$\partial^i q^j - Q^{ij}$	$\partial^j q^k - Q^{jk}$	$\partial^i Q^{jk}$

1. TÁBLÁZAT. A hierarchikus rendszerre jellemző termodinamikai erők és áramok.

Ekkor már definiálhatjuk a termodinamikai erők és áramok közötti kapcsolatokat, az egyenlőségek bal oldalán az áramok, a jobb oldalán az erők vannak:

$$m_1 \dot{q^i} - \partial^i B^{ij} = -l_1 q^i, \tag{6}$$

$$m_2 \dot{Q^{jk}} - \partial^i C^{ijk} = -k_1 Q^{jk} + k_{12} \partial^j q^k, \tag{7}$$

$$B^{ij} - \frac{1}{T} \delta^{ij} = -k_{21} Q^{ij} + k_2 \partial^i q^j,$$
 (8)

$$C^{ijk} = n\partial^i Q^{jk}. (9)$$

A második főtétel egyenlőtlenségének teljesülése megköveteli az

$$l_1, k_1, k_2, n \ge 0, \tag{10}$$

$$K = k_1 k_2 - k_{12} k_{21} \ge 0 \tag{11}$$

egyenlőtlenségek teljesülését. Egyszerűbb alakot kapunk, ha elimináljuk a B^{ij} és C^{ijk} konstitutív függvényeket, valamint a Q^{ij} tenzoriális belső változót. Ezzel az alábbi egyenlethez jutunk (egy térdimenzióban):

$$m_{2}\partial_{xt}\frac{1}{T} - n\partial_{x}^{3}\frac{1}{T} + k_{1}\partial_{x}\frac{1}{T} = m_{1}m_{2}\partial_{tt}q + (m_{2}l_{1} + m_{1}k_{1})\partial_{t}q - (m_{2}k_{2} + nm_{1})\partial_{xxt}q + mk_{2}\partial_{x}^{4}q - (K + nl_{1})\partial_{xx}q + k_{1}l_{1}q.$$
(12)

Az alábbi feltevésekkel a teljes rendszer az alábbi konstitutív egyenletekre redukálható.

- Fourier-egyenlet: A legegyszerűbb és a mérnöki alkalmazásokban leginkább elterjedt model; $n = m_1 = m_2 = k_2 = 0$ és $k_{12} = 0$, ezzel kapjuk:

$$l_1 q = \partial_x \frac{1}{T}.$$
(13)

A jobb oldalon lévő reciprok hőmérséklet deriválását elvégezve és l_1 -el osztva:

$$q = -\frac{1}{l_1 T^2} \partial_x T , \qquad (14)$$

ahol a Fourier-féle hővezetési együtthatóra a $\lambda = \frac{1}{l_1T^2}$ paraméter megfeleltetés elvégezhető és a továbbiakban is alkalmazható.

 Maxwell-Cattaneo-Vernotte-egyenlet: A modell validitása nagyon alacsony hőmérsékleten – nagyságrendileg 10 K – történő hővezetés esetén helytálló, mivel képes visszaadni a második hang jelenségét, azaz a hővezetés hullámtermészetét. Az erre vonatkozó javaslatot Gyarmati írta meg [9]. Ha n = k₂ = m₂ = k₁₂ = 0, akkor adódik, hogy

$$m_1 \partial_t q + l_1 q = \partial_x \frac{1}{T}.$$
(15)

Újabb paraméterként a hőáramhoz tartozó relaxációs idő jelenik meg, azaz $\tau_q = \frac{m_1}{l_1}$.

– Guyer-Krumhansl-egyenlet: Érdekessége, hogy képes visszaadni a Fourieregyenlet és a MCV-egyenlet megoldásait is (és az ezekre hasonlító, de alulcsillapított esetet), valamint van a megoldásoknak egy további tartománya – túlcsillapított eset – ahol a megoldás jellegzetes; a $n = m_2 = 0$ paraméterekkel származtatható:

$$-K\partial_{xx}q + m_1k_1\partial_tq + k_1l_1q = k_1\partial_x\frac{1}{T}.$$
(16)

A K együtthatóra az eddig megismert anyagi paraméterek bevezetése után az $a = \frac{K}{k_{1}l_{1}}$ megfeleltétést használjuk és disszipációs együtthatónak fogjuk nevezni.

– Jeffreys-típusú termodinamikai egyenlet (vagy duális fáziskésésű modell): $n = m_1 = k_2 = k_{12} = 0$, ekkor

$$m_2 l_1 \partial_t q + l_1 k_1 q = k_1 \partial_x \frac{1}{T} + m_2 \partial_{xt} \frac{1}{T}.$$
 (17)

Fontos kiemelni, hogy eltérő jelentéssel bír az itt megjelenő relaxációs idő, mint az előző egyenletek esetén, ugyanis a $\tau = \frac{m_2}{k_1}$ megfeleltetés végezhető el, ami nem azonos τ_q -val. A τ jelentésére a kinetikus elméleti leírást bemutató fejezetben térünk rá és a ballisztikus-diffúzív modellben lesz jelentősége. Mi ezzel a konstitutív egyenlettel nem foglalkozunk. Green-Naghdi-egyenlet: Két féle változata is létezik, az általános és az egyszerű GN-egyenlet. Ami mindkettőre jellemző, hogy szükség van a Casimir-féle reciprocitási relációra. A dolgozatban az egyszerű típust tárgyaljuk, a származtatásához n = m₂ = l₁ = 0 szükséges,

$$-K\partial_{xx}q + m_1k_1\partial_t q = k_1\partial_x\frac{1}{T}.$$
(18)

Az eddig bevezetett anyagi paraméterek itt is bevezethetők. További érdekesség, hogy reverzibilis esetben – azaz amikor nulla az entrópiaprodukció – eredményezhet hővezetést a klasszikus $J^i = \frac{q^i}{T}$ entrópiaáram forma mellett.

- Cahn-Hilliard-egyenlet: $n = m_1 = m_2 = 0$ esetén adódik, hogy

$$k_1 l_1 q - K \partial_{xx} q = k_1 \partial_x \frac{1}{T}.$$
(19)

Ezzel az egyenlettel sem foglalkozunk a továbbiakban.

- Általánosított egyenlet: ha $n = m_1 = 0$, akkor visszakapjuk [27] szerinti általános egyenletet:

$$m_2 l_1 \partial_t q - m_2 k_2 \partial_{xxt} q - K \partial_{xx} q + l_1 k_1 q = k_1 \partial_x \frac{1}{T} + m_2 \partial_{xt} \frac{1}{T}.$$
 (20)

– Ballisztikus-diffúzív egyenlet: $n = k_2 = 0$ felhasználásával kapjuk. Így az egyenletrendszer

$$m_1 q^i - \partial^i B^{ij} = -l_1 q^i , \qquad (21)$$

$$m_2 Q^{jk} = -k_1 Q^{jk} + k_{12} \partial^j q^k , \qquad (22)$$

$$B^{ij} - \frac{1}{T}\delta^{ij} = -k_{21}Q^{ij}, \qquad (23)$$

valamint a konstitutív egyenlet

$$m_{2}\partial_{xt}\frac{1}{T} + k_{1}\partial_{x}\frac{1}{T} = m_{1}m_{2}\partial_{tt}q + (m_{2}l_{1} + m_{1}k_{1})\partial_{t}q - K\partial_{xx}q + k_{1}l_{1}q.$$
(24)

Ekkor az entrópiaprodukció növekedése megkívánja, hogy $K = -k_{12}k_{21} \ge 0$ is teljesüljön, ami csak úgy lehetséges, ha k_{12} és k_{21} előjele ellentétes. A továbbiakban ezért bevezetjük a $\tilde{k_{12}} = -k_{12} > 0$ jelölést. Ennek a modellnek központi szerepe lesz a dolgozatban.

Ezzel megmutattuk, hogy a [27] irodalomban bevezetett általánosítást teljesen magába foglaló keretelméletet állítottunk fel, de ennél többet is kaptunk. A (6)-(9) rendszer képes a ballisztikus hőterjedési mechanizmus leírására is.

Érdekesség még, hogy a Fourier-egyenletet összesen 3 módon tartalmazza a rendszer [36, 37]:

- Az egyszeri aláhúzás jelöli az eredeti Fourier-egyenletet.
- A kétszeres aláhúzás jelöli a Fourier-egyenlet időderiváltját.
- A felülvonás jelöli a Fourier-egyenlet kétszeri térderiváltját.

$$\frac{m_2 \partial_{xt} \frac{1}{T}}{m_1 m_2 \partial_{tt} q} - \overline{n \partial_x^3 \frac{1}{T}} + \underline{k_1 \partial_x \frac{1}{T}} = \\
\frac{m_1 m_2 \partial_{tt} q}{m_2 \partial_{tt} q} + \underline{(m_2 l_1 + m_1 k_1) \partial_t q} - (m_2 k_2 + n m_1) \partial_{xxt} q + \\
+ n k_2 \partial_x^4 q - \overline{(K + n l_1) \partial_{xx} q} + \underline{k_1 l_1 q}.$$
(25)

Fontos megjegyeznünk, hogy a megoldásai során mindig $n = k_2 = 0$ paraméterekkel fogunk dolgozni a lehető legkisebb csillapítás végett. Ez teljesen kizár egy Fourierjellegű megoldást (kék színűt). Figyeljük meg, hogy a q hőáram második időderiváltjának nincs "párja", azaz nem szerepel a hőmérsékletek oldalán hozzá tartozó tag. Ez azt jelenti, hogy nem tudjuk tisztán a Fourier-egyenletet reprodukálni, csak közelíteni azzal, ha valamely paraméterek "kicsik" és ezáltal elhanyagolható mértékű lesz a számításokban. Erre a megoldások fejezetben látunk példát. A következő fejezet röviden összefoglalja a ballisztikus energiatranszport kinetikus elméleti leírásmódját, valamint összehasonlítjuk a két modellt.

2.3. A hővezetés kinetikus elmélete

Természetesen más módszerek is léteznek a hővezetési jelenség leírására, ilyenek például a fononok közötti kölcsönhatáson alapuló modellek [4, 38]. Ez a fajta leírásmód nem követi a kontinuum szemléletet, a statisztikus fizikára alapozva írja le a jelenségeket, mint kvázirészecskék⁵ kölcsönhatása. A hővezetés leírására először egy rugókból és tömegpontokból álló rezgőrendszer modellt dolgoztak ki, azonban ennek egzakt megoldása [40, 22] nem disszipatív és végtelen jelterjedési sebességet ad. Landau [41] Debye és Born munkái alapján felhívja rá a figyelmet, hogy egy kristály rácsbeli atomjainak anharmonikus rezgéseinek a jellegét is figyelembe kell venni a kristály hővezető képességének vizsgálatakor. Ez viszont már nemlineáris rendszer, és végül a szolitonok felfedezéséhez vezetett a hővezetés leírása helyett. Ashcroft és Mermin szerint a szigorúan harmonikus kristály végtelen hővezetési tényezővel kellene rendelkezzen és az anharmonikus rezgések azok, melyektől az energiatranszport véges sebességű marad [42].

Fononok között alapvetően kétféle⁶ kölcsönható folyamatot különböztethetünk meg ([4, 43] alapján összefoglalva).

⁵ A kvázirészecske nem igazi részecske. A fonon, mint ilyen részecske, fontos szerepet játszik a hővezetésben és az elektromos vezetőképesség jelenségének leírásában [39].

⁶Létezik egy harmadik típus is, az úgynevezett Umklapp-folyamatok, ekkor sem az energia, sem pedig a momentum nem marad meg [43].

- Normál (N) jellegű kölcsönhatás: ilyenkor a fononok momentuma megmaradó mennyiség.
- Rezisztív (R) jellegű kölcsönhatás: az N-folyamat ellenéte, ilyenkor a momentum nem konzervatív mennyiség.

Mindkét folyamatban közös, hogy az energia is megmaradó mennyiség. A hővezetési tényező az R-folyamatokhoz kapcsolódik, illetve azok $\frac{1}{\tau_R}$ frekvenciájához, azaz

$$\kappa = \frac{c^2}{3} c_v \tau_R,\tag{26}$$

ahol *c* a fononok Debye sebessége⁷, c_v az állandó térfogaton mért fajhő, τ_R pedig az R-folyamatok karakterisztikus ideje. Ebben a leírásmódban a Fourier-féle hővezetési törvény akkor alkalmazható, ha lényegesen több R-folyamat van jelen a rendszerben, azaz a diffúzivitás dominál. Ezzel ellentétben – ahogy a hőmérsékletet csökkentjük – egyre inkább az N-típusú folyamatok kezdenek dominálni és a hővezetés hullámszerűvé válik (második hang jelensége). Ennek módosítása a MCV-egyenlet [4]:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{c^2}{3} c_v \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau_R} Q_i.$$
(27)

Viszont még mindig lefedetlen egy harmadik mechanizmus, a ballisztikus fononok általi energiatranszport. Ezek fő jellemzője, hogy a fononok mindenféle interakció nélkül jutnak keresztül a kristályon. Ezzel kapcsolatos legismertebb kísérletek Jackson, Walker és McNelly [44, 45] nevéhez köthetők (1. ábra).

Az említett kísérletekben nagyon alacsony, 10-15 K körüli NaF-ot használtak, ilyenkor már a disszipációk nagyon kis mértékben vannak jelen, bemutathatóvá válik a hőterjedés hullámtermészete.

Az 1. ábrán T betű jelöli a transzverzális ballisztikus fononok észlelésének idejét. Ezt a jelenséget a kinetikus elmélet a fonongáz modellezésével írja le az alábbi módon. Külön kell definiálni az R- és az N-folyamatokra is a fázissűrűséget⁸. A rezisztív folyamatok f_R eloszláshoz, míg a normál folyamatok f_N eloszláshoz tartanak:

$$f_R = \frac{y}{exp\left(\frac{hck}{k_BT}\right) - 1},\tag{28}$$

$$f_N = \frac{y}{exp\left\{\frac{hck}{k_BT}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{cp_in_i}{aT^4}\right)\right\} - 1}.$$
(29)

Továbbá a modell feltételezi, hogy a fononok energiasűrűségét a test T hőmérséklete meghatározza:

$$e = aT^4; \ a = \frac{4\pi 5}{5} \frac{k_B^4}{h^3 c^3},$$
 (30)

⁸ A Callaway-modell kombinálja a két eloszlást a relaxációs időkkel súlyozott módon.

⁷ A transzverzális és a longitudinális hangsebességek középértéke [4].



1. ÁBRA. NaF-ban mért fonon terjedés. Bal oldali ábra: tiszta NaF esete [44]. Jobb oldali ábra: nagyon tiszta NaF esete [45]. Ballisztikus jelterjedés; L a longitudnális és T a transzverzális jel.

ahol h a Planck-állandó, k_B a Boltzmann-állandó, k pedig a hullámszám. Az eloszlásfüggvények momentumait véve vezetünk be újabb mennyiségeket⁹ az alábbi módon

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_N \rangle} = \int k n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} f dk.$$
(31)

Az első momentum az energiasűrűség, a második az impulzussűrűség, a harmadik az energia áram, a negyedik pedig a nyomás deviatorikus része, azaz

$$e = hcu; \quad p_i = hu_i; \quad Q_i = hc^2 u_i; \quad N_{\langle ij \rangle} = hcu_{\langle ij \rangle}. \tag{32}$$

A momentumok képzésével mindig együtt jár a lezárás problémája [46]. Ez azt jelenti, hogy minden momentumképzésnél egy új mennyiséget kapunk, mely nem csak, hogy bonyolultabbá teszi a rendszer leírását¹⁰, de csak a következő momentum egyenlet határozná meg az értékét, de abban újra kapunk egy meghatározatlan mennyiséget. Erre a problémára számos lezárási eljárás létezik, a legegyszerűbb a csonkolásos eljárás, amelyben a legmagasabb rendű ("N + 1"-k) momentumot nullának vesszük. Ezt alkalmazva jutunk az alábbi egyenletrendszerhez:

$$\frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial t} + \frac{n^2}{4n^2 - 1} c \frac{\partial u_{\langle n-1 \rangle}}{\partial x} + c \frac{\partial u_{\langle n+1 \rangle}}{\partial x} = \begin{cases} 0 & n=0\\ -\frac{1}{\tau_R} u_{\langle 1 \rangle} & n=1\\ -\left(\frac{1}{\tau_R} + \frac{1}{\tau_N}\right) u_{\langle n \rangle} & 2 \le n \le N \end{cases}$$
(33)

⁹ Nem minden momentumhoz kapcsolódik valós fizikai háttér. Például a numerikus áramlástanban elterjedőben lévő módszer, a Rács-Boltzmann módszer is kinetikus megközelítést alkalmaz. Abban a leírásban csak az első 3 momemntumnak van értelme.

¹⁰ A gyakorlatban nem szoktak 3 momentumnál többet alkalmazni.

Ez a rendszer csak N = 30 egyenlet esetén adja vissza a ballisztikus fononok helyes terjedési sebességét. Természetesen egy ekkora rendszer a gyakorlat számára jóformán kezelhetetlen, de N = 3 már elegendő a megfelelő közelítéshez észben tartva, hogy a terjedési sebesség nem megfelelő. Előnye viszont, hogy két paraméterrel karakterizálható a rendszer, ez kevesebb, mint amit a ballisztikus-diffúzív egyenlet tartalmaz. Ezzel megkaptuk a kinetikus szemléletű hővezetési egyenletrendszert az alábbi formában:

0

0

$$\frac{\partial e}{\partial t} + c^2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{\tau_R} p,$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{4}{15} c^2 \frac{\partial p}{\partial x} = -\left(\frac{1}{\tau_R} + \frac{1}{\tau_N}\right) N.$$
(34)

Ha a mi kontinuum megközelítésünkből elhagyjuk a disszipatív tagokat, azaz $n = k_2 = 0$ (\rightarrow ballisztikus-diffúzív modell), akkor struktúrálisan ezzel egyező rendszerhez jutunk, az alábbi megfeleltetésekkel:

$$q = c^2 p; \ Q = N; \ \frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{\tau_R} + \frac{1}{\tau_N}\right) \to \tau_q = \tau_R; \ \tau_Q = \tau,$$
 (35)

$$\lambda = \frac{\tau_R}{3}\rho\hat{c}c^2 \to c^2 = \frac{3\lambda}{\tau_q\rho\hat{c}}; \quad \tilde{k_{12}}k_{21} = \frac{4}{15}\tau_q\tau_Qc^2,$$
(36)

ahol most \hat{c} jelöli a fajhőt, megkülönböztetve a c hangsebességtől. Ezzel a mi rendszerünk:

$$\rho \hat{c} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\tau_q \frac{\partial q}{\partial t} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + k_{21} \frac{\partial Q}{\partial x} = -q,$$

$$\tau_Q \frac{\partial Q}{\partial t} + \tilde{k_{12}} \frac{\partial q}{\partial x} = -Q.$$
(37)

Az együtthatók és a változók megfeleltetése után a Q belső változóról elmondhatjuk, hogy a hőáram áramát reprezentálja. Az itt bemutatott kinetikus elmélet és a kontinuum elmélet által adott rendszerek hiperbolikusak, egzakt terjedési sebesség jellemző rájuk, az ehhez kapcsolódó számításokról később lesz szó.

2.4. AZ EGYENLETEK SKÁLAFÜGGETLENSÉGE

Ez alatt azt értjük, hogy az egyenletrendszernek létezik olyan alakja, mely invariáns a mértékegységekre, azaz egy dimenziótlan, skálafüggetlen alak. Definiáljuk hát az alábbi dimenziótlan paramétereket [47, 34]:

$$\hat{T} = \frac{T - T_0}{T_{end} - T_0};$$
 hőmérséklet,

$$T_{end} = T_0 + \frac{1}{\rho \cdot c \cdot L} \cdot \int_0^{t_p} q_0(t) dt; \quad \text{egyensúlyi hőmérséklet,}$$
$$\hat{q} = \frac{q}{\bar{q}_0}; \quad \bar{q}_0 = \frac{1}{t_p} \cdot \int_0^{t_p} q_0(t) dt; \quad \text{hőáram és átlagos hőáram,}$$
(38)

$$\begin{split} Fo &= \frac{\alpha \cdot t}{L^2}; \ \alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}; \ \text{Fourier-szám (idő), hődiffuzivitási tényező,} \\ & \xi = \frac{x}{L}; \ \text{hely koordináta,} \\ \hat{\tau}_q &= \frac{\alpha \cdot \tau_q}{L^2}; \ \hat{\tau}_Q = \frac{\alpha \cdot \tau_Q}{L^2}; \ \text{relaxációs idők,} \\ \tau_\Delta &= \frac{\alpha \cdot t_p}{L^2}; \ \hat{Q} = \sqrt{\frac{k_{12}}{k_{21}}} \bar{q}_0 Q; \ \text{impulzus hossz és a hőáram árama,} \\ \hat{\kappa} &= \frac{\sqrt{\tilde{k_{12}}k_{21}}}{L} \text{ keresztcsatolási tényező.} \end{split}$$

Ezeket behelyettesítve az egyenletekbe kapjuk azok dimenziótlan alakját. Ennek előnye, hogy átláthatóbb és könnyebben kezelhető a rendszer a kevesebb anyagi paraméter miatt, könnyebb illeszteni kísérleti eredményekhez. Természetesen adott dimenziótlan paraméterekből visszanyerhető minden adat. Az eddig bemutatott egyenleteket fogjuk átírni dimenziótlan formába, viszont a jelölések könnyebb értelmezhetősége miatt maradunk annál, ahogy bevezettük ezeket az egyenleteket, vagyis az időt *t*-vel és nem *Fo*-val fogjuk jelölni, hasonlóan a tér koordinátáknál, ott is az *x*-et preferáljuk. A relaxációs idők eseténél elhagyjuk a kalapot a τ fölül. Szem előtt kell tartanunk, hogy innentől kizárólag dimenziótlan formákkal foglalkozunk. Alábbiakban összegzem a ballisztikus-diffúzív modell dimenziótlan formáját, valamint a belőle származtatható további konstitutív egyenleteket.

- Ballisztikus-diffúzív modell:

$$\tau_q \frac{\partial q}{\partial t} + q + \tau_\Delta \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \qquad (39)$$

$$\tau_Q \frac{\partial Q}{\partial t} + Q + \kappa \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

- Fourier-egyenlet: ha $\kappa = \tau_q = 0$,

$$q + \tau_{\Delta} \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{40}$$

- Maxwell-Cattaneo-Vernotte-egyenlet: ha $\kappa = 0$,

$$\tau_q \frac{\partial q}{\partial t} + q + \tau_\Delta \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$
(41)

– Guyer-Krumhansl-egyenlet: ha $\tau_Q = 0$ és felhasználjuk, hogy $\kappa^2 = \hat{a}$ disszipációs paraméter,

$$\tau_q \frac{\partial q}{\partial t} + q + \tau_\Delta \frac{\partial T}{\partial x} - \hat{a} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0.$$
(42)

- Green-Naghdi - egyenlet: speciális eset, nem követelhetjük meg, hogy q = 0 legyen, mert akkor minden tag kiesik,

$$\tau_q \frac{\partial q}{\partial t} + \tau_\Delta \frac{\partial T}{\partial x} - \hat{a} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0.$$
(43)

Ezen egyenletek mindegyikéhez csatolni kell a belső energia mérlegegyenletét is:

$$\tau_{\Delta} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$
(44)

A megoldások fejezetben bemutatásra kerül, hogy bizonyos paraméterek együttállása esetén is reprodukálhatóak további, önhasonló megoldások.

3. PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

A leíró elméletekben gyakorlatilag mindenhol megjelennek a parciális differenciálegyenletek. Ismeretük nélkülözhetetlen a modern fizikai és mérnöki tudományok megértéséhez. A közönséges differenciálegyenletekkel szemben itt nem egyváltozós függvényekről van szó és ennek ténye bizonyos esetekben nagyon meg tudja nehezíteni a megoldásukat, sőt még a megoldások létezésének a bizonyítása is lényegesen körülményesebb. Szükségesnek érezzük, hogy a numerikus megoldások szempontjából röviden szót ejtsünk erről. Ismeretes, hogy a lineáris parciális differenciálegyenletek osztályozhatóak az alábbiak szerint:

- Elliptikus egyenletek: a megoldás függvény analitikus¹¹, peremérték problémákra jellemző típus, állandósult megoldást ad eredményül. A megoldásfüggvény "globális", azaz a teljes tartománytól függ a megoldás. Tipikus példa a Laplace, Helmholtz és a Poisson-egyenletek. Numerikus szempontból a megoldásuk nem okoz különös gondot. Ebben a dolgozatban nem foglalkozunk elliptikus egyenletekkel.
- Hiperbolikus egyenletek: különlegességük, hogy olyan megoldásokat is megengednek, melyek nem folytonosak; numerikus szempontból ez komoly problémát jelenthet. További sajátosságuk, hogy relativisztikus megfoglamazás nélkül is a rendszerre jellemző jelterjedési sebesség véges¹². Rendszerint a disszipációmentes hullámegyenletek tartoznak ebbe a csoportba, ilyen például a Sommerfeld-féle

¹¹ A végtelenszer differenciálható függvényeket nevezik így, azaz ha a Taylor-sora bármely tartományon előállítja magát a függvényt.

¹² A sokat emlegetett Fourier-egyenlet végtelen jelterjedési sebessége relativisztikus átírással megszüntethető.

hullámegyenlet és a rezgő húr egyenlete, vagy egy távolabbi fizikai problémakört tekintve a relativisztikus kvantummechanikából ismert Klein-Gordon egyenlet is. Ebben a dolgozatban is több olyan egyenletet fogunk vizsgálni, melyek hiperbolikusak – ezeket bizonyítani is fogjuk – ilyen a disszipáció mentes GN-egyenlet, a MCV- és a ballisztikus-diffúzív egyenlet is. Matematikai és fizikai hátterükről a [48], a numerikus megoldásaikról pedig a [49] irodalmak szolgáltatnak részletes leírást.

 Parabolikus egyenletek: általában, hasonlóan az elliptikus egyenletekhez, a megoldásfüggvény szintén sima, szakadásmentes. Azonban a rendszerre jellemző jelterjedési sebesség végtelen, ez fizikailag ellentmondásos. Diffúzív és disszipatív rendszerekre jellemző, ilyen például a Fourier-féle hővezetési egyenlet, vagy a disszipatív GN- és GK-egyenlet.

3.1. HIPERBOLICITÁS

Ebben a fejezetben a bemutatott rendszerekre jellemző terjedési sebességeket hasonlítjuk össze, illetve megállapítjuk, hogy mely rendszerek hiperbolikusak, vagy épp parabolikusak. Ehhez definíció szerint [50] egy adott formára kell hoznunk a rendszert és az A^{ij} együttható mátrix sajátértékeit kell vizsgálni. Legyen a rendszerünk az alábbi formában:

$$\partial_t u^i + A^{ij} \partial_x u^i + B^{ij} u^i = F.$$
(45)

Amennyiben a rendszer $n \times n$ méretű A^{ij} együttható mátrixa diagonizálható és a sajátértékei valósak, úgy a rendszer hiperbolikus. Ha az összes sajátérték különböző, akkor a rendszer szigorúan hiperbolikus; ha az A^{ij} mátrix szimmetrikus is, akkor szimmetrikus hiperbolikus rendszerről beszélünk. Itt u^i a változók vektora, F pedig tetszőleges szakaszonként folytonos függvény. Ennek megfelelően rendre minden rendszerünk ilyen alakra kell hozni ahhoz, hogy vizsgálható legyen. A belső energia mérlegegyenletével nincs gond, viszont egyes konstitutív egyenletek hiányosak. Ekkor új változót fogunk bevezetni és ennek megfelelően fogjuk a rendszert kezelni.

- Fourier-egyenlet: ekkor a változóink az $u_1 = T$ és $u_2 = q$, azonban az egyenlet hiányos, így a hőáram időderiváltját egy ε paraméterrel együtt vezetjük be,

$$\tau_{\Delta}\partial_t T + \partial_x q = 0,$$

$$\varepsilon \partial_t q + q + \tau_{\Delta} \partial_x T = 0.$$
(46)

Ezzel együtt írjuk fel az együttható mátrixot: $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\tau_{\Delta}} \\ \frac{\tau_{\Delta}}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}$, melynek sajátértékei $\pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Ilyenkor, mivel ε csak egy mesterséges paraméter volt, tartassuk nullához. Ezzel a sajátértékek tartanak a végtelenhez, ami azt jelenti, hogy a rendszer parabolikus.

- Maxwell-Cattaneo-Vernotte-egyenlet: ezzel könnyű dolgunk van, mivel az előző konstitutív egyenlet megegyezik a MCV-egyenlettel, ha $\varepsilon = \tau_q$; azaz a sajátértékek végesek és különbözőek, a rendszer hiperbolikus.
- Guyer-Krumhansl-egyenlet: ebben az egyenletben egy disszipatív taggal van több, mely egy másodrendű térderivált,

$$\tau_{\Delta}\partial_t T + \partial_x q = 0,$$

$$\tau_q \partial_t q + q + \tau_{\Delta} \partial_x T - \hat{a} \partial_{xx} q = 0.$$
 (47)

Ahhoz, hogy a megfelelő alakra hozzuk, be kell vezetni egy újabb változót, azaz $u_1 = T, u_2 = q, u_3 = \partial_x q$. Ezzel a rendszerünk :

$$\partial_t u_1 + \frac{1}{\tau_\Delta} \partial_x u_2 = 0,$$

$$\partial_t u_2 + \frac{1}{\tau_q} u_2 + \frac{\tau_\Delta}{\tau_q} \partial_x u_1 - \frac{\hat{a}}{\tau_q} \partial_x u_3 = 0,$$

$$\varepsilon \partial_t u_3 + u_3 - \partial_x u_2 = 0.$$

Így az együttható mátrix a következő formát ölti: $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\tau_{\Delta}} & 0\\ \frac{\tau_{\Delta}}{\tau_{q}} & 0 & -\frac{\hat{a}}{\tau_{q}}\\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}$, sajátér-

tékei a $0, \pm \frac{\sqrt{\varepsilon + a}}{\sqrt{\varepsilon \tau_q}}$, ahol szintén ε -t nullához tartva végtelen terjedési sebességeket kapunk, azaz a rendszer parabolikus.

- Green-Naghdi-egyenlet: az új változó bevezetése a GK eset példájából itt is adódik. Ha az â disszipációs anyagi paraméter zérus, akkor a rendszer hiperbolikus lesz, a MCV-egyenletre jellemző terjedési sebességgel, ellenkező esetben pedig parabolikus.
- Ballisztikus-diffúzív modell: a rendszer már eleve nagyon kényelmes formában van, a változók kézenfekvően $u_1 = T$; $u_2 = q$; $u_3 = Q$. A konstitutív egyenletek:

$$\tau_{\Delta}\partial_{t}T + \partial_{x}q = 0,$$

$$\tau_{q}\partial_{t}q + q + \tau_{\Delta}\partial_{x}T + \kappa\partial_{x}Q = 0,$$

$$\tau_{0}\partial_{t}Q + Q + \kappa\partial_{x}q = 0$$
(48)

A vizsgált együttható mátrix tehát $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\tau_{\Delta}} & 0\\ \frac{\tau_{\Delta}}{\tau_q} & 0 & \frac{\kappa}{\tau_q}\\ 0 & \frac{\kappa}{\tau_Q} & 0 \end{pmatrix}$, melynek sajátértékei a

0 és a $\pm \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau_Q}}{\sqrt{\tau_q \tau_Q}}$. Láthatóan a keresztcsatolási paramétereknek köszönhetően két

terjedési sebesség van a modellben, amennyiben ezt a csatolást megszüntetjük, úgy a MCV-egyenletre redukálódik a rendszer.

További megjegyzés, hogy ha a (45) egyenletben szereplő B^{ij} együttható mátrix nulla, akkor a rendszer homogén. A rendszer lineáris marad ha a B^{ij} lineárisan függ u^i változóktól [50].

3.2. DISZPERZIÓS RELÁCIÓ

A fizika számos területén előbukkanó fogalom, használják minden olyan területen, ahol hullámokról, illetve azok viselkedéséről van szó; főbb területek az optika, kvantummechanika¹³, elektrodinamika. A diszperziós reláció¹⁴ leírja a hullám frekvenciája és a hullámszáma közötti kapcsolatot.

Tételezzük fel egy egyenlet megoldását síkhullám formájában, azaz

$$\chi = A e^{i(kx - \omega(k)t)},\tag{49}$$

ahol A a hullám amplitúdója, $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ a hullámszám és $\omega(k)$ a hullám frekvenciája, ami függ a hullámszámtól. A hullám fázissebességét a $v_p = \frac{\omega}{k}$, a csoportsebességet pedig a $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ relációk fejezik ki. Ez a két fogalom nem tévesztendő össze. A fázissebesség a hullám azonos fázisú pontjainak haladási sebességére vonatkozik. A csoportsebesség több hullám szuperpozíciójára érvényes fogalom; az egyes hullámok különböző fázissebességgel rendelkeznek, ezáltal maga a hullámcsomag is mozog a térben, ennek sebessége a csoportsebesség [52]. A két sebesség nemlineáris w(k) függvény esetén nem azonos, azaz ha a terjedési sebesség is függ a hullámszámtól. További fontos megjegyzés, hogy a rendszerek stabilitásának vizsgálatához is hatékony eszközt nyújt. Az exponenciális függvény akkor konvergál egy véges számhoz, ha a kitevőjének valós része negatív.

Energiaszempontú megközelítés esetén elmondható, hogy amennyiben a rendszer konzervatív, úgy a csoportsebesség megegyezik az energiatranszport sebességével, azaz $v_g = v_e = \frac{\bar{F}}{E}$, ahol \bar{F} az átlagos energia áram és \bar{E} az átlagos mechanikai energia. Viszont ha a vizsgált közeg elnyelő tulajdonságú, úgy a csoportsebesség és az energiatranszport sebessége nem egyezik meg és a csoportsebesség komplex értékű lesz; általában véve a hullámcsoport centrális hullámszáma sem állandó és az energia szempontú megközelítés nem ad egyértelmű választ a kérdésre [53].

¹³ A diszperziós reláció fontos szerepet játszott a fény részecske- és hullámtermészetének a vizsgálatában, illetve az 1924-ben de Broglie által felálított hipotézisben is, hogy minden anyagi részecske rendelkezik ezzel a dualitással.

¹⁴ Matematikai értelemben vett diszperziós relációnak nevezzük azokat a komplex függvényeket, melyek képzetes és valós részei között létezik egy integrál kapcsolat, az úgynevezett Kramers-Kronig reláció. A fény esetében a refrakciós index diszerperzív (valós) és az abszorptív (képzetes) részei között teremt kapcsolatot [51].

Ebben a fejezetben a bemutatott hővezetési modellekre jellemző diszperziós relációkat vizsgáljuk, azzal a céllal, hogy a paraméterek szerepéről többet megtudjunk. Fontos megemlíteni, hogy a dimenziótlan paraméterek miatt a frekvencia és a hullámszám, valamint az ebből eredő fázissebesség és csoportsebesség esetén nincs értelme dimenziókról beszélni.

3.2.1. FOURIER-EGYENLET:

Az egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$\tau_{\Delta}\partial_t T + \partial_x q = 0, \tag{50}$$

$$q + \tau_{\Delta} \partial_x T = 0. \tag{51}$$

Helyettesítsük be a (49) egyenletet mindkét mezőre vonatkozólag, ezzel egy algebrai egyenletrendszert kapunk. Ennek az egyenletrendszernek az M együttható mátrixát kell vizsgálnunk.

$$M = \begin{pmatrix} -\omega \tau_{\Delta} & k \\ ik\tau_{\Delta} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\det M = 0 \to k^2 = i\omega$$
(52)

Ebből az következik, hogy a fázissebesség tisztán képzetes, de ennek valós fizikai jelentése nincs, így ezzel nem foglalkozunk tovább.

3.2.2. GUYER-KRUMHANSL-EGYENLET:

Adott az alábbi egyenletrendszer

$$\tau_{\Delta}\partial_t T + \partial_x q = 0, \tag{53}$$

$$\tau_q \partial_t q + q + \tau_\Delta \partial_x T - \hat{a} \partial_{xx} q = 0.$$
(54)

Járjunk el hasonlóképp, helyettesítés után szintén egy algebrai rendszerhez jutunk, ennek az együttható mátrixa:

$$M = \begin{pmatrix} -\omega\tau_{\Delta} & k \\ ik\tau_{\Delta} & 1 - i\omega\tau_{q} + \hat{a}k^{2} \end{pmatrix}$$
$$\det M = 0 \to k = \sqrt{-\frac{-i\omega^{2}\tau_{q} + \omega}{\omega\hat{a} + i}}$$
(55)

Viszont a komplex értékek miatt ebben a formában nagyon nehézkes elvégezni a gyökvonást, így tegyük meg az alábbi átalakítást

$$k^{2} = \frac{1}{\omega^{2}\hat{a}^{2} + 1} \left(\omega^{2}(\tau_{q} - \hat{a}) + i(\omega^{3}\tau_{q}\hat{a} + \omega) \right).$$
(56)

Legyen a $k^2 \ {\rm egy} \ z = x + iy$ komplex számmal egyenlő, ahol

$$x = \frac{\omega^2(\tau_q - \hat{a})}{\omega^2 \hat{a}^2 + 1}; \ y = \frac{\omega^3 \tau_q \hat{a} + \omega}{\omega^2 \hat{a}^2 + 1}.$$
 (57)

Ekkor a z komplex számot írhatjuk a $z = re^{i\phi}$ alakban is, ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ és $\phi = \arctan(y/x)$. A gyökvonás művelete így könnyen elvégezhető, ugyanis $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\phi}{2}}$, azaz elég az argumentumot kettővel osztani, így megkaptuk a k(w) függvényt, melynek valós része az exponenciális tag felbontása után

$$Re\{k(\omega)\} = \sqrt[4]{\frac{\omega^4 \tau_q^2 + \omega^2}{\omega^2 \hat{a}^2 + 1}} \cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\omega^2 \hat{a} \tau_q + 1}{\omega(\tau_q - \hat{a})}\right)\right).$$
(58)

Komplex diszperziós reláció esetén a csoportsebességet az w(k) függvény valósrészének a deriváltja határozza meg, azaz

$$v_g = \frac{dRe\{\omega\}}{dk}.$$
(59)

De az $\omega(k)$ függvény ismeretlen; ezzel ellentétben a k(w) függvényt már ismerjük, így ennek a deriváltja is megfelelő a $\frac{dRe\{\omega(k)\}}{dk} = \left(\frac{dRe\{k(\omega)\}}{d\omega}\right)^{-1}$ összefüggés felhasználásával. A csoportsebesség így

$$v_{g} = 1 / \left(\frac{\omega (1 + \tau_{q}^{2} \omega^{2} (2 + \hat{a}^{2} \omega^{2})) \cos(\frac{1}{2} \arctan(\frac{1 + \hat{a} \tau_{q} \omega^{2}}{\hat{a} \omega - \tau_{q} \omega}))}{2(1 + a^{2} \omega^{2})^{2} (\frac{\omega^{2} + \tau_{q}^{2} \omega^{4}}{1 + \hat{a}^{2} \omega^{2}})^{\frac{3}{4}}} + \frac{(-\hat{a} + \tau_{q}) \omega^{2} (-1 + \hat{a} \tau_{q} \omega^{2}) \sin(\frac{1}{2} \arctan(\frac{1 + \hat{a} \tau_{q} \omega^{2}}{\hat{a} \omega - \tau_{q} \omega}))}{2(1 + a^{2} \omega^{2})^{2} (\frac{\omega^{2} + \tau_{q}^{2} \omega^{4}}{1 + \hat{a}^{2} \omega^{2}})^{\frac{3}{4}}} \right).$$
(60)

A formula meglehetősen bonyolult, de nézzük mit tudunk kiolvasni belőle.

- Fourier eset: ha $\hat{a} = \tau_q = 0$, akkor a diszperziós relációra a Fourier esetet kapjuk vissza, ez nem közvetít fizikai információt számunkra.
- MCV eset: ha $\hat{a} = 0$, akkor a MCV-egyenletre redukálódik a rendszer, mellyel a diszperziós relációra

$$k^2 = \omega^2 \tau_q + i\omega \tag{61}$$

adódik. Ekkor a $k(\omega)$ függvény valós része az (58) egyenlőséget felhasználva

$$Re\{k(\omega)\} = \sqrt[4]{\omega^4 \tau_q^2 + \omega^2} \cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\omega\tau_q}\right)\right).$$
(62)

Nézzünk most kétféle közelítést.

 Legyen a τ_q paramétere kicsi, azaz τ_q << 1. Ekkor mondhatjuk, hogy τ²_q ≈ 0 és az arctan függvény tart a ^π/₂-höz, mely által a cos-os tag tart az ¹/_{√2}-höz. A frekvencia szigorúan pozitív, így a gyök alatti kifejezés ⁴√ω² → √ω módon egyszerűsödik. Ezt felhasználva

$$Re\{k(\omega)\} \cong \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$
 (63)

Egyszerű számolás megmutatja, hogy amíg $\tau_q \leq 0.001$, addig 100 Hz-es gerjesztő frekvenciáig a hiba 5 % alatt marad. Ezzel az egyszerűbb relációval a fázissebesség $v_p = 2k$, a csoportsebesség pedig $v_g = 4k$, azaz jó közelítéssel a hullámszám valós részével egyenesen arányosak.

 Legyen most a τ_q nagy paraméter, azaz τ²_q >> 1 és ω > 1, mellyel ω⁴ >> ω². Az előző esethez hasonlóan eljárva a k(ω) függvény az alábbira egyszerűsödik:

$$Re\{k(\omega)\} \cong \omega\sqrt{\tau_q}.$$
 (64)

A hullámszám és a frekvencia közötti kapcsolat lineáris, így a fázissebesség és a csoportsebesség megegyezik, azaz $v_p = v_g = \frac{1}{\sqrt{\tau_q}}$, mely azonos a hiperbolicitás vizsgálatánál is levezetett eredménnyel. Ez azt jelenti, hogy a csoportsebesség fordítottan arányos a τ_q paraméterrel, azaz nagyobb paraméter mellett lassabb jelterjedés tapasztalható.

– **GK eset**: ilyenkor egyik paramétert sem tekintjük nullának, továbbá a fázissebesség és a csoportsebesség összefüggései sem lineárisak, csak speciális közelítések sorozatával mondhatnánk róla többet. Érdekesebb megnézni az \hat{a} és a τ_q paraméterek együttállását. Ekkor a diszperziós reláció a Fourier-egyenlethez tartozó relációra egyszerűsödik, amiből a csoportsebességre kapjuk, hogy $v_g = \sqrt{8\omega}$.

Fontos észrevenni, hogy a GK-egyenlet esetén a csoportsebesség nem tud komplex értéket felvenni, mivel a konstansok pozitív definitek a második főtétel teljesülése miatt. Figyeljük meg, hogy a csoportsebesség az \hat{a} paraméter növelésével szintén növekszik, azaz a jelátvitel sebessége nő (3. ábra), erre példát a megoldásoknál fogunk még látni.

A 2. ábrán látható a csoportsebesség frekvencia tartományon való ábrázolása. Kis frekvenciák esetén megfigyelhető a nemlineáris jelleg, valamint a függvény szélsőértékkel rendelkezik. A nemlinearitás a magasabb frekvenciák irányában teljesen elhal és egy konstans értékhez konvergál a csoportsebesség.



2. ÁBRA. A GK-egyenletre jellemző csoportsebesség különböző τ_q paraméterek melletti ábrázolása a frekvencia függvényében, $\hat{a} = 0.001$ disszipációs paraméter állandó.

3.2.3. GREEN-NAGHDI-EGYENLET:

A szituáció hasonló a GK esethez, de abból ezt nem tudjuk egyszerű paraméter helyettesítéssel visszakapni a konstitutív egyenletből hiányzó hőáram miatt:

$$\tau_{\Delta}\partial_t T + \partial_x q = 0, \tag{65}$$

$$\tau_q \partial_t q + \tau_\Delta \partial_x T - \hat{a} \partial_{xx} q = 0.$$
(66)

A már bevett eljárással számoljunk tovább.

$$M = \begin{pmatrix} -\omega\tau_{\Delta} & k\\ ik\tau_{\Delta} & -i\omega\tau_{q} + \hat{a}k^{2} \end{pmatrix}$$
$$\det M = 0 \to k^{2} = \frac{i\omega^{2}\tau_{q}}{\omega\hat{a} + i}$$
(67)

- **Disszipáció mentes eset**: ekkor $\hat{a} = 0$ így a hőmérsékletre nézve egy másodrendű hullámegyenletet eredményez, melyre a MCV-egyenletre is jellemző $\frac{1}{\sqrt{\tau_q}}$ fázissebesség és csoportsebesség adódik.
- GN eset: a $k(\omega)$ függvény valós része

$$Re\{k(\omega)\} = \sqrt[4]{\frac{\omega^4 \tau_q^2}{\omega^2 \hat{a}^2 + 1}} \cos\left(\frac{1}{2}\arctan(\hat{a}\omega)\right).$$
(68)

Figyeljük meg, hogy a GK esettel összhangban itt is csökken a hullám amplitúdója az \hat{a} paraméter növelésével. A csoportsebesség pedig

$$v_g = \frac{2(\omega + \hat{a}^2 \omega^3)}{\sqrt[4]{\frac{\omega^4 \tau_q^2}{\omega^2 \hat{a}^2 + 1}} ((2 + \hat{a}^2 \omega^2) \cos(\frac{1}{2} \arctan(\hat{a}\omega)) - \hat{a}\omega \sin(\frac{1}{2} \arctan(\hat{a}\omega)))}.$$
 (69)



3. ÁBRA. A GK-egyenletre jellemző csoportsebesség különböző τ_q paraméterek melletti ábrázolása az \hat{a} dimenziótlan disszipációs együttható függvényében, állandó frekvencia mellett.

A GK esethez hasonlóan a disszipációs együttható növekedése szintén növeli a csoportsebességet. A megoldások fejezetben arra is mutatunk példát, hogy a Fourieregyenlet megoldása ezzel az egyenlettel is közelíthető, méghozzá nagy τ_q és \hat{a} paraméterekkel úgy, hogy $\tau_q = \hat{a}$ is teljesüljön. A csoportsebesség összefüggésében is elvégezve ezeket a közelítéseket kapjuk, hogy $v_g = \sqrt{8\omega}$, ami pontosan a Fourieregyenletre jellemző csoportsebesség.



4. ÁBRA. A GN-egyenletre jellemző csoportsebesség különböző τ_q paraméterek melletti ábrázolása a frekvencia függvényében, $\hat{a} = 0.001$ disszipációs paraméter állandó.

Figyeljük meg, hogy a csoportsebesség állandó értéket fesz fel a frekvencia tartományon a relaxációs időtől függően (4. ábra). A disszipációs együttható növekedésével me-



5. ÁBRA. A GN-egyenletre jellemző csoportsebesség különböző τ_q paraméterek melletti ábrázolása az \hat{a} dimenziótlan disszipációs együttható függvényében, állandó frekvencia mellett.

redeken növekszik a csoportsebesség, továbbá a GK-egyenlettel azonosan függ a disszipációs együtthatótól (5. ábra).

3.2.4. BALLISZTIKUS-DIFFÚZÍV MODELL:

Először nézzük a már bemutatott hierarchikus egyenletrendszert:

$$\tau_{\Delta}\partial_t T + \partial_x q = 0, \tag{70}$$

$$\tau_q \partial_t q + q + \tau_\Delta \partial_x T + \kappa \partial_x Q = 0, \tag{71}$$

$$\tau_Q \partial_t Q + Q + \kappa \partial_x q = 0. \tag{72}$$

A síkhullám megoldás behelyettesítésével kapjuk az alábbi együttható mátrixot és diszperziós relációt.

$$M = \begin{pmatrix} -\omega\tau_{\Delta} & k & 0\\ k\tau_{\Delta} & -\omega\tau_{q} - i & k\kappa\\ 0 & k\kappa & -\omega\tau_{Q} - i \end{pmatrix}$$
$$\det M = 0 \to k^{2} = \frac{\omega^{2}\tau_{q} + i\omega}{1 + \frac{\kappa^{2}\omega}{\omega\tau_{Q} + i}}$$
(73)

A valós és képzetes részeket elkülönítve kapjuk, hogy

$$k^{2} = \frac{1}{\omega^{2}(\tau_{Q} + \kappa^{2})^{2} + 1} \left(\omega^{4}(\tau_{Q}^{2}\tau_{q} + \tau_{Q}\tau_{q}\kappa^{2}) + \omega^{2}(\tau_{q} - \kappa^{2}) + i[\omega^{3}(\tau_{Q}^{2} + \tau_{Q}\kappa^{2} + \tau_{q}\kappa^{2}) + \omega] \right)$$
(74)

Vegyük sorra az egyes aleseteket.

- MCV eset: a legszembetűnőbb eset, ha megszüntetjük a konstitúciós egyenletek közötti csatolást, akkor azonnal a MCV-egyenletre redukálódik a rendszer a diszperziós relációval együtt.
- Fourier eset: az előző gondolatot folytatva, ha τ_q zérus, akkor tovább redukáljuk a rendszerünk és a Fourier-egyenlethez jutunk. Másik lehetőség, hogy ha egyik paraméter sem zérus, akkor a κ és a τ_q legyenek "kis" paraméterek, ekkor a Fourier-hez nagyon hasonló megoldást fogunk kapni.
- **GK eset**: legyen $\kappa^2 = \hat{a}$ és $\tau_Q = 0$, úgy a GK-egyenletre jellemző diszperziós relációt kapjuk vissza, ami az egyenletrendszerből is jól látható.
- **Ballisztikus-diffúzív eset**: a $k(\omega)$ függvény valós része

$$Re\{k(\omega)\} = \sqrt[4]{\frac{\omega^{2}(1+\tau_{q}^{2}\omega^{2})(1+\tau_{Q}^{2}\omega^{2})}{1+\omega^{2}(\tau_{Q}+\kappa^{2})^{2}}} \times (75)$$

$$\times \cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1+\omega^{2}(\tau_{Q}^{2}+\kappa^{2}(\tau_{q}+\tau_{Q}))}{\omega(\tau_{q}-\kappa^{2})+\omega^{3}\tau_{q}\tau_{Q}(\tau_{Q}+\kappa^{2})}\right)\right)$$

A fenti alak csak a csoportsebesség meghatározására lesz hasznunkra. Ha még azonnal a determináns képzésekor elhagyjuk a képzetes tagokat, akkor abból a fázissebességre visszakapjuk a hiperbolicitás vizsgálatának során meghatározott jelterjedési sebességet, azaz

$$v_p = \sqrt{\frac{\kappa^2 + \tau_Q}{\tau_q \tau_Q}}.$$
(76)

Vegyük észre, hogy amíg τ_q és τ_Q kicsi paraméterek, $\kappa > 1$, valamint igaz még, hogy $\tau_q \omega = \tau_Q \omega = 1$, akkor az egész $Re\{k(\omega)\}$ összefüggés közelíthető $\frac{1}{\kappa}$ -val, a fázissebesség pedig $\kappa \omega$ -val. A csoportsebességre kapott összefüggés túl hosszú, közlésétől eltekintünk. Ebben az esetben sem lehet komplex értékű a csoportsebesség. A paraméterektől való függést szemléletesen a csoportsebesség függvényének képével mutathatjuk be (6. és 7. ábrák).

Fontos észrevennünk a 6. ábrán, hogy a $v_g(\omega)$ függvénynek szélsőértéke van, mely a már említett ablakfeltételre utalhat. Azonban ennek jelentése további vizsgálatokat igényel. A csoportsebesség minden esetben a GN-egyenlet általi értékekhez konvergál és szintén konstans marad a frekvencia tartományban. Érdekes tulajdonsága, hogy a κ paraméter növelésével növekszik a csoportsebesség (7. ábra), de másképp, mint a GK- és GN-egyenleteknél.

A ballisztikus tartományban¹⁵ szemléltetett paraméterek esetén az alábbiak szerint alakul a csoportsebesség frekvencia függése. Figyeljük meg, hogy ebben az esetben két maximum hellyel is rendelkezik a függvény.

¹⁵ Megoldások fejezet, 33. ábra



6. ÁBRA. A ballisztikus-diffúzív egyenletre jellemző csoportsebesség különböző τ_q és τ_Q paraméterek melletti ábrázolása a frekvencia függvényében, $\kappa = 0.001$ paraméter állandó. A GK-egyenlettel megegyező karakterisztikát láthatunk.

Ezzel a fejezettel pontosabb képet kaphattunk arról, hogy milyen módon módosítják az egyes paraméterek a kapott megoldásokat a terjedési sebességekre fókuszálva. Láthattuk, hogy a legtöbb diszperziós relációban jelen vannak a frekvencia magasabb rendű hatványai is, ami disszipációra és diszperzióra utal. A numerikus megoldások pontosságában ennek a két jelenségnek nagy szerepe van. A disszipáció a hullám ellapulását okozza, míg a diszperzió egy állandó érték körüli oszcillációként jelentkezik. Egy numerikus séma stabilitásának vizsgálata során olyan feltételeket határozunk meg, melyek nem engedik, hogy ezek a mesterséges oszcillációk az időben előrehaladva növekedjenek. A lézerimpulzus kísérlet bemutatása után részletesen tárgyaljuk a konvergencia bizonyítását, mely szoros kapcsolatban áll a stabilitással.

4. A lézerimpulzus kísérlet

A bemutatott hővezetési modelleket a széles körben elterjedt lézerimpulzus kísérleten "teszteljük". Ezt a módszert az anyagok hőfizikai paramétereinek (hőfokvezetési és hővezetési tényező) mérésére használják. Több oka van annak, hogy ezt a kísérletet választottuk:

- A módszert több, mint 50 éve használják, jól kidolgozott, a technikai fejlődésének hála folyamatos fejlesztés alatt van.
- A mérnöki gyakorlat számára jól ismert, a mérés egyszerű és könnyen reprodukálható, széles körben alkalmazott mérési eljárás az anyagok hővezetési tényezőjének



7. ÁBRA. A ballisztikus-diffúzív egyenletre jellemző csoportsebesség különböző τ_q és τ_Q paraméterek melletti ábrázolása a κ dimenziótlan paraméter függvényében, állandó frekvencia mellett.

mérésére.

 Ami a számunkra legfontosabb, a Fourier-féle hővezetésen túli jelenségek kimutatására a legalkalmasabb módszer lehet a kis karakterisztikus idejű hőimpulzus miatt.

A mérés során a minta hátfalán mérik a hőmérséklet időbeli változását és abból vissza számolhatóak a kívánt hőfizikai paraméterek, így főként mi is ezt a fajta karakterisztikát fogjuk figyelemmel kísérni. A mérés vázlata a 9. ábrán látható.

4.1. Kezdeti és peremfeltételek

A kezdeti feltételek megadásakor homogén mezőket tételezünk fel a dimenziótlan egyenletekben, egyformán zérus kiindulási értékkel. A peremfeltételek nem ilyen egyszerűek. A legtöbb modell esetén a hőmérséklet és a hőáram mezővel dolgozunk, a ballisztikus-diffúzív modell esetén viszont egy harmadik mennyiség is fellép, a hőáram árama. Induljunk ki abból, hogy a lézerimpulzus egy hőáram, ennek megfelelően a hőáram mezőre adunk meg peremfeltételt. Nem foglalkozunk a minta lehűlésével, így a hőáram impulzus után a minta mindkét oldalán állandó nulla hőáramot definiálunk.

Ha az egyenletrendszereinket csak a hőmérsékletet tartalmazó formára hoznánk, azaz kiküszöbölnénk a hőáramot (és esetleg a hőáram áramát), akkor úgy gondolhatjuk, hogy az egyenlet térbeli rendjéből egyértelműen meghatározható a szükséges peremfeltételek száma. Ez általában véve igaz is, viszont magát a peremfeltételt megadni közel sem



8. ÁBRA. A ballisztikus-diffúzív egyenletre jellemző csoportsebesség különböző $\tau_q = 1.9, \tau_Q = 0.07$ és $\kappa = 0.2$ paraméterek melletti ábrázolása a frekvencia függvényében.



9. ÁBRA. A lézerimpulzus mérési módszer sematikus vázlata.

egyszerű. Mivel ilyenkor nem szerepel explicit módon a hőáram az egyenleteinkben, így elkerülhetetlen a konstitutív egyenletek alkalmazása. A térben nemlokális egyenleteknél (például a GK- és GN-egyenletek) mindenképp szükség van a hőáram mezőre, egészen pontosan annak "féloldalas" deriváltjára. A [28] dolgozatban láthattuk, hogy ennek hiánya a megoldások egy bizonyos paraméter tartományán "fizikátlan" eredményre vezet, negatív hőmérséklet alakul ki.

A ballisztikus-diffúzív modell esetén a helyzet még bonyolultabb, mivel a hőmérséklet harmadik deriváltját is ismernünk kéne a peremeken. Így lényegesen egyszerűbb - és a lézerimpulzus kísérletben kézenfekvőbb is - a hőáramot megadni a peremen. A rendszereink ilyen szempontú megoldása vezetett minket egy olyan diszkretizálási eljáráshoz, ahol a peremfeltételeket különleges módon kezelhetjük, erről részletesen a következő fejezetben lesz szó, most csak a hőáram mezőre vonatkozó peremfeltételek tárgyaljuk.

A lézerimpulzust definiáljuk az alábbi módon [47]:

$$q_{x=0} = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi \cdot \frac{t}{t_p}) & \text{ha } 0 < t \le t_p \\ 0 & \text{ha } t > t_p \end{cases}$$

Ennek ábrázolása látható a 10. ábrán.



10. ÁBRA. Lézerimpulzus peremfeltétel.

Fontos észrevenni, hogy a függvény "simán" indul, azaz a deriváltja a kezdeti időpontban nulla, valamint a hullám kifutása is ilyen. Ez numerikus szempontból fontos. A nem nulla derivált mesterséges numerikus perturbációt idéz elő. Ez jól érzékeltethető az egységugrás függvény példáján. A kiindulási időpontban lévő hirtelen ugrás (a derivált itt végtelen) lehetetlenné teszi a véges differenciával történő "sima" megoldást, bármilyen finom is a diszkretizáció, teljesen nem fognak eltűnni a kéretlen numerikus hibák.

Természetesen a valóságban a kísérletek során nem ilyen jelalak jelenik meg. Mi a jelalaktól való függést nem vizsgáljuk, az egyenletek kvalitatív viselkedésének tanulmányozásához ez is elegendő. Viszont az impulzus hossza a kísérlet időtartamához képest kicsi, ezért várhatóan a pontos jelalak nem játszik lényeges szerepet.

5. NUMERIKUS MÓDSZER

Az egyenletek megoldásához a véges differencia módszert használtuk. Ennek vannak előnyei és hátrányai is:

- Könnyű a diszkretizálás, jól követhető a séma pontossága, peremfeltételtől függetlenül használható, egyszerű leprogramozni.
- Mesterséges numerikus jelenségek, oszcillációk és fázishiba lehetősége. A hirtelen változó megoldásokat körülményes kezelni.



11. ÁBRA. Diszkretizálási eljárás.

Célunk volt egy könnyen kezelhető explicit sémát írni, mely hasonló szerkezetű egyenletrendszerekre könnyen kiterjeszthető. Mivel a vizsgált hővezetési modellek rendre hasonló struktúrával bírnak, így ez egy fontos szempont, viszont a stabilitás vizsgálata elengedhetetlen. A séma konzisztenciájának a vizsgálatára is szükség van, melynek igazolásával a Lax-Richtmyer tétel¹⁶ [54] alapján a séma konvergenciája¹⁷ is biztosítottá válik. A konzisztencia vizsgálattal együtt a séma hibájára is becslést tudunk majd adni.

5.1. DISZKRETIZÁLÁS

A sémánk sajátossága, hogy egymáshoz képest eltolt mezőket alkalmaz, melyet az alábbi 11. ábra is szemléltet.

Az egyik mező a minta teljes tértartományát lefedi (a fenti szélesebb), addig a másik $\frac{\Delta x}{2}$ -vel el van tolva. Képzeljük el magunk előtt, hogy a mintát kis darabokra bontjuk, kontinuumok kölcsönhatását számoljuk. Ezzel a fajta diszkretizálással megkülönböztetünk felület jellegű és térfogat jellegű mennyiségeket, azaz ami a teljes tartományt lefedi, ott a cellák határaira írjuk fel az egyenleteket, az eltolt mező esetén pedig a cellák középpontjára, mint egyfajta átlagként kezelve az adott cellára vonatkozólag. További tualjdonsága, hogy így a térfogati mennyiségekre nem szükséges peremfeltételeket definiálnunk. Ezzel a megfontolással tehát elegendő lesz számunkra a hőáram, mint peremfeltétel, a többi mennyiséget eltoltnak tekintjük. Ez a választás viszont önkényes, ha hőmérsékletet szeretnénk definiálni a peremen, akkor a többi mennyiséget fogjuk eltolni. Vegyes peremfeltétel esetén viszont megfontolandó a választás.

¹⁶ Másnéven Lax ekvivalencia tétele.

¹⁷Liu [55] is felhívja rá a figyelmet, hogy a különböző diszkretizációs eljárásoknak eltérő a pontossága, konvergenciájának sebessége és a rendszerre jellemző fázissebessége, melynek vizsgálata kevéssé terjedt el.

A belső energia mérlegegyenlete minden modellhez szükséges és egységes, ennek diszkretizált formája a hőmérsékletre rendezve:

$$T_j^{n+1} = T_j^n - \frac{\Delta t}{\tau_\Delta \Delta x} (q_{j+1}^n - q_j^n).$$
(77)

Nézzük most modellenként a konstitutív egyenleteket:

- Fourier-egyenlet:

$$q_j^{n+1} = -\frac{\tau_{\Delta}}{\Delta x} (T_j^n - T_{j-1}^n).$$
(78)

- Guyer-Krumhansl-egyenlet:

$$q_{j}^{n+1} = q_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{\tau_{q}} q_{j}^{n} - \frac{\tau_{\Delta} \Delta t}{\tau_{q} \Delta x} (T_{j}^{n} - T_{j-1}^{n}) + \frac{\hat{a} \Delta t}{\tau_{q} \Delta x^{2}} (q_{j+1}^{n} - 2q_{j}^{n} + q_{j-1}^{n}).$$
(79)

Ebből az Maxwell-Cattaneo-Vernotte modell visszakapható az $\hat{a} = 0$ paraméter mellett.

- Green-Naghdi-egyenlet:

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\tau_\Delta \Delta t}{\tau_q \Delta x} (T_j^n - T_{j-1}^n) + \frac{\hat{a} \Delta t}{\tau_q \Delta x^2} (q_{j+1}^n - 2q_j^n + q_{j-1}^n).$$
(80)

- Ballisztikus-diffúzív egyenlet:

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{\tau_q} q_j^n - \frac{\tau_\Delta \Delta t}{\tau_q \Delta x} (T_j^n - T_{j-1}^n) - \frac{\kappa \Delta t}{\tau_q \Delta x} (Q_j^n - Q_{j-1}^n), \tag{81}$$

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\tau_Q} Q_j^n - \frac{\kappa \Delta t}{\tau_Q \Delta x} (q_{j+1}^n - q_j^n).$$
(82)

A ballisztikus-diffúzív modellben nem csak a hőmérséklet, de a hőáram árama is eltolt mennyiség a diszkretizáció szempontjából. A séma roppant egyszerű, időben előrelépő, térben pedig visszalépő. Ez persze csak a séma szempontjából igaz, fizikailag a diszkretizáció miatt centrális. A sémánk fő hátránya a pontossága, mivel a közelítés mindenhol elsőrendű; de előnye a roppant egyszerű felépítése és kis számításigénye.

5.2. KONZISZTENCIA

Egy numerikus séma konzisztens, ha Δx , Δt tart a nullához, úgy a numerikus megoldás is tart a pontos megoldáshoz. Ennek bizonyításához nem kell mást tenni, mint a séma egyes elemeit Taylor-sorba fejteni, majd visszahelyettesíteni a sémába. Ezzel megkapjuk az egyes hőfizikai mennyiségekre ható numerikus ("diszkrét") operátort. Ezt kivonva az eredeti egyenlet folytonos értékkészletű operátorából nullát kell kapjunk. Nézzük először a belső energia mérlegegyenletét; írjuk fel az eredeti egyenletet és a sémát az alábbi formákban:

$$\tau_{\Delta}\partial_t T + \partial_x q = 0, \tag{83}$$
$$P_1 = \tau_{\Delta} \frac{\partial}{\partial t}; \ P_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

ahol P_1 és P_2 a hőmérséklet és a hőáram operátorai.

$$\tau_{\Delta} \frac{T_{j}^{n+1} - T_{j}^{n}}{\Delta t} + \frac{q_{j+1}^{n} - q_{j}^{n}}{\Delta x} = 0$$
(84)

Fejtsük sorba a T_j^{n+1} és q_{j+1}^n tagokat az alábbi módon:

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \Delta t \partial_t T + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} T + O(\Delta t^3),$$
(85)

$$q_{j+1}^n = q_j^n + \Delta x \partial_x q + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} q + O(\Delta x^3),$$
(86)

és (84) egyenletbe helyettesítve:

$$\tau_{\Delta} \left(\partial_t T + \frac{1}{2} \Delta t \partial_{tt} T + O(\Delta t^2) \right) + \left(\partial_x q + \frac{1}{2} \Delta x \partial_{xx} q + O(\Delta x^2) \right) = P_{1_{\Delta t, \Delta x}} T + P_{2_{\Delta t, \Delta x}} q,$$
(87)

ahol $P_{1_{\Delta t,\Delta x}}$ és $P_{2_{\Delta t,\Delta x}}$ diszkrét operátorok. Ezután tartassuk nullához a differencia tagokat, majd vonjuk ki az eredeti egyenletből; az eredmény nulla. A séma a léptékek csökkentésével a valós megoldáshoz tart. A séma konzisztencia rendje 1, így a konvergencia rendje is 1.

Az összes modell közül csak a GK esetre fejtjük ki a levezetést, mivel egyrészt a szerkezete megegyezik az összes többivel, illetve egyértelműen lehet belőle származtatni is a Fourier és MCV modelleket, valamint a GN egyenlettel is nagy hasonlóságot mutat. Másrészt a ballisztikus modell esetén a diszkretizálás szerkezete teljesen megegyező, ugyanolyan konzisztencia és konvergencia rend jellemző az összes sémára.

Ebben az esetben az alábbi tagok sorfejtésére van szükség:

$$T_{j-1}^{n} = T_{j}^{n} - \Delta x \partial_{x} T + \frac{1}{2} \Delta x^{2} \partial_{xx} T - O(\Delta x^{3}),$$
(88)

$$q_{j-1}^{n} = q_{j}^{n} - \Delta x \partial_{x} q + \frac{\Delta x^{2}}{2} \partial_{xx} q - \frac{\Delta x^{3}}{6} \partial_{x}^{3} q + \frac{\Delta x^{4}}{24} \partial_{x}^{4} q - O(\Delta x^{5}), \qquad (89)$$

$$q_{j+1}^n = q_j^n + \Delta x \partial_x q + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} q + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_x^3 q + \frac{\Delta x^4}{24} \partial_x^4 q + O(\Delta x^5), \qquad (90)$$

$$q_j^{n+1} = q_j^n + \Delta t \partial_t q + \frac{1}{2} \Delta t^2 \partial_{tt} q + O(\Delta t^3).$$
(91)

A hőáram két tagját magasabb rendig kellett sorbafejteni a sémában szereplő másodrendű derivált miatt. Visszahelyettesítve (79) egyenletbe:

$$\tau_{q} \left(\partial_{t}q + \frac{1}{2} \Delta t \partial_{tt}q + O(\Delta t^{2}) \right) + q_{j}^{n} + \tau_{\Delta} \left(\partial_{x}T - \frac{1}{2} \Delta x \partial_{xx}T - O(\Delta x^{2}) \right) + \\ - \hat{a} \left(\partial_{xx}q + \frac{1}{12} \Delta x^{2} \partial_{x}^{4}q + O(\Delta x^{4}) \right).$$
(92)
Ebből látható, hogy a másodrendű centrális derivált másodrendben pontos, de a séma legalacsonyabb rendje számít, így ennek is a konzisztencia rendje 1.

Néhány fontos megjegyzés a konzisztenciával kapcsolatban:

- Az előbbiekben bemutatott levezetés a sémánk gyenge ("w-consistent") konzisztenciát bizonyítja. Konvencionális értelemben ezt szokták egy séma konzisztenciája alatt érteni. Viszont ez azzal jár, hogy a differenciaegyenleteink nem biztos, hogy örökölnek minden tulajdonságot ami a differenciálegyenletekre vonatkozik [56]. Az erős konzisztencia ("s-consistent") bizonyítása lényegesen körülményesebb. Számunkra jelenleg a gyenge konzisztencia is elegendő.
- A már említett Lax-Richtmyer ekvivalencia elv pontosabb megfogalmazása: egy kezdetiérték problémára vonatkozó lineáris parciális differenciálegyenlet vele konzisztens véges differenciákkal való közelítése konvergens, ha a séma stabil. A kezdetiérték probléma korrekt kitűzöttségű kell legyen, azaz
 - 1. létezik megoldás,
 - 2. ez a megoldás egyértelmű,
 - 3. a megoldás folytonosan függjön a kezdeti és peremfeltételektől,

ahol az első két pont, a megoldás létezése és unicitása magában foglalja a peremfeltételek ellenőrzését is.

Azaz a konvergencia biztosításához a sémánk stabilitását még bizonyítani kell. Szimmetrikus hiperbolikus rendszerekre könnyen tudunk korrekt kitűzöttségű problémát megadni [43]. Ennek további vizsgálatát, a szükséges tételek bizonyítását és pontosabb matematikai megfogalmazását [57] részletezi.

5.3. STABILITÁSVIZSGÁLAT

A numerikus séma akkor marad stabil, ha a közelítés hibája véges marad. Ennek ellenőrzésére a Neumann- és Jury-módszereket alkalmazzuk. Először nézzük a Neumannféle eljárást közelebbről. Tételezzük fel az egyenleteink megoldását az alábbi formában:

$$\phi_j^n = \xi^n e^{ikj\Delta x},\tag{93}$$

ahol *i* a képzetes egység, *k* a hullámszám, $j\Delta x$ a "j"-edik térlépés, *n* pedig az időlépés indexe. A séma stabil, ha a ξ növekményi faktorra igaz, hogy $|\xi| \leq 1$. Ha $|\xi| = 1$, akkor a sémát konzervatívnak nevezzük. Helyettesítsünk vissza a sémákba, kezdjük a belső

energia mérlegegyenletével:

$$-T_{j}^{n+1} + T_{j}^{n} - \frac{\Delta t}{\tau_{\Delta} \Delta x} (q_{j+1}^{n} - q_{j}^{n}) = 0, \qquad (94)$$

$$(\xi - 1)T_0 + \frac{\Delta t}{\tau_\Delta \Delta x} \left(e^{ik\Delta x} - 1 \right) q_0 = 0.$$
(95)

Mivel két mennyiséggel, a hőmérséklettel és a hőárammal dolgozunk, ezért egy lineáris algebrai egyenletrendszerre fogunk jutni. A legegyszerűbbel, a Fourier-egyenlettel kezdjük,

$$\xi q_0 + \frac{\tau_\Delta}{\Delta x} \left(1 - e^{-ik\Delta x} \right) T_0 = 0.$$
(96)

Így a rendszer az alábbi formát ölti

$$\begin{pmatrix} \xi - 1 & \frac{\Delta t}{\tau_{\Delta} \Delta x} \left(e^{ik\Delta x} - 1 \right) \\ \frac{\tau_{\Delta}}{\Delta x} \left(1 - e^{-ik\Delta x} \right) & \xi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = 0.$$

A rendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása, amikor az együttható mátrix determinánsa zérus. Ezáltal a rendszer $F(\xi)$ karakterisztikus polinomja a következő:

$$F(\xi) = \xi^2 - \xi - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (2\cos(k\Delta x) - 2) = 0.$$
(97)

Fontos észrevétel, hogy a polinomot úgy kell rendezni, hogy a legmagasabb fokú tag együtthatója pozitív legyen. A hővezetési modellek vizsgálatakor amíg a rendszer másodrendű marad, nem okoz gondot. Egyedül a ballisztikus modell harmadrendű, ott ezt feltétlen figyelembe kell venni, mivel a Jury-kritériumok alkalmazásakor relációt változtat. Továbbá megjegyzendő, hogy a Jury-kritériumok diszkrét rendszerek vizsgálatára alkalmasak, míg a közismertebb Routh-Hurwitz kritériumok folytonos rendszerekre, illetve bilinieáris transzformációval diszkrét rendszerre is alkalmazható [58]. A stabilitási kritériumok szerepe, hogy a karakterisztikus polinom együtthatóiból következtethetünk a gyökeire. Amíg a gyökök a komplex számsíkon elhelyezkedő egységkörön belül vannak, addig a differenciaegyenlet egyensúlya aszimptotikusan stabil. Általános szabály, hogy "n"-ed rendű polinomhoz n+1 számú feltétel tartozik.

Most nézzük az általános Jury feltételeket:

- 1. $F(\xi = 1) \ge 0$
- 2. $F(\xi=-1)\geq 0$ ha n páros és $F(\xi=-1)\leq 0$ ha n páratlan
- 3. $|a_0| \le a_n$, azaz ha a legmagasabb fokú tag együtthatója 1, úgy a triviális megoldás esetén is biztosítja, hogy a konstans nulladrendű tag ne legyen nagyobb egynél.

Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor a séma stabil és a növekményi faktorra igaz lesz, hogy $|\xi| \leq 1$. A továbbiakban csak a karakterisztikus polinomot írjuk fel és a kritérium számára utalunk.

- Fourier-egyenlet: a polinomot már levezettük, nézzük a kritériumokat:
 - 1. $\frac{4\Delta t}{\Delta r^2} > 0$; ez minden esetben teljesül.
 - 2. $1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} > 0$; szintén minden paraméter kielégíti.
 - 3. $\Delta t < \frac{\Delta x^2}{4}$; a harmadik Jury-kritérium feltételt szab az időlépésre nézve.
- **Guyer-Krumhansl-egyenlet**: tekintsük a polinomot az $a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0 = 0$ alakban, ahol

$$a_{2} = 1,$$

$$a_{1} = \frac{\Delta t}{\tau_{q}} - 2 - \frac{\hat{a}\Delta t}{\tau_{q}\Delta x^{2}} \left(2\cos(k\Delta x) - 2\right),$$

$$a_{0} = 1 - \frac{\Delta t}{\tau_{q}} + \frac{\hat{a}\Delta t}{\tau_{q}\Delta x^{2}} \left(2\cos(k\Delta x) - 2\right) - \frac{\Delta t^{2}}{\tau_{q}\Delta x^{2}} \left(2\cos(k\Delta x) - 2\right).$$

A $cos(k\Delta x) = -1$ érték jelenti a szélsőértéket, minden esetben ezt vesszük alapul. Ezt figyelembe véve a kritériumokra kapjuk, hogy:

- 1. $\begin{aligned} &\frac{4\Delta t^2}{\tau_q \Delta x^2} > 0;\\ &2. \quad \frac{\Delta x^2}{4} \left(\frac{2\tau_q}{\Delta t} 1\right) + \frac{\Delta t}{2} > \hat{a}. \end{aligned}$
- 3. Az abszolút érték miatt két feltételt kapunk; $\Delta t \frac{\Delta x^2}{4} < \hat{a}$. A másik kritérium pedig $\frac{\Delta x^2}{4} \left(\frac{2\tau_q}{\Delta t} - 1\right) + \Delta t > \hat{a}$, mely gyengébb, mint a 2. pontban leírt, mivel $\frac{\Delta t}{2} < \Delta t$.

A MCV-egyenletre vonatkozó feltételt $\hat{a} = 0$ mellett kapjuk meg.

– Green-Naghdi-egyenlet: a konstitutív egyenletből a GK esethez képest hiányzik a hőáram nulladrendű deriváltja, így nem meglepő, hogy a $\frac{\Delta t}{\tau_q}$ paraméter fog hiányozni a polinom együtthatóiból, azaz:

$$a_{2} = 1,$$

$$a_{1} = -2 - \frac{\hat{a}\Delta t}{\tau_{q}\Delta x^{2}} \left(2\cos(k\Delta x) - 2\right),$$

$$a_{0} = 1 + \frac{\hat{a}\Delta t}{\tau_{q}\Delta x^{2}} \left(2\cos(k\Delta x) - 2\right) - \frac{\Delta t^{2}}{\tau_{q}\Delta x^{2}} \left(2\cos(k\Delta x) - 2\right).$$

Így a stabilitás feltételei:

1. $\frac{4\Delta t^2}{\tau_q \Delta x^2} > 0$; vagyis ez egyezik a GK esettel.

- 2. $\frac{\tau_q \Delta x^2}{2\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} > \hat{a}.$
- 3. Az abszolút érték miatt most is két feltételt kapunk; $\Delta t < \hat{a}$ feltétel kizárja az $\hat{a} = 0$ esetet, ami összhangban áll a termodinamikai feltételekkel is.

A másik kritérium pedig $\frac{\tau_q \Delta x^2}{2\Delta t} + \Delta t > \hat{a}$; most is ez a gyengébb, mivel $\Delta t > \frac{\Delta t}{2}$.

 Ballisztikus-diffúzív egyenlet: a rendszer 3 egyenletből áll, így a polinom is harmadfokú, együtthatói a következők.

$$a_{3} = 1$$

$$a_{2} = \frac{\Delta t}{\tau_{q}} + \frac{\Delta t}{\tau_{Q}} - 3$$

$$a_{1} = \frac{\Delta t^{2}}{\tau_{q}\tau_{Q}} + 3 - \frac{2\Delta t}{\tau_{q}} - \frac{2\Delta t}{\tau_{Q}} - \left(\frac{\kappa^{2}\Delta t^{2}}{\tau_{q}\tau_{Q}\Delta x^{2}} + \frac{\Delta t^{2}}{\tau_{q}\Delta x^{2}}\right) (2\cos(k\Delta x) - 2)$$

$$a_{0} = \frac{\Delta t}{\tau_{q}} + \frac{\Delta t}{\tau_{Q}} - \frac{\Delta t^{2}}{\tau_{Q}\tau_{q}} - 1 + \left(\frac{\kappa^{2}\Delta t^{2}}{\tau_{q}\tau_{Q}\Delta x^{2}} - \frac{\Delta t^{2}}{\tau_{q}\Delta x^{2}}\left(\frac{\Delta t}{\tau_{Q}} - 1\right)\right) (2\cos(k\Delta x) - 2)$$

Az eddig szokásos követelményeken kívül szükség van még egy negyedik követelményre is, mégpedig:

 $|b_0| > |b_2|$, and $b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}$ és $b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$.

Jól láthatóan nagyon gyorsan elbonyolódnak a kritériumok, ennél az esetnél a numerikus kiértékelés javallott. Az első 3 kritériumot még le lehet vezetni analitikusan, de a formulák nem olyan átláthatóak ahogy eddig, nem szolgáltatnak többlet információt, ezért ezek közlésétől eltekintünk.

Ezzel a stabilitásvizsgálat végére értünk, a sémák konvergenciája biztosított.

6. MEGOLDÁSOK ÉS ÖSSZEHASONLÍTÁSOK

Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy az egyenletekben szereplő paraméterek milyen hatást gyakorolnak a megoldásokra. A rendszerek fontos tulajdonsága, hogy a paraméterek bizonyos együttállásakor vagy akár a köztük lévő nagyságrendi különbség hatására visszakapjuk a Fourier-egyenlet megoldását. Olyan kvalitatív analízist folytatunk, melyre kísérletet lehet tervezni, vagyis olyan különbségeket keresünk, mely kísérletileg is megfogható. A megoldások elemzését a Fourier-egyenlettel kezdjük, ez egy standard karakterisztikát fog jelenteni, az ettől való eltéréseket fogjuk keresni.

6.1. A FOURIER-EGYENLET MEGOLDÁSAI

Ha a dimenziótlan, hőmérsékletre rendezett (98) Fourier-egyenletet vizsgáljuk, akkor láthatóan az egyenlet nem tartalmaz paramétert. Kizárólag a peremfeltételben jelenik meg a rendszer egyetlen időparamétere amitől a megoldás függ: a τ_{Δ} impulzushossz. Az egyenlet:

$$\partial_t T = \partial_{xx} T. \tag{98}$$

Felhívjuk rá a figyelmet, hogy ezzel a dimenziótlanítással maga τ_{Δ} tartalmazza a szükséges anyagi paramétereket, amiből mindent vissza lehet számolni egy esetleges illesztés során. A legtöbb megoldás esetén a $\tau_{\Delta} = 0.04$ értékkel fogunk dolgozni Czél és munkatársai [47] alapján, ez alól csak a ballisztikus modell lesz kivétel. Itt emeljük ki, hogy egyetlen hőmérsékletre rendezett egyenlet sem tartalmazza ilyen formában a τ_{Δ} paramétert. A megoldásokat a 12. és 13. ábrák mutatják.



12. ÁBRA. A hőmérsékletmező 3D reprezentációja a Fourier-egyenlet megoldásánál.



13. ÁBRA. Fourier-egyenlet megoldása $\tau_{\Delta} = 0.04$ paraméterrel. A többi egyenlet megoldását ezzel hasonlítjuk össze.

6.2. A MAXWELL-CATTANEO-VERNOTTE-EGYENLET MEGOLDÁSAI

A Fourier-egyenlet kiegészül egy időderiválttal, ennek megfelelően a hővezetést csillapított hullámterjedés formájában írja le:

$$\tau_q \partial_{tt} T + \partial_t T = \partial_{xx} T. \tag{99}$$

A τ_q ha tart a nullához, akkor tartunk a Fourier-egyenlet megoldásához. Ha viszont egyre nagyobb a τ_q paraméter, annál inkább erősödik a megoldás hullámjellege (14., 15., 16. ábrák) és egy másodrendű hullámegyenlet megoldásához (disszipáció mentes GN-egyenlet) tart. Megfigyelhető még, hogy a τ_q paraméter növelésével a jelterjedési sebesség csökken.



14. ÁBRA. MCV-egyenlet megoldása $\tau_{\Delta} = 0.04$ és $\tau_q = 0.02$ paraméterekkel. A jobboldali ábrán már jól megfigyelhető a hullámszerű terjedés, valamint helyesen visszakaptuk a rendszer karakterisztikus $\frac{1}{\sqrt{\tau_q}}$ jelterjedési sebességét.



15. ÁBRA. MCV-egyenlet megoldás
a $\tau_{\Delta}=0.04$ és $\tau_q=0.06$ paraméterekkel.



16. ÁBRA. MCV-egyenlet megoldása szintvonalas ábrázolásban $\tau_{\Delta} = 0.04$ és $\tau_q = 0.06$ paraméterekkel. A hőimpulzus visszaverődik, majd kisimul.

6.3. A GUYER-KRUMHANSL-EGYENLET MEGOLDÁSAI

Ahogy eddig is láttuk, $\hat{a} = 0$ paraméter visszaadja a MCV-egyenletet, így ezzel itt már nem foglalkozunk. Ahogy ezt a paramétert növeljük, úgy egyre disszipatívabb a rendszer, nő a csillapítás (17. ábra). Az alábbi, (100) hőmérsékletre rendezett egyenletben érdemes észrevennünk, hogy nem csak az eredeti Fourier-egyenlet, hanem annak az időderiváltja is benne van:

$$\tau_q \partial_{tt} T + \partial_t T = \partial_{xx} T + \hat{a} \partial_{txx} T.$$
(100)

Ebből következően, ha $\tau_q = \hat{a}$, akkor olyan egyenlethez jutunk, mely pontosan a Fourieregyenlet megoldását adja vissza (18. ábra).



17. ÁBRA. GK-egyenlet alulcsillapított (MCV-jellegű) megoldása $\tau_{\Delta} = 0.04$; $\tau_q = 0.02$; $\hat{a} = 0.001$ paraméterekkel. A jobboldali ábrán a hullámszerű terjedés még kivehető.

Ha tovább növeljük a disszipációs paramétert, akkor a rendszer túlcsillapítottá válik, melynek érdekessége, hogy megnő a jelterjedési sebesség (19. ábra). Figyeljük meg, hogy



18. ÁBRA. GK-egyenlet Fourier-jellegű megoldása $\tau_{\Delta} = 0.04$; $\tau_q = \hat{a} = 0.02$ paraméterekkel. Ekkor pontosan a 13. ábrán látható megoldást kapjuk vissza.

ez a tapasztalatunk összhangban áll a diszperziós relációból számolt csoportsebességgel.



19. ÁBRA. GK-egyenlet túlcsillapított megoldása $\tau_{\Delta} = 0.04$; $\tau_q = 0.02$; $\hat{a} = 0.04$ paraméterekkel. A hőmérséklet hamarabb kezd emelkedni, mint a Fourier-egyenlet esetében (13. és 18. ábrák).

6.4. A GREEN-NAGHDI-EGYENLET MEGOLDÁSAI

Bár a konstitutív egyenletből nem látszik, a hőmérsékletre rendezett (101) formából láthatóan csillapított hullámegyenlettel van dolgunk. Amennyiben $\hat{a} = 0$, úgy a rendszer disszipációmentes, azonban ezt az esetet a termodinamikai feltételek kizárják. A hőmérsékletre rendezett GN-egyenlet:

$$\tau_q \partial_{tt} T = \partial_{xx} T + \hat{a} \partial_{txx} T. \tag{101}$$

A 20. ábra egy gyengén csillapított megoldást mutat. A hőmérsékletcsúcsok a hullám visszaverődését szemléltetik, melyet a szintvonalas (21. ábra) reprezentációval jobban meg lehet érteni.



20. ÁBRA. GN-egyenlet megoldása $\tau_{\Delta} = 0.04$; $\tau_q = 0.02$; $\hat{a} = 10^{-4}$ paraméterekkel. Jól kivehető a hullám visszaverődése és gyengülése.



21. ÁBRA. GN-egyenlet megoldása szintvonalas ábrázolásban $\tau_{\Delta} = 0.04$; $\tau_q = 0.02$; $\hat{a} = 10^{-4}$ paraméterekkel.

Láthatóan a hullám kezd kiszélesedni, vagyis a hullám energiája eloszlik a térben az idő múlásával. Kis mértékű csillapítás esetén az eddigi megoldások karakterisztikus idejéhez¹⁸ mérten elég sokáig tart.

A 22. és 23. ábrák egy olyan megoldást mutatnak, ahol a csillapítás mértéke az előzőnél jóval nagyobb, a hullám gyorsan disszipálódik a térben.

Ha párhuzamosan növeljük a τ_q és \hat{a} paramétereket, melyeknek ugyanolyan értéket adunk, akkor kezdjük közelíteni a Fourier-egyenlet megoldását, ezek eredményét a 24. és 25. ábrák szemléltetik.

¹⁸ Az eddig tapasztalt megoldásoknál az időintervallum 0-tól 1-ig tartott, ekkorra már a rendszer majdnem minden esetben elérte a stacionárius állapotát. Ebben az esetben pedig egy nagyságrenddel több időre van szükség.



22. ÁBRA. GN-egyenlet megoldása $\tau_{\Delta} = 0.04; \ \tau_q = 0.02; \ \hat{a} = 0.02$ paraméterekkel.



23. ÁBRA. A hőmérsékletmező 3D reprezentációja a GN-egyenlet $\tau_{\Delta} = 0.04$; $\tau_q = 0.02$; $\hat{a} = 0.02$ paraméterekkel való megoldásánál.

Ha a τ_q paramétert változatlanul hagyjuk és csak az \hat{a} paramétert növeljük, úgy egy túlcsillapított hullámot kapunk, mely gyorsan eléri az állandósult állapotát és gyorsan terjed (26. ábra).

6.5. A BALLISZTIKUS-DIFFÚZÍV EGYENLET MEGOLDÁSAI

Fontos felhívni rá a figyelmet, hogy a hierarchikus rendszer továbbiakban részletezett vizsgálatakor nem vettünk számításba minden paramétert, azaz leegyszerűsítettük a rendszert. Az itt bemutatott ballisztikus-diffúzív modell hőmérsékletre rendezett alakja a következő:

$$\tau_Q \tau_q \partial_{ttt} T + (\tau_Q + \tau_q) \partial_{tt} T + \partial_t T = \partial_{xx} T + (\tau_Q + \kappa^2) \partial_{txx} T.$$
(102)

Mint látható, tartalmazza a Fourier-egyenletet, de felfogható a GK-egyenlet egy memória kiterjesztéseként is. A τ_Q idő paraméter nem csak a harmadrendű időderivált együttha-



24. ÁBRA. GN-egyenlet megoldása $\tau_{\Delta} = 0.04; \ \tau_q = 0.8; \ \hat{a} = 0.8$ paraméterekkel.



25. ÁBRA. GN-egyenlet Fourier-jellegű megoldása $\tau_{\Delta} = 0.04$; $\tau_q = 10$; $\hat{a} = 10$ paraméterekkel.

tójaként jelenik meg, hanem másik két tagnál is szerepel. Továbbá érdemes észrevenni, hogy a csatolási paraméterek az \hat{a} paraméterhez hasonlóan a disszipációt erősítik. Ebből láthatóan reprodukálni lehet az eddig tárgyalt modellek megoldásait, viszont nem csak egyszerű paraméter beállítások mellett, nem elég egyszerűen egyenlővé tenni két paramétert a τ_Q miatt.

6.5.1. FOURIER-TÍPUSÚ MEGOLDÁSOK

- "Kicsinek" választva a τ_Q ; τ_q ; κ paramétereket, példaként legyen $\tau_Q = \tau_q = \kappa = 0.001$, úgy az egyenletünk az eredeti Fourier-egyenlethez tart (27. ábra).
- Az előző esettől eltérően legyen most a τ_Q lényegesen nagyobb. Ekkor a GKmegoldás által is reprodukált, az eredeti Fourier-egyenlet időderiváltjának a megoldása is szerepet játszik és szintén Fourier-típusú lefutást tapasztalhatunk (28. ábra).



26. ÁBRA. GN-egyenlet megoldása $\tau_{\Delta} = 0.04; \ \tau_q = 0.02; \ \hat{a} = 0.06$ paraméterekkel.



27. ÁBRA. A ballisztikus egyenlet Fourier-jellegű megoldás
a $\tau_Q=\tau_q=\kappa=0.001$ paraméterekkel.

 A ballisztikus-diffúzív modell bevezetésekor¹⁹ tárgyalt okok miatt a harmadik Fourier-féle megoldás nem reprodukálható.

6.5.2. MCV-típusú megoldások

Ha az egyenlet rendszerben megszüntetjük a csatolást a hőáram és a hőáram árama között, vagyis $\kappa = 0$, akkor a két mennyiség teljesen független lesz egymástól, a jelterjedés így független lesz a τ_Q paramétertől²⁰ is, és tisztán MCV megoldásokat tudunk reprodukálni (29. ábra).

¹⁹Lásd: A hővezetési elmélet általánosítása, a hierarchikus rendszer című fejezetet.

²⁰ Lásd a hiperbolicitás fejezetet.



28. ÁBRA. A ballisztikus egyenlet Fourier-jellegű megoldása $\tau_Q = 1; \tau_q = \kappa = 0.001$ paraméterekkel.



29. ÁBRA. A ballisztikus egyenlet MCV-jellegű megoldás
a $\tau_q=0.02;\kappa=0.001$ paraméterekkel.

6.5.3. GK-típusú megoldások

Legyen $\tau_Q \ll \tau_q$, ekkor a harmadrendű időderivált együtthatója is kicsi marad, a vegyes derivált tag együtthatóinál pedig legyen $\kappa = 0.25$, így igaz lesz, hogy $\kappa^2 \gg \tau_Q$. Mivel a keresztcsatolási paraméterek szerepe hasonló a GK-egyenletben látott \hat{a} disszipációs paraméterhez, így ezzel közelítjük ezt a fajta karakterisztikát. Ebben az esetben egy túlcsillapított esetet szemléltetünk a 30. ábrán.

Hasonló elgondolással egyéb GK-típusú megoldásokat is reprodukálni lehet.

6.5.4. GN-TÍPUSÚ MEGOLDÁS

Hasonló jellegű hullámterjedés is reprodukálható ahhoz, amit a GN-egyenlet megoldásainál is láttunk a $\tau_q = 0.7$; $\tau_Q = 15$;

 $\kappa = 9$; $\tau_{\Delta} = 0.04$ paramétereket mellett, melyeket a 31. és 32. ábrák szemléltetnek.



30. ÁBRA. A ballisztikus egyenlet GK-jellegű megoldása $\tau_q = 0.02$; $\tau_Q = 0.001$; $\kappa = 0.25$ paraméterekkel.



31. ÁBRA. A ballisztikus egyenlet GN-jellegű megoldás
a $\tau_q=0.7;\ \tau_Q=15;\ \kappa=9;\ \tau_\Delta=0.04$ paraméterekkel.

6.5.5. BALLISZTIKUS MEGOLDÁSOK

Ezalatt az 1. ábrán látható karakterisztikát értjük, azaz tipikusan olyan megoldásokat keresünk, ahol a két hőmérsékletcsúcs jelen van. Itt fontos szerepet játszik a lézerimpulzus hossza, mivel jelentősen befolyásolja a ballisztikus jel meglétét, erre példát a következő két ábra, a 33. és a 34. mutatnak.

7. Kísérletek

7.1. BALLISZTIKUS MODELLEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA A KÍSÉRLETEKKEL

Ebben az alfejezetben a NaF kísérletet vetjük össze 3 elmélettel:



32. ÁBRA. A hőmérsékletmező 3D reprezentációja a ballisztikus egyenlet $\tau_q = 0.7$; $\tau_Q = 15$; $\kappa = 9$; $\tau_{\Delta} = 0.04$ paraméterekkel való GN-jellegű megoldásánál.



33. ÁBRA. A ballisztikus egyenlet ballisztikus-diffúzív megoldása $\tau_q = 1.9$; $\tau_Q = 0.07$; $\kappa = 0.28$; $\tau_{\Delta} = 0.065$ paraméterekkel.

- 1. Dreyer és Struchtrup kinetikus elméleti modellje [4],
- 2. Yanbao Ma által használt komplex viszkozitás modell [21, 24],
- 3. Kontinuum termodinamikai úton származtatott ballisztikus-diffúzív modell [34].

A fenti modellekben közös, hogy mind a NaF kísérletek alapján mérik a modell "jóságát", azonban különböző részletekre helyezik a hangsúlyt. Amíg Dreyer és Struchtrup a kvalitatív reprezentációra helyezi a hangsúlyt, addig Ma már kvantitatív egyezést kap. A dimenziótlanítást a NaF 13 K hőmérsékleten jellemző anyagi paramétereire [59] végezzük el, melyek az alábbiak:

$$\rho = 2866 \ \frac{kg}{m^3}; \ c = 2.774 \ \frac{J}{kgK}; \ \lambda = 20500 \ \frac{W}{mK}, \tag{103}$$

ahol ρ a sűrűség, c a fajhő és λ a hővezetési tényező. Dreyer és Struchtrup más lézerimpulzus szélesség (Δt_1) és minta szélesség(L_1) paramétereket használ, mint Ma (Δt_2 és



34. ÁBRA. A ballisztikus egyenlet ballisztikus-diffúzív megoldása $\tau_q = 1.9$; $\tau_Q = 0.07$; $\kappa = 0.2$; $\tau_{\Delta} = 0.12$ paraméterekkel.

 L_2) a Jackson - Walker kísérletek reprodukálására, pont az előbb említett eltérés miatt, de nagyságrendileg megegyeznek.

$$\Delta t_1 = 10^{-7} s; \ L_1 = 6.26 mm; \ \Delta t_2 = 2.4 \cdot 10^{-7} s; \ L_2 = 7.9 mm$$
(104)

Ezek alapján a teljes dimenziótlanítás elvégezhető. A cikkekben adottak a relaxációs idők, a κ paramétert pedig a megfelelő jelterjedési sebességhez kell állítani²¹. Először nézzük a Dreyer - Struchtrup kinetikus modelljével való összevetést. A karakterisztika aminek a reprodukálása a célunk, a 35. ábrán látható.



35. ÁBRA. Dreyer és Struchtrup által megoldott kinetikus modell a $\tau_R = 10.4\Delta t$; $\tau = 2.1\Delta t$ dimenziós paraméterekkel, ahol Δt az impulzus szélessége [4].

A 36. ábra mutatja a mi eredményünket. A kinetikus elmélettel való összevetés megmutatja, hogy a közegre jellemző hangsebességet az alábbi összefüggés adja meg dimen-

²¹ Ebből a szempontból a hiperbolicitás vizsgálata alapvető jelentőségű.



36. ÁBRA. A mi modellünk megoldása a $\tau_q = 0.068$; $\tau_Q = 0.0137$; $\kappa = 0.102$; $\tau_{\Delta} = 0.0065$ dimenziótlan paraméterekkel.

ziós és dimenziótlan formában:

$$c = \sqrt{\frac{3\alpha}{\tau_q}}; \quad \hat{c} = \sqrt{\frac{3}{\hat{\tau_q}}}, \tag{105}$$

ahol c a dimenziós, \hat{c} a dimenziótlan hangsebesség, α a hődiffúzivitás, mely az anyagi paraméterek alapján szintén adott, τ_q pedig a hőáramhoz tartozó relaxációs idő. Ezt felhasználva a hangsebesség értéke $c = 2724.3 \frac{m}{s}$. Ezáltal a κ paramétert be lehet állítani oly módon, hogy visszakapjuk a hangsebességet. Fontos újra megemlíteni, hogy a kinetikus elmélet csak N = 30 egyenlet mellett adja vissza helyesen a terjedési sebességet, nekünk is ehhez kell igazodni ha Dreyer és Struchtrup eredményét szeretnénk reprodukálni. A κ paramétert az alapján állítottuk be, hogy a megfelelő dimenziótlan időpontban érzékeljük a ballisztikus jelet, ebben az esetben ez Fo = 0.196. Összegezve a paramétereinket:

$$\tau_q = 0.068; \ \tau_Q = 0.0137; \ \kappa = 0.102; \ \tau_\Delta = 0.0065.$$
 (106)

A modellünk reprodukálja Dreyer és Struchtrup jelterjedési sebességeit [4].

Nézzük most Yanbao Ma adatait [24]. Megadja a relaxációs idő adatokat, valamint a hangsebességet is amivel számol:

$$\tau_R = 0.937\mu s; \tau_N = 0.338\mu s; \to \tau_Q = 0.248\mu s; c = 3187\frac{m}{s}.$$
 (107)

A 37. ábra Ma eredményeit mutatja, melyek közül a 13 K-hez tartozó görbét kell támpontnak vennünk. A ballisztikus-diffúzív modellel történő illesztés eredményét a 38. ábra mutatja. A görbe karakterisztikája egyezik a mért adatokkal, ellenben a terjedési sebességet nem helyesen adta vissza. A dimenziós paramétereink:

$$\tau_q = 0.937 \mu s; \tau_Q = 0.168 \mu s; c = 1849 \frac{m}{s}.$$
 (108)



37. ÁBRA. Yanbao Ma illesztése; baloldali képen a mért eredmények, a jobboldali képen pedig az illesztett görbéi láthatóak [24]. Ezek közül számunkra a 13 K-hez tartozó görbe a releváns.

Sem a Dreyer-Struchtrup modellben, sem Ma modelljében nem egyértelmű a hátoldali peremfeltétel. Az általunk használt adiabatikus peremfeltétel helyett nem világos, hogy a kísérleti feltételeknek mi felelne meg jobban.

7.2. TOVÁBBI ALKALMAZÁSOK

- A ballisztikus-diffúzív modellek alkalmazása nem korlátozódik az alacsony hőmérsékletű hővezetési jelenségek leírására. Fontos alkalmazási területet képviselnek a nanométer méretű elektromos eszközök is. A hőelektromos hatás együtt jár a hővezetési tényező változásával is, ami nagyban befolyásolhatja az eszköz hatásfokát, működőképességét [60].
- A kinetikus modellel való összevetés megmutatta, hogy a közegre jellemző hangsebesség a hővezetési tényezővel is kapcsolatban áll. Mechanikai alakváltozások figyelembevételével a helyzet tovább bonyolódik, a viszkozitás is szerepet fog játszani [61].
- Figyelmet érdemel a Knudsen-szám függő hővezetési együtthatóval való leírásmód. Amikor a minta karakterisztikus hossza egy nagyságrendbe esik a közepes szabad úthosszal²², akkor a ballisztikus terjedés játszik szerepet. Alvarez és Jou megmutatták [62], hogy a Knudsen-szám hővezetési együtthatóban történő figyelembevétele a MCV-egyenletben jobb közelítést eredményez, mint a szokásos megoldásai

²² Egy részecske által két ütközés között átlagosan megtett út. A Knudsen-szám a közepes szabad úthossz és a minta karakterisztikus hoszzának az aránya.



38. ÁBRA. A ballisztikus-diffúzív modell illesztése a $\tau_q = 0.039, \tau_Q = 0.007, \tau_{\Delta} = 0.01, \kappa = 0.04$ paraméterekkel. A görbe karakterisztikája helyes, de a ballisztikus terjedési sebesség nem egyezik, Fo = 0.12-nél kellene kezdődjön a felfutás.

a MCV-egyenletnek. Ekkor Chen [13] cikkében említett hőáramoszcilláció megszüntethető, továbbá a Fourier-egyenlet helyett a ballisztikus-diffúzív modellhez fog konvergálni a hőáram nagy időintervallumot tekintve.

7.3. AZ EGR-KÍSÉRLET KIÉRTÉKELÉSE

Előzetes mérések alapján 2014. június 3-án az Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszéken Both Soma (mérés), Gróf Gyula (kalibráció) és Ván Péter (minta előkészítés és mérés) végeztek kísérleteket makroszkópikus nem-Fourier hővezetés észlelése céljából.

Fourier-jellegű hőterjedéstől várhatóan nem csak akkor tapasztalhatunk eltérést, ha alacsony, néhány K hőmérsékleten vizsgáljuk az anyag tulajdonságait, hanem inhomogén összetételű anyagok esetén is [63, 64, 65]. A modelljeink effektívek, vagyis az egyenletekben szereplő anyagi paramétereink összességében jellemzik az anyag inhomogenitását is. A kísérletekhez elsősorban réteges szerkezetű minták készültek, mivel ezeket könnyebb legyártani és a komponensek is ismertek. Több kísérlet készült, ezek közül most csak egyet nézünk meg részletesebben.

Ez a minta 16 rétegből áll, összesen 8 réteg, 180 g-os papír és 8 réteg alumínium fólia követi egymást felváltva, a minta teljes vastagsága 3,35 mm. A kísérlet felépítése megfelel az eddig tárgyalt numerikus szimulációknak. Az alábbi, 39. ábrán látható az impulzus alakja, mely bár eltér a szimulációkban alkalmazottól, a peremfeltételek tárgyálasánál említett okok miatt alkalmazható. A 40. ábrán a mért hőmérséklet látható az idő függvényében. Mivel ez a görbe a trigger jeltől indul, így a szimulációval való összevetéshez az

origóba kell tolni. Következő lépésként az egyensúlyi hőmérsékletre kell normálni, azaz úgy kell leosztani a görbe minden pontját, hogy az egyensúlyi hőmérséklet egynél legyen.



39. ÁBRA. A kísérletben használt jelalak.



40. ÁBRA. A minta hátfalán mért hőmérséklet értékek.

Ez a mérési eredmény azért érdekes, mert egyrészt nagyon gyors a hőmérséklet felfutás, másrészt azonnal az elején mintha látható lenne egy kiugró "púp". A gyors, azonnali hőmérséklet emelkedés több más mintánál is megfigyelhető volt. Az illesztést először a Fourier-egyenlettel kezdjük a hődiffúzivitás megállapítására, mivel ebben az esetben ez az egyetlen illesztendő paraméter. A többi modell ennek értékét örökölni fogja. Az illesztést másik két modellel is elvégzem, az egyik a GK-egyenlet lesz a másik pedig a ballisztikusdiffúzív rendszer. Ezzel a két modellel befolyásolható a jelterjedés sebessége, ugyanez a Fourier-egyenletről nem mondható el. A MCV- és a GN-egyenletekkel itt nem foglalkozunk. Az illesztések jóságát az abszolút hibával szemléltetjük és a négyzetes eltéréssel jellemezzük:

$$\chi = \sqrt{\sum_{i} \Delta x_i^2},\tag{109}$$

ahol χ jelöli a négyzetes eltérést, Δx a számított és a mért értékek közötti eltérést, az *i* index pedig a mérési pontokra vonatkozik. Az összegzés az összes mérési pontra vonatkozik.

7.3.1. FOURIER-EGYENLET ILLESZTÉSE

A hődiffúzivitás paraméterét állítva először dimenziótlanítottuk a mért értékeket, majd számoltuk a hőmérsékleteloszlást. Ebben az esetben

$$\alpha = 1.59 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{s} \tag{110}$$

bizonyult a legjobb értéknek, ezt a többi modell is örökölni fogja.





A 41. ábra mutatja az illesztés eredményét, a piros görbe a számított értékeket. Lényeges eltérés a mérés elején mért értékekhez képest tapasztalható, a Fourier-egyenlet szerint a jelfelfutás később indulhat meg, mint ahogy azt a mérés mutatja. Ez jól látszik a 42. ábrán is.

7.3.2. GUYER-KRUMHANSL-EGYENLET ILLESZTÉSE

Ebben az esetben befolyásolni tudjuk a jelterjedés sebességét a disszipációs paraméterrel. Ekkor olyan megoldás is előállítható, melyben a hátoldali hőmérséklet felfutás



42. ÁBRA. Az abszolút hiba az egyes mérési pontokban. A piros vonal az átlagos abszolút hibát jelöli (E = 0.054). A négyzetes eltérés pedig $\chi = 2.254$.

szinte azonnal megindul (43. ábra). A felhasznált paraméterek:

$$\alpha = 1.59 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{s}; \ \tau_q = 0.141s; \ a = 2.244 \cdot 10^{-7} m^2.$$
(111)



43. ÁBRA. A minta hátfalán a mért és számolt hőmérséklet eloszlás dimenziótlan formában. A sima görbe mutatja a számított értékeket.

Figyeljük meg, hogy ilyen paraméterbeállítás mellett a megoldásban nem jelentkezik a GK-tartomány egy másik jellegzetessége, a "sarkosodás", azaz a hőmérsékletfelfutás nem meredeken indul [34]. A gyors jelterjedésnek köszönhetően a mérés elején lévő hirtelen hőmérséklet emelkedéshez jobban illeszkedik (44. ábra), ebből eredően jobb illesztés érhető el a GK-egyenlettel, mint a Fourier-egyenlettel.



44. ÁBRA. Az abszolút hiba az egyes mérési pontokban. A piros vonal az átlagos abszolút hibát jelöli (E = 0.0442). A négyzetes eltérés pedig $\chi = 1.75$.

7.3.3. BALLISZTIKUS-DIFFÚZÍV MODELL

A célunk a mérés elején látható "púp" reprodukálása volt, erre a másik két modell nem képes. A paraméterek :



$$\alpha = 1.59 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{s}; \ \tau_q = 0.21s; \ \tau_Q = 0.28s; \ \kappa = 0.155.$$
 (112)

45. ÁBRA. A minta hátfalán a mért és számolt hőmérséklet eloszlás dimenziótlan formában. A sima görbe mutatja a számított értékeket.

A 45. ábrán látható megoldásban bár sikerült a mérés elején tapasztalható "púpot" reprodukálni, a keskeny impulzus szélesség numerikus hibát okozott, ezért tapasztalható az oszcilláció. Ebből kifolyólag a hibaeloszlás (46. ábra) ebben a tartományban nem fedi a modell valós illeszthetőségét. Ennek ellenére közel azonos az átlagos hiba mértéke,



46. ÁBRA. Az abszolút hiba az egyes mérési pontokban. A piros vonal az átlagos abszolút hibát jelöli (E = 0.0459). A négyzetes eltérés pedig $\chi = 2.035$.

mint a GK-egyenlet esetében. Az utóbbi két modell kedvezőbb karakterisztikát tudott reprodukálni, amik összességében jobb illesztést eredményeztek.

8. Összefoglalás

A dolgozat első felében részletesen ismertettük a hierarchikus rendszer származtatását és kapcsolatát a kinetikus elmélettel. Ellenőriztük az egyes rendszerek hiperbolicitását, a jelterjedési sebességeket is megállapítottuk. További vizsgálatokat végeztünk a diszperziós relációkon keresztül az egyes paraméterek szerepének feltérképezésére, szintén a jelterjedési sebességre fókuszálva. A megállapított tulajdonságokat is felhasználtuk a megoldások elemzésében. Láttuk, hogy a ballisztikus-diffúzív modell képes reprodukálni a Fourier-, a MCV-, a GK- és a GN-egyenletek megoldásait. Ezen felül tartalmazza a ballisztikus hővezetési jelenséget is, melynek különleges jelentősége van nanorendszerek esetén.

Részletesen elemeztük a modellek megoldására alkalmazott numerikus eljárást, bizonyítottuk a stabilitását és a konvergenciáját. További lehetőség a séma fejlesztése, a mesterséges numerikus diszperzió csökkentése lehet. Ezzel csökkenne a szükséges térlépések száma, azaz csökkenne a séma számításigénye. Ezzel szorosan összefügg a séma pontossága, illetve a pontos megoldáshoz való konvergencia sebessége.

Az alkalmazási területeken belül részletesen elemeztük a NaF-on alacsony hőmérsékleten végzett mérési eredményeket. Dreyer és Struchtrup által számolt eredményt pontosan visszakaptuk, azonban láttuk, hogy Yanbao Ma paramétereit felhasználva a terjedési sebességet nem ugyanúgy adja meg. Ez további vizsgálatokat igényel, ugyanis Ma más modellt használ, nem feltétlenül lehet egyenesen megfeleltetni egymásnak az anyagi paramétereket.

Az EGR-kísérlet kiértékelése alapján elmondható, hogy a GK-egyenlet reális modell lehet inhomogén anyagok modellezésére. A jelterjedési sebesség jól kezelhető és reálisabb eredményt kaptunk, mint a Fourier-egyenlet megoldásával. A ballisztikus-diffúzív egyenlettel a megfigyelt (de nem túlságosan kiugró) "púpot" is modellezni tudjuk. Ez a jelenség a makroszkópikus ballisztikus terjedés első megfigyelése lehet. Oka nem lehet a második hang. Természetesen további kísérleti és elméleti vizsgálatokra van szükség ebben az irányban. A mesterséges oszcillációk miatt az illesztés jóságára nem mondhatunk biztosat, pontosabb sémával az éles ugrásoknál jelentkező hibákat előbb meg kell szüntetni.

A ballisztikus-diffúzív modellnek fő alkalmazási területe azonban a nanoeszközök megfelelő modellezése. A hőelektromos hatás, a mechanikai deformáció, mind hatással vannak a hővezetésre, a ballisztikus jelterjedésre. További kutatási lehetőség a mechanikai modellekkel való kapcsolatának részletes feltérképezése, például a deformációkkal való csatolt modell létrehozása, melyben az akusztikai és relaxációs, reológiai jelenségek főszerepet kapnának. Ezzel párhuzamosan változna a hőfeszültségek leírásának módja is [66, 36, 67].

Köszönetmondás

Nagyon hálás vagyok Ván Péternek, aki jó meglátásaival, türelmével és rengeteg munkával járult hozzá a dolgozat elkészültéhez.

Köszönet illeti Fülöp Tamást a LATEX program használatához nyújtott segítségéért és a numerikus séma alapötletének felvetéséért.

Köszönöm még Czél Balázsnak és Gróf Gyulának az értékes észrevételeiket és tanácsaikat.

Édesanyámnak és Édesapámnak is szeretnék köszönetet mondani, amiért áldozatot hoznak a tanulmányaim érdekében és megteremtik számomra a szükséges körülményeket ehhez.

IRODALOM

[1] Varjú Katalin. Attoszekundumos impulzusok keltése és alkalmazásai. Szegedi Tudományegyetem, 2011.

- [2] C. T. Lane, H. A. Fairbank, and W. M. Fairbank. Second sound in liquid helium II. *Physical Review*, 71:600–605, 1947.
- [3] R. J. Donelly. The two-fluid theory and second sound in liquid helium. *Physics Today*, 62(10):34–39, 2009.
- [4] W. Dreyer and H. Struchtrup. Heat pulse experiments revisited. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 5:3–50, 1993.
- [5] C. Cattaneo. Sur une forme de lequation de la chaleur eliminant le paradoxe dune propagation instantanee. *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences*, 247(4):431–433, 1958.
- [6] A. Barletta and E. Zanchini. Hyperbolic heat conduction and local equilibrium: a second law analysis. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(5):1007–1016, 1997.
- [7] E. Zanchini. Hyperbolic heat conduction theories and nondecreasing entropy. *Physical Review B*, 60(2):991–997, 1999.
- [8] T. Dedeurwaerdere, J. Casas-Vázquez, D. Jou, and G. Lebon. Foundations and applications of a mesoscopic thermodynamic theory of fast phenomena. *Physical Review E*, 53(1):498, 1996.
- [9] I. Gyarmati. On the wave approach of thermodynamics and some problems of non-linear theories. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 2:233–260, 1977.
- [10] D. Jou, J. Casas-Vázquez, and G. Lebon. Extended irreversible thermodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 51(8):1105, 1988.
- [11] R. A. Guyer and J. A. Krumhansl. Thermal conductivity, second sound, and phonon hydrodynamic phenomena in nonmetallic crystals. *Physical Review*, 148:778–788, 1966.
- [12] D. Y. Tzou. Macro-to micro-scale heat transfer: the lagging behavior. CRC Press, 1996.
- [13] Gang Chen. Ballistic-diffusive heat-conduction equations. *Physical Review Letters*, 86(11):2297, 2001.
- [14] V. A. Cimmelli. Different thermodynamic theories and different heat conduction laws. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics, 34(4):299–333, 2009.
- [15] V.A. Cimmelli, A. Sellitto, and D. Jou. Nonlocal effects and second sound in a nonequilibrium steady state. *Physical Review B*, 79(1):014303, 2009.
- [16] V.A. Cimmelli, A. Sellitto, and D. Jou. Nonlinear evolution and stability of the heat flow in nanosystems: Beyond linear phonon hydrodynamics. *Physical Review B*, 82(18):184302, 2010.
- [17] Z.-Y. Guo, B.-Y. Cao, and M. Wang. General heat conduction equations based on the thermomass theory. *Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT)*, 1(1), 2010.
- [18] M. Wang and Z.-Y. Guo. Understanding of temperature and size dependences of effective thermal conductivity of nanotubes. *Physics Letters A*, 374(42):4312–4315, 2010.
- [19] M. Wang, N. Yang, and Z.-Y. Guo. Non-Fourier heat conductions in nanomaterials. *Journal of Applied Physics*, 110(6):064310, 2011.

- [20] R. C Tolman. On the weight of heat and thermal equilibrium in general relativity. *Physical Review*, 35(8):904, 1930.
- [21] Yanbao Ma. A transient ballistic-diffusive heat conduction model for heat pulse propagation in nonmetallic crystals. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 66:592–602, 2013.
- [22] L.D. Landau és E.M. Lifsic. Elméleti fizika VI Hidrodinamika. Tankönyvkiadó, 1980.
- [23] S.J. Rogers. Transport of heat and approach to second sound in some isotropically pure alkali-halide crystals. *Physical Review B*, 3(4):p1440, 1971.
- [24] Yanbao Ma. A hybrid phonon gas model for transient ballistic-diffusive heat transport. Journal of Heat Transfer, 135(4):044501, 2013.
- [25] Gyarmati István. Nemegyensúlyi termodinamika. Műszaki Könyvkiadó, 1976.
- [26] V.A. Cimmelli and P. Ván. The effects of nonlocality on the evolution of higher order fluxes in nonequilibrium thermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 46(11):112901, 2005.
- [27] P. Ván and T. Fülöp. Universality in heat conduction theory weakly nonlocal thermodynamics. Annalen der Physik (Berlin), 524(8):470–478, 2012.
- [28] Kovács Róbert. Általánosított hővezetési egyenletek vizsgálata, tdk dolgozat, 2013.
- [29] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 12(3):146–173, 2003.
- [30] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics the Guyer-Krumhansl and the Cahn-Hilliard equations. *Physic Letters A*, 290(1-2):88–92, 2001.
- [31] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics the Ginzburg-Landau equation. *Technische Mechanik*, 22(2):104–110, 2002.
- [32] J. Verhás. *Thermodynamics and rheology*. Akadémiai Kiadó-Kluwer Academic Publisher, 1997.
- [33] Kovács Róbert. Általánosított hővezetési egyenletek vizsgálata. In Vásárhelyi Balázs Török Ákos, Görög Péter, editor, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2013*, pages 345–357, 2013.
- [34] R. Kovács and P. Ván. Generalized heat conduction in laser flash experiments. 2014. benyújtva.
- [35] T. Fülöp, Cs. Asszonyi, and P. Ván. Distinguished rheological models in the framework of a thermodynamical internal variable theory. 2014. accepted in Continuum Mechanics and Thermodynamics [arXiv: 14070882].
- [36] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and M. Berezovski. Waves in microstructured solids: a unified viewpoint of modelling. *Acta Mechanica*, 220:349–363, 2011.
- [37] T. Fülöp, R. Kovács, and P. Ván. A thermodynamical approach to wave phenomena. 2014. Lecture held at the conference Complexity of Nonlinear Waves, 12/09/2014 in Tallinn.
- [38] M. Grmela, G. Lebon, P. G. Dauby, and M. Bousmina. Ballistic-diffusive heat conduction at nanoscale: Generic approach. *Physics Letters A*, 339:237–245, 2005.

- [39] Dr. Fogarassy Bálint. Bevezetés a szilárdtestfizikába. ELTE Eötvös Kiadó, 1997.
- [40] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam. Studies of nonlinear problems. 1955.
- [41] L.D. Landau és E.M. Lifsic. Elméleti fizika X Kinetikus fizika. Tankönyvkiadó, 1984.
- [42] N. E. Ashcroft and N. D. Mermin. Solid state physics. Harcourt College Publishers, 1976.
- [43] I. Müller and T. Ruggeri. Rational Extended Thermodynamics. Springer, 2 edition, 1998.
- [44] H.E. Jackson and C.T. Walker. Thermal conductivity, second sound and phonon-phonon interactions in naf. *Physical Review B*, 3, 1968.
- [45] H.E. Jackson, C.T. Walker, and T.F. McNelly. Second sound in NaF. *Physical Review Letters*, 25, 1970.
- [46] Veres Gábor. Bevezetés az elméleti plazmafizikába. ELTE Eötvös Kiadó, 2008.
- [47] B. Czél, T. Fülöp, Gy. Gróf, and P. Ván. Comparison of temperature responses of the laser flash method in case of parabolic and hyperbolic heat conduction models. In Dombi Sz., editor, 11th International Conference on Heat Engines and Environmental Protection, Balatonfüred, pages 133–139, Budapest, 2013. BME, Dep. of Energy Engineering.
- [48] P. D. Lax. Hyperbolic Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 2006.
- [49] L. Rezzolla. Numerical Methods for the Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations. SISSA, Internation School for Advanced Studies, 2005.
- [50] E. F. Toro and E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, volume 16. Springer, 1999.
- [51] H. Bremermann. Distributions, complex variables, and fourier transforms. 1965.
- [52] Geszti Tamás. Kvantummechanika. Typotex, 2007.
- [53] V. Gerasik and M. Stastna. Complex group velocity and energy transport in absorbing media. *Physical Review E*, 81, 2010.
- [54] P. D. Lax and R. D. Richtmyer. Survey of the stability of linear finite difference equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 9(2):267–293, 1956.
- [55] Y. Liu. Fourier analysis of numerical algorithms for the Maxwell equations. Journal of Computational Physics, 124:396–416, 1996.
- [56] P. Amodio, Y. A. Blinkov, V. P. Gerdt, and R. L. Scala. On consistency of finite difference approximations to the Navier-Stokes equations. In *Computer Algebra in Scientific Computing*, pages 46–60. Springer International Publishing, 2013. arXiv:1307.0914v2.
- [57] P. Brenner. The cauchy problem for symmetric hyperbolic systems in Lp spaces. *Mathematica Scandinavica*, 19:27–37, 1966.
- [58] M. N. Mahyuddin. Digital control system. Lecture notes, University Sains Malaysia, 2008.
- [59] S. Bargmann and P. Steinmann. Finite element approaches to non-classical heat conduction in solids. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 9(2):133–150, 2005.

- [60] A. Sellitto, V.A. Cimmelli, and D. Jou. Influence of electron and phonon temperature on the efficiency of thermoelectric conversion. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 80:344 352, 2015.
- [61] S. R. de Groot and P. Mazur. Non-Equilibrium Thermodynamics. Dover Publications, 1963.
- [62] F.X. Alvarez and D. Jou. Memory and nonlocal effects in heat transport: from diffusive to ballistic regimes. *Applied Physics Letters*, 90(8):083109, 2007.
- [63] W. Kaminski. Hyperbolic heat conduction equation for materials with a nonhomogeneous inner structure. *Journal of Heat Transfer*, 112(3):555–560, 1990.
- [64] P. J. Antaki. New interpretation of non-Fourier heat conduction in processed meat. *Journal of Heat Transfer*, 127(2):189–193, 2005.
- [65] B. Czél, T. Fülöp, Gy. Gróf, Á. Gyenis, and P. Ván. Simple heat conduction experiments. In Dombi Sz., editor, 11th International Conference on Heat Engines and Environmental Protection, pages 141–146, Budapest, 2013. BME, Dep. of Energy Engineering.
- [66] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and G. A. Maugin. Thermoelasticity with dual internal variables. *Journal of Thermal Stresses*, 34(5-6):413–430, 2011.
- [67] A. Berezovski and M. Berezovski. Influence of microstructure on thermoelastic wave propagation. Acta Mechanica, 224(11):2623–2633, 2013.

GALILEI-RELATIVISZTIKUS FOLYADÉKMECHANIKA

Ván Péter MTA WIGNER FIZIKAI KUTATÓKÖZPONT RÉSZECSKE- ÉS MAGFIZIKAI INTÉZET, BUDAPEST, BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, Budapest, Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

Megadjuk a nemrelativisztikus, más néven Galilei-relativisztikus disszipatív folyadékok alapmennyiségeit, mérlegeit, termodinamikai összefüggéseit és kiszámoljuk az entrópiaprodukciót a vonatkoztatási rendszertől függetlenül.

A szokásos alapmennyiségek, tömeg, impulzus, energia, hőáram, nyomás és diffúziós áramsűrűség, a harmadrendű energia-lendület-tömegsűrűség tenzor tér- és időszerű komponenseiként adódnak. Levezetjük az alapmennyiségek és mérlegek transzformációs szabályait és bebizonyítjuk, hogy a nemegyensúlyi termodinamikai keretelmélet, azaz a Gibbs-reláció, az extenzivitási feltétel és az entrópiaprodukció is abszolút, azaz független a vonatkoztatási rendszertől. Végül értelmezzük és felírjuk a szokásos relatív kontinuitási-Fourier-Navier-Stokes-féle egyenleteket.

Az elmélet egyik következménye, hogy a belső energia, kinetikus energia és a teljes energia közti kapcsolat a Galilei-kovariáns energia transzformációs szabálya.

1. BEVEZETÉS

A kis sebességű fizikai folyamatokra vonatkozó tapasztalataink leírására kialakult az abszolút, mozgástól függetlenül múló idő fogalma. A tér azonban ekkor is relatív, különbözik az egyes megfigyelők számára. A nemrelativisztikus téridő Galileirelativisztikus. A nagy sebességű mozgások és a fizika mezőelméletei alapján ismert (speciális) relativisztikus téridő fogalmai segítségével a négydimenziós, abszolút időt és relatív teret tartalmazó, klasszikus téridőnek is adhatunk pontos matematikai modellt [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Mivel mindennapi tapasztalataink körében magabiztosabban mozgunk, ezért egy ilyen modell haszna prediktív fizikai elméletként első pillantásra nem nagyon világos. Ne feledjük azonban, hogy a klasszikus térfogalom fejlődése folyamán a matematikai eszközöknek a valódi fizikai tartalomhoz történő igazítása mennyire fontos volt. Például a koordinátázás kiküszöbölése és az absztraktabb, valós számhármasok helyett vektorterekre alapozott modell és jelölésmód lényegesen megkönnyítette az elvi kérdések megfogalmazását és átlátását. Ma már a koordinátamentes jelölés és az erre alapozott számítási módszerek általánosan elterjedtek a mérnöki gyakorlatban is.

Ebben a munkában az egykomponensű folyadékok példáján amellett érvelünk, hogy az időt is érdemes bevonnunk egy hasonló leírásba, ilyen módon a koordinátázáshoz hasonlóan kiküszöbölve a vonatkoztatási rendszert a folyadékok leírásából. Így a legmegszokottabb összefüggéseink átláthatóbbak, világosabbak, szebbek és legfőképpen általánosíthatóbbak, ezáltal végső soron alkalmazhatóbbak lesznek.

A Galilei-relativisztikus téridő legfontosabb sajátossága, hogy az idő abszolút, azaz függetlenül telik a különféleképpen mozgó megfigyelők számára. Az *abszolút* jelzőt a továbbiakban pontosan ilyen értelemben, a vonatkoztatási rendszertől való függetlenség jelzésére fogjuk használni, élesen megkülönböztetve a hasonló jelentésű, de többféle értelemben használt objektív vagy kovariáns jelzőktől.

Régóta ismeretes, hogy tér és az idő nem vektortér, hanem valójában affin tér, hiszen nincs kitüntetett középpontja [1, 3, 4]. A mi tárgyalásunkban ez most nem fontos, ezért bármily egyszerű is a megfelelő általánosítás, ebben a munkában lényegében csak vektorterek fordulnak elő, a Galilei-relativisztikus téridő egy egyszerűsített modelljét használjuk. Az A. Függelékben adjuk meg pontosabban, hogy milyen értelemben. Hasonlóan nem foglalkozunk a mértékegységek megfelelő matematikai reprezentációjával, bármennyire is érdekes ez gyakorlati és elvi szempontból is [9, 10].

A középpontmentesség, illetve a mértékegységek elégtelen matematikai reprezentációja mellett megszokott téridő képünkben van egy másik probléma, amely első pillantásra az előbbiektől is egyszerűbbnek és kevésbé fontosnak tűnhet: az abszolút idő nem részhalmaza a négydimenziós Galilei-relativisztikus téridőnek. Időnek és térnek nincs bezárt szöge, ezért azt \mathbb{R}^4 -ként, vagy más módon euklidészi terek Descartes-szorzataként reprezentálva máris megfigyelőtől függ a leírásunk. Az idő megfelelő reprezentációjának nagyon lényeges következményei vannak. Egyik legfontosabb, hogy nemrelativisztikus fizikai elméletekben téridő vektorok és kovektorok között nincs kitüntetett megfeleltetés. Ebben a tekintetben a Galilei-relativisztikus téridő nem határesete a bonyolultabb matematikájú speciális vagy általános relativitáselméletnek, az objektív fizikai mennyiségek kezelése különbözik a relativisztikus számításokban megszokottól, a relativisztikus számításokban járatosak számára is odafigyelést igényel. Például másodrendű tenzornak és kotenzornak nincs nyoma (spurja). Ezért téridőkovektornak nincs abszolút divergenciája és téridővektornak nincs abszolút rotációja. Ugyancsak ennek a következménye, hogy vektorok és kovektorok nem ugyanúgy transzformálódnak, vagyis egyik megfigyelő relatív mennyiségeit átszámolva a másik megfigyelő mennyiségeire más a szabály. A harmadik lényeges dolog, ahol a Galilei-relativisztikus téridő különbözik a speciális relativisztikustól, az, hogy nemcsak a téridőmennyiségek abszolútak, hanem típustól függően azok bizonyos részei is. Vektor időszerű komponense, kovektor térszerű komponense abszolút.

Számos olyan probléma jelentkezik a nemrelativisztikus fizikában, amely a téridő pontatlan modellje miatt lép fel.

 Egyik legfontosabb és nagyon sokrétűen vitatott az úgy nevezett anyagi objektivitás elve. Az elv fizikailag magától értetődő állítást fogalmaz meg, azt mondja ki, hogy az anyag független a megfigyelőtől és ezért az anyagot leíró fizikai mennyiségek, vonatkozó mozgásegyenletek és anyagtörvények is azok kell legyenek. Nemrelativisztikusan, az abszolút idő miatt, általában csak a hármasvektorként reprezentálható mennyiségekre vonatkozó transzformációs invarianciaként adják meg az elv matematikai megfogalmazásait. Könnyen látható, hogy kontinuumok esetén a szokásos inerciarendszerekre alapozott Galilei-transzformációra invariáns formák megkövetelésénél több kell, ezért az elv legelfogadottabb, Nolltól származó megfogalmazása a forgásinvarianciát is megköveteli [11, 12, 13, 14, 15]. Mind a megfogalmazás, mind maga az elv nagyon kiterjedt vitát gerjeszt máig is a kontinuumfizika alapjai iránt érdeklődők körében. A legfontosabbnak tűnő munkák a teljesség igénye nélkül: [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41].

A Galilei-relativisztikus téridő-modell segítségével megmutatható, hogy egyrészt a formális invariancia (forgó megfigyelő szögsebességétől való függetlenség) nem megfelelő követelmény, sőt a vonatkoztatási rendszertől való függetlenség megkövetelheti, hogy a transzformációs szabályok tartalmazzák a relatív mozgás jellemzőit [42]. Ez a Galilei-transzformáció esetén elég nyilvánvaló, mint látni is fogjuk. Másrészt pedig téridő szempontból a Noll-féle anyagi objektivitás definíció önellentmondásos [43].

- A kontinuummechanikai alapmennyiségektől szintén elvárható a vonatkoztatási rendszertől függetlenség. Például a véges rugalmas deformáció végtelen sok Nollértelemben objektív mértéke helyett a téridőmodell egyértelműen kitüntet egyetlen természetes deformációfogalmat [44, 45, 46], amely más szempontokból is megkülönböztetett [47, 48, 49, 50, 51].
- 3. Egy másik problémakör a folyadékok leírásának alapmennyiségére, a folyadék sebességére vonatkozik. Brenner szerint a kontinuitási egyenletben és a lendületmérlegben előforduló sebességek nem nyilvánvalóan ugyanazok [52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61]. Ez a kérdés analóg a relativisztikus elméletekben felmerülő áramlásválasztás kérdésével [62]. Végső soron az a kérdés, hogy mi tulajdonképpen a folyadék sebessége? Mi mozog a folyadékban, a tömege, lendülete vagy energiája? Van választásunk ennek kijelölésében? Mivel az összes egyenletünkben relatív

sebességek fordulnak elő, ezért ennek a kérdésnek megválaszolásához a téridőviszonyok pontos átgondolása is szükséges.

- 4. Egy másik, természetesen felvetődő szempont a relativisztikus disszipatív folyadékok elméletével való konzisztencia. Ennek kapcsán talán a legszembetűnőbb eltérés, hogy relativisztikusan az energia-impulzus tenzor kovariáns és ennek természetes része az energia, transzformációs tulajdonságai pedig ebből következnek. Mi lehet az ennek megfelelő fizikai mennyiség Galilei-relativisztikusan? A kinetikus energia a relatív sebességgel kifejezve nyilvánvalóan nem objektív mennyiség. De tulajdonképpen hogyan transzformálódik az energia?
- 5. Természetesen a statisztikus leírásokkal, pontosabban a kinetikus gázelmélettel való konzisztencia is lényeges. Hiszen onnan kiindulva a téridő-beágyazottság meghatározható, legalábbis bizonyos transzformációs szabályokra következtethetünk [63, 64]. Másrészt pedig a kontinuum-alapmezőknek és az ezekre vonatkozó mozgásegyenleteknek a származtatási módja (Chapman–Enskog- vagy momentumsorfejtéssel) a termodinamikai mennyiségekre vonatkozóan is informatív, például az energia a nyomással szoros kapcsolatban határozódik meg. Ugyanakkor érdekes módon magának a kinetikus elméletnek az objektivitása is kérdésessé vált az elégtelen téridő modell használata miatt [64].
- 6. Kérdés még a kontinuumok esetén lokális egyensúlyként értelmezett termodinamikai háttér relatív vagy abszolút volta is. Relativisztikusan a mozgó testek termodinamikai leírásától, beleértve elsősorban a Gibbs-relációt, alapvetően elvárjuk a kovarianciát, és ez egy lényeges kérdés már speciális relativitáselmélet kezdetei óta (lásd pl. [65]). Érdekes módon nemrelativisztikusan ez csak ritkán merül fel [66], pedig a lokális egyensúly csak lokális homogenitást jelent. A termodinamikai mennyiségek Galilei-invarianciája egyáltalán nem nyilvánvaló, gondoljunk csak az előző pontban emlegetett energiára. Ezért az egész Gibbs-reláció Galilei-invarianciája sem az. Ugyanide tartozik a disszipáció, illetve a termelődő hő objektivitása is. Függhet ez attól, hogy milyen vonatkoztatási rendszerből nézem?

A továbbiakban a legegyszerűbb, Galilei-relativisztikus folyadékok abszolút alapmezőit, a rájuk vonatkozó mérlegeket, termodinamikai összefüggéseket és végül az entrópiaprodukciót számoljuk ki. Ezzel párhuzamosan a relatív, szokásos tárgyalást is beillesztjük a gondolatmenetbe, párhuzamosan megadva a megfelelő transzformációs szabályokat és a pontos feltételeket is, amelyekkel az abszolút egyenletekből a relatív kontinuitás-Navier– Stokes–Fourier-egyenletrendszer megkapható.

Ebben az írásban egy sajátos indexes formalizmust használunk, amely remélhetőleg elégé áttekinthető és rugalmas ahhoz, hogy a folyadékmechanika relatív térvektorainak

egyszerűen megértsük a vonatkoztatási rendszertől független értelmét, illetve az abszolút téridő tenzorokkal számításokat végezzünk. Háromféle indexet vezetünk be. A Galileirelativisztikus téridő tenzorainak kontravariáns komponenseit felső a, b, c, ..., a kovariáns komponenseket alsó a, b, c, ... indexekkel jelöljük. Továbbra is az abc elejéről választva, de felülvonással a térszerű négyesvektori és négyeskovektori indexeket jelöljük, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ...$ vel. A megszokott relatív háromdimenziós vektorok és tenzorok indexeit megkülönböztetetten i, j, k, l, ... jelöli. A téridőmodellt, az alkalmazott számítási módot és jelölésrendszert részletesen a Függelékek tartalmazzák. A tárgyalás kezdettől fogva alapoz a Galileirelativisztikus téridőmodell alapjait ismertető (A) és a legfontosabb transzformációs szabályokat levezető (B) Függelékek részletes ismeretére.

2. MÉRLEGEK ÉS TRANSZFORMÁCIÓS SZABÁLYAIK

A kontinuumfizika alapvető mérlegei az egyes fizikai mennyiségek extenzivitását kifejező téridő-sűrűségvektorok négyesdivergenciái. Egy adott téridőtartományban a fizikai mennyiség megváltozása a térfogatban történő lokális változásból és annak határán történő kiáramlásból adódik össze. Ezt szokásosan megfelelő széthasított mennyiségekkel fejezzük ki. Tehát egy A^a vektormező esetén annak $A^a = Au^a + A^{\bar{a}} u$ -formáját használva:

$$\partial_a A^a = (\tau_a (d_u - u^b \partial_b)) (A u^a + A^{\bar{a}}) = d_u A + A \partial_{\bar{a}} u^a + \nabla_{\bar{a}} A^{\bar{a}} = 0, \tag{1}$$

ahol *a* téridőindex, \bar{a} térszerű index. $A = \tau_a A^a$ és $A^{\bar{a}} = \pi_b^{\bar{a}} A^b$ az A^a vektor idő- és *u*térszerű részei, illetve $d_u = u^a \partial_a$ és $\nabla_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^b \partial_b$ a téridő deriválás idő- és térszerű része, azaz a relatív *u*-időderivált és az abszolút térderivált (lásd A. Függelék). (1) az abszolút mérleg mérleg *u*-relatív mennyiségekkel, az A^a téridő vektor és a ∂_a deriválás *u*-időszerű és *u*-térszerű részeivel kifejezett formája.

A relatív mérlegeket többféle módon is meg szokás adni, aszerint, hogy a mérleg egyes részei milyen sebesség szerint vannak széthasítva idő- és térszerű részekre. Ha a deriválást, a négyes sűrűséget és az u^a sebességmezőt is u^a szerint széthasított relatív formában adjuk meg, akkor:

$$\partial_a A^a \stackrel{u}{\prec} \begin{pmatrix} d_u & \nabla_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^i \end{pmatrix} = d_u A + \nabla_i A^i = 0.$$
 (2)

Amennyiben u^a -t a közeg lokális sebességének tekintjük, akkor ez a közeghez rögzített anyagi (szilárd testek esetén anyagi sokaságon értelmezett) formája az abszolút mérlegnek. A mérleg szubsztanciális formáját akkor kapjuk, ha egy másik "labor" vonatkoztatási rendszer u'^a sebességével széthasított idő- és térszerű mennyiségeket fejezzük ki az u^a komponensekkel:

$$\begin{pmatrix} d_{u'} \quad \nabla'_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ A'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_u - v^i \nabla_i \quad \nabla_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^i + Av^i \end{pmatrix} = d_u A + A \nabla_i v^i + \nabla_i A^i = 0, \quad (3)$$

ahol $v^i = u^a - u'^a$ a külső, labormegfigyelőnek a közeghez képesti relatív sebességét jelöli. A mérleg *lokális* formáját akkor kapjuk, ha a szubsztanciális mérlegben az u'^a szerint széthasított deriváltnak megtartjuk u'^a szerinti komponenseit:

$$\begin{pmatrix} d_{u'} \quad \nabla'_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ A'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{u'} \quad \nabla_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^i + Av^i \end{pmatrix} = d_{u'}A + \nabla_i(A^i + Av^i) = 0.$$
(4)

A külső, labormegfigyelő szerinti $d_{u'}$ időderivált a szokásos parciális időderivált, az abszolút térderiválás pedig az A'^i lokális áramsűrűségre hat, amit az A^i szubsztanciális uáramsűrűséggel fejeztünk ki.

Tehát a mérlegek három alapvető alakja, azaz az anyagi, a szubsztanciális és a lokális forma a közeg u^a és a megfigyelő u'^a sebességmezője szerinti széthasított négyesderivált és széthasított négyesvektormező kombinációitól függ. Mindegyik alak a vektormező abszolút, vonatkoztatási rendszertől független négyesdivergenciája két tetszőleges négyessebességmező segítségével kifejezve. A Galilei-transzformációs szabályok segítségével közvetlenül is belátható a mérlegek vonatkoztatási rendszertől független volta [40].

Az alapvető fizikai mennyiségek azonban nemcsak négyesvektorok, hanem magasabb vagy alacsonyabb rendű tenzorok is lehetnek. A speciális relativitáselmélet alapján például egy energia- vagy tömegimpulzus tenzor bevezetése látszik kézenfekvőnek. Kérdés, hogy Galilei-relativisztikusan mi lehet az egykomponensű folyadékokat jellemző fizikai mennyiség?

2.1. Hányad rendű tenzor vagy kotenzor?

A Galilei-relativisztikus téridő szigorúbb feltételeket jelent, mint a speciális relativisztikus, mert a téridővektorok és kovektorok között csak a lineáris szerkezet jelent összeköttetést. Téridő-kovektormezőnek, -kotenzormezőnek nem képezhető divergenciája és így mérlege sem lehet alapvető, illetve vegyes tenzoroknak nem tudjuk sem a szimmetrikus, sem az antiszimmetrikus részét képezni.

Másrészt az ismert fizikai mennyiségeknek ismert transzformációs tulajdonságai vannak. A vonatkoztatási rendszertől független, téridőre alapozott tárgyalás esetén a tér- és időszerű komponensek transzformációs szabályai következnek a téridőn definiált mennyiségek tulajdonságaiból. Ezt az elméleti keretet kell összehangolni a tapasztalattal. Például az energiasűrűség transzformációs szabálya elvileg ismert. Legalábbis tudjuk, hogy a hármasvektorok a helyzethez hasonlóan Galilei-traszformálódnak. Azonban van néhány más, kézenfekvően transzformációs szabálynak tekinthető megszokott összefüggésünk is. Például, a teljes energia a belső és a kinetikus energia összege, ami azt jelentik, hogy az anyaghoz rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve az energia maga az belső energia, ahhoz képest adott sebességgel mozogva pedig kiegészítődik a kinetikus energiával. Ezek szerint, az energiasűrűség transzformációs szabálya a tapasztalat szerint:

$$e_T = e_b + \frac{\rho}{2}v^2.$$

A fő kérdés, hogy ez alapján miféle fizikai mennyiségről lehet szó? A B. Függelékben megadtuk, hogy egy transzformációs szabály két különböző megfigyelő, azaz vektormező, által idő- és térszerű részekre bontott négyestenzorok komponenseinek viszonyát adja meg a relatív sebességek segítségével. Kiszámoltuk továbbá a téridő vektorok, kovektorok és a másodrendű tenzorok transzformációs tulajdonságait. Ez alapján látjuk, hogy egy legalább másodrendű tenzor valamelyik komponenséről lehet szó. Másodrendű kotenzor idő-időszerű komponense, másodrendű tenzornak pedig a tér-térszerű komponense, amelyik sebességgel négyzetesen transzformálódik.

Mivel másodrendű kotenzornak Galilei-relativisztikusan nem képezhetjük a divergenciáját, ezért az energia lehet például egy *harmadrendű kontra-kokovariáns tenzor* időidőszerű komponense. A fenti transzformációs szabály egyértelműen ilyen tenzort eredményez, feltételezve, hogy az energia skalár mennyiség, továbbá, hogy másodrendű kotenzornak nem létezik a négyes divergenciája, és így nem írható fel a abszolút mérlege.

Egy másik lehetőség, hogy figyelembe vesszük a kinetikus elmélettel való kompatibilitás követelményét is. Ekkor észrevesszük, hogy energia egy másodrendű tenzornak a nyoma, pontosabban az egyrészecske-valószínűségsűrűség függvény sebességgel képezett második momentumának nyomaként adódik [64, 67]. A kinetikus elméletben ezzel összefüggésben, az ideális gáz nyomásra vonatkozó állapotegyenletével összekötve kapjuk az energiát. Téridő-szempontból azonban másodrendű tenzor nem elegendő, hiszen az energiamérleghez az energia árama, azaz a következő momentum, mint harmadrendű hármastenzor is kell. Ezt kiválóan mutatja a másodrendű tenzoron alapuló Galileirelativisztikus abszolút elmélet, ahol az energiamérleg függetlenül léphet csak fel [68]. A kinetikus elmélet harmadik momentumára tekintettel pedig megsejthetjük, hogy a fenomenologikus elméletben harmadrendű kontravariáns tenzor az alapmennyiség. Ennek divergenciája egyszerre kell megadja a Galilei-relativisztikus kontinuumelmélet alapmérlegeit a tömegre, a lendületre és az energiára vonatkozóan. A következő fejezetekben megmutatjuk, hogy ennek az alapmennyiségnek a segítségével valóban következetes elméletet építhetünk fel.

Meglepő módon elég hasonló eredményt kapunk akkor is, ha feltesszük, hogy egy harmadrendű kontra-kokovariáns tenzor az alapmennyiség. Mindkét esetben ugyanazok a transzformációs szabályok és ugyanaz az entrópiaprodukció. (A transzformációs sza-
bályokat illetően lásd a C. Függeléket.) A kinetikus elmélettel való teljes kompatibilitás azonban egyértelműen a harmadrendű kontravariáns tenzor választását tünteti ki, ezért a továbbiakban ezt tekintjük a Galilei-relativisztikus kontinuumok objektív fizikai alapmennyiségének.

3. A tömeg-lendület-energia tenzor és transzformációs szabályai

Ezek után tekintsünk egy $Z^{abc}: M \to \mathbb{M} \otimes \mathbb{M} \vee \mathbb{M}$ tenzormezőt, az egykomponensű egyszerű anyag *tömeg-lendület-energia tenzorának* nevezünk. Feltételezzük, hogy a tenzormező második és harmadik rendjében szimmetrikus, ezt jelzi a \vee szimbólum az értékkészlet jelölésében. A továbbiakban ezt a szimmetriát nem jelöljük külön, csak utalunk rá a fontos esetekben. Ez a tenzor egy tetszőlegesen adott $u^a \in V(1)$ négyessebességgel képzett komponenseivel a következő általános *u*-formába írható:

$$Z^{abc} = z^{bc}u^{a} + z^{\bar{a}bc} = \left(\rho u^{b}u^{c} + p^{\bar{b}}u^{c} + u^{b}p^{\bar{c}} + e^{\bar{b}\bar{c}}\right)u^{a} + \left(j^{\bar{a}}u^{b}u^{c} + P^{\bar{a}\bar{b}}u^{c} + P^{\bar{a}\bar{c}}u^{b} + q^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\right), \quad (5)$$

ahol

$$z^{bc} = \tau_a Z^{abc},$$

$$z^{\bar{a}bc} = \pi^{\bar{a}}_{\ d} Z^{dbc}.$$
(6)

Ez a két komponens a sűrűségek és az áramok tenzorai, azaz a z^{bc} tömeg-lendületenergiasűrűség tenzor, illetve $z^{\bar{a}bc}$ a diffúzió-nyomás-energiaáramsűrűség tenzor. τ_a az időkiértékelés, $\pi_b^{\bar{a}}$ pedig a négyesvektorok *u*-térszerű részét képező *u*-projekció. A további jelölések pedig:

- $\rho = \tau_b \tau_c z^{bc} = \tau_a \tau_b \tau_c Z^{abc}$ a tömeg-lendület-energia tenzor idő-időszerű része, a *sűrűség*.
- $p^{\bar{b}} = \pi^{\bar{b}}_{d} \tau_c z^{dc} = \tau_a \pi^{\bar{b}}_{d} \tau_c Z^{adc}$ a tömeg-lendület-energia tenzor idő-idő-térszerű részer, a *lendületsűrűség*. A tenzor szimmetriája miatt ez megegyezik a $p^{\bar{c}} = \tau_b \pi^{\bar{c}}_{d} z^{bd}$ idő-tér-időszerű résszel.
- $e^{\bar{b}\bar{c}} = \pi^{\bar{b}}_{d}\pi^{\bar{c}}_{e}z^{de} = \tau_{a}\pi^{\bar{b}}_{d}\pi^{\bar{c}}_{e}Z^{ade}$ az energiasűrűség-tenzor, a Z^{abc} tenzor idő-tértérszerű része.
- $j^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_{\ d} \tau_b \tau_c Z^{dbc}$ a diffúziós áramsűrűség, a Z^{abc} tenzor tér-idő-időszerű része.
- $P^{\bar{a}\bar{b}} = \pi^{\bar{a}}_{d}\pi^{\bar{b}}_{e}\tau_{c}Z^{dec}$ a *nyomás*, a Z^{abc} tenzor tér-idő-térszerű része. A tenzor szimmetriája miatt ez egyenlő $P^{\bar{a}\bar{c}} = \pi^{\bar{a}}_{d}\tau_{b}\pi^{\bar{c}}_{e}Z^{dbe}$ -vel.

- $q^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \pi^{\bar{a}}_{d}\pi^{\bar{b}}_{e}\pi^{\bar{c}}_{f}Z^{def}$ az energiaáramsűrűség-tenzor, a Z^{abc} tenzor tér-tér-térszerű része.

Ezenkívül, a megfelelő tenzorok rendjét kettővel redukálva bevezetjük az energiasűrűséget és a hőáramsűrűséget, a kinetikus elmélet definícióinak megfelelően:

 $\begin{aligned} &- e = \frac{1}{2} e^{\bar{a}}_{\bar{a}} \text{ az energiasűrűség,} \\ &- q^{\bar{a}} = \frac{1}{2} q^{\bar{a}\bar{b}}_{\bar{b}} \text{ a hőáramsűrűség.} \end{aligned}$

3.1. Az idő- és térszerű részek transzformációs szabályai

Az u'^a sebességgel képzett idő- és térszerű komponenseket az u^a sebességgel képzett komponensekkel kifejezve nevezzük az adott objektív fizikai mennyiség transzformációs szabályának. A B. Függelékben megadtuk az első és másodrendű tenzorok transzformációs szabályait, amelyet úgy kapunk, hogy a tenzorok u-formáját az u' sebesség szerint hasítjuk szét. A tömeg-lendület-energia tenzor esetén is ugyanígy járunk el.

Az u'-energiát az Z^{abc} tenzor u-komponenseivel és a $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ relatív sebességgel fejezzük ki. Ha az előbbiekhez hasonlóan u^a -t a folyadék, u'^a pedig a megfigyelő sebességének tekintjük, akkor $v^{\bar{a}}$ a folyadék sebessége a megfigyelőhöz képest. Ekkor az alábbi transzformációs szabályok a megfigyelő széthasított mennyiségeit adják meg a folyadék megfelelő széthasított fizikai mennyiségeivel kifejezve.

A ρ sűrűség Galilei-invariáns:

$$\rho' = \tau_a \tau_b \tau_c Z^{abc} = \rho. \tag{7}$$

A lendületsűrűség úgy transzformálódik, mintha sűrűséggel négyesvektort alkotnának:

$$p_{\bar{b}}' = \pi_{d}'^{\bar{b}} \tau_{c} z^{dc} = \pi_{d}'^{\bar{b}} \tau_{c} (\rho u^{d} u^{c} + p^{\bar{d}} u^{c} + u^{d} p^{\bar{c}} + e^{\bar{d}\bar{c}}) = (\delta_{\bar{d}}^{\bar{b}} - u'^{b} \tau_{d}) (\rho u^{d} + p^{\bar{d}})$$

= $p^{\bar{b}} + \rho v^{\bar{b}}.$ (8)

Az (ön)diffúziós áramsűrűség a lendületsűrűséghez hasonlóan a sűrűséggel vett négyesvektor térszerű komponenseként transzformálódik:

$$j'^{\bar{a}} = j^{\bar{a}} + \rho v^{\bar{a}}.\tag{9}$$

Az energiasűrűség viszont nem Galilei-skalár:

$$e' = \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} \pi^{\prime\bar{b}}_{\ d} \pi^{\prime\bar{c}}_{\ e} z^{de} = \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} (\delta^{\bar{b}}_{\ \bar{d}} - u^{\prime b} \tau_d) (\delta^{\bar{c}}_{\ \bar{e}} - u^{\prime c} \tau_e) \left(\rho u^d u^e + p^{\bar{d}} u^e + u^d p^{\bar{e}} + e^{\bar{d}\bar{e}} \right) = \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} \left(\rho v^{\bar{b}} v^{\bar{c}} + p^{\bar{b}} v^{\bar{c}} + v^{\bar{b}} p^{\bar{c}} + e^{\bar{b}\bar{c}} \right) = e + p_{\bar{a}} v^{\bar{a}} + \frac{\rho}{2} v_{\bar{a}} v^{\bar{a}}.$$
(10)

A nyomástenzor transzformációja:

$$P^{\bar{a}\bar{b}} = \pi^{\bar{a}}_{\ d}\pi^{\bar{b}}_{\ e}\tau_{c}Z^{dec} = (\delta^{\bar{a}}_{\ \bar{d}} - u^{\prime a}\tau_{d})(\delta^{\bar{b}}_{\ \bar{e}} - u^{\prime b}\tau_{e})\left(\rho u^{d}u^{e} + p^{\bar{d}}u^{e} + u^{d}j^{\bar{e}} + P^{\bar{d}\bar{e}}\right)$$
$$= P^{\bar{a}\bar{b}} + p^{\bar{b}}v^{\bar{a}} + j^{\bar{a}}v^{\bar{b}} + \rho v^{\bar{a}}v^{\bar{b}}.$$
(11)

Végül a legbonyolultabb a hőáramsűrűség transzformációs szabálya:

$$\begin{aligned} q'^{\bar{a}} &= \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} q'^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} \pi'^{\bar{a}}_{\ d} \pi'^{\bar{b}}_{\ e} \pi'^{\bar{c}}_{\ f} Z^{def} \\ &= \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2} (\delta^{\bar{a}}_{\ \bar{d}} - u'^{a}\tau_{d}) (\delta^{\bar{b}}_{\ \bar{e}} - u'^{b}\tau_{e}) (\delta^{\bar{c}}_{\ \bar{f}} - u'^{c}\tau_{f}) \left(\left(\rho u^{e}u^{f} + p^{\bar{e}}u^{f} + u^{e}p^{\bar{f}} + e^{\bar{e}\bar{f}} \right) u^{d} + \left(j^{\bar{d}}u^{e}u^{f} + P^{\bar{d}\bar{e}}u^{f} + P^{\bar{d}\bar{f}}u^{e} + q^{\bar{d}\bar{e}\bar{f}} \right) \right) \\ &= q^{\bar{a}} + (e + p_{\bar{b}}v^{\bar{b}} + \frac{\rho}{2}v_{\bar{b}}v^{\bar{b}})v^{\bar{a}} + P^{\bar{a}\bar{b}}v_{\bar{b}} + j^{\bar{a}}\frac{v^{\bar{b}}v_{\bar{b}}}{2}. \end{aligned}$$
(12)

A hagyományos 3-as indexes jelölésekkel összefoglalva a transzformációs szabályokat:

$$\rho' = \rho, \tag{13}$$

$$p'^i = p^i + \rho v^i, \tag{14}$$

$$j^{\prime i} = j^i + \rho v^i, \tag{15}$$

$$e' = e + p_i v^i + \frac{\rho}{2} v^2,$$
(16)

$$P'^{ij} = P^{ij} + \rho v^i v^j + p^j v^i + j^i v^j,$$
(17)

$$q'^{i} = q^{i} + v^{i} \left(e + p_{j} v^{j} + \frac{\rho}{2} v^{2} \right) + P^{ij} v_{j} + j^{i} \frac{v^{2}}{2},$$
(18)

Az abszolút tárgyalásban két újszerű fizikai mennyiség bukkant fel. A tömegnek általában van nem konvektív áramsűrűsége, ez volt j^i , illetve van lendületsűrűség mindenféle relatív sebességtől függetlenül, amelyet p^i -vel jelöltünk. Szerepük részletesebb elemzéséhez fel kell írnunk a folyadék abszolút és széthasított mérlegeit.

4. AZ EGYKOMPONENSŰ FOLYADÉKOK ALAPMÉRLEGE ÉS KOMPONENSEI

A tömeg-lendület-energia tenzor divergenciájából vezethetjük le a hagyományosan három külön egyenletként jelentkező alapmérlegek rendszerét. Az abszolút forma:

$$\partial_{a}Z^{abc} = \partial_{a}\left(z^{bc}u^{a} + z^{\bar{a}bc}\right) = \dot{z}^{bc} + z^{bc}\partial_{a}u^{a} + \partial_{a}z^{\bar{a}bc}$$

$$= \left(\dot{\rho}u^{c} + \rho\dot{u}^{c} + \dot{p}^{\bar{c}}\right)u^{b} + \left(\rho\dot{u}^{b} + \dot{p}^{\bar{b}}\right)u^{c} + p^{\bar{b}}\dot{u}^{c} + p^{\bar{c}}\dot{u}^{b} + \dot{e}^{\bar{b}\bar{c}} + \left(\rho u^{b}u^{c} + p^{\bar{b}}u^{c} + u^{b}p^{\bar{c}} + e^{\bar{b}\bar{c}}\right)\partial_{a}u^{a} + u^{b}u^{c}\partial_{a}j^{\bar{a}} + j^{\bar{a}}u^{c}\partial_{a}u^{b} + j^{\bar{a}}u^{b}\partial_{a}u^{c} + P^{\bar{a}\bar{b}}\partial_{a}u^{c} + u^{c}\partial_{a}P^{\bar{a}\bar{b}} + P^{\bar{a}\bar{c}}\partial_{a}u^{b} + u^{b}\partial_{a}P^{\bar{a}\bar{c}} + \partial_{a}q^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = 0^{bc}.$$
(19)

Itt bevezettük a pontot az *u*-időderivált jelölésére, $u^a \partial_a = d_u = .$ (19) időszerű része a tömeg-lendület mérleg:

$$\tau_c \partial_a Z^{abc} = \dot{\rho} u^b + \rho \dot{u}^b + \dot{p}^{\bar{b}} + (\rho u^b + p^{\bar{b}}) \partial_a u^a + u^a \partial_a j^{\bar{a}} + j^{\bar{a}} \partial_a u^b + \partial_a P^{\bar{a}\bar{b}} = 0^b.$$
(20)

A tömeg-lendület mérleg időszerű része pedig a tömegmérleg:

$$\tau_b \tau_c \partial_a Z^{abc} = \dot{\rho} + \rho \partial_a u^a + \partial_a j^{\bar{a}} = 0, \qquad (21)$$

illetve térszerű része a lendületmérleg:

$$\pi^{\bar{b}}{}_{d}\tau_{c}\partial_{a}Z^{adc} = \rho \dot{u}^{b} + \dot{p}^{\bar{b}} + p^{\bar{b}}\partial_{a}u^{a} + j^{\bar{a}}\partial_{a}u^{b} + \partial_{a}P^{\bar{a}\bar{b}} = 0^{\bar{b}}.$$
(22)

Az energia mérlege a tömeg-lendület-energia mérleg tér-térszerű része, illetve annak nyoma:

$$\frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2}\pi^{\bar{b}}{}_{d}\pi^{\bar{c}}{}_{e}\partial_{a}Z^{ade} = \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2}\left(\dot{e}^{\bar{b}\bar{c}} + e^{\bar{b}\bar{c}}\partial_{a}u^{a} + p^{\bar{b}}\dot{u}^{c} + p^{\bar{c}}\dot{u}^{b} + P^{\bar{a}\bar{b}}\partial_{a}u^{c} + P^{\bar{a}\bar{c}}\partial_{a}u^{b}
+ \partial_{a}q^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\right)
= \dot{e} + e\partial_{a}u^{a} + p^{\bar{b}}\dot{u}_{b} + P^{\bar{a}}_{\bar{b}}\partial_{a}u^{b} + \partial_{a}q^{\bar{a}} = 0.$$
(23)

Egyszerű további számítással, az abszolút (19) mérleg u'^a szerinti széthasításával kapjuk a szubsztanciális, relatív mérlegeket. Az u'^a megfigyelő a hozzá képest $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ sebességgel mozgó folyadékra vonatkozó saját lokális mérlegegyenleteit a folyadék mennyiségekkel kifejezve:

$$\dot{\rho} + \rho \partial_i v^i + \underline{\partial_i j^i} = 0 \tag{24}$$

$$\underline{\dot{p}^{i} + p^{i}\partial_{j}v^{j}} + \rho\dot{v}^{i} + \underline{j^{u}\partial_{j}v^{i}} + \partial_{j}P^{ji} = 0^{i},$$
(25)

$$\dot{e} + e\partial_i v^i + \partial_i q^i + \underline{p}_i \dot{v}^i + P^{ij} \partial_i v_j = 0.$$
⁽²⁶⁾

Ezek a tömeg, az lendület és az energia mérlegei. Az energia mérlege látszólag belső energia mérlegére vonatkozik, összhangban azzal, hogy a megfigyelő számára e' a teljes energia és e a belső. A szokásosan felírt mérlegektől az újonnan fellépő j^i (ön)diffúziós áramot és a p^i sajátlendületet tartalmazó tagokban különbözik. Ez a két fizikai mennyiség a P^{ij} nyomástenzorra és a q^i hőáramsűrűségre vonatkozó további feltételek megadását teszi szükségessé az egyenletek lezárásához. A mérlegek lezárásához a termodinamikai feltételeket kell megvizsgálnunk.

5. A MOZGÁS TERMOSZTATIKÁJA, AVAGY TERMOSZTATODINAMIKA

A szakasz címe önellentmondónak látszik, ugyanakkor jól megmutatja a mozgást is tartalmazó 'termosztatika' paradigmatikus dilemmáját. A termodinamika irodalmában a sebesség nem lehet állapothatározó. Galilei-relativisztikusan ez a kérdés megvizsgálható.

5.1. Abszolút relációk

A klasszikus "egyensúlyi" termodinamika, azaz a termosztatika valójában nemegyensúlyi és időfüggő. ¹ Más részről érdemes figyelembe venni a relativisztikus kinetikus elméletben levezetett/beépített termodinamikai hátteret, esetleg egyből a szokásos kereteket meghaladó módon [71, 72].

Termodinamikai alapfeltevésünk teljesen megszokott, csak téridőszempontból kifejtve. Adott az entrópia-négyesvektormező, amely adott megfigyelőre nézve sűrűség és áram is: $S^a = su^a + s^{\overline{a}}$. Ennek sűrűsége az extenzívek sűrűségeitől függ azaz egy szimmetrikus másodrendű téridőtenzor függvénye: $s = s(z^{bc})$. Ez az összefüggés megfigyelőfüggetlen, mert mind az entrópiasűrűség, mind a tömeg-lendület-energiasűrűség tenzor abszolút. Ennek a függvénynek a deriváltja a termodinamikai intenzív mennyiségek szimmetrikus másodrendű kotenzora, amit a továbbiakban *kémiaipotenciál-termosebesség-hőmérséklet kotenzornak* nevezünk és β_{bc} -vel jelölünk. Tehát $\frac{ds}{dz^{bc}} = \beta_{bc}$. Ezt a deriválást termodinamikai szokás szerint Gibbs-relációnak hívjuk és jelöljük:

$$ds = \beta_{bc} dz^{bc}.$$
 (27)

Részletes felírásához elnevezzük az intenzív mennyiségek abszolút kotenzorának komponenseit. E kotenzor egy tetszőleges u^a sebességmező segítségével a következő-képpen hasítható tér- és időszerű komponensekre (lásd (75) az A. Függelékben):

$$\beta_{bc} = \beta_b \tau_c + \beta_{b\bar{e}} \pi_c^{\ \bar{e}} = (\beta \tau_b + \beta_{\bar{d}} \pi_b^{\ \bar{d}}) \tau_c + (\beta_{\bar{e}} \tau_b + \beta_{\bar{d}\bar{e}} \pi_b^{\ \bar{d}}) \pi_c^{\ \bar{e}}.$$
(28)

¹ Akit az ezzel kapcsolatos a szokásos félreértések és összemosások zavarnak, mindenképpen olvassa el Matolcsi Tamás nagyszerű könyvét angolul, vagy könnyedebb verzióját magyarul [69, 70].

Itt az egyes fizikai mennyiségek a következőek:

– Az energia tenzorhoz konjugált intenzív a β_{bc} kotenzor tér-térszerű része, ennek nyomából képezzük a β reciprok hőmérsékletet:

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{6} \delta^{\bar{b}\bar{c}} \delta_{\bar{c}}{}^e \delta_{\bar{b}}{}^d \beta_{de} = \frac{2}{3} \beta_{\bar{b}}{}^{\bar{b}}.$$
(29)

Mivel most az energia tenzoriális formáját nem vizsgáljuk, ezért speciálisan feltételezzük, hogy a reciprok hőmérséklet kotenzor az egységtenzorral arányos:

$$\beta_{\bar{b}\bar{c}} = \frac{\beta}{2} \delta^{\bar{b}\bar{c}}.$$
(30)

 – A μ kémiai potenciál a kémiaipotenciál-termosebesség-hőmérséklet kotenzor időidőszerű részéből képezhető:

$$\mu = -Tu^b u^c \beta_{bc}.\tag{31}$$

 A sajátlendülethez tartozó w_b intenzív mennyiséget *termosebességnek* fogjuk nevezni, és a következőképpen adjuk meg:

$$w_{\bar{b}} = -2Tu^c \delta_{\bar{b}}{}^d \beta_{dc}. \tag{32}$$

Ezek után a Gibbs-reláció *u*-széthasított formája ezek után a következőképpen számolható:

$$ds = \beta_{bc}dz^{bc} = -\beta \left(\mu\tau_{b}\tau_{c} + \frac{1}{2}(w_{\bar{d}}\pi_{b}{}^{\bar{d}}\tau_{c} + w_{\bar{e}}\pi_{c}{}^{\bar{e}}\tau_{b}) - T\beta_{\bar{d}\bar{e}}\pi_{b}{}^{\bar{d}}\pi_{c}{}^{\bar{e}}\right) \times \left(u^{b}u^{c}d\rho + \rho u^{c}du^{b} + \rho u^{b}du^{c} + u^{c}dp^{\bar{b}} + p^{\bar{b}}du^{c} + u^{b}dp^{\bar{c}} + p^{\bar{c}}du^{b} + de^{\bar{b}\bar{c}}\right) \\ = -\beta \left(\mu d\rho + \rho w_{\bar{b}}du^{b} + \rho w_{\bar{b}}dp^{\bar{b}} - p_{\bar{b}}du^{b} - de\right).$$

$$(33)$$

Tehát az abszolút Gibbs-reláció u-széthasított mennyiségekkel felírva végül az alábbi formát ölti:

$$de = Tds + \mu d\rho + w_{\bar{a}}dp^{\bar{a}} + (\rho w_a - p_a)du^a.$$
(34)

Ezenkívül képezhetjük a négyes entrópia Legendre-transzformáltját, bevezetve az \tilde{S}^a konjugált entrópiát:

$$S^a - \beta_{bc} Z^{abc} = \tilde{S}^a. \tag{35}$$

Ez semmiféle feltételt nem jelent mindaddig, amíg a jobboldali négyesvektor általános. Bontsuk fel \tilde{S}^a -t célszerűen egy tetszőlegesen adott u^a négyessebességgel párhuzamos és térszerű komponensekre a többi mennyiséghez hasonlóan:

$$\tilde{S}^a = \beta p(u^a + r^{\bar{a}}), \tag{36}$$

ahol $r_{\bar{a}}u^a = 0$. Ekkor a (35) vektoregyenlet abszolút időszerű részét, az *extenzivitási relációt*, a kifejezés τ_a -val történő szorzásával kapjuk:

$$s - \beta \mu \rho - \beta w_{\bar{b}} p^b - \beta e = \beta p, \tag{37}$$

illetve az u-térszerű rész, az entrópiaáram kifejezése, az u-ra merőleges $\pi_b^{\bar{a}}$ -vel projekcióval adódik:

$$s^{\bar{a}} - \beta \mu j^{\bar{a}} - \beta p^{\bar{a}\bar{b}} w_{\bar{b}} + \beta q^{\bar{a}} = \beta p r^{\bar{a}}.$$
(38)

5.2. TERMODINAMIKAI ÖSSZEFÜGGÉSEK TRANSZFORMÁCIÓS SZABÁLYAI

Az entrópia deriváltjaként bevezetett intenzív mennyiségek kotenzor komponensei, ezért a B. Függelék (97) egyenlete alapján egy u'^a sebesség szerinti idő- és térszerű komponenseket egy másik, u^a sebesség által széthasított komponensekkel és a $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ relatív sebességgel kifejezve kapjuk a transzformációs szabályokat:

$$\beta' = \beta, \tag{39}$$

$$w^{\prime i} = w^i + v^i, \tag{40}$$

$$\mu' = \mu - w_i v^i - \frac{v^2}{2}.$$
(41)

A négyesvektorokra vonatkozó (78) transzformációs szabályok és \tilde{S}^a (36) felbontása alapján adódik, hogy

$$p' = p$$
 és $r'^{i} = r^{i} + v^{i}$. (42)

Ezeknek és a ρ , $p^{\bar{a}}$, e extenzívekre vonatkozó (13), (14) és (16) transzformációs szabályok alapján ellenőrizhetjük, hogy a (37) abszolút extenzivitási reláció Galilei-invariáns:

$$e' + p - Ts - \mu'\rho - w'_i p'^i = e + p - Ts - \mu\rho - w_i p^i = 0.$$
(43)

Az entrópiaáram-sűrűség transzformációs szabálya szerint pedig térvektor, ahogy elvárható:

$$s'^{i} = \beta(q'^{i} - \mu'j'^{i} - P'^{ij}w'_{j} + pr'^{i}) = \beta(q^{i} - \mu j^{i} - P^{ij}w_{j} + pr^{i}) + sv^{i} = s^{i} + sv^{i},$$
(44)

ahol felhasználtuk β , q^i , μ , j^i , P^{ij} , w_i , p és r^i előzőekben levezetett transzformációs szabályait.

Fontos még a relatív formában megadott Gibbs-reláció,

$$de = Tds + \mu d\rho + w_i dp^i \tag{45}$$

transzformációs értése is. Ez alapján, ha valamely megfigyelő a fenti Gibbs-relációt állapítja meg, akkor a hozzá képest v^i sebességgel mozgó folyadék fizikai mennyiségeivel ez az összefüggés úgy fejezhető ki, hogy

$$de' - Tds - \mu'd\rho - w'_{i}dp'^{i} = de - Tds - \mu d\rho - w_{i}dp^{i} - (\rho w_{i} - p_{i})dv^{i}.$$
 (46)

Tehát a Gibbs-reláció abszolút, de nem Galilei-invariáns, különböző megfigyelők általában a relatív sebesség változásától függően az energia megváltozását mérhetik. Kivéve, ha az utolsó tag nulla, azaz

$$w^i = \frac{p^i}{\rho}.\tag{47}$$

Ez az összefüggés egy állapotegyenlet, *impulzusfeltételnek* nevezzük a továbbiakban. Az intenzív termosebesség speciális függését adja a sajátimpulzustól és a sűrűségtől. Ha teljesül, akkor a Gibbs-reláció Galilei-invariáns.

5.3. Abszolút entrópia, relatív állapotegyenletek

Az entrópiasűrűség potenciálja az intenzívek tenzorának, azok deriváltként történő definíciója szerint, (27) alapján. Az abszolút (27) összefüggés szerint az entrópiasűrűség egyváltozós függvény, változója a tömeg-lendület-energiasűrűség tenzor. Az entrópiasűrűség abszolút, a változója is, de ezt a változót széthasított formájával is kifejezhetjük. Azaz ha azt nézzük, hogy egy adott u'^a megfigyelő entrópiasűrűség-függvénye hogyan függ a megfigyelt folyadék saját sűrűségétől, saját lendületsűrűségétől és saját energiasűrűségétől, akkor a megfigyelő és a folyadék relatív sebességétől is függeni fog.

(46) jobb oldali Gibbs-relációja a megfigyelő u'-mennyiségeinek a folyadék umennyiségeivel kifejezett termodinamikai viszonya. A Gibbs-reláció ebben a formában hasonlít a megfigyelőket keverő szubsztanciális mérlegekre. Az u'-széthasítást umennyiségekkel reprezentáljuk, ennek megfelelően a Gibbs-reláció – szubsztanciális formája – mozgó kontinuumokra a következő:

$$de = Tds + \mu d\rho + w_i dp^i + (\rho w_i - p_i)dv^i.$$

$$\tag{48}$$

Ezt a kifejezést lehet a szubsztanciális mérlegekkel együtt az entrópiaprodukció kiszámítására használni, ez a Gibbs-reláció hagyományos relatív értelmezése. (48) analóg a relativisztikus esetben a kinetikus kompatibilitás figyelembe vételével kapott alakkal [71, 72, 73], azzal a különbséggel, hogy itt az utolsó tagban a sűrűség szerepel, relativisztikusan pedig az entalpia.

A (48) Gibbs-relációban a sebesség nem független változó. Vizsgáljuk az impulzusra és a relatív sebességre vonatkozó intenzív mennyiségek között fennálló Maxwell-relációt, azaz a vegyes parciális deriváltak egyenlőségére vonatkozó feltételt. Ezt célszerű izoterm folyamatokra vizsgálni:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial v^j \partial p^i} = \frac{\partial w_i}{\partial v^j} = \frac{\partial (\rho w_j - p_j)}{\partial p^i} = \frac{\partial^2 e}{\partial p^i \partial v^j}.$$
(49)

Mivel $w^{j}(\rho, p^{i}, e, v^{i})$ állapotfüggvényen kívül a többi mennyiség változó, ezért (49) tekinthető a termosebesség meghatározására vonatkozó parciális differenciálegyenletnek:

$$\frac{\partial w_i}{\partial v^j} = \rho \frac{\partial w_j}{\partial p^i} - p_j.$$
(50)

Ennek általános megoldása

$$w^{i}(\rho, p^{i}, e, v^{i}) = \frac{p^{i}}{\rho} + A^{ij}\left(v_{j} + \frac{p_{j}}{\rho}\right) + \hat{w}^{i},$$
(51)

ahol A^{ij} és \hat{w}^i tetszőleges ρ, e függvények. A továbbiakban nem vizsgáljuk ezeknek a függvényeknek a fizikai jelentését, és azt tételezzük fel, hogy nullák. Vegyük észre, hogy ekkor, más gondolatmenettel, de ismét a (47) állapotegyenletet kaptuk.

Ez a szokott lendület-tömeg-sebesség viszony termodinamikai általánosítása, nem kötődik a mechanikai levezetésekben feltételezett speciális alakú Lagrange-függvény létezéséhez, amelynek formája a Newton-egyenlet következménye, és Noether-tétel sem kell hozzá.

6. Abszolút entrópiamérleg

Az abszolút termodinamikai feltételekből következő (34) Gibbs-reláció és (38) entrópiaáram megadják, hogy adott entrópiasűrűség és u-entrópiaáram hogyan függ a megfelelő termodinamikai intenzív állapotjelzőktől. Így ki tudjuk fejezni az abszolút entrópiaprodukciót az u-hasított mennyiségekkel:

$$\partial_{a}S^{a} = \dot{s} + s\partial_{a}u^{a} + \partial_{a}s^{\bar{a}} = \beta \dot{e} - \beta\mu\dot{\rho} - \beta w_{\bar{a}}\dot{p}^{\bar{a}} + \beta(p_{\bar{a}} - \rho w_{\bar{a}})\dot{u}^{a} + s\partial_{a}u^{a} + \partial_{a}\left(\beta q^{\bar{a}} - \beta\mu j^{\bar{a}} - \beta P^{\bar{a}\bar{b}}w_{\bar{b}} + \beta pr^{\bar{a}}\right).$$
(52)

Behelyettesítve a (21), (22) és (23) tömeg, lendület és energiamérlegeket, felhasználva a (37) extenzivitási relációt, illetve annak és a (34) Gibbs-reláció következményeként adódó alábbi Gibbs-Duhem relációt,

$$\beta dp = -hd\beta + \rho d(\beta \mu) + p^{\bar{a}} d(\beta w_{\bar{a}}) - \beta (\rho w_{\bar{a}} - p_{\bar{a}}) du^a,$$
(53)

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \partial_{a}S^{a} &= (s - \beta e + \beta \mu \rho + \beta w_{\bar{a}} p^{\bar{a}})\partial_{a}u^{a} + q^{\bar{a}}\partial_{a}\beta - j^{\bar{a}}\partial_{a}(\beta\mu) - \\ \beta P^{\bar{a}}_{\ \bar{b}}\partial_{a}(u^{b} + w_{\bar{b}}) + \beta w_{\bar{a}}j^{\bar{b}}\partial_{b}u^{a} - P^{\bar{a}\bar{b}}w_{\bar{b}}\partial_{\bar{a}}\beta + \beta p\partial_{a}r^{\bar{a}} + r^{\bar{a}}\partial_{a}(\beta p) = \\ (\rho r^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\left(\partial_{a}(\beta\mu) - \beta w_{\bar{b}}\partial_{a}u^{b}\right) + \\ \left(q^{\bar{a}} - hr^{\bar{a}} - (P^{\bar{a}\bar{b}} - r^{\bar{a}}p^{\bar{b}})w_{\bar{b}} + pr^{a}\right)\partial_{a}\beta - \\ \beta \left(P^{\bar{a}}_{\bar{b}} - r^{\bar{a}}p_{\bar{b}} - p\delta^{\bar{a}}_{\bar{b}}\right)\partial_{a}(u^{b} + w^{\bar{b}}) + \beta p\partial_{a}(r^{\bar{a}} - w^{\bar{a}}) = \\ (\rho r^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\partial_{a}\left(\beta \left(\mu + \frac{w^{2}}{2}\right)\right) + \\ \left(q^{\bar{a}} - er^{\bar{a}} - (P^{\bar{a}\bar{b}} - r^{\bar{a}}p^{\bar{b}})w_{\bar{b}} - (\rho r^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\frac{w^{2}}{2}\right)\partial_{a}\beta - \\ \beta \left(P^{\bar{a}}_{\bar{b}} - j^{\bar{a}}w_{\bar{b}} - r^{\bar{a}}(p_{\bar{b}} - \rho w_{\bar{b}}) - p\delta^{\bar{a}}_{\bar{b}}\right)\partial(u^{b} + w^{\bar{b}}) + \beta p\partial_{a}(r^{\bar{a}} - w^{\bar{a}}) \geq 0. \end{aligned}$$

$$(54)$$

A fenti egyenlőtlenség a Galilei-relativisztikus folyadékok abszolút entrópiaprodukciója. Az elvárt módon kvadratikus kifejezés első tagja az anyagáramlásra vonatkozik, a $j^{\bar{a}}$ diffúziós áramsűrűség a konstitutív mennyiség benne. A szorzat másik felében pedig a megfelelő termodinamikai erőt, a kémiai potenciál gradiensét figyelhetjük meg. A második tag a termikus eredetű entrópiaprodukció, ahol a $q^{\bar{a}}$ hőáramsűrűség a konstitutív mennyiség és a reciprok hőmérséklet gradiense, $\partial_a \beta$ a termodinamikai erő. Végül a harmadik tag a mechanikai eredetű disszipációval azonosítható, benne a $P^{\bar{a}\bar{b}}$ nyomástenzorral, mint konstitutív mennyiséggel és a sebesség gradiensével mint termodinamikai erővel. Pontosabban a viszkozitás szempontjából releváns sebesség a tetszőlegesen választott u^a és a $w^{\bar{a}}$ termikus sebesség összege. Figyeljük meg, hogy u^a , a folyadék sebességmezője expliciten csak itt, a mechanikai disszipációt leíró részben, a sebességgradiensben szerepel. A negyedik tag új, benne az $r^{\bar{a}}$ nyomássebesség tekinthető konstitutív mennyiségnek. Ez a tag nulla, ha a nyomássebesség azonos a termikus sebességgel.

Az abszolút entrópiaprodukció egyenlőtlensége tehát megoldható, a kvadratikus forma minden tagjában vannak konstitutív mennyiségek. Emiatt bevezethetőek termodinamikai erők és áramok, és közöttük a szokott lineáris kapcsolat feltételezve kapjuk az egyenlőtlenség megoldását, az együtthatók előjelei megfelelően választva. A konstitutív elmélet analóg a hagyományossal, és le is zárja az alapmérlegek differenciálegyenlet-rendszerét, mert az ott szereplő szokásos alapváltozók, a ρ sűrűség, u^a sebesség és T hőmérséklet mellett a konstitutív mennyiségeket az entrópia egyenlőtlenségnek megfelelően rögzíthetjük. A $w^{\bar{a}}$ termikus sebesség pedig az entrópia parciális deriváltja, termodinamikai értelemben intenzív mennyiség, állapotegyenlet rögzíti, amit ráadásul jól meg is tudtunk határozni (47)-ben és (51)-ben. De vajon mit jelent és hogyan egyszerűsíthető az erők és áramok termikus sebessséget tartalmazó bonyolult formája? Ezt vizsgáljuk a következő szakaszban.

7. MI A FOLYADÉK SEBESSÉGE?

Az entrópiaprodukció negyedik tagjának szerepét nem vizsgáljuk a továbbiakban, hiszen amennyiben a relativisztikus kinetikus elmélettel összhangban a konjugált entrópiavektor térszerű részét párhuzamosnak választjuk a hőmérsékletvektorral, akkor könnyen értelmezhető egyszerű formulákat kaphatunk. Tegyük fel tehát, hogy

$$r^{\bar{a}} = w^{\bar{a}}.$$
(55)

Ekkor a fenti entrópiaprodukció a következő alakúra egyszerűsödik:

$$\partial_{a}S^{a} = (\rho w^{\bar{a}} - j^{\bar{a}}) \partial_{a} \left(\beta \left(\mu + \frac{w^{2}}{2} \right) \right) + \left(q^{\bar{a}} - w^{\bar{a}} (e - p^{\bar{b}} w_{\bar{b}}) - (\rho w^{\bar{a}} - j^{\bar{a}} \frac{w^{2}}{2} - P^{\bar{a}\bar{b}} w_{\bar{b}} \right) \partial_{a}\beta - \beta \left(P^{\bar{a}}_{\ \bar{b}} - j^{\bar{a}} w_{\bar{b}} - w^{\bar{a}} (p_{\bar{b}} - \rho w_{\bar{b}}) - p \delta^{\bar{a}}_{\ \bar{b}} \right) \partial_{a} (u^{b} + w^{\bar{b}}) \ge 0.$$
(56)

Érdemes felírnunk az abszolút entrópiaprodukciónak egy külső, u'^a megfigyelő szemszögéből megjelenő relatív formáját. Legyen szokás szerint a relatív sebesség $u^a - u'^a = v^{\bar{a}}$. Azt kapjuk, hogy

$$\partial_{a}S^{a} = \left(\rho w^{i} - j^{i}\right)\partial_{i}\left(\frac{1}{T}\left(\mu + \frac{w^{2}}{2}\right)\right) + \left(q^{i} - w^{i}(e - p^{k}w_{k} + \rho + \frac{w^{2}}{2}) + j^{i}\frac{w^{2}}{2}) - P^{ik}w_{k}\right)\partial_{i}\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\left(P^{ik} + \rho w^{i}w^{k} - w^{i}p^{k} - j^{i}w^{k} - p\delta^{ik}\right)\partial_{i}(v_{k} + w_{k}) \ge 0.$$
(57)

Megjegyzés: ugyanezt kapjuk, ha a relatív, szubsztanciális mérlegek (24), (25) és (26) segítségével, illetve a (48) relatív Gibbs-reláció és a megfelelő Gibbs–Duhem-reláció és entrópiáramsűrűség ((38) relatív formája) segítségével számoljuk ki az entrópiaprodukciót. Természetesen ezeket az összefügéseket (és lehetőleg a fizikai mennyiségek transzformációs szabályait is) valahonnan meg kell tudnunk. Téridőmodell nélkül ez nehezen elképzelhető. Hogyan zárjuk le az egyszerű folyadékok mozgásegyenleteit, azaz hogyan tehető az egyenletek száma az ismeretlenek számával egyenlővé? Vagyis mi a konstitutív elmélet? Vegyük észre, hogy a fenti entrópiaprodukció szokásos lineáris megoldásából kapott három összefüggés nem elég az egyenletrendszer lezárásához, hiszen az alapváltozóink megszokott rendszere, azaz a sűrűség, belső energia és a folyadék sebessége mellett két további mezőt kellene megadnunk: a folyadék p^i sajátimpulzusát és a termosebességet, w^i -t. Viszont két további lehetőségünk is van, hogy lezárjuk a konstitutív elméletet. Egyrészt w^i -re termodinamikai állapotegyenlet vonatkozik. Másrészt pedig vegyük észre, hogy tulajdonképpen eddig nem rögzítettük, hogy mit is értünk folyadéksebesség alatt, hiszen a fenti egyenletrendszerben a relatív sebességmező tetszőleges lehet, bármely két megfigyelő között. Egyiket valamilyen fizikai módon célszerű a folyadékhoz rögzíteni. A folyadék sebességének rögzítését *áramlásválasztásnak* nevezzük.

Elvileg a sebességet rögzíthetjük a folyadék tetszőleges extenzív tulajdonságához, például a tömeghez ($j^i = 0$), energiához ($q^i = 0$) vagy lendülethez ($p^i = 0$), de bonyolultabb módon is. Ezek után a relatív sebesség már a folyadék tömegének, energiájának, illetve lendületének áramlását jellemzi a külső megfigyelőhöz képest. Bonyolultabb áramlásokra példa tiszta anyagi (tömeg) és energiaáram keveréke [73]. Van szabadságunk az áramlás rögzítésére, amit az abszolút egyenletekben az u^a sebesség tetszőleges választása jelent. Az egyes választások azonban gyakorlati szempontból nem egyenértékűek. Az entrópiaprodukció fenti formája azt sugallja, hogy az áramlásválasztások közül különösen egyszerű konstitutív függvényeket kapunk, ha az áramlást a termosebességhez kötjük, azaz $w^i = 0$ módon választjuk a folyadék sebességét. Ezt a választást nevezhetjük *termoáramlásnak*. Ekkor az entrópiaprodukció:

$$\partial_a S^a = -j^i \partial_i \frac{\mu}{T} + q^i \partial_i \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \left(P^{ij} - p \delta^{ij} \right) \partial_i v_j \ge 0.$$
(58)

Ez a választás természetes is abban az értelemben, hogy visszapillantva a diffúziós áramsűrűség, hőáramsűrűség, impulzussűrűség és nyomás (15), (18), (14) és (17), illetve a kémiai potenciál, a hőmérséklet és a termikus sebesség (41), (39) és (40) transzformációs szabályaira, felismerhetjük egy olyan u' megfigyelő fizikai mennyiségeit, amelynek relatív sebessége a folyadék u sebességére vonatkoztatva pontosan $v^i = -w^i$. Ezért tehát az entrópiaprodukció (58) formája azonos minden, a termoáramlással definiált közeghez képest v^i sebességgel mozgó megfigyelő számára.

Ahogy az előző fejezet mozgási termosztatika elemzése mutatta, a sebesség és az impulzus viszonyára az entrópia létezése egy kitüntetett állapotegyenletet eredményez a termodinamikai sebesség és a sajátimpulzus között, azaz $p^i = \rho w^i$. Ez azt jelenti, hogy a termoáramlás választása ezzel az állapotegyenlettel egyben lendületáramlást is jelent. Vagy, fordítva, ha a folyadék lendülete az, ami áramlik, akkor az állapotegyenlet miatt az áramlás egyúttal a termosebességgel történik.

	Diffúziós	Termikus	Mechanikai
Erő Áram	$-\partial_i \frac{\mu}{T} \\ j^i$	$\partial_i rac{1}{T} q^i$	$\frac{\partial_i v_j}{-\frac{1}{T} \left(P^{ij} - p \delta^{ij} \right)}$

1. TÁBLÁZAT. Termodinamikai erők és áramok

Ebben az esetben, tehát a $w^i = 0$ termoáramlással definiált, és $p^i = \rho v^i$ termosebesség állapotegyenlettel megadott közegre a (24), (25) és (26) relatív tömeg-, lendület- és energiamérlegek szubsztanciális formája:

$$\dot{\rho} + \rho \partial_i v^i + \partial_i j^i = 0 \tag{59}$$

$$\rho \dot{v}^i + j^j \partial_j v^i + \partial_j P^{ji} = 0^i, \tag{60}$$

$$\dot{e} + e\partial_i v^i + \partial_i q^i + P^{ij}\partial_i v_j = 0.$$
(61)

Az abszolút (34) és (37) Gibbs-reláció és extenzivitási relációk megfelelő relatív formában a következőképpen írhatók:

$$de = Tds + \mu d\rho + v_i d(\rho v^i), \rightarrow de_b = Tds + \mu_b d\rho, \tag{62}$$

$$e + p = Ts + \mu\rho + \rho v^2 \rightarrow e_b + p = Ts + \mu_b\rho, \tag{63}$$

ahol $e_b = e - \rho \frac{v^2}{2}$ a *belső energia* és $\mu_b = \mu + \frac{v^2}{2}$ a *belső kémiai potenciál*. Ezekkel a mennyiségekkel a termodinamikai alapösszefüggések a szokott formában írhatóak. Az extenzivitási relációban a mozgási energiát a nyomáshoz szokták sorolni a kémiai potenciál helyett. A Bernoulli-egyenletként jelenik meg az extenzivitási reláció és benne a dinamikus nyomás (a torlónyomás és statikus nyomás különbsége).

Az entrópia (38) áramsűrűségének vonatkozó relatív formája:

$$s^{i} = \frac{1}{T} \left(q^{i} - \mu j^{i} - P^{ij} v_{j} + p v^{i} \right).$$
(64)

Az (59)–(64) termodinamikai összefüggések és a mérlegek alapján az entrópiaprodukció közvetlenül számolható, és pontosan (58) lesz. Ennek megfelelően az 1. táblázatban megadott termodinamikai erőket és áramokat azonosíthatjuk.

Lineáris összefüggést feltételezve, izotrop folyadékra azt kapjuk, hogy

$$j^{i} = -\xi \partial_{i} \frac{\mu}{T} + \chi_{1} \partial_{i} \frac{1}{T}, \tag{65}$$

$$q^{i} = -\chi_{2}\partial_{i}\frac{\mu}{T} + \lambda\partial_{i}\frac{1}{T},$$
(66)

$$P^{ij} = p\delta^{ij} - \eta_v \partial_k v^k \delta^{ij} - \eta \left(\partial^i v^j + \partial^j v^i - \frac{2}{3} \partial_k v^k \delta^{ij} \right).$$
(67)

Itt ξ az (ön)diffúziós együttható, χ_1 és χ_2 a Soret–Dufour-együtthatók, λ a termodinamikai hővezetési együttható (mert $\lambda_F = T^2 \lambda$ a Fourier-féle hővezetési együttható), η_v és η a térfogati és nyíró viszkozitás.

Az alapmérlegek (59)–(61) rendszere, együtt a (65), (66) és (67) konstitutív összefüggésekkel zárt és az (ön)diffúziós áramsűrűség kivételével azonos a szokásos kontinuitás-Fourier–Navier–Stokes-egyenletrendszerrel. Az öndiffúziós áramsűrűség nem küszöbölhető ki áramlásválasztással, elhagyása fizikai feltételt jelent.

8. Összefoglalás

Ebben a munkában megmutattuk, hogy a nemrelativisztikus, azaz Galilei-relativisztikus, egykomponensű disszipatív folyadékok hogyan tárgyalhatóak a vonatkoztatási rendszertől függetlenül, és milyen feltételekkel kaphatjuk meg a leírásukra általában használt vonatkoztatási rendszertől függő, relatív Fourier–Navier–Stokes-egyenletrendszert. A vonatkoztatásirendszer-függetlenséget a Matolcsi-féle Galilei-relativisztikus téridőmodell keretei között tárgyaljuk [5, 6], ahol a Galilei-relativisztikus téridő az eredeti Weylféle, affin terekre alapozott koncepció kibontott matematikai megfogalmazása. Tárgyalásunk vektortereket használ, és indexes formalizmusra alapozott egyszerű számítási módszert vezet be.

A fizikai alapmennyiség a tömeg-lendület-energia tenzor, egy két indexében szimmetrikus harmadrendű négyestenzor. Ez kompatibilis a kinetikus elmélet momentumsorfejtésével, például az energia bevezetését illetően. Ennek négyesdivergenciája a folyadék tömeg-energia-lendületének megmaradását adja, amelyet tetszőlegesen adott négyessebesség a tömegmérlegre, lendületmérlegre és energiamérlegre bont. A harmadrendű négyestenzor négyesdivergenciája egy másodrendű négyestenzor-egyenlet. A tömegmérleg ennek idő-időszerű, az impulzusmérleg az idő-térszerű része (illetve a szimmetria miatt tér-időszerű is), az energiamérleg pedig a tér-térszerű résznek, amely egy másodrendű hármastenzor egyenlet, a nyoma.

Az abszolút tárgyalásból levezettük a relatív fizikai mennyiségek és a mérlegek transzformációs szabályait. Az elmélet egyik következménye, hogy a belső energia, kinetikus energia és a teljes energia közti szokásos kapcsolat egy transzformációs szabály. A kinetikus energia tartalmazza a folyadék sajátlendületét, amely általában nem köthető valamely relatív sebességhez. Nincs abszolút energia, de van kovariáns energia, azaz az energia egy abszolút mennyiség meghatározott része.

A termodinamika is vonatkoztatási rendszertől függetlenül adódik, pusztán annyit feltételezve, hogy az entrópia négyesvektor időszerű része, az entrópiasűrűség a tömeglendület-energia sűrűségtől függ. Ez vonatkoztatási rendszertől független, abszolút állítás. Az entrópiasűrűség deriváltja adja az intenzív mennyiségek másodrendű négyestenzorát, a hőmérséklet-termosebesség-kémiai potenciál tenzort, abszolút módon. A mozgási mennyiségeket is tartalmazó Gibbs-reláció szubsztanciális formája tartalmazza az impulzushoz konjugált intenzív mennyiséget, a termosebességet és a relatív sebességet is, de a teljes formula vonatkoztatási rendszertől független. Ekkor viszont a mozgási intenzívekre vonatkozó állapotegyenletek nem függetlenek. A vegyes parciális deriváltak egyenlősége, a megfelelő Maxwell-reláció az impulzussűrűséget a termosebesség és a sűrűség szorzataként adja, lényegében egyértelműen.

Mivel az entrópiaáram formája is következmény és levezethető az alapfeltevésekből, az entrópia négyesvektor divergenciáját, az entrópiaprodukciót ezek után abszolút módon számolhatjuk. A folyadék áramlása tetszőlegesen rögzíthetjük, akár a tömeghez (Eckartáramlás), akár az energiához (Landau–Lifsic-áramlás), illetve más módokon is.

Az entrópiaprodukció konkrét formája megmutatja, hogy a folyadék mozgását érdemes a termosebességhez kötni. Ekkor az impulzusfeltétel állapotegyenlete miatt a mindenkori megfigyelőhöz viszonyított relatív sebességgel adható meg a relatív impulzussűrűség és a vonatkoztatási rendszertől független entrópiaprodukció lényegében a megszokott formát ölti. Az eltérés az öndiffúziós tag jelenléte. Ezt nem lehet megfelelő áramlásválasztással kiküszöbölni úgy, hogy a többi tag szokott formáját megőrizzük. Ha nullának tekintjük, akkor az az anyagra vonatkozó fizikai feltételként interpretálható, vagy megsérti az entrópiaprodukció elvárt függetlenségét a vonatkoztatási rendszertől.

Megjegyzések:

- Ha a Galilei-relativisztikus alapmennyiség harmadrendű kontra-kokotenzor, ugyanolyan mérlegegyenleteket kapunk, azonos transzformációs szabályokkal. Ekkor az energia és hőmérséklet helyett a tömegsűrűség és a kémiai potenciál reprezentálódik másodrendű hármastenzorként. Ez az alapmennyiség a kovariáns komponensei miatt azonban nem kompatibilis a kinetikus elmélet momentum-sorfejtésével kapott egyenletrendszerrel. A transzformációs szabályokat a C. Függelékben kiszámoltuk.
- Az egyszerű anyagok semleges körülmények közötti stabilitása alapvető az egész fizikában. E nélkül nincs objektív megfigyelés, a nem reprodukálhatóak a jelenségek. Ennek az elvnek fizikai-matematikai modellje a termodinamika maga. Az entrópia létezése és növekedése, az egész termodinamikai keretrendszer ezt eredményezi és ezt jelenti. A termodinamika ilyen felfogása egyúttal önellenőrzési lehetőség is. Elvárható, hogy az egyszerű folyadék homogén egyensúlya elszigetelt rendszerben pusztán a termodinamikai feltételek miatt stabil legyen. A most levezetett folyadékmodell ehhez teljesít egy fontos szükséges feltételt.

Belátható, hogy a kapott (59)-(61), (65)-(67) egyenletrendszer generikusan stabil,

azaz a homogén egyensúlya linearisan stabil, ha a termodinamikai stabilitás teljesül (az entrópia konkáv) és a transzportegyütthatók nemnegatívak, illetve

$$\xi \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mu}{T} - \lambda \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} + (\chi_1 + \chi_2) \frac{\partial}{\partial e} \frac{\mu}{T} \ge 0.$$
(68)

Itt az első két tag és a harmadik tag együtthatója termodinamikai feltételek miatt nemnegatív, egyedül az utolsó tagban szereplő parciális derivált vezethet az egyenlőtlenség sérüléséhez.

Ennek a munkának a főmotivációját a relativisztikus folyadékok hasonló problémái jelentették [74, 75, 76, 62, 77, 65, 71, 72, 78, 79, 73].

A. FÜGGELÉK. GALILEI-RELATIVISZTIKUS TÉRIDŐ

Itt röviden ismertetésre kerül a Galilei-relativisztikus téridőmodell.

A Galilei-relativisztikus téridőmodellben van:

- 1. Az *M téridő* az $x \in M$ *események* (vagy *villanatok*) négydimenziós irányított affin tere az $x^a \in \mathbb{M}$ *téridőtartamok* négydimenziós vektortere felett.
- 2. Az *I idő* egy dimenziós irányított affin tér a $t \in \mathbb{I}$ időtartamok egydimenziós irányított vektortere felett.
- 3. A $\tau : M \to I$ *időkiértékelés* egy affin szürjekció a $\tau_a : \mathbb{M} \to \mathbb{I}$ lineáris leképezés, az *időtartamkiértékelés* felett.
- 4. D a távolság mértékegyenese, amely egydimenziós irányított vektortér.
- 5. A $\delta_{\bar{a}\bar{b}} : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$ euklidészi szerkezet egy szimmetrikus bilineáris leképezés, ahol $\mathbb{E} := Ker(\tau) \subset \mathbb{M}$ a *térvektorok* háromdimenziós lineáris altere.

 \mathbb{M} duálisát, azaz az $\mathbb{M} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések vektorterét \mathbb{M}^* -al jelöljük. $\mathbb{M}^* = Lin(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ elemeit kovektoroknak nevezzük és alsó indexszel jelöljük. Hasonlóképpen \mathbb{E} duálisa \mathbb{E}^* . Ezek az indexek absztraktok abban az értelemben, hogy nem vonatkoznak semmilyen koordináta- vagy vonatkoztatási rendszerre, egyszerűen a különféle rendű és típusú tenzoriális mennyiségek egyértelmű jelölését jelentik. A felső index kontravariáns, az alsó index kovariáns, kovektor komponenseket jelöl.

Az $x, y \in M$ események között *időtartamot* $\tau(x) - \tau(y) = \tau_a x^a$ módon számoljuk, ahol $x^a = x - y$. Két esemény *egyidejű*, ha a közöttük eltelt időtartam nulla. Két egyidejű esemény különbsége *térszerű* vektor. Ezeket felülhúzott indexszel, megkülönböztetett



1. ÁBRA. A Galilei-relativisztikus téridő, időpontok és világvonalak.

módon jelöljük: $x^{\bar{a}} \in \mathbb{E}$, illetve $x_{\bar{a}} \in \mathbb{E}^*$. Egy $x^{\bar{a}}$ térszerű vektor hossza $||x|| = \sqrt{x^{\bar{a}} \delta_{\bar{a}\bar{b}} x^{\bar{b}}}$, ahol $\delta_{\bar{a}\bar{b}} = Id_{\mathbb{E}}$.

A modell legfontosabb elemeit az 1. ábrán mutatjuk be. Láthatjuk, hogy az idő és az időkiértékelés egy fóliázást vezet be a téridőn: az egyidejű események térszerű altereinek egymásutánja hűen modellezi klasszikus tér- és időfogalmunkat.

Ha x_a egy kovektor, azaz egy $x_a : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, akkor annak \mathbb{E} -re történő megszorítását, $x_{\bar{a}} \in \mathbb{E}^*$ -t az eredeti x_a kovektor abszolút térszerű részének nevezzük. A megszorítás projekciójának jelölésére bevezetjük a $\delta_{\bar{b}}^a \in Lin(\mathbb{M}^*, \mathbb{E}^*)$ jelölést. Tehát $\delta_{\bar{a}}^b x_b = x_{\bar{a}}$. Fontos megjegyezni, hogy az euklidészi szerkezet lehetővé teszi \mathbb{E} és \mathbb{E}^* azonosítását, de ezt nem tehetjük meg \mathbb{M} -vel és \mathbb{M}^* -al, mert nincs rajta sem euklidészi, sem pszeudoeuklidészi szerkezet: a téridőtartamok vektorterén nincsenek téridőhosszak. Absztrakt indexes jelölésünkben a, b, c, d, e, f, g indexeket használunk a négydimenziós téridő abszolút fizikai mennyiségeire, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ indexeket a háromdimenziós tér fizikai mennyiségeire a téridőbe ágyazva értendőek. Továbbá i, j, k, l, m-el jelöljük a szokásos háromdimenziós relatív mennyiségek indexeit, ha a relatív sebesség is megjelenik a formulákban. Ez fog előfordulni a különféle transzformációs szabályoknál, illetve amikor a szokásosan szereplő formulákat értelmezzük. Az ilyen indexek két abszolút sebességmező jelenlétét jelzik.

A vektorok és kovektorok fenti jelölésrendszere azt a tényt formalizálja, hogy az idő nincs beágyazva a téridőbe.

A.1. Széthasítások

A téridőben történő létezést világvonalak segítségével, időből téridőbe léképező $r: I \to M$ világvonalfüggvényekkel írjuk le. A világvonalfüggvényeknek a téridő szerkezetéből következő triviális tulajdonsága, hogy $\tau(r(t)) = t$. Ennek megfelelően bármilyen időpontban képezett időderiváltjaik, a Galilei-relativisztikus *négyessebességek* olyan speciális négyesvektorok, amelyek időkiértékelése, $\tau_a u^a = 1$. Egy *négyesvektor* fizikai mennyiség *térszerű részét* egy adott u^a négyessebesség irányú vetületével képezzük. Az u^a irányú vetítő függvény, az *u-projekció* $\pi_b^{\bar{a}} = \delta_b^a - u^a \tau_b : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ lesz, ahol δ_b^a az identitás \mathbb{M} -en.

A τ_a időkiértékelés és az előbbi *u*-projekció mellett még két fontos függvényünk van, amely az M téridőtartamokat az I időtartamokkal és az E térvektorokkal kapcsolja össze. A négyes kovektorokat térszerűre megszorító előbbi $\delta_{\bar{b}}^a \in Lin(\mathbb{M}^*, \mathbb{E}^*)$ függvény duálisával a $\delta_{\bar{b}}^a \in Lin(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ függvénnyel ágyazhatunk be hármasvektorokat a téridőbe, időtartamhoz egy négyessebességgel hozzárendelhetünk egy téridőtartamot, hiszen $u^a :$ $\mathbb{I} \to \mathbb{M}$. A négy alapvető leképezést még egyszer felsoroljuk:

 $- \tau_{a}: \mathbb{M} \to \mathbb{I},$ $- u^{a}: \mathbb{I} \to \mathbb{M},$ $- \pi^{\bar{a}}_{b} = \delta^{\bar{a}}_{b} - u^{a}\tau_{b}: \mathbb{M} \to \mathbb{E},$ $- \delta^{a}_{\bar{b}}: \mathbb{E} \to \mathbb{M},$

A duálisaik a megfelelő duális terek közötti leképezéseket adják meg:

 $\begin{aligned} &- \tau_a : \mathbb{I} \to \mathbb{M}^*, \\ &- u^a : \mathbb{M}^* \to \mathbb{I}, \\ &- \pi_a^{\bar{b}} : \mathbb{E}^* \to \mathbb{M}^*, \\ &- \delta_{\bar{b}}^a : \mathbb{M}^* \to \mathbb{E}^*. \end{aligned}$

Itt felhasználtuk, hogy egydimenziós vektorterek kanonikusan azonosíthatóak duálisukkal (idő = koidő), a transzponáltakat pedig az indexek eltolásával jelöltük. A fentiekből a következő azonosságok vezethetőek le:

$$\tau_a u^a = 1, \quad \tau_a \delta^a_{\ \bar{b}} = 0_{\bar{b}}, \quad \pi^b_{\ a} u^a = (\delta^b_{\ a} - u^b \tau_a) u^a = 0^b \quad \pi^{\bar{a}}_{\ b} \delta^b_{\ \bar{c}} = \delta^{\bar{a}}_{\ \bar{c}}. \tag{69}$$

Két ábrába összefoglalva megjegyezhetőbbek a viszonyok:

$$\mathbb{E} \stackrel{\pi^{\overline{a}}_{\overline{b}}}{\underset{\delta^{\overline{a}}_{\overline{b}}}{\overset{\overline{b}}{\longrightarrow}}} \mathbb{M} \stackrel{\tau_{a}}{\underset{u^{a}}{\overset{\overline{a}}{\longrightarrow}}} \mathbb{I} \qquad \qquad \mathbb{E}^{*} \stackrel{\delta^{\overline{a}}_{\overline{b}}}{\underset{\pi^{\overline{b}}_{\overline{b}}}{\overset{\overline{a}}{\longrightarrow}}} \mathbb{M}^{*} \stackrel{u^{a}}{\underset{\tau_{a}}{\overset{\overline{a}}{\longrightarrow}}} \mathbb{I}^{*}$$

A fenti diagramok felső sorának leképezései egy téridővektor és kovektor idő- és térszerű részre történő széthasítását adják meg.

A.2. VEKTOR u-FORMÁJA

A vektorok maguk előállíthatóak egy u^a sebességgel széthasított részeikből. A továbbiakban az ilyen előállítást a vektor *u-formájának* nevezzük. Legyen például A^a egy téridővektor. Ekkor idő- és *u*-térszerű részeinek és a széthasító u^a négyessebesség segítségével előállítható:

$$A^a = Au^a + A^{\bar{a}},\tag{70}$$

ahol $A = \tau_a A^a$ a vektor időszerű része, $A^{\bar{a}} = \pi_b^{\bar{a}} A^b$ pedig az *u*-térszerű része. Vektor időszerű része nem függ *u*-tól, ezért abszolút, a térszerű része viszont függ. Speciálisan egy u^a sebességvektor időszerű része 1, egy másik u'^a sebesség szerinti térszerű része pedig

$$\pi^{\bar{a}}{}_{b}u^{b} = (\delta^{a}{}_{b} - u^{\prime a}\tau_{b})u^{b} = u^{a} - u^{\prime a} = v^{\bar{a}},$$

 u^a relatív sebessége u'^a -hoz képest.

Galilei-relativisztikus téridőn az extenzív mennyiségek természetes módon négyesvektorok, amelyek időszerű része a sűrűség, *u*-térszerű része az áramsűrűség. Az extenzív mennyiségek sűrűsége független a széthasító sebességtől, térszerű része nem. Látni fogjuk, hogy az *u*-függetlenség Galilei-invarianciát is jelent.

A.3. KOVEKTOR u-FORMÁJA

Hasonló módon kovektorok is általánosan felírhatók u-idő és térszerű komponenseik és a széthasításhoz használt négyessebesség segítségével. Egy B_a kovektor:

$$B_a = B\tau_a + \pi_a^{\ b} B_{\bar{b}}.\tag{71}$$

ahol $B = u^a B_a$ és $B_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^{\ b} B_b$.

Figyeljük meg, hogy B_a térszerű és *u*-időszerű részei valóban $B_{\bar{a}}$ és *B*, de ellentétben a vektor (70) előállításával itt ez közvetlenül nem látszik. Továbbá fenti felbontásban figyelnünk kell, hogy $\pi_a^{\bar{b}}$ nem szedhető szét két részre, pontosabban $u^{\bar{b}}B_{\bar{b}}$ önmagában nem képezhető, hiszen $B_{\bar{b}} \in \mathbb{E}^*$ és \mathbb{E}^* nem részhalmaza \mathbb{M}^* -nak. Tehát a fenti formula $B_a = B\tau_a + B_{\bar{a}} - \tau_a u^{\bar{b}} B_{\bar{b}} = (B - u^b B_{\bar{b}})\tau_a + B_{\bar{a}}$, kényelmesnek tűnő csoportosítása végső soron helytelen. Azonban a térszerű-időszerű felbontás szemléletessége, és az abszolút térszerű rész önálló megjelenése miatt a számolások áttekinthetőségéből származó elő-nyök nagyobbak, mint a hibázás lehetősége, ezért a továbbiakban mégis használni fogjuk, ügyelve arra, hogy $\pi_a^{\bar{b}}$ két része pontosan szerepeljen a formulákban.

Speciálisan a téridő deriválása ∂_a , mint kovektor, a következőképpen írható fel egy u^a négyessebesség szerint széthasított idő- és térszerű komponenseivel:

$$\partial_a = \tau_a (d_u - u^b \nabla_{\bar{b}}) + \nabla_{\bar{a}},\tag{72}$$

ahol $d_u = u^a \partial_a$ az *u*-időderivált, $\nabla_{\bar{a}}$ pedig a térderivált. Az időderivált *u*-függő, a térderivált nem az.

Megadjuk a másodrendű tenzorok u-széthasított részekből összetett formáját is.

A.4. TENZOR *u*-FORMÁJA

Egy $T^{ab} \in \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}$ kontra-kontravariáns tenzor *u*-formája a következő:

$$T^{ab} = tu^a u^b + u^a t^b + t^{\bar{a}} u^b + t^{\bar{a}b},$$
(73)

ahol

- $t = \tau_a \tau_b T^{ab}$ a T^{ab} tenzor *idő-időszerű része*. Láthatóan ez *u*-független, abszolút.
- $t^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_{b}T^{bc}\tau_{c}$ a T^{ab} tenzor *tér-időszerű része*, illetve $t^{\bar{b}} = \tau_{c}T^{ca}\pi^{\bar{b}}_{a}$ az *idő-térszerű rész*.
- $-t^{\bar{a}\bar{b}} = \pi^{\bar{a}}_{c}T^{cd}\pi^{\bar{b}}_{d}$ a T^{ab} tenzor *tér-térszerű része*.

A.5. VEGYES TENZOR *u*-FORMÁJA

Egy $Q^a_{\ b} \in \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}^*$ kontra-kovariáns tenzor $u\text{-}\mathrm{formája}$ a következő:

$$Q^{a}_{\ b} = q^{a}\tau_{b} + \pi^{\bar{c}}_{b}q^{a}_{\ \bar{c}} = qu^{a}\tau_{b} + q^{\bar{a}}\tau_{b} + u^{a}\pi^{\bar{c}}_{b}q_{\bar{c}} + q^{\bar{a}}_{\ \bar{c}}\pi^{\bar{c}}_{b} = (u^{a}(q - u^{c}q_{\bar{c}}) + q^{\bar{a}} - q^{\bar{a}}_{\ \bar{c}}u^{c})\tau_{b} + q_{\bar{b}}u^{a} + q^{\bar{a}}_{\ \bar{b}},$$
(74)

ahol

 $-q^a = u^b Q^a_b$, a Q^a_b vegyes tenzor ko-időszerű része,

– $q^a_{\ \bar{b}} = \delta^c_{\ \bar{b}} Q^a_{\ c}$, a $Q^a_{\ b}$ vegyes tenzor u-független ko-térszerű része

- $-q = u^b \tau_a Q^a_b$, a Q^a_b vegyes tenzor *idő-időszerű része*,
- $-q^{\bar{a}} = u^b \pi^{\bar{a}}_{c} Q^c_{b}$, a Q^a_{b} vegyes tenzor *tér-időszerű része*,
- $q_{\bar{b}} = \tau_a \delta^c_{\bar{b}} Q^a_{\ c}$, a $Q^a_{\ b}$ vegyes tenzor *idő-térszerű része*. Ez a rész *u*-független, abszolút.
- $q_{\bar{b}}^{\bar{a}} = \pi_c^{\bar{a}} \delta_{\bar{b}}^{\ d} Q_d^c$, a Q_b^a vegyes tenzor *tér-térszerű része*,

A.6. KOTENZOR *u*-FORMÁJA

Egy $R_{ab} \in \mathbb{M}^* \otimes \mathbb{M}^*$ ko-kovariáns tenzor *u*-formája a következő:

$$R_{ab} = r_a \tau_b + r_{a\bar{c}} \pi_b^{\bar{c}} = (r\tau_a + r_{\bar{c}} \pi_a^{\bar{c}}) \tau_b + r_{\bar{c}} \tau_a \pi_b^{\bar{c}} + r_{\bar{c}\bar{d}} \pi_b^{\bar{c}} \pi_a^{\bar{d}} = (r - 2r_{\bar{c}}u^c + r_{\bar{c}\bar{d}}u^c u^d) \tau_a \tau_b + (r_{\bar{b}} - r_{\bar{b}\bar{d}}u^d) \tau_a + (r_{\bar{a}} - r_{\bar{a}\bar{d}}u^d) \tau_b + r_{\bar{a}\bar{b}},$$
(75)

ahol

- $r_a = u^b R_{ab}$, az R_{ab} kotenzor ko-időszerű része,
- $r_{a\bar{b}} = \delta_{\bar{b}}^{\ c} R_{ac}$, az R_{ab} kotenzor *u*-független ko-térszerű része,
- $r = u^a u^b R_{ab}$, az R_{ab} kotenzor idő-időszerű része,
- $r_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^{c} u^{b} R_{cb}$, az R_{ab} kotenzor *tér-időszerű része*, illetve $r_{\bar{b}} = \delta_{\bar{b}}^{c} u^{a} R_{ac}$, az *idő-térszerű része*,
- $-r_{\bar{a}\bar{b}} = \delta_{\bar{a}}^{\ c} \delta_{\bar{b}}^{\ d} R_{cd}$, az R_{ab} kotenzor *tér-térszerű része*. Ez az *u*-független rész.

B. FÜGGELÉK. MEGFIGYELŐK ÉS GALILEI-TRANSZFORMÁCIÓ

A téridőmodell pontosan tükrözi azt a mindennapi tapasztalatunkat, hogy az idő tőlünk függetlenül telik, de a tér, a környezetünkben levő tárgyak által kirajzolt környezet szubjektív, megfigyelőfüggő. Az idő abszolút, a tér relatív. A relatív szempontokat a megfigyelők segítségével értelmezzük. Egy megfigyelő általában a téridőn megadott globális sima sebességmező (lásd [6]), amit a továbbiakban egyetlen sebességgel, lényegében lokálisan reprezentálunk. A lokálisan egyetlen sebességet gondolatban az egész téridőre kiterjesztve, azaz globális homogén sebességmezőt bevezetve kapjuk az inerciális megfigyelőket. A megfigyelő alatt általában adott tartományon sima sebességmezőt értünk [6], nem kell, hogy mindenütt értelmezett, azaz globális legyen. Minden esetben elegendő, hogy adott téridőpontban négyessebessége időre és térre bontja a téridőt, és az abszolút fizikai mennyiségeket idő- és térszerű részekre hasítja fel a téridő minden pontjában. Éppen ezért a transzformációs formulák és egyenletek nemcsak a szokásos inerciális megfigyelőkre vonatkozó Galilei-transzformációk, hanem – amennyiben a széthasító sebesség állandósága nincs kihasználva – minden megfigyelőre vonatkoznak. Az abszolút jelző általánosan megfigyelőfüggetlenséget jelent.

Láthattuk, hogy egy Galilei-relativisztikus téridőmodellben egy sebességmező segítségével egyértelműen meg tudjuk adni a fizikai mennyiségek idő- és térszerű részeit. Egy másik sebességmező pedig másképpen bontja idő- és térszerű részre ugyanazt az abszolút fizikai mennyiséget. Azt is ki tudjuk számolni, hogy egyik megfigyelő által észlelt komponensekből hogyan képződnek egy másik megfigyelő által észlelt idő- és térszerű komponensek. Ezeket a *transzformációs szabályokat* egy téridőmodellben egyértelműen kiszámolhatjuk, nem szükséges intuitívan bevezetni.

B.1. VEKTOROK

Láttuk, hogy egy A^a vektort az u^a megfigyelő $A = \tau_a A^a$ időszerű és $A^{\bar{a}} = \pi_b^{\bar{a}} A^b$ *u*-térszerű részekre bontja. A nemrelativisztikus fizikai elméletek téridőtudatlanul ezeket a mennyiségeket önállóan használják, leválasztva a téridőről. Két különböző u^a és u'^a négyessebesség általában különböző idő- és térszerű komponenseket eredményezhet:

$$A^a \stackrel{u}{\prec} \begin{pmatrix} A \\ A^i \end{pmatrix}, \qquad A^a \stackrel{u'}{\prec} \begin{pmatrix} A' \\ A'^i \end{pmatrix},$$

ahol i = 1,2,3 hármasvektor indexeit jelöli, $\stackrel{u}{\prec}$ pedig az u^a szerinti széthasítást. A megfigyelők közötti váltást megadó transzformációs szabályok megmondják, hogy az A' és A'^i hogyan függ A-tól és A^i -tól. Téridőmodellünkben ezt egyszerűen úgy számolhatjuk ki, hogy a u^a -val széthasított komponensekkel kifejezett fizikai mennyiséget, jelen esetben ez $A^a = Au^a + A^{\bar{a}}$ -t, széthasítjuk u'^a szerint. Tehát egy vektor időszerű komponense:

$$A' = \tau_a A^a = \tau_a (Au^a + A^{\bar{a}}) = A, \tag{76}$$

nem változik, nem transzformálódik, azaz Galilei-invariáns. Ez nem meglepő, mert a széthasító függvény nem függ a sebességektől. Egy A^a vektor térszerű komponense:

$$A^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_{\ b}A^{b} = \left(\delta^{\bar{a}}_{\ \bar{b}} - u^{a}\tau_{b}\right)\left(Au^{b} + A^{\bar{b}}\right) = Au^{a} + A^{\bar{a}} - Au^{\prime a} = A^{\bar{a}} + A(u^{a} - u^{\prime a}).$$
(77)

Az u^a -nak u'^a -ra vonatkoztatott relatív sebességére bevezetjük a $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ jelölést és áttérünk hármasindexekre. Ekkor a négyesvektor térszerű komponensének transzformációs szabálya

$$A^{\prime i} = A^i + Av^i,$$

pontosan a szokásos Galilei-transzformáció. Az i, j, k hármasindexek megjelenése általában azt jelzi, hogy az adott formulában egyszerre két sebességmező is jelen van a relatív sebesség miatt. A teljes transzformációs szabály:

$$\begin{pmatrix} A'\\A'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\\A^i + Av^i \end{pmatrix}.$$
 (78)

Speciálisan a sebességek transzformációs szabálya ebből közvetlenül is származtatható. Egy négyessebesség önmaga szerinti széthasítása

$$u^a \stackrel{u}{\prec} \begin{pmatrix} 1\\ 0^i \end{pmatrix}$$
.

Illetve a térszerű komponensének transzformációs szabálya egyszerűen a relatív sebességet adja,

$$\pi'^{\bar{a}}_{\ b}u^{b} = (\delta^{a}_{\ b} - u'^{a}\tau_{b})u^{b} = u^{a} - u'^{a} = v^{\bar{a}},$$
(79)

ahogy ezt vártuk is. A teljes szabály furcsán hat:

$$\begin{pmatrix} 1\\0^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\v^i \end{pmatrix},\tag{80}$$

de egyszerűen azt jelenti, hogy az önmagához képest 'állónak' tekintett u^a megfigyelő állása másik u'^a megfigyelő számára v^i sebességgel történő mozgásnak látszik. Fontos megértenünk, hogy az összes többi transzformációs szabály jelentése mutatis mutandis ugyanezt jelenti.

Általában csak a Galilei-invariáns fizikai mennyiségeket tartják vonatkoztatási rendszertől függetlennek, holott nemcsak azok, hanem transzformálódó mennyiségek megfelelő kombinációja is abszolút lehet, amennyiben egy abszolút téridőmennyiségről van szó. Egy négyesvektorral megadott abszolút fizikai mennyiség (pl. egy extenzív) időszerű komponense (a sűrűsége) Galilei-invariáns és ezért abszolút, a térszerű komponense (azaz az áramsűrűsége) transzformálódik, ezért nem abszolút, de ez nem változtat semmit azon, hogy az egész extenzív vektorsűrűség abszolút. Ugyanez érvényes a sebességre, ahol a négyessebesség abszolút, annak ellenére, hogy látszólag csak a térszerű komponens hordoz fizikai információt. Téridőmodellben megfogalmazva egy fizikai elméletet pontosan eldönthető, hogy függ-e a vonatkoztatási rendszertől, vagy nem.

B.2. KOVEKTOROK

Láttuk, hogy egy B_a kovektort az u^a sebesség $B = u^a B_a$ időszerű és $B_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^{b} B_b$ térszerű részekre bont. A kovektorok széthasított komponenseit alsó indexszel és sorvektorokkal reprezentáljuk:

$$B_a \stackrel{u}{\prec} (B, B_i).$$

Az előbbiek alapján az időszerű komponens transzformációs szabálya:

$$B' = u'^{a}B_{a} = u'^{a}(B\tau_{a} + \pi_{a}^{b}B_{\bar{b}}) = B - v^{\bar{a}}B_{\bar{a}},$$
(81)

ahol felhasználtuk (79)-t, illetve a (69) azonosságokat. A térszerű komponens transzformációs szabálya:

$$B'_{\bar{a}} = \delta^{\ b}_{\bar{a}} B_b = \delta^{\ b}_{\bar{a}} (B\tau_b + \pi^{\ \bar{c}}_b B_{\bar{c}}) = B_{\bar{a}},\tag{82}$$

A teljes szabály:

$$(B', B'_i) = (B - v^i B_i, B^i).$$
(83)

Ezt például a ∂_a téridőderiválásra alkalmazva kapjuk, hogy:

$$(d_{u'}, \nabla_i') = (d_u - v^i \nabla_i, \nabla_i).$$
(84)

Speciálisan, ha az u^a sebesség valamely közeg sebességmezője, u'^a pedig egy megfigyelőé, akkor d_u a szubsztanciális időderivált, v^i a megfigyelőnek a közeghez viszonyított sebessége és $d_{u'} = d_u - v^i \nabla_i$ a $d_{u'} = \partial_t$ parciális időderivált és a d_u szubsztanciális időderivált közötti összefüggés: $\partial_t = d_t - v^i \nabla_i$.

B.3. TENZOROK

Egy T^{ab} másodrendű kontravariáns tenzort az u^a megfigyelő $t = \tau_a \tau_b T^{ab}$ időidőszerű, $t^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_c \tau_b T^{cb}$ idő-térszerű és $t^{\bar{a}\bar{b}} = \pi^{\bar{a}}_c \pi^{\bar{b}}_d T^{cd}$ tér-térszerű komponensekre hasít szét. Azaz

$$T^{ab} \stackrel{u}{\prec} \begin{pmatrix} t & t^i \\ t^j & t^{ij} \end{pmatrix}.$$

A megfelelő transzformációs szabályok a következő módon számolhatóak. Az időidőszerű komponens invariáns:

$$t' = \tau_a \tau_b T^{ab} = t. \tag{85}$$

Az idő-térszerű komponens transzformációs szabálya olyan, mint egy hármasvektoré:

$$t'^{\bar{a}} = \pi'^{\bar{a}}_{\ c} \tau_b T^{cb} = (\delta^a_{\ c} - u'^a \tau_c) (tu^c + t^{\bar{c}}) = tu^a - tu'^a + t^{\bar{a}} = t^{\bar{a}} + tv^{\bar{a}}.$$
 (86)

A tér-térszerű komponensé bonyolultabb:

$$t'^{\bar{a}\bar{b}} = \pi'^{\bar{a}}_{\ c}\pi'^{\bar{b}}_{\ d}T^{cd} = \pi'^{\bar{a}}_{\ c}\pi^{\bar{b}}_{\ d}(tu^{c}u^{d} + t^{\bar{c}}u^{d} + u^{c}t^{\bar{d}} + t^{\bar{c}\bar{d}}) = tv^{\bar{a}}v^{\bar{b}} + t^{\bar{a}}v^{\bar{b}} + t^{\bar{b}}v^{\bar{a}} + t^{\bar{a}\bar{b}}.$$
(87)

Itt ismét felhasználtuk (79)-t, illetve azt, hogy térszerű vektorok tetszőleges sebességirányban vett vetülete maga a térszerű vektor $\pi^{\bar{a}}_{\ b}t^{\bar{b}} = (\delta^a_{\ b} - u^a\tau_b)t^{\bar{b}} = t^{\bar{a}}$.

A teljes transzformációs szabály:

$$\begin{pmatrix} t' & t'^{i} \\ t'^{j} & t'^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t^{i} + tv^{i} \\ t^{j} + tv^{j} & t^{ij} + t^{i}v^{j} + t^{j}v^{i} + tv^{i}v^{j} \end{pmatrix}.$$
(88)

B.4. VEGYES MÁSODRENDŰ TENZOROK

Egy Q_b^a másodrendű kontra-kovariáns tenzort az u^a megfigyelő $q = \tau_a u^b Q_b^a$ időidőszerű, $q^{\bar{a}} = \pi_c^{\bar{a}} u^b Q_b^c$ tér-időszerű, $q_{\bar{b}} = \tau_a \delta_{\bar{b}}^d Q_d^a$ idő-térszerű és $q_{\bar{b}}^{\bar{a}} = \pi_c^{\bar{a}} \delta_{\bar{b}}^d Q_d^c$ tértérszerű komponensekre hasít szét. Azaz

$$Q^a_b \stackrel{u}{\prec} \begin{pmatrix} q & q^i \\ q_j & q^i_j \end{pmatrix}.$$

A megfelelő transzformációs szabályok a következő módon számolhatóak. Az időidőszerű komponensre:

$$q' = \tau_a u'^b Q^a_{\ b} = u'^b (q\tau_b + \pi_b^{\ \bar{c}} q_{\bar{c}}) = q - v^{\bar{c}} q_{\bar{c}}.$$
(89)

A hármasvektornak kinéző idő-térszerű komponens nem transzformálódik:

$$q_{\bar{b}}' = \tau_a \delta_{\bar{b}}^{\ c} Q_{\ c}^a = \delta_{\bar{b}}^{\ c} (q\tau_c + \pi_c^{\ d} q_{\bar{d}}) = q_{\bar{b}}.$$
(90)

Itt felhasználtuk, hogy $\delta_{\bar{b}}^{c} \tau_{c} = 0_{\bar{b}}$ és $\delta_{\bar{b}}^{c} \pi_{c}^{\bar{a}} = \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}}$. A tér-időszerű komponens transzformációs szabálya:

$$q^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_{\ c} u_{\bar{b}} Q^{c}_{\ b} = \pi^{\bar{a}}_{\ c} (q u^{c} + q^{\bar{c}} - u^{c} v^{\bar{d}} q_{\bar{d}} - q^{\bar{c}}_{\ \bar{d}} v^{\bar{c}}) = q^{\bar{a}} + q v^{\bar{a}} - v^{\bar{a}} v^{\bar{b}} q_{\bar{b}} - q^{\bar{d}}_{\ \bar{b}} v^{\bar{b}}.$$
 (91)

A tér-térszerű komponens transzformációs szabálya:

$$q_{\bar{b}}^{\prime\bar{a}} = \pi_{c}^{\prime\bar{a}} \delta_{\bar{b}}^{d} Q_{d}^{c} = \pi_{c}^{\prime\bar{a}} (q_{\bar{b}} u^{c} + q_{\bar{b}}^{\bar{c}}) = q_{\bar{b}}^{\bar{a}} + v^{\bar{a}} q_{\bar{b}}.$$
(92)

Itt ismét felhasználtuk az eddigi azonosságokat. A teljes transzformációs szabály:

$$\begin{pmatrix} q' & q'_{i} \\ q'^{j} & q'^{j}_{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - v^{i}q_{i} & q_{i} \\ q^{j} + v^{j}(q - v^{k}q_{k}) - q^{j}_{k}v^{k} & q^{j}_{i} + q_{i}v^{j} \end{pmatrix}.$$
(93)

B.5. MÁSODRENDŰ KOTENZOROK

Egy R_{ab} másodrendű ko-kovariáns tenzort az u^a megfigyelő $r = u^a u^b R_{ab}$ időidőszerű, $r_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^{\ c} u^b R_{cb}$ tér-időszerű és $r_{\bar{a}\bar{b}} = \delta_{\bar{a}}^{\ c} \delta_{\bar{b}}^{\ d} R_{cd}$ tér-térszerű komponensekre hasít szét. Azaz

$$R_{ab} \stackrel{u}{\prec} \begin{pmatrix} r & r_i \\ r_j & r_{ij} \end{pmatrix}$$

A megfelelő transzformációs szabályok a következő módon számolhatóak. Az időidőszerű komponensre:

$$r' = u'^{a} u'^{b} R_{ab} = u'^{a} u'^{b} \left(r \tau_{a} \tau_{b} + r_{\bar{c}} \pi_{a}^{\bar{c}} \tau_{b} + r_{\bar{c}} \tau_{a} \pi_{b}^{\bar{c}} + r_{\bar{c}\bar{d}} \pi_{b}^{\bar{c}} \pi_{a}^{\bar{d}} \right) = u'^{a} \left(r \tau_{a} + r_{\bar{c}} \pi_{a}^{\bar{c}} - r_{\bar{c}} \tau_{a} v_{\bar{b}} - r_{\bar{c}\bar{d}} v_{b} \pi_{a}^{\bar{d}} \right) = r - 2r_{\bar{c}} v^{c} + r_{\bar{c}\bar{d}} v_{c} v^{\bar{d}}.$$
(94)

Az idő-térszerű komponens transzformációs szabálya:

$$r_{\bar{a}}' = \delta_{\bar{a}}^{\ c} u'^{b} R_{cb} = \delta_{\bar{a}}^{\ c} \left(r\tau_{c} + r_{\bar{d}} \pi_{c}^{\ \bar{d}} - r_{\bar{d}} \tau_{c} v^{\bar{d}} - r_{\bar{d}\bar{e}} v^{\bar{e}} \pi_{c}^{\ \bar{d}} \right) = r_{\bar{a}} - r_{\bar{a}\bar{d}} v^{\bar{d}}.$$
(95)

A tér-térszerű komponens invariáns:

$$r'_{\bar{a}\bar{b}} = \delta^c_{\bar{a}} \delta^d_{\bar{b}} R_{cd} = r_{\bar{a}\bar{b}}.$$
(96)

Itt ismét felhasználtuk az eddigi azonosságokat. A teljes transzformációs szabály:

$$\begin{pmatrix} r' & r'_{i} \\ r'_{j} & r'_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - 2v^{i}r_{i} + v^{i}v^{j}r_{ij} & r_{i} - v^{j}r_{ij} \\ r_{j} - v^{k}t_{jk} & r_{ij} \end{pmatrix}.$$
(97)

C. FÜGGELÉK: HARMADRENDŰ VEGYES KONTRA-KOKOTENZOR TRANSZFORMÁCIÓS SZABÁLYAI

A fentiek alapján tekintsünk egy $M_{bc}^a: M \to \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}^* \otimes \mathbb{M}^*$ tenzormezőt, amelyet az egykomponensű egyszerű anyag *energia-impulzus-tömeg tenzorának* fogunk tekinteni. Feltételezzük, hogy a tenzormező kovariáns indexeiben szimmetrikus. Egy adott $u^a \in V(1)$ négyessebességgel képzett komponenseivel a következő általános formába írható:

$$M_{bc}^{a} = m_{bc}u^{a}m_{bc}^{\bar{a}} = \left(e\tau_{b}\tau_{c} - \frac{1}{2}p_{\bar{d}}\pi_{b}^{\bar{a}}\tau_{c} - \frac{1}{2}p_{\bar{e}}\pi_{c}^{\bar{e}}\tau_{b} + \frac{1}{2}\rho_{\bar{d}\bar{e}}\pi_{b}^{\bar{d}}\pi_{c}^{\bar{e}}\right)u^{a} + \left(q^{\bar{a}}\tau_{b}\tau_{c} - \frac{1}{2}P_{\bar{d}}^{\bar{a}}\pi_{b}^{\bar{d}}\tau_{c} - \frac{1}{2}P_{\bar{e}}^{\bar{a}}\pi_{c}^{\bar{e}}\tau_{b} + \frac{1}{2}m_{\bar{d}\bar{e}}^{\bar{a}}\pi_{b}^{\bar{d}}\pi_{c}^{\bar{e}}\right),$$
(98)

ahol

$$m_{bc} = \tau_a M_{bc}^a, \qquad \text{és} \qquad m_{\ bc}^{\bar{a}} = \pi_{\ d}^{\bar{a}} M_{bc}^d.$$
 (99)

Ezek a sűrűségek és áramok tenzorai, m_{bc} az energia-impulzus-tömegsűrűség kotenzor, illetve $m_{bc}^{\bar{a}}$ az energiáramsűrűség-nyomás-diffúziós áramsűrűség tenzor. A további részek pedig:

- $e = u^b u^c m_{bc} = \tau_a u^b u^c M^a_{bc}$ az energia-lendület-tömeg tenzor idő-idő-időszerű része, az *energiasűrűség*.
- $p_{\bar{a}} = -2u^c \delta_{\bar{b}}^{\ d} m_{dc} = -2\tau_a u^c \delta_{\bar{b}}^{\ d} M_{\ dc}^a$ az energia-lendület-tömeg tenzor idő-időtérszerű részéhez kötődő, a *lendületsűrűség*, illetve $p_{\bar{a}} = -2u^b \delta_{\bar{c}}^{\ d} m_{bd} = -2\tau_a u^b \delta_{\bar{c}}^{\ d} M_{\ cd}^a$ az idő-tér-időszerű részhez tartozik.

- $\rho_{bc} = 2\delta_{\bar{b}}^{d}\delta_{\bar{c}}^{e}m_{de} = 2\tau_{a}\delta_{\bar{b}}^{d}\delta_{\bar{c}}^{e}M_{de}^{a}$ a tömegsűrűség-kotenzor, az M_{bc}^{a} tenzor *idő-tértérszerű részéhez* kötődik.
- $q^{\bar{a}} = u^c u^b m^{\bar{a}}_{bc} = u^c u^b \pi^{\bar{a}}_d M^d_{bc}$ az energiaáramsűrűség, az M^a_{bc} tenzor tér-idő-időszerű részéhez.
- $-P^{\bar{a}}_{\bar{b}} = -2u^c \delta^{\ e}_{\bar{b}} m^{\bar{a}}_{\ ec} = -2u^c \delta^{\ e}_{\bar{b}} \pi^{\bar{a}}_{\ d} M^d_{\ ec} \text{ a nyomás, az } M^a_{\ bc} \text{ tenzor } t\acute{e}r \cdot id\acute{o} t\acute{e}rszerű r\acute{e}-sz\acute{e}hez \text{ tartozik és a tenzor szimmetriája miatt ez egyenlő} P^{\bar{a}}_{\ \bar{c}} = -2u^b \delta^{\ e}_{\bar{c}} m^{\bar{a}}_{\ be} \text{-vel.}$
- $M_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}} = 2\delta_{\bar{b}}^{\ e}\delta_{\bar{c}}^{\ f}\pi_{\ d}^{\bar{a}}M_{\ ef}^{d}$ a diffúziós áramsűrűség, az $M_{\ bc}^{a}$ tenzor tér-tér-térszerű részenek kétszerese.

A változó előjelek és kettes faktorok oka, hogy a hagyományos mennyiségeket a mérlegekben és a transzformációs szabályokat a lehető legpontosabban szeretnénk visszakapni.

C.1. A TÉR- ÉS IDŐSZERŰ RÉSZEK TRANSZFORMÁCIÓS SZABÁLYAI

Az adott objektív fizikai mennyiség transzformációs szabályának azt nevezzük, amikor u'^a sebességgel képzett idő- és térszerű komponenseket az u^a sebességgel képzett komponensek és a relatív sebesség függvényében adjuk meg. A B. Függelékben megadtuk, a különféle első és másodrendű tenzorok transzformációs szabályait. A számítás során a tenzorok u-formáját az u' sebesség szerint hasítjuk szét. A tömeg-energia-lendület tenzor esetén is hasonlóan járunk el:

Az u'-energia az M^a_{bc} tenzor u-komponenseivel és a $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ relatív sebességgel kifejezve:

$$e' = u'^{b} u'^{c} \tau_{a} M^{a}_{bc} = u'^{b} u'^{c} \left(e \tau_{b} \tau_{c} - \frac{1}{2} p_{\bar{d}} \pi^{\bar{a}}_{b} \tau_{c} - \frac{1}{2} p_{\bar{e}} \pi^{\bar{e}}_{c} \tau_{b} + \frac{1}{2} \rho_{\bar{d}\bar{e}} \pi^{\bar{d}}_{b} \pi^{\bar{e}}_{c} \right)$$

$$= e + p_{\bar{a}} v^{\bar{b}} + \frac{\rho_{\bar{a}\bar{b}}}{2} v^{\bar{a}} v^{\bar{b}}.$$
 (100)

Az u'-lendületsűrűség pedig:

$$p_{\bar{b}}' = -2u'^{c}\delta_{\bar{b}}^{d}\tau_{a}M_{dc}^{a} = u'^{c}\delta_{\bar{b}}^{d}\left(-2e\tau_{b}\tau_{c} + p_{\bar{d}}\pi_{b}^{\bar{a}}\tau_{c} + p_{\bar{e}}\pi_{c}^{\bar{e}}\tau_{b} - \rho_{\bar{d}\bar{e}}\pi_{b}^{\bar{d}}\pi_{c}^{\bar{e}}\right)$$

$$= p_{\bar{b}} + \rho_{\bar{b}\bar{c}}v^{\bar{c}}.$$
 (101)

A ρ_{ab} sűrűség abszolút, nem transzformálódik:

$$\rho_{\bar{b}\bar{c}}' = 2\delta_{\bar{c}}^{e}\delta_{\bar{b}}^{d}\tau_{a}M_{de}^{a} = \rho_{\bar{b}\bar{c}}.$$
(102)

Az energiaáramsűrűség transzformációs szabálya:

$$q^{\bar{a}} = u^{\bar{b}} u^{c} \pi^{\bar{a}}_{d} M^{d}_{bc} = u^{\bar{b}} u^{c} \left(\left(e\tau_{b}\tau_{c} - \frac{1}{2} p_{\bar{d}} \pi^{\bar{a}}_{b} \tau_{c} - \frac{1}{2} p_{\bar{e}} \pi^{\bar{e}}_{c} \tau_{b} + \frac{1}{2} \rho_{\bar{d}\bar{e}} \pi^{\bar{d}}_{b} \pi^{\bar{e}}_{c} \right) \right) v^{\bar{a}} + u^{b} u^{c} \pi^{\bar{a}}_{f} \left(q^{\bar{f}} \tau_{b} \tau_{c} - \frac{1}{2} P^{\bar{d}}_{\bar{f}} \pi^{\bar{f}}_{b} \tau_{c} - \frac{1}{2} P^{\bar{d}}_{\bar{e}} \pi^{\bar{e}}_{c} \tau_{b} + \frac{1}{2} m^{\bar{d}}_{\bar{f}\bar{e}} \pi^{\bar{e}}_{c} \pi^{\bar{f}}_{b} \right) \\ = q^{\bar{a}} + (e + p_{\bar{b}} v^{\bar{b}} + \frac{\rho_{\bar{b}\bar{c}}}{2} v^{\bar{b}} v^{\bar{c}}) v^{\bar{a}} + 2 P^{\bar{a}}_{\bar{b}} v^{\bar{b}} + \frac{1}{2} m^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{c}} v^{\bar{b}} v^{\bar{c}}.$$
(103)

A nyomás transzformációja:

$$P_{\bar{b}}^{\prime\bar{a}} = -2u^{\prime c} \delta_{\bar{b}}^{e} \pi_{d}^{\prime\bar{a}} M_{ec}^{d} = u^{\prime c} \left(p_{\bar{b}} \tau_{c} - \rho_{\bar{b}\bar{e}} \pi_{c}^{\bar{e}} \right) v^{\bar{a}} + u^{\prime c} \delta_{\bar{b}}^{e} \pi_{f}^{\prime\bar{a}} \left(P_{\bar{f}}^{\bar{d}} \pi_{b}^{\bar{f}} \tau_{c} - m_{\bar{f}\bar{g}}^{\bar{d}} \pi_{c}^{\bar{g}} \pi_{e}^{\bar{f}} \right) \\ = P_{\bar{b}}^{\bar{a}} + p_{\bar{b}} v^{\bar{a}} + \rho_{\bar{b}\bar{c}} v^{\bar{c}} v^{\bar{a}} + m_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}} v^{\bar{c}}.$$
(104)

Végül pedig a diffúziós áramsűrűség a következőképpen transzformálódik:

$$m'_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}} = 2\delta_{\bar{b}}^{e}\delta_{\bar{c}}^{f}\pi'_{d}^{\bar{a}}M^{d}_{ef} = = m_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}} + \rho_{\bar{b}\bar{c}}v^{\bar{a}}.$$
(105)

A hagyományos jelölésekkel összefoglalva írhatjuk, hogy:

$$e' = e + p_i v^i + \frac{\rho_{ij}}{2} v^i v^j,$$
(106)

$$p_i' = p_i + \rho_{ij} v^j, \tag{107}$$

$$\rho_{ij}' = \rho_{ij},\tag{108}$$

$$q'^{i} = q^{i} + v^{i}(e + p_{j}v^{j} + \frac{\rho_{jk}}{2}v^{j}v^{k}) + P^{i}_{j}v^{j} + \frac{m^{i}_{jk}}{2}v^{k}v^{j},$$
(109)

$$P_j'^i = P_j^i + p_j v^i + \frac{\rho_{jk}}{2} v^i v^k + \frac{m_{jk}^i}{2} v^k, \qquad (110)$$

$$m'^{i}_{jk} = m^{i}_{jk} + \rho_{jk}v^{i}.$$
(111)

Egy fontos speciális eset, amikor a tömeg- és a diffúziós áramsűrűség tenzorok identitások a kovariáns komponenseikben, azaz $\rho_{jk} = \rho \delta_{jk}$ és $m_{jk}^i = j^i \delta_{jk}$. Ekkor

$$e' = e + p_i v^i + \frac{\rho}{2} v^2, \tag{112}$$

$$p_i' = p_i + \rho v_i, \tag{113}$$

$$\rho_{ij}' = \rho_{ij},\tag{114}$$

$$q'^{i} = q^{i} + v^{i}(e + p_{j}v^{j} + \frac{\rho}{2}v^{2}) + P^{i}_{j}v^{j} + j^{i}\frac{v^{2}}{2},$$
(115)

$$P_{j}^{\prime i} = P_{j}^{i} + p_{j}v^{i} + \rho v^{i}v_{j} + j^{i}v_{j}, \qquad (116)$$

$$j'^{i} = j^{i} + \rho v^{i}. (117)$$

(118)

Ezek a transzformációs tulajdonságok pontosan megegyeznek a harmadrendű, minden indexében kontravariáns tömeg-lendület-energia tenzor megfelelő komponenseire vonatkozó (13)-(18) transzformációs tulajdonságokkal. A megfelelő mérlegek szintén azonosak, és az entrópiaprodukció formája szintén ugyanolyan. A két reprezentáció között az intenzív mennyiségek transzformációs szabályai, illetve a relativisztikus és a kinetikus elmélettel történő kompatibilitás követelményével lehet különbséget tenni.

KÖSZÖNETMONDÁS

Fülöp Tamásnak, aki mindig mondta, hogy van abszolút energia. Ugyan végül nem kotenzornak tűnik, de még az sincs kizárva.

A munkát az OTKA K81161 és K104260 pályázatai támogatták.

IRODALOM

- [1] H. Weyl. Raum-Zeit-Matterie. Julius Springer, Berlin, 1918. In German.
- [2] H. Weyl. Space-Time-Matter. Methuen and Co. Ltd., London, 1922.
- [3] P. Havas. Four-dimensional formulations of Newtonian mechanics and their relation to the special and the general theory of relativity. *Reviews of Modern Physics*, pages 938–965, 1964.
- [4] M. Friedman. Foundations of Space-Time Theories (Relativistic Physics and Philosophy of Science). Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983.
- [5] T. Matolcsi. A Concept of Mathematical Physics: Models in Mechanics. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1986.
- [6] T. Matolcsi. *Spacetime Without Reference Frames*. Akadémiai Kiadó Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1993.
- [7] Fülöp T. A tér nem abszolút a téridő, mint a Galilei-féle relativitási elv következménye. In Fülöp T., editor, Új eredmények a kontinuumfizikában, volume 8 of Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár, chapter 1, pages 11–35. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [8] T. Matolcsi and P. Ván. Absolute time derivatives. *Journal of Mathematical Physics*, 48:053507–19, 2007. math-ph/0608065.
- [9] G. I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [10] László András. Conformal invariance without referring to metric. 2014.
- [11] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proceedings of Royal Society of London, A*, 200:523–541, 1949.

- [12] W. Noll. Space-time structures in classical mechanics. In *The foundations of mechanics and thermodynamics (Selected papers by Walter Noll)*, pages 204–210. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974. originally: pp28-34, Delaware Seminar in the Foudnations of Physics, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967.
- [13] W. Noll. Five contributions to natural philosophy. 2004. www.math.cmu.edu/~ ~wn0g/noll/FC.pdf.
- [14] W. Noll. A frame free formulation of elasticity. Journal of Elasticity, 83:291–307, 2006.
- [15] W. Noll and B. Seguin. Basic concepts of thermomechanics. *Journal of Elasticity*, 101:121– 151, 2010.
- [16] G. Jaumann. Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (I. Mitteilung). Sitzungsberichte der kaiserliche Akademie der wissenschaften in Wien, CX-VII(Mathematisch IIa):385–528, 1911.
- [17] W. Noll. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*, 2:197–226, 1958/59.
- [18] I. Müller. On the frame dependence of stress and heat flux. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 45:241–250, 1972.
- [19] D. G. B. Edelen and J. A. McLennan. Material indifference: a principle or a convenience. *International Journal of engineering Science*, 11:813–817, 1973.
- [20] F. Bampi and A. Morro. Objectivity and objective time derivatives in continuum physics. *Foundations of Physics*, 10(11/12):905–920, 1980.
- [21] A. I. Murdoch. On material frame-indifference, intrinsic spin and certain constitutive relations motivated by the kinetic theory of gases. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 83:185–194, 1983.
- [22] G. Ryskin. Misconception which led to the "material frame indifference" controversy. *Physical Review E*, 32(2):1239–1240, 1985.
- [23] G. Ryskin. Reply to "comments on the 'material frame indifference' controversy". *Physical Review E*, 36(9):4526, 1987.
- [24] C. G. Speziale. Comments on the "material frame indifference" controversy. *Physical Review E*, 36(9):4522–4525, 1987.
- [25] C. G. Speziale. A review of material frame-indifference in mechanics. Applied Mechanical Reviews, 51(8):489–504, 1998.
- [26] B. Svendsen and A. Bertram. On frame-indifference and form-invariance in constitutive theory. Acta Mechanica, 132:195–207, 1999.
- [27] A. Bertram and B. Svendsen. On material objectivity and reduced constitutive equations. *Archive of Mechanics*, 53:653–675, 2001.
- [28] M. Massoudi. On the importance of material frame-indifference and lift forces in multiphase flow. *Chemical Engineering Science*, 57:3687–3701, 2002.

- [29] A. I. Murdoch. Objectivity in classical continuum physics: a rationale for discarding the 'principle of invariance under superposed rigid body motions' in favour of purely objective considerations. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 15:309–320, 2003.
- [30] I-S. Liu. On Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 16:177–183, 2003.
- [31] A. I. Murdoch. On criticism of the nature of objectivity in classical continuum physics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:135–148, 2005.
- [32] I-S. Liu. Further remarks on Euclidean objectivity and the principle of material frameindifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:125–133, 2005.
- [33] A. Yavari, J. E. Marsden, and M. Ortiz. On spatial and material covariant balance laws in elasticity. *Journal of Mathematical Physics*, 47:042903, 2006.
- [34] M. Frewer. More clarity on the concept of material frame-indifference on classical continuum mechanics. Acta Mechanica, 202:213–246, 2009.
- [35] P. M. Mariano. SO(3) invariance and covariance in mixtures of simple bodies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40:1023–1030, 2005.
- [36] P. M. Mariano. Geometry and balance of hyperstresses. *Rendiconti dei Lincei Matematica Applicata*, 18:311–331, 2007.
- [37] P. M. Mariano. Cracks in complex bodies: covariance of tip balances. J. of Nonlinear Science, 18:99–141, 2008.
- [38] W. Muschik. Objectivity and frame indifference, revisited. *Archive of Mechanics*, 50:541–547, 1998.
- [39] W. Muschik and L. Restuccia. Changing the observer and moving materials in continum physics: Objectivity and frame-idifference. *Technische Mechanik*, 22(3):152–160, 2002.
- [40] W. Muschik and L. Restuccia. Systematic remarks on objectivity and frame-indifference, liquid crystal theory as an example. *Archive of Applied Mechanics*, 78(11):837–854, 2008.
- [41] W. Muschik. Is the heat flux density really non-objective? A glance back, 40 years later. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 24(24):333–337, 2012.
- [42] T. Matolcsi and T. Gruber. Spacetime without reference frames: An application to the kinetic theory. *International Journal of Theoretical Physics*, 35(7):1523–1539, 1996.
- [43] T. Matolcsi and P. Ván. Can material time derivative be objective? *Physics Letters A*, 353:109–112, 2006. math-ph/0510037.
- [44] Fülöp T. Kontinuumok kinematikájának új értelmezése. In Fülöp T., editor, Új eredmények a kontinuumfizikában, volume 8 of Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár, chapter 3, pages 55–99. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [45] Fülöp T. és Ván P. Véges rugalmas és képlékeny deformációk leírása. In Fülöp T., editor, *Idő és térderiváltak anyagtörvényekben*, volume 10 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 99–151. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010.
- [46] T. Fülöp and P. Ván. Kinematic quantities of finite elastic and plastic deformations. *Mathe-matical Methods in the Applied Sciences*, 35:1825–1841, 2012. arXiv:1007.2892v1.

- [47] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 73(4):373–382, 1948.
- [48] H. Xiao O.T. Bruhns and A. Mayers. Constitutive inequalities for an isotropic elastic strain energy function based on Hencky's logarithmic strain tensor. *Proc. Roy. Soc. London A*, 457:2207–2226, 2001.
- [49] C.O. Horgan and J.G. Murphy. A generalization of Hencky's strain-energy density to model the large deformations of slightly compressible solid rubbers. *Mechanics of Materials*, 79:943–950, 2009.
- [50] F. Osterbrink P. Neff, B. Eidel and R. Martin. A Riemannian approach to strain measures in nonlinear elasticity. C. R. Acad. Sci., 342:254–257, 2014.
- [51] Patrizio Neff, Ionel-Dumitrel Ghiba and Johannes Lankeit. The exponentiated Henckylogarithmic strain energy. Part I: Constitutive issues and rank–one convexity. *Preprint*, 2014. arXiv:1403.4675.
- [52] H. Brenner. Kinematics of volume transport. Physica A, 349:11-59, 2005.
- [53] H. Brenner. Navier-Stokes revisited. Physica A, 349:60-132, 2005.
- [54] H. Brenner. Fluid mechanics revisited. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 370(2):190–224, 2006.
- [55] H. Brenner. Bi-velocity hydrodynamics: Single-component fluids. International Journal of Engineering Science, 47(9):930–958, 2009.
- [56] H. Brenner. Diffuse volume transport in fluids. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(19):4026–4045, 2010.
- [57] H. Brenner. Beyond Navier–Stokes. International Journal of Engineering Science, 54:67– 98, 2012.
- [58] H. Brenner. Steady-state heat conduction in a gas undergoing rigid-body rotation. comparison of Navier–Stokes–Fourier and bivelocity paradigms. *International Journal of Engineering Science*, 70:29–45, 2013.
- [59] H. Brenner. Conduction-only transport phenomena in compressible bivelocity fluids: Diffuse interfaces and Korteweg stresses. *Physical Review E*, 89(4):043020, 2014.
- [60] D. Bedeaux, S. Kjelstrup, and H.C. Öttinger. On a possible difference between the barycentric velocity and the velocity that gives translational momentum in fluids. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 371(2):177–187, 2006.
- [61] H. C. Öttinger. Weakly and strongly consistent formulations of irreversible processes. *Physical Review Letters*, 99(13):130602(4), 2007.
- [62] P. Ván. Generic stability of dissipative non-relativistic and relativistic fluids. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, page 02054, 2009. arXiv: 0811.0257.
- [63] T. Ruggeri. Galilean invariance and entropy principle for systems of balance laws. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 1(1):3–20, 1989.
- [64] I. Müller and T. Ruggeri. Rational Extended Thermodynamics, volume 37 of Springer Tracts in Natural Philosophy. Springer Verlag, New York-etc., 2nd edition, 1998.

- [65] T. S. Bíró and P. Ván. About the temperature of moving bodies. *EPL*, 89:30001, 2010. arXiv:0905.1650v1.
- [66] Horváth Róbert. A mozgási energia fogalmának egy új értelmezése. KLTE MFK Tudományos Közleményei, 23:29–33, 1997.
- [67] R. L. Liboff. *Kinetic Theory (Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions)*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.
- [68] T. Matolcsi. On material frame-indifference. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 91(2):99–118, 1986.
- [69] T. Matolcsi. Ordinary thermodynamics. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 2005.
- [70] T. Matolcsi. Közönséges termodinamika. Scholar Könyvkiadó, 2012.
- [71] P. Ván. Kinetic equilibrium and relativistic thermodynamics. *EPJ WEB of Conferences*, 13:07004, 2011. arXiv:1102.0323.
- [72] P. Ván and T.S. Biró. First order and generic stable relativistic dissipative hydrodynamics. *Physics Letters B*, 709(1-2):106–110, 2012. arXiv:1109.0985[nucl-th].
- [73] P. Ván and T.S. Biró. Thermodynamics and flow-frames for dissipative relativistic fluids. In G. Chacón-Acosta, García-Perciante A.L., and A. Sandoval-Villalbazo, editors, *Plasma Phy*sics and Relativistic Fluids, volume 1578 of AIP Conf. Proceedings, pages 114–121, 2014. Proceedings of the V Leopoldo García–Colín Mexican Meeting on Mathematical and Experimental Physics, El Colegio Nacional, September 9-13, 2013. Mexico City. arXiv:1310.5976.
- [74] P. Ván and T. S. Bíró. Relativistic hydrodynamics causality and stability. *The European Physical Journal Special Topics*, 155:201–212, 2008. arXiv:0704.2039v2.
- [75] P. Ván. Internal energy in dissipative relativistic fluids. Journal of Mechanics of Materials and Structures, 3(6):1161–1169, 2008. arXiv:07121437 [nucl-th].
- [76] T. S. Bíró, E. Molnár, and P. Ván. A thermodynamic approach to the relaxation of viscosity and thermal conductivity. *Physical Review C*, 78:014909, 2008. arXiv:0805.1061 (nucl-th).
- [77] P. Ván and T. S. Bíró. Transformations of relativistic temperature Planck-Einstein, Ott, Landsberg and Doppler formulas as particular cases. Wolfram Demonstration Project, 2009.
- [78] P. Ván and T. Biró. Dissipation flow-frames: particle, energy, thermometer. In M. Pilotelli and G. P. Beretta, editors, *Proceedings of the 12th Joint European Thermodynamics Conference*, pages 546–551, Brescia, 2013. Cartolibreria SNOOPY. ISBN 978-88-89252-22-2, arXiv:1305.3190.
- [79] Ván P. Nemegyensúlyi termomechanika. volume 16 of Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár, pages 339–344, Budapest, 2013. Hantken Kiadó.

Szerzők

ASSZONYI CSABA DR. (1941) okl. gépészmérnök (NME, 1964), műszaki doktor (NME, 1965), a



műszaki tud. kandidátusa (1972), a műszaki tud. doktora (1976). Kutatási területe: a kontinuumok mechanikája és az irreverzibilis termodinamika. Eredményeit több mint 200 publikációban és 16 könyvben tette közre. Főbb mérnöki eredményei és szabadalmai az alagút- és épület-rekonstrukciók, víz- és környezetvédelem területén találhatók. Volt kutatómérnök, osztályvezető, gazdasági igazgató, tröszti főosztályvezető, kutatóintézeti igazgató, elnök-vezérigazgató.

1112 Budapest, Táncos u.6. Telefon: (06) 309 215 684, (1) 310 2374, asszonyi@gmail.com

CSATÁR ATTILA DR. (1978) kommunikáció-technikai mérnök (2001), okleveles mérnök tanár

(2001), okleveles mezőgazdasági gépészmérnök (2001), az agrárműszaki tudományi doktora PHD. (2008). Munkaterületei az alap- és alkalmazott kutatási, kutatás-fejlesztési, illetve műszaki-technológiai fejlesztési feladatok elvégzése. Szakterületei a tartósítási és tárolási folyamatok csomagolóanyagainak fejlesztése, anyagminőségi- és légkörfizikai jellemzők kölcsönhatásának vizsgálata, fizikai- és reológiai jellemzők meghatározása, különböző szemes- és szálastakarmányok mechanikai tulajdonságainak vizsgálata. Munkásságát számos hazai és külföldi publikáció jelzi.



2100 Gödöllő, Tessedik S. u. 4. Telefon: (28)-511-649; csatar.attila@gmgi.hu

FÜLÖP TAMÁS DR. (1967) okl. fizikus (1991, ELTE), egyetemi doktor (1996, ELTE), PhD.



(1997) oki. hzikus (1991, ELTE), egyetelin doktor (1996, ELTE), FilD. (2006, University of Tokyo, Japán; honosítva 2012, Szegedi Tudományegyetem). 1999-ig az ELTE Elméleti Fizika Tanszéken oktat fizika és matematika tárgyakat, az 1997-99 és 2002-06 években Japánban kutat, 2006-2007 között pedig Csehországban. 2007-től tagja a Montavid Termodinamikai Kutatócsoportnak. 2010-2013 között az MTA Wigner Fizikai Kutatóközpontban dolgozik, azóta a BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszéken adjunktus. Fő kutatási témája a kontinuumfizika (reológia, termomechanika, hővezetés, közegkinematika, a téridő szerepe), egyéb és korábbi témái főként a kvantummechanikához kapcsolódnak (határfeltételek, reciprocitás). Eddig 24 szakcikke jelent meg, 10 konferenciaközleménye, szerző ill. társszerző 9 könyvfejezetben, négy könyv szerkesztője.

BME EGR Tanszék, 1111 Budapest, Bertalan L. u. 4-6. Tel: (1)-463-2609, fulop@energia.bme.hu

KOVÁCS RÓBERT (1988), okleveles gépészmérnök (BME, 2015). Kutatási területe a



nemegyensúlyi termodinamika és kontinuumfizika. Tanulmányai alatt elkezdett ismerkedni a kutatási módszertannal (5 TDK-dolgozat – ebből 4 helyezett, 2 OTDK-részvétel), valamint oktatási tevékenységben is részt vett, mint gyakorlatvezető és témavezető. 2013-tól a Montavid Termodinamikai Kutatócsoport tagja. 2013-ban az MTA Wigner FK RMI Plazmafizikai Főosztály munkatársa. 2014-től tagja az MTA Wigner FK RMI Elméleti Fizikai Osztályának, valamint ebben az évben a BME Nukleáris Technika Intézet munkatársa. Eddigi munkássága során 2 könyvfejezet és 3 szakcikk köthető a nevéhez.

2363 Felsőpakony, Petőfi Sándor u. 27. Tel.: 70/671-5459, robert.kovacs.bme@gmail.com

SZARKA ZOLTÁN DR. (1927) okl. mérnök (1950). 1950-től a Nehézipari Műszaki Egyetem – ma

Miskolci Egyetem – Matematikai Tanszékének oktatója. 1967-től egyetemi docens, közben két időszakban tanszékvezető, 1991-től nyugdíjas, de oktatói munkáját 2006-ig folytatta. Szakterülete a kiegyenlítőszámítás, de 56 évi egyetemi munkája során a matematika számos területét (analízis, parciális differenciálegyenletek, valószínűségszámítás, komplex függvénytan stb.) művelte.



és egyetemi jegyzete jelent meg, részben társszerzőkkel. 3529 Miskolc, Csabai kapu 34. Telefon: (46) 362 905, mateva@gold.uni-miskolc.hu

Számos hazai és külföldi előadása mellett 46 szakcikke és 32 könyve

SZÜCS MÁTYÁS (1992) gépészmérnök hallgató a BME-n. 2013. október – 2014. február között



féléváthallgatással a Karlsruhei Műszaki Egyetem (KIT) hallgatója. 2014-től a Montavid Termodinamikai Kutatócsoport tagja. Kutatási területe: kontinuummechanika, reológia.

8174 Balatonkenese, Csokonai u.25/2. Telefon: (06) 305 607 573, szucsmatyass@gmail.com

VÁN PÉTER DR. (1964). okl. fizikus (ELTE, 1990), egyetemi doktor (BME, 1994), PhD (BME,

2002). 2005-ig a BME Kémiai Fizika Tanszékének munkatársa. Jelenleg az MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont, Részecske- és Magfizikai Intézet, Elméleti Fizika Osztályán és a BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszékén dolgozik. Több ízben dolgozott külföldön, Olaszországban, Németországban és Észtországban. Kutatási területe a nemegyensúlyi termodinamika mint általános fizikai keretelmélet, ennek alapjai, illetve különféle alkalmazásai. Az alapkérdések közül a nemegyensúlyi termodinamika variációs elveivel és gyengén nemlokális kiterjesztésével, az anyagi objektivitás elvével, nemadditív termostatisztikával és a relativisztikus disszipatív folyadékok elméleteivel foglalkozott. Érdeklődési területéhez tartozik ezenkívül a károsodásmechanika és a reológia. Eddig mintegy 110 angol és magyar nyelvű szakcikke és egy könyve jelent meg.



1012 Budapest, Lovas utca 18. Telefon: 2145243, van.peter@wigner.mta.hu

Montavid Research Group

MONTAVID RESEARCH GROUP FOR THEORETICAL AND APPLIED THERMODYNAMICS MONTAVID ELMÉLETI ÉS ALKALMAZOTT TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT H–1112 Budapest, Táncos u. 6. Telefon: (06) 309 215 684, (1) 310 2374

☆ Asszonyi Csaba ☆ Béda Gyula ☆ Béda Péter ☆ Csatár Attila ☆ Horváth Róbert ☆
 ☆ Fülöp Tamás ☆ Kocsis Dénes ☆ Kovács László ☆ Kovács Róbert ☆ Matolcsi Tamás ☆
 ☆ Szarka Zoltán ☆ Szücs Mátyás ☆ Ván Péter ☆ Vásárhelyi Balázs ☆ Verhás József ☆

179