

Takács Donát M.
Ván Péter
Vásárhelyi Balázs
(szerk)

Kőzetmechanika és termodinamika



Kőzetmechanika és termodinamika

Kőzetmechanika és termodinamika

SZERKESZTETTE

Takács Donát M., Ván Péter és Vásárhelyi Balázs

BME Gépészmérnöki Kar, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, Budapest

Wigner Fizikai Kutatóközpont, Budapest

BME Építőmérnöki Kar, Geotechnika és Mérnökgeológia Tanszék, Budapest

Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

A kutatást és a kötet megjelenését

A Montavid Termodinamikai Kutatócsoport

az

Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért

a

BME Geotechnika és Mérnökgeológia Tanszék

és az

NKFIH FK 134277 és NKFIH 2018-1.1.2-KFI-2018-00207

(3.-46., 55.-66. és 129.-140. o.)

támogatása tette lehetővé

ISBN 978-615-80157-8-3

ISSN 1789-0454

Megjelent az Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért gondozásában

Nyomdai munkák:

Kontraszt Plusz Kft, Pécs

©2023 Budapest, Takács Donát M., Ván Péter és Vásárhelyi Balázs

Kőzetmechanika és termodinamika

Szerkesztette

Takács Donát M., Ván Péter és Vásárhelyi Balázs

BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, Budapest

Wigner Fizikai Kutatóközpont, Budapest

BME Geotechnika és Mérnökgeológia Tanszék, Budapest

Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 26. kötet

Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért

2023

Tartalomjegyzék

Előszó	1
<i>Fehér Anna, Kovács Róbert</i>	
Általánosított termodinamikai modellek kísérleti kiértékelési módszertana	3
<i>Fülöp Tamás, Szücs Mátyás</i>	
Az alakváltozási tenzor előállítása felületen mért elmozdulásjelből	17
<i>Ván Péter</i>	
Gradiens termomechanika és reológia	37
<i>Béda Gyula, Béda Péter</i>	
Kapcsolat a gradiens és a viszkoelasztikus kontinuumok anyagtörvényei között	47
<i>Takács Donát M., Fülöp Tamás</i>	
Termodinamikailag konzisztens, kiterjesztett szimplektikus numerikus végesdifferencia-séma csatolt termo-viszkoelasztikus problémák megoldásához	55
<i>Pszota Máté</i>	
A newtoni gravitáció termodinamikai módosításának hatása a galaxisok sebességgörbéire ...	67
<i>Somogyfoki Réka</i>	
Térfogatfogalmak a fekete lyukak termodinamikájában	95
<i>Fülöp Tamás</i>	
Kluitenberg–Verhás-modell, hőtágulás és reológiai energia	129
<i>Füzesi Ferdinánd, Bögöly Gyula</i>	
A sziklarézsűk állékonyságának valószínűség elvű vizsgálata	141
<i>Somodi Gábor, Borsody János, Kerékgyártó Attila, Krupa Ágnes</i>	
Az M85 alagút kivitelezése során harántolt szarmata korú konglomerátum és homokkő rétegek mérnökgeológiai vizsgálata	153
<i>Vásárhelyi Balázs, Somodi Gábor</i>	
A közettestek töredezettségének minősítése az RQD mérőszám újraértelmezésével	163
<i>Ola Bilal</i>	
A szíriai Crac de Chevaliers vár dolomitjának vízpára permeabilitása (angolul)	169
<i>Feten Chihi, Gabriella Varga</i>	
Geotechnical Implications of Landfill Leachate on Soil Properties: A Comprehensive Review	179
Szerzők listája.....	189

*Dr. Asszonyi Csabának
(1941-2022)*



Előszó

Ez a kötet barátunk és tudós kollégánk, Asszonyi Csaba emlékére íródott. Csaba rendkívüli egyéniség volt, törhetetlen optimizmusával, mély meglátásaival, tudásvágyával, vidám életszeretettel és nyugodt bölcsességével példakép sokunk számára.

2006-tól, a Montavid Termodinamikai Kutatócsoport létrejötte óta egy nagy könyv volt az álma. Egy könyv, amelyben a kontinuummechanikáról minden fontos dolog le van írva, és egységes termodinamikai elméletként tartalmazza az ideális rugalmasságtant, együtt a reológiával és a képlékenységtannal. Olyan egyszerűen és szemléletesen, az alapoktól felépítve, hogy egyetemi tankönyvként is tanítani lehessen belőle. Először úgy tűnt, hogy ez egy közeli, reális cél. A Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár 3. kötetét abban a szellemben írtuk, hogy a reológia lényegében megérthető lesz, a véges deformációs esetből sok minden megvan, és a képlékenységre is volt több ötletünk. Aztán sorra próbáltuk az ötleteket, számításokat és laborvizsgálatokat végeztünk, a kutatócsoport bővült és szerveződött, egymás után születtek a Kiskönyvtár kötetei számos érdekes problémát tárgyalva és megoldva.

A próbaterepünk és tesztrendszerünk a közetmechanika volt és maradt, annak ellenére, hogy az elméleti keret nyilvánvalóan sokkal általánosabb érvényességű, mindenféle anyaghoz használható. Csaba és a csoport kapcsolatrendszere, baráti köre, tudományos aurája természetes módon alakította a kutatási irányokat és jelölte ki a közetmechanikát. Végül is, ahogy Csaba gyakran hangoztatta, lényegében mindegy, hogy milyen anyagot vizsgálunk, ugyanúgy kell viselkedjenek, a második főtételek mindre érvényes. Kiválóan haladtunk a kitűzött cél felé, úgy tűnt, hogy összeállnak a részletek, megszületett a véges deformációs kinematika, a rugalmas testek termodinamikai reológiája, a hővezetés kapcsán pedig látványosan igazolódott, hogy jó úton járunk. Technológiai és elméleti problémákat találtunk és érkeztek hozzánk. Ekkor már csak, illetve még mindig, a képlékenységek megértése és beillesztése hiányzott a megálmodott egységes rendszerből. Végiggondoltuk a kritikus energiakritériumot, a károsodás-képlékenységet, a fázis-stabilitásvesztés gondolatot, a tapadási súrlódás kontinuum általánosítását és bevezettük a képlékenyedési fogalmát a kinematikai-dinamikai kérdések elválasztására. Ezekből születtek cikkek, de születhettek volna könyvek is. Nem írtuk meg őket, mert úgy tűnt, egyik elképzelés sem az igazi. Mindezek, számos-kisebb nagyobb más számításunkkal és ötletünkkel együtt, kutatási jelentések egyfajta sorozataként, megtalálhatók a Kiskönyvtár köteteiben.

Aztán felesége betegsége miatt Csaba egyre kevésbé aktív szereplőjévé vált a kutatásnak. A képlékenyedési termodinamikai elmélete az ő fókuszált érdeklődése nélkül csak egyike a munkánk során megnyílt tudományos lehetőségeknek. Ezeket a fejleményeket, amelyek újra és újra megmutatják a második főtételek és a termodinamikai gondolkodás fundamentális szerepét a tudományban, mindig lelkes kíváncsisággal követte. Azonban, még betegsége előrehaladtával is, valahányszor megérkeztünk hozzá rendszeres megbeszéléseinkre, a táblára felírva ott fogadott minket a következő ötlete a képlékenységgel kapcsolatban. Még 2022 nyarán és őszén is szeretett kollégája és példaképe, Fényes Imre könyveit olvasta és az abból merített gondolatok formálódtak képletekké és ábrákká a táblán. Az volt az elképzelése, hogy a közeg mozgásának leírására használt fogalmak, a szilárd és megfolyó anyagnak az inerciális megfigyelőhöz viszonyított relatív sebességei segíthetnek legjobban a termodinamikába illeszteni a képlékenyedési mibenlétét.

A kötet első része, hasonlóan a Kiskönyvtár számos kötetéhez, a Montavid Termodinamikai Kutatócsoport különféle munkáit tartalmazza. A tartalomjegyzékre pillantva látható, hogy a cikkek nagyon különböző dolgokkal foglalkoznak, a közös pontok a termodinamika, a mechanika és a mérnöki gyakorlat. Az elmélet soha nem öncélú, a kísérleteken is túl, a technológiai vonatkozásokig

átgondolandók a következményei. A kötet második része ehhez kapcsolódik, geotechnikai és kőzetmechanikai cikkek vannak benne.

A termodinamika szerepe különleges, mert az elméletek kereteként teljesen váratlan módon és értelemben találkozhatunk vele, mindenütt jelen van, akár észrevesszük, akár nem. Ennek magyarázata az, hogy a termodinamika stabilitáselmélet, az anyag stabilitásának elmélete, ezért mindenhol érvényes. A képlékenyedés stabilitásvesztés, tehát van téridő-kompatibilis, termodinamikailag konzisztens leírása. Így nem kizárt, hogy mindaz a tudás és gondolat, ami a kötet problémáival foglalkozva összegyűlt, már valahol tartalmazza a képlékenységi igazi elméletét, azt az új nézőpontot, ahonnan nézve az egész összeáll és érthetővé válik. Előbb-utóbb valakinek meg kell írni azt a könyvet is, amely a véges deformációs rugalmasságot, reológiát és képlékenységet egységesen, minden téridő- és termodinamikai követelménynek eleget téve, kristálytiszta egyszerűséggel tárgyalja. Mert egy tudományos örökség nem tárgyakat, hanem álmokat és feladatokat örökít a tanítványokra és a kollégákra.

Budapest, 2023. április 20.

Takács Donát M., Ván Péter, Vásárhelyi Balázs

Általánosított termodinamikai modellek kísérleti kiértékelési módszertana

An evaluation procedure of experimental data for generalized thermodynamic models

Fehér Anna

Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, Gépészmérnöki Kar, BME, feher@energia.bme.hu

Kovács Róbert

Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, Gépészmérnöki Kar, BME; Elméleti Fizikai Osztály, Wigner FK; Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, kovacsrobert@energia.bme.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: Az általánosított termodinamikai modellek széles alkalmazási lehetőségeket kínálnak, főként a heterogén, összetett szerkezetű anyagok modellezésére vonatkozóan. Azonban ezek az általánosított modellek még nem olyan alaposan kidolgozottak, mint a klasszikus elméletek, például a Fourier-törvény, és a rá épülő kísérletek. Ezért a mostani munkában megkíséreljük a standard kiértékelési módszernek számító, érzékenységi függvényeken alapuló iteratív eljárást átszámaztatni az általánosított hővezetési és mechanikai modellekre.

Kulcsszavak: hővezetés, kőzetek, reológia, iterációs kiértékelés

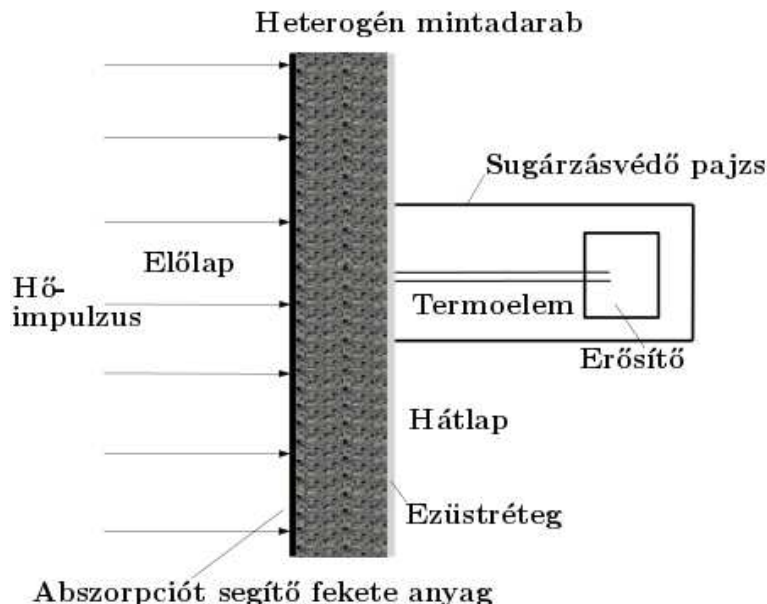
ABSTRACT: The generalized thermodynamic models offer wide possibilities for application, especially in modeling heterogeneous materials with complex inner structures. However, these generalized models are not yet elaborated on such a strong basis compared to the classical theories (e.g., Fourier's law), together with the related experiments. Therefore, in the present work, we attempt to improve the existing standard evaluation procedure based on sensitivity functions, and apply that approach to generalized heat conduction and mechanical models.

Keywords: heat conduction, rocks, rheology, iterative evaluation

1 BEVEZETÉS

Számtalan modern mérnöki alkalmazás követeli meg a klasszikus, standardnak számító konstitúciós összefüggéseinek általánosítását. Ilyenek például az egyre szélesebb körben elterjedő nanoanyagok, alacsony hőmérsékletű berendezések, és az összetett szerkezetű heterogén anyagok (kompozit fémhabok, kőzetek). Ez azt jelenti, hogy a Fourier-törvény nem feltétlenül képes megfelelő termikus leírást adni az ilyen, vagy ezekhez hasonló helyzetekben, vagyis annak általánosítására, kiegészítésére van szükség. Ez nem csak a hővezetési jelenségekre érvényes állítás, hanem a mechanikai viselkedés sem tökéletesen rugalmas, még homogén anyagokra vonatkozóan sem. Mechanikai oldalról az úgynevezett viszkoelasztikus (reológiai) jelenségek okozzák a Hooke-törvénytől való eltérést, amelyek szintén a standard konstitúciós összefüggések általánosítását igénylik. A sor tovább folytatható a fluidumok Newton-törvényével, vagy az anyagdifúzióhoz kapcsolódó Fick-törvénnyel is.

A közös pont mindegyik esetben az, hogy az általánosítás eredményeképpen egy olyan modellre van szükségünk, amely több, párhuzamos transzport-mechanizmus modellezésére képes. Más szóval, a vizsgált jelenségek körök túlmutatnak az egy időskálájú modellek predikciós képességein. Vegyük példának az összetett szerkezetű heterogén anyagokat. Jellemzően több, de legalább kettő karakterisztikus komponensből állnak valamilyen arányban és eloszlásban. Bár jogos lehet a feltevés, hogy komponensenként érvényes a Fourier-törvény, de azok eredője, effektív megnyilvánulása nem írható le szintén a Fourier-törvény segítségével. Ennek az a közvetlen következménye, hogy a homogén anyagokra megismert időskálától és geometriától (anyagszerkezettől) független hővezetési tényező (és ezzel együtt a hőfokvezetési tényező) megszűnik függetlennek lenni. Ebből pedig az következik, hogy a komponensek ismerete önmagában nem lehet elegendő ahhoz, hogy azok eredőjét, homogén helyettesítő modelljét meghatározzuk.



1. ábra. A Flash-kísérlet mérési elrendezése. (*The schematic arrangement of flash experiment.*)

Bár erre lehetnek ellenpéldák, de azoknak ki kell használniuk vagy a geometria, vagy a komponensek elhelyezkedésének és a közöttük lévő interakciónak valamilyen speciális tulajdonságát, de ez semmiképpen sem igaz általánosan.

Általánosított modellek esetén nem léteznek még standardnak, széles körben elfogadottnak tekintett módszertani elemek, algoritmusok, éppen emiatt pedig fontos annak alapos megértése és vizsgálata. Az alábbiakban részletesen kifejtjük a kísérleti háttérrel, nem csak annak elrendezését és tulajdonságait, de nagy hangsúlyt fektetve a mért adatok kiértékelési módszertanára.

2 HŐVEZETÉSI KÍSÉRLETEK

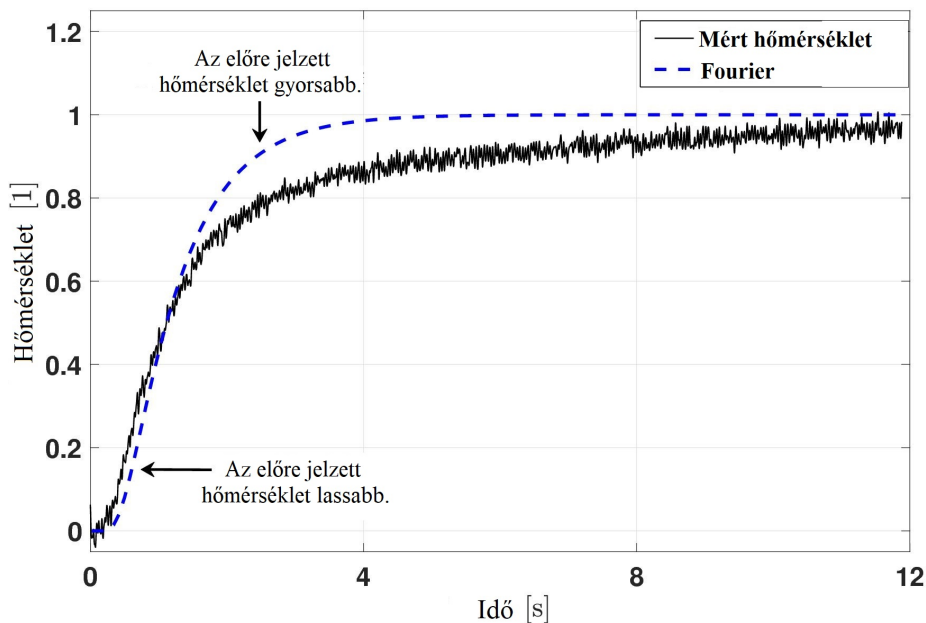
A hővezetési tényező pontosabb feltérképezése kísérleti úton lehetséges, amelyhez célszerű az úgynevezett hőimpulzus (flash) elrendezést használni, sematikusán a 1. ábrán láthatjuk a kísérlet elrendezését. A kísérlet során a minta előlapját homogén módon gerjesztjük egy rövid, 0.01 s hosszú villanással. Az erre adott választ a hátfali hőmérséklet időbeli változásából olvassuk ki. A kísérleti adatsor akkor a legjobb, ha a villanás által közölt teljes energia a próbatest felületén nyelődik el, mindenféle átlátszóság nélkül. Ez azonban, az alkalmazott grafitos előkezelés ellenére bizonyos esetekben megesik, és van amikor elkerülhetetlen (például a nagy, 90% feletti porozitású minták esetén).

Ha a villanás nem teljes egészében a felületen nyelődik el, akkor a mért adatsoron egy szinte azonnali hőmérséklet-felfutás lesz tapasztalható. Ennek a következménye az, hogy egy további időskála fogja terhelni az adatokat, amelynek most a részletes vizsgálatával nem foglalkozunk.

A hátlapon a hőmérsékletmérést egy K-típusú termoelemmel valósítjuk meg, amelyet egy rugós szerkezet szorít a minta hátlapjára. A jobb kontakt eléréséhez sok esetben ezüst festéket alkalmaztunk. Itt érdemes megjegyezni, hogy az ezüst festék, például kőzetek esetén, egyfajta homogenizáló, kiátlagoló szereppel is bír: a mért hőmérséklet az adott, ezüsttel borított felületem átlagos hőmérsékletének is tekinthető.

Az ezüst festék jelenlétének nem csak mérés technikai jelentősége is van, ugyanis a szakirodalomból jól ismert 2-hőmérséklet modell (két csatolt Fourier-egyenlet) alkalmazása megköveteli az ilyen, és ehhez hasonló technikai információk figyelembevételét, ugyanis egy ilyen esetben a 2-hőmérséklet modellből adódó átlaghőmérsékletet kell illeszteni. Egy fémhab esetén viszont változik a helyzet, mivel ott a fémhátrix hőmérsékletét tudjuk mérni, az üregek hőmérséklete ismeretlen. Ezek ismerete és implementálhatósága előnyösen hangzik, de egyben megkívánja olyan jelentős bizonytalansággal rendelkező paraméterek használatát, mint amilyen a kontakt hőátadási tényező.

A 2. ábra egy tipikus adatsort szemléltet, a hozzátartozó legjobb elérhető Fourier-féle illesztéssel együtt. A mérés elején az a Fourier-egyenlet megoldása lassabb, mint a mért adatsor, de ez a trend megfordul,



2. ábra. Kondenzátorminta mérési adatai, a hozzá tartozó legjobb Fourier-illesztéssel. (*Data for a capacitor sample, including the best Fourier fit.*)

és a maximum hőmérséklet egy környezetében viszont túllő. Ez egy tipikus megjelenése a két időskálás hővezetési jelenségnek, ennek angol nyelvű terminológiája "over-diffusion"-ként írja ezt le.

3 HŐVEZETÉSI MODELLEK

A mostani vizsgálataink során továbbra is a klasszikus irreverzibilis termodinamikából jól ismert Fourier-törvényt,

$$q = -\lambda \partial_x T, \quad (1)$$

tekintjük az elsődleges hővezetési modellnek, mivel kivétel nélkül minden mérés kiértékeléséhez fel kell használni. Itt a λ jelöli az izotróp hővezetési tényezőt, és a kísérleti elrendezésből adódóan elegendő a térben egydimenziós esetet tekintenünk. Az (1). egyenletben a q jelöli a hőáramot, T a hőmérsékletet, ∂_x pedig az x -irányú parciális deriváltat jelenti.

A mostani vizsgálatunkban az igen sokféle általánosított hővezetési modell közül mi a Guyer-Krumhansl-egyenletet (GK) [1] választjuk, ennek több oka van. Egyrészt, a GK-egyenlet természetes módon vezeti be a két időskálát, de termodinamikailag konzisztens módon, azaz nem úgy, ahogy az úgynevezett duális fáziskésésű modell teszi. Másrészt, az egyenlet struktúrája természetes módon beleillik a Fourier-tól eltérő hővezetési modellek termodinamikailag konzisztens, szisztematikus rendszerébe, eltérően például a Jeffreys-egyenlettől. A GK-egyenlet levezetését mellőzzük, a [2, 3] irodalmak részletesen tárgyalják a kapcsolódó termodinamikai módszertant. A GK-egyenlet tehát

$$\tau + \partial_t q + q = -\lambda \partial_x T + l^2 \partial_{xx} q, \quad (2)$$

ahol τ egy úgynevezett relaxációs idő, az l pedig kontinuum oldalról egy belső térskálának tekinthető. Kinetikus elméleti irányból az l közvetlenül a szabad úthosszot jelenti, de kontinuum oldalról nem rögzítjük magunkat adott mikroszkopikus mechanizmusokhoz, és habár az egyenletek struktúrája megegyezik, a (2). egyenlet mögött nincs fonon hidrodinamika.

A konstitúciós összefüggéseinkben kizárólag konstans paramétereket használunk, ugyanis a kísérlet során igen kicsi ($\sim 3-5$ K) a maximális hőmérséklet-emelkedés, szobahőmérsékleten (mint referencián) pedig a nemlinearitások elhanyagolható szereppel rendelkeznek. Ahhoz, hogy matematikailag és fizikailag is lezárjuk a Fourier-, és GK-egyenleteket, szükségünk van az e belső energia mérlegegyenletére,

$$\rho c \partial_t T + \partial_x q = 0, \quad (3)$$

amelyben kihasználtuk, hogy az izokor folyamatot $e = cT$ állapotegyenlettel, valamint zérus hőforrással modellezzük, így ρ a tömegsűrűség, c pedig az izokor fajhő.

4 KIÉRTÉKELÉSI MÓDSZERTAN

A mérés eredményeképpen, ahogy korábban láttuk, egy időbeli adatsort kapunk, a minta hátfalára vonatkozóan, a kérdés pedig az, hogy ebből az adatsorból hogyan tudjuk kinyerni a szükséges paramétereket. A Fourier-egyenlet esetén a legfontosabb paraméter a hőfokvezetési tényező, azaz $\alpha = \lambda/(\rho c)$. Emellett, mivel a próbatest már az adatrögzítés során is jelentős hűlést is mutathat, szükség lehet a hőátadási tényező figyelembevételére is, vagyis amíg az előlapi peremfeltételünk $q(x=0, t) = q_0(t)$ a hőimpulzust írja le, addig a hátfalon a $q = h(T - T_\infty)$ összefüggést használjuk, ahol h a hőátadási tényező.

Felmerülhet a kérdés, hogy a hőátadást miért csak a hátfalra írjuk elő. Egyrészt, a minta geometriáját oly módon választjuk meg, hogy "karcsú" legyen, azaz a vastagsága lényegesen kisebb annak átmérőjénél. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor mindenképpen érdemes az oldallapon (vagy paláston) szigetelést alkalmazni, hogy a kísérlet mindenképpen az egydimenziós esethez maradjon igen közel. Másrészt pedig a próbatest mérete kicsi, és a hűlési szakaszban jellemzően a Biot-szám ≤ 0.1 teljesül, és emiatt, a korábbi tapasztalatokkal összhangban, elegendő a hátfalra előírni a hőátadást.

4.1 Dimenziótlan paraméterek

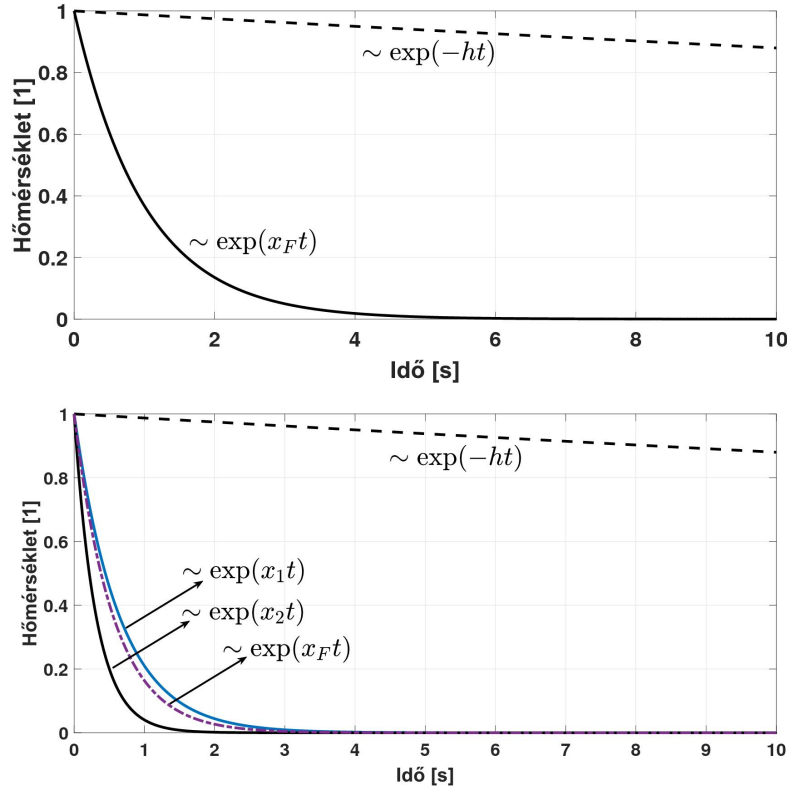
A dolgunk nagyban megkönnyíthetjük, ha dimenziótlan paramétereket vezetünk be, amelyeket az 1. táblázat foglal össze.

1. táblázat. Az alkalmazott dimenziótlan paraméterek összefüggései, ahol t_p jelöli a hőimpulzus hosszát, amelyre időtartamra $\bar{q}_0$ fejezi ki az átlagos hőáramot. Továbbá, L jelöli a próbatest karakterisztikus hosszát, és T_{end} fejezi ki az adiabatikus végállapotú hőmérsékletet, T_0 pedig a konstans kezdeti hőmérséklet. (*Formulae for the applied dimensionless parameters where t_p denotes the length of the heat pulse for which $\bar{q}_0$ expresses the mean heat flux. Furthermore, L stands for the characteristic length of the sample, and T_{end} expresses the adiabatic steady-state temperature; T_0 is the constant initial temperature.*)

Idő és tér koordináták:	$\hat{t} = \frac{t}{t_p}$	és	$\hat{x} = \frac{x}{L}$,
Hőfokvezetési tényező:	$\hat{\alpha} = \frac{\alpha t_p}{L^2}$	ahol	$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$,
GK-paraméterek:	$\hat{\tau}_q = \frac{\tau_q}{t_p}$	és	$\hat{l}^2 = \frac{l^2}{L^2}$,
Hőmérséklet:	$\hat{T} = \frac{T - T_0}{T_{\text{end}} - T_0}$	ahol	$T_{\text{end}} = T_0 + \frac{\bar{q}_0 t_p}{\rho c L}$,
Hőáram:	$\hat{q} = \frac{q}{\bar{q}_0}$	ahol	$\bar{q}_0 = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} q_0(t) dt$,
hőátadási tényező:	$\hat{h} = h \frac{t_p}{\rho c}$,		
Fourier rezonancia feltétel:	$\hat{l}^2 / \hat{\tau}_q = \hat{\alpha}$.		

A dimenziótlan paraméterek kapcsán megjegyezzük, hogy az adiabatikus véghőmérséklet létezését feltesszük. Ez jogos, hiszen tökéletesen szigetelt esetben az egyszeri hőimpulzus hatására a kezdeti hőmérséklethez képest egy annál magasabb hőmérsékletre állna be az egyensúly, azaz a T_{end} elvileg létezik, bár gyakorlatilag ezt tökéletesen megvalósítani nem lehet. Tekintve, hogy pont erre a véghőmérsékletre normálunk, ezért a dimenziótlan hőmérséklet 0 és 1 között változhat. Hűlés esetén viszont az 1 értéket soha nem érheti el, ami így jellemzi a hőveszteséget. Az előnye ennek a dimenziótlanításnak az, hogy a t_p hőimpulzus hossza fix, ellenben a hagyományosan tekintett Fourier-szám felhasználja a kiértékelés előtt még ismeretlen hőfokvezetési tényező értékét. Ezzel kiküszöböljük az időtartomány folyamatos átskalázását. A bevezetett dimenziótlan hőmérséklet pedig kiküszöböli a hőimpulzus ismeretét, azaz nem kell tudnunk, hogy pontosan mennyi energiát közlünk a próbatesttel.

A dimenziótlan hőátadási tényezőt a mérési adatsor alapján lehet illeszteni, a dimenziósra való átszámoláshoz azonban szükség van a test fajlagos hőkapacitására is. Mivel a dimenziós hőátadási tényező nem keresett paraméter, így ez nem okoz hiányosságot. Szintén megjegyezzük, hogy a dimenziótlan hőfokvezetési tényező és hőátadási tényező együtt meghatározzák a megoldást, így az, hogy mennyivel vagyunk 1 alatt, az egy kiadódó paraméter, de csakis abban az esetben, ha a mért adatsort azzal a modellel



3. ábra. A tipikusnak tekinthető paraméterekre vonatkozó exponenciális lecsengések Fourier, illetve GK-s esetben. Az x_F jelöli a Fourier-hoz, az x_1 és x_2 kitevők pedig a GK-modellhez tartoznak. (*Typical exponential decay for Fourier and GK heat equations. Furthermore, x_F denotes the Fourier exponent, and x_1 and x_2 are the exponents of the GK equation.*)

illesztjük, ami tényleg leírja a várt viselkedést. Ez azt jelenti, hogy ha a minta Fourier-s módon viselkedik, így a mérési adatsor kiértékelhető a Fourier-egyenlettel, akkor a maximális hőmérséklet kiadódó. Ha a próbatest nem-Fourier (azaz GK) módon viselkedik, akkor ez a feltetelezés már nem áll fenn a Fourier-egyenlet esetén, de a GK-egyenlet esetén viszont igen. A pontosabb algoritmust pedig alább ismertetjük.

Összesítve, a dimenziótlan egyenletek a következők:

$$\partial_t T + \partial_x q = 0, \quad (4a)$$

$$q + \alpha \partial_x T = 0, \quad (4b)$$

$$\tau_q \partial_t q + q + \alpha \partial_x T - l^2 \partial_{xx} q = 0. \quad (4c)$$

ahol a kalapos jelölést elhagyjuk, és a következőkben csak dimenziótlan mennyiségekkel foglalkozunk, ahol ettől eltérünk, azt külön jelöljük a mértékegység feltüntetésével.

4.2 Időskálák

A kiértékelést alapvetően a különböző időskálák felismerése és azok szeparálása segíti. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy a hűlés általában lényegesen lassabb folyamat, mint a hővezetési rész, vagyis bár a hűlés befolyásolja a mérés elejét, de a mérés végi adatokban már a hővezetés sokkal kevésbé játszik szerepet. Ez megengedi nekünk, hogy a hőátadási tényezőt meg tudjuk becsülni a mérés végi adatsorból, és utána ezt figyelembe tudjuk venni a mérés eleji adatsor kiértékelésénél. A 3. ábra a tipikusnak tekinthető paraméterekre vonatkozó exponenciális lecsengéseket mutatja, ahol az időskálák elválása már látványos.

Fourier-s esetben tehát két időskálával dolgozunk, egy hővezetés és egy hűlés van jelen. GK-s esetben pedig három időskálát veszünk figyelembe, két hővezetést és egy hűlést. Erre építve pedig már ki lehet dolgozni olyan becslési módszereket, amelyek közelítően képet adnak a paraméterek nagyságrendjéről, és ahonnan tovább lehet finomítani a paraméterek értékét. A Fourier-egyenlet esetén a hőfokvezetési

tényezőt és a hőátadási tényezőt az alábbi módon lehet becsülni:

$$\alpha_F = 1.38 \frac{L^2}{\pi^2 t_{1/2}}, \quad \hat{h} = -\frac{\ln(\hat{T}_2/\hat{T}_1)}{\hat{t}_2 - \hat{t}_1}, \quad (5)$$

ahol az α hőfokvezetési tényezőt dimenziósan kapjuk meg, a minta L vastagsága ismert (mérhető), a $t_{1/2}$ pedig a félmagassághoz tartozó időpont másodpercben mérve. Ezzel szemben, ahogy korábban hangsúlyoztuk, a hőátadási tényezőt dimenziótlan alakban tartjuk, így annak becsléséhez csak dimenziótlan paramétereket használunk. A GK-egyenlet esetén az eljárás analóg módon működhet, viszont ott a két hővezetési időskála jelentősen bonyolítja a becslésre szolgáló képleteket, így azok közlésétől most eltekintünk, a részleteket a [4] publikáció tartalmazza. Ezek tehát csak becslésre vonatkozó képletek, amelyek nem zárják ki további időskálák meglétét. Természetesen, minél több időskála van jelen egy adott próbatesten belül, annál pontatlanabb lesz a becslés, akár a Fourier-n, akár a GK-egyenleten alapuló eljárást vesszük alapul.

4.3 Paraméterek iteratív meghatározása

Az iteratív eljárás alatt azt értjük, hogy az adott paraméterterben keressük azokat a paramétereket, amelyek a teljes idősor egészére a lehető legjobban illesztik az adott modellt. Ez nem egyenértékű azzal, hogy a fizikailag legjobb illesztést valósítjuk meg. Erre jó példa az, amikor a Fourier-egyenletet szeretnénk illeszteni egy olyan adatsorra, amiről csak az illesztés után derül ki, hogy nem magyarázható teljes egészében a Fourier-egyenlettel.

Ekkor ugyanis bár lehet, hogy R^2 szempontból megvalósítjuk az elérhető legjobb illesztést, de az nem feltétlen tükrözi a fizikai elvárásaink. A Fourier-, valamint a GK-egyenletek közötti különbség pedig újfent az időskálákra vezethető vissza. A természetes elvárás az, hogy a kezdeti jelentős tranziens hatások elmúlásával a hővezetési mechanizmusokból adódó különbségek kiátlagolódnak, és ha a folyamat kellően lassú, akkor nem látunk különbséget a két különböző modell által jósolt hőmérséklet-idő adatokban. Ezt a jelenséget hívjuk Fourier-rezonanciának, ami a GK-egyenlet T -reprezentációjából vehető észre:

$$\left(\partial_t T + \alpha \partial_{xx} T\right) + \tau \partial_t \left(\partial_t T + \frac{l^2}{\tau} \partial_{xx} T\right) = 0, \quad (6)$$

amiben a Fourier-egyenlet, valamint annak időderiváltja is jelen van a GK-egyenletben, így amikor $\alpha = l^2/\tau$, akkor pont a Fourier-egyenlet megoldását kapjuk vissza. Ezt a tulajdonságot kísérletileg is látjuk, és a modell paramétereiből pedig az adódik, hogy

$$\alpha_F = \frac{1}{2} \left(\alpha_{GK} + \frac{l^2}{\tau} \right), \quad (7)$$

vagyis a Fourier-egyenlet által adódó hőfokvezetési tényező a GK-egyenlet paramétereinek átlagaként jelentkezik, ami tehát az időskálák kiátlagolódását mutatja. Emiatt, amikor globálisan, a teljes idősor egészére keresünk egy "fizikailag helyes" Fourier-illesztést egy nem-Fourier-s adatsoron, akkor a hűlési szakasz adódik, mint erős kényszer, a hőfokvezetési tényező pedig ehhez képest fog egy optimális értékre konvergálni.

4.3.1 Érzékenységi függvények

Az iteráció alapját az úgynevezett érzékenységi függvények adják, azaz

$$S_{p_i,t} = \frac{\partial y}{\partial p_i}, \quad y = y(p_i, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (8)$$

amelyben $y(p_i, t)$ egy tetszőleges idősort jelöl, esetünkben hőmérsékletet, amely függ N darab p_i paramétertől. Tehát az S_{p_i} érzékenységi függvény megadja, hogy egy adott függvény egy adott paraméter változtatására az időben hogyan módosítja a prediktálni kívánt y függvényt. Ez nem csak hőmérséklet-idő esetén érvényes, hanem teljesen általános módon alkalmazható módszertan. Érdemes megemlíteni még a redukált érzékenységi függvényeket is,

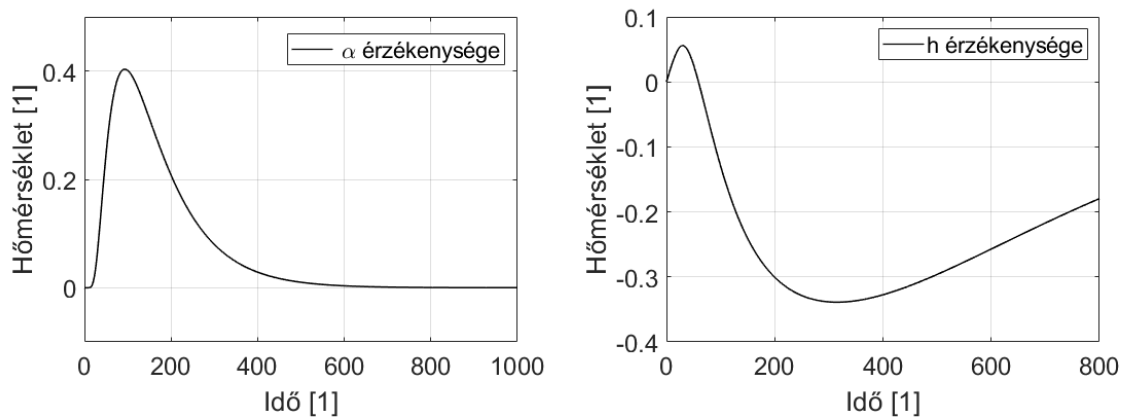
$$\hat{S}_{p_i,t} = p_i \frac{\partial y}{\partial p_i}, \quad y = y(p_i, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (9)$$

amely az $\hat{S}$ függvényeket összevethetővé teszi azáltal, hogy azonos dimenzióra hozza őket a p paraméterrel való felszorzással. A [5] irodalom szerint az ökölszabály az, hogy ha az $\hat{S}$ függvények azonosak, vagy közel azonosak, akkor a rájuk vonatkozó paraméterek összefüggőek, így azok együttes illesztése nem lehetséges. Fontos továbbá megjegyezni, hogy így úgynevezett lokális érzékenységet határozunk meg, azaz a paramétertérben kijelölt referencia paraméterhalmaz egy kis környezetében igaz. Az iterációs eljárás során tehát minden egyes paraméterhalmazra újra és újra meg kell határozni az adott érzékenységi függvényeket.

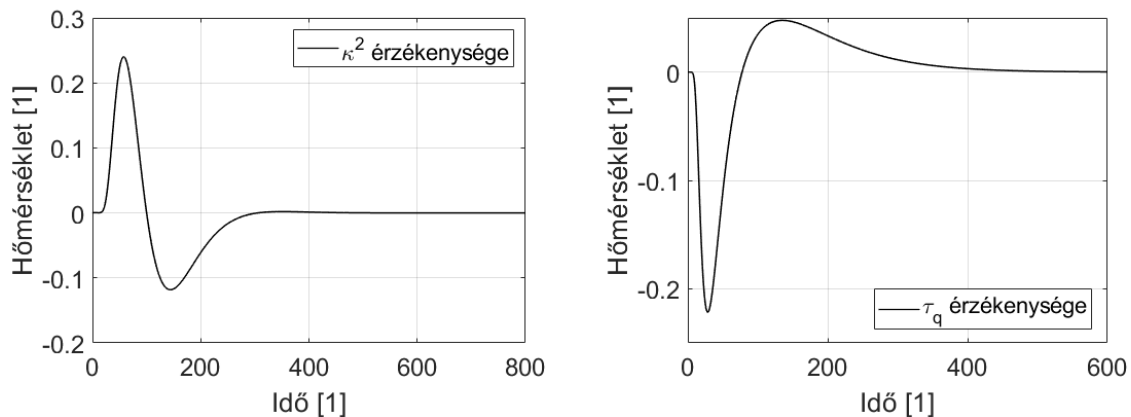
A Fourier-egyenlet esetén az α és h együtthatók a paraméterek, a GK-egyenlet ezeket kiegészíti továbbá a τ és l^2 paraméterekkel. Tekintve, hogy sem a Fourier-, sem a GK-egyenletek megoldása nem lineáris azok paramétereiben az exponenciális időbeli lecsengés miatt, így egy iteratív megközelítésre van szükség, az S_{p_i} érzékenységi függvények analitikus alakban nem, vagy csak különösen összetett formában fejezhetőek ki, így azokat bár a [4] irodalomban közölt analitikus megoldás segítségével gyártjuk le, de az alábbi közelítést felhasználva:

$$S_{p_i,t} = \frac{\partial y}{\partial p_i} \approx \frac{T(p_i + \Delta p_i, t) - T(p_i, t)}{\Delta p_i}, \quad \Delta p_i = 0.05 p_i, \quad (10)$$

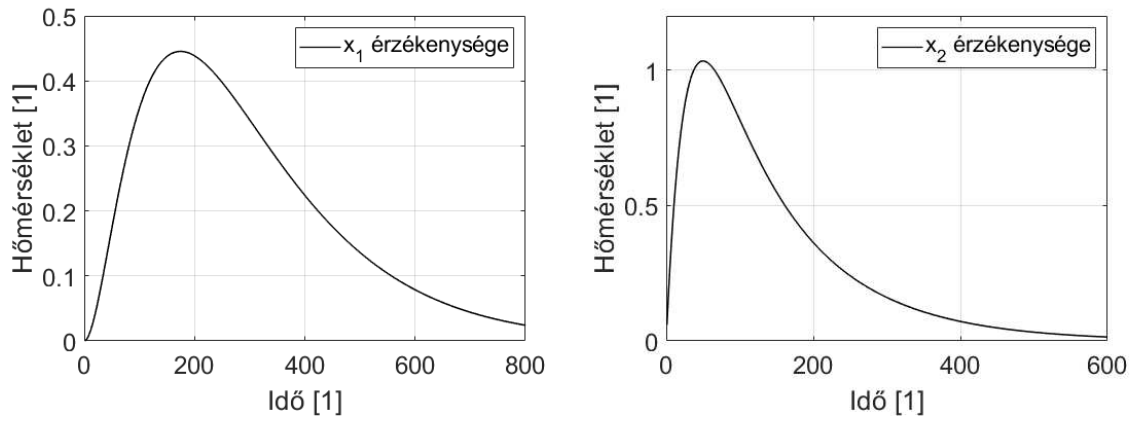
ahol az előrelépő végesdifferenciás közelítéshez hasonló módon kezeljük a parciális deriváltat. A paraméterek között 5%-os különbséget írunk elő. Az érzékenységi függvény nem mutat számottevő eltérést az ez alatti különbségek esetén. A 4-6. ábrák a Fourier-, és a GK-egyenletek esetén szemléltetik a vonatkozó érzékenységi és redukált érzékenységi függvényeket 1-1 tipikus paraméterre vonatkozóan.



4. ábra. A Fourier-egyenlethez tartozó redukált érzékenységi görbék. (*Reduced sensitivities for the Fourier heat equation.*)



5. ábra. A GK-egyenlethez tartozó redukált érzékenységi görbék. (*Reduced sensitivities for the GK heat equation.*)



6. ábra. A GK-egyenlethez tartozó redukált érzékenységi görbék. (*Reduced sensitivities for the GK heat equation.*)

4.3.2 Az iteráció felépítése

Az érzékenységi függvények gyakorlatilag megadják, hogy az adott paraméter az idősor mely intervallumán a legérzékenyebb, emiatt az azon a szakaszon jelentkező eltérések úgymond nagyobb súllyal esnek latba. Tehát az érzékenységi függvényeken alapuló iteráció a modell tulajdonságaira építve keresi az optimális paraméterhalmazt. Ez egy olyan kevésbé előnyös tulajdonsággal párosul, hogy az érzékenységi függvények egymástól több nagyságrenddel is eltérhetnek, ami egyben bizonyos szempontból jellemzi a paraméterek meghatározhatóságát is. Minél kevésbé érzékeny a modell egy adott paraméter változtatására, annál nehezebb annak pontos értékét megtalálni, illetve nem az a paraméter fogja dominálni az illesztéshez felhasznált iterációs eljárást.

Ha minden egyes p_i paraméterhez meghatároztuk azok lokális S_{p_i} érzékenységi függvényét, akkor ezekből össze lehet állítani egy $\mathbf{S}$ érzékenységi mátrixot úgy, hogy $\mathbf{S} = [S_{p_1} S_{p_2} \dots S_{p_N}]$, vagyis annyi oszlopa lesz, ahány paraméterben kívánunk iterálni, és annyi sora, amilyen hosszú az idősor, amire az érzékenységet vizsgáljuk. Jelölje P_k azt illesztendő paramétereket tartalmazó, azok k -edik iterációban vett értékét, így

$$P_{k+1} = P_k + (\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k)^{-1} \mathbf{S}_k^T (T_{\text{mért}} - T(P_k)), \quad (11)$$

amely iteráció nem konvergens, ha az $\mathbf{S}$ mátrix bármely oszlopa lineárisan összefüggő, azaz bármely illesztendő paraméter összefüggő. Az így kapott $T_{\text{diff}} = T_{\text{mért}} - T(P_k)$ hibagörbe pedig a szokásos R^2 -en felül, tovább jellemzi az illesztés és így a paraméterek "jóságát", valamint egy referencia minta felhasználásával magát a mérési összeállítást is.

A T_{diff} bár jellemezhető annak $\bar{\varepsilon}$ átlagával, és σ^2 varianciájával, de az illesztendő paraméterekhez az $\hat{\mathbf{S}}$ redukált érzékenységeken keresztül tudunk visszacsatolni. Ha egy adott paraméter redukált érzékenysége kisebb, mint a T_{diff} hibagörbe (kiemelten, ha a teljes idősor bármely pontján kisebb), vagy annak átlagos értéke, akkor az a paraméter igen rosszul mérhető az adott berendezéssel, mivel a mérésből származó hibák nagyobbak, mint annak a paraméternek a lokális hatása, így a rá vonatkozó hiba is jelentősebb. Ez nem minden paraméterre van így, ezért a paraméterek helyes megválasztása nagy mértékben segítheti az illesztési folyamatot. Természetesen, ha a redukált érzékenység jóval nagyobb a teljes idősor mentén, mint a hibagörbe, akkor a mérés hibái mellett is jól meghatározható az adott paraméter értéke.

Az egyes paraméterekre vonatkozó hibákat a szórásnégyzetből, valamint a redukált érzékenységi függvényekből összeállított úgynevezett "information matrix" segítségével lehet megkapni,

$$\mathbf{C} = \sigma^2 (\hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{S}})^{-1}, \quad \hat{\mathbf{S}} = [\hat{S}_{p_1} \hat{S}_{p_2} \dots \hat{S}_{p_N}]. \quad (12)$$

Ennek további előnye, hogy a $\hat{\mathbf{S}}$ mátrix egyértelműen a felhasznált modellnek egy jellemzője, és a nagyobb érzékenységi amplitúdók pedig egyben fel is nagyíthatják a mérési hibákat. Ezek együtteseként a $\mathbf{C}$ mátrix főátlóinak gyöke pedig paraméterenként megadja a relatív standard eltérést. Természetesen az összes vonatkozó érzékenységi függvényt az iteráció végén megkapott P paraméterhalmazra kell meghatározni.



7. ábra. Szársomlyói mészkő formáció (balra), Szászvári formáció (jobbra). (*Szársomlyó limestone formation (left), Szászvári formation (right).*)

2. táblázat. A Szársomlyói mészkő formáció iterációs úton illesztett termikus paramétereinek összefoglalása. (*The iteratively fitted parameters for the Szársomlyó limestone formation.*)

	Fourier	Guyer-Krumhansl			Hibaértékek		
	α_F	α_{GK}	τ_q	κ^2	D_1	α	τ_q
	$10^{-7} [\frac{m^2}{s}]$	$10^{-7} [\frac{m^2}{s}]$	[s]	$10^{-6} [m^2]$	$\pm 10^{-9} [\frac{m^2}{s}]$	$\pm 10^{-9} [\frac{m^2}{s}]$	$\pm 10^{-2} [s]$
2 mm	5,55	4,19	1,79	1,20	1,67	1,07	2,48
2,15 mm	10,2	7,44	1,13	1,14	3,62	2,09	1,46
2,85 mm	10,7	-	-	-	-	1,91	-
3,85 mm	10,3	-	-	-	-	1,70	-

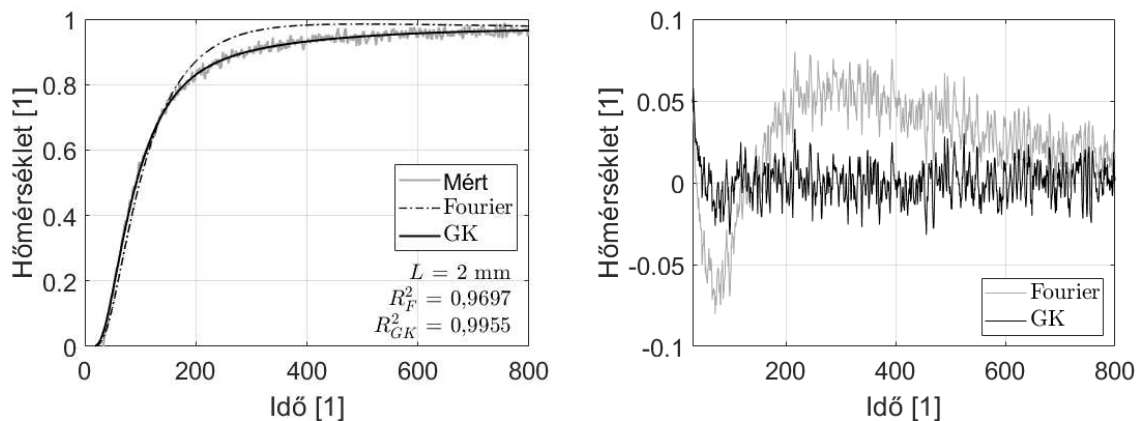
5 KÖZETMINTÁK TERMIKUS VISELKEDÉSE

A módszertan ismeretében pedig nézzük meg két kőzettípus esetén, hogyan működik a kiértékelési eljárás, a Szársomlyói és a Szászvári mészkő formációt választjuk. Az illesztett paramétereknek az α , τ_q , valamint az $D_1 = l^2/\tau_q$ kombinációkat választjuk, mivel a D_1 érzékenysége a τ_q paraméterhez közelebb van, mint az l^2 -é, ami segíti az iteráció konvergenciáját.

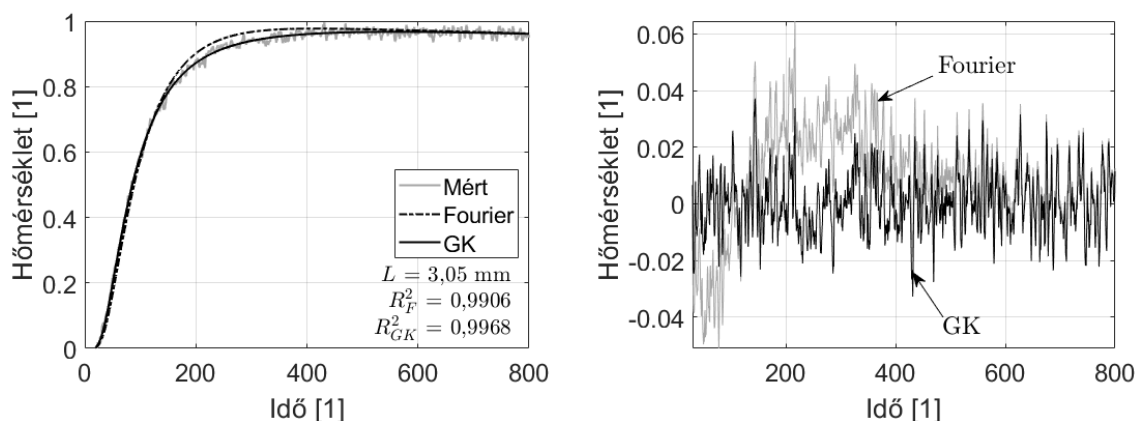
A mintákat a Kőmérő Kft. gyártotta, mivel a szükséges infrastruktúra és technológia ott áll rendelkezésre. Egy vékony 1,9 mm vastag kőzetminta elkészítése nagy kihívást jelent például a törékenysége miatt, így minden vastagságú kőzetből egy áll csak rendelkezésünkre. Ezért hangsúlyozzuk, hogy a pontos termikus paraméterek meghatározásához több, azonos méretű mintára lenne szükség.

A korábban már leírt, és egy korábbi kiértékelési eljárással már kiértékelt mintákat az iteratív úton történő eljárással újból kiértékeltük. Az illesztések, illetve a mért hőmérséklet és az illesztett görbék közötti különbség a 8. ábrán látható. A [4] cikkben közölt eredményeket összehasonlítva az újabb illesztésekkel (2. táblázat) a Szársomlyói mészkő formáció esetében az tapasztalható, hogy a Fourier és a GK egyenletek által adott hőfokvezetési tényezők kisebbek, azonban nem sokban térnek el a korábbi kiértékelés paramétereitől. A GK paraméterek viszont jelentősen nagyobb értéket adnak, mint a korábbi illesztések során. A 2,85 mm és 3,85 mm vastagságú kőzetek az újabb kiértékeléssel sem mutattak GK-effektust, és az illesztéssel kapott hőfokvezetési tényezők is kis mértékben térnek el a korábban közölt értékekhez képest.

A Szászvári minták esetében ugyanezen változás figyelhető meg (3. táblázat). Az illesztések, illetve a mért hőmérséklet, és az illesztett görbék közötti különbség a 9. ábrán látható. A hőfokvezetési tényezők kisebb értéket vesznek fel a 3,05 mm-es és 3,8 mm-es minták esetében, a GK-hoz tartozó paraméterek (τ_q és κ^2) azonban nagyobb értéket adtak az iteratív úton történő eljárásban.



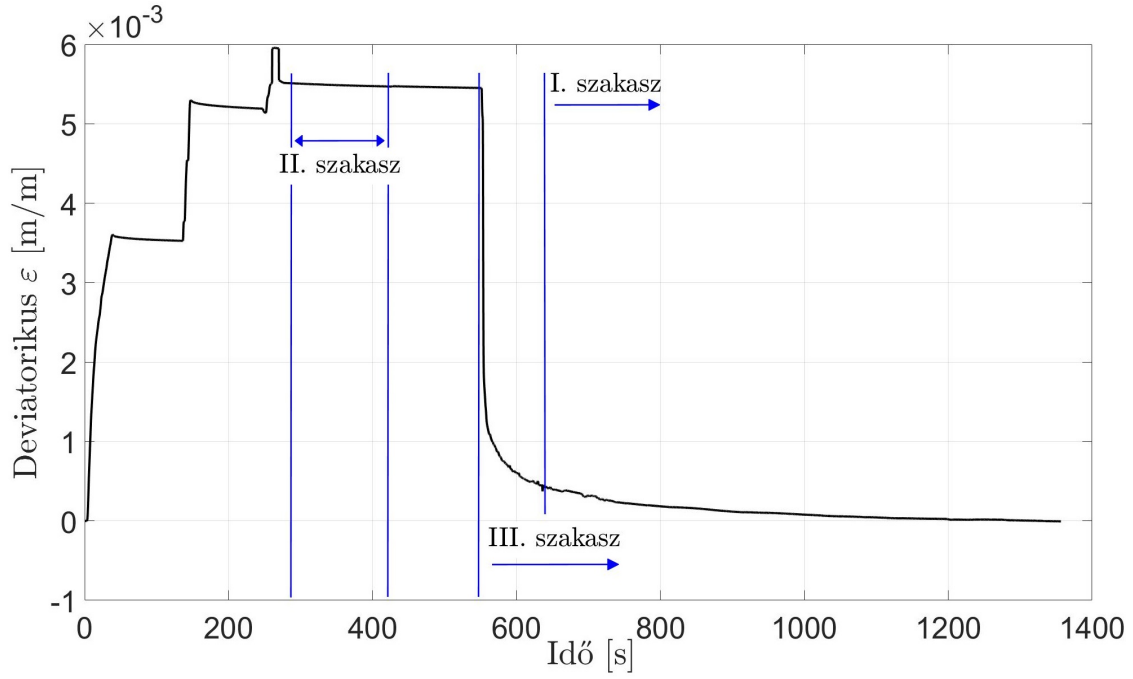
8. ábra. Szársomlyói mészkő formáció kiértékelése és a kiértékelési görbe, valamint a mért hőmérséklet különbsége. (The evaluation of the Szársomlyói limestone formation and the fitted curve, together with the corresponding temperature differences.)



9. ábra. Szászvári mészkő formáció kiértékelése és a kiértékelési görbe, valamint a mért hőmérséklet különbsége. (The evaluation of the Szászvári limestone formation and the fitted curve, together with the corresponding temperature differences.)

3. táblázat. A Szászvári mészkő formáció iterációs úton illesztett termikus paramétereinek összefoglalása. (The iteratively fitted parameters for the Szászvári limestone formation.)

	Fourier	Guyer-Krumhansl			Hibaértékek		
	α_F	α_{GK}	τ_q	κ^2	D_1	α	τ_q
	$10^{-7} [\frac{m^2}{s}]$	$10^{-7} [\frac{m^2}{s}]$	[s]	$10^{-6} [m^2]$	$\pm 10^{-9} [\frac{m^2}{s}]$	$\pm 10^{-9} [\frac{m^2}{s}]$	$\pm 10^{-2} [s]$
3,05 mm	12,9	10,3	1,47	2,25	3,96	2,35	2,45
3,8 mm	8,67	8,27	1,49	1,47	4,42	1,42	4,10
3,9 mm	12,2	-	-	-	-	1,86	-



10. ábra. Az adott alakváltozás-idő adatsor, jelezve, hogy mely szakaszokat használjuk fel és milyen sorrendben a paraméterek meghatározására. (*The given deformation-time history, indicating the sections and their orders used in the iterative evaluation procedure.*)

6 REOLÓGIAI ALKALMAZÁS

Az előzőekben bemutatott módszertan gyakorlatilag teljes egészében átültethető más területekre is, ebben az esetben egy reológiai példát tekintünk. Habár a kőzetek általában erős reológiai effektusokat mutatnak, most mégsem egy kőzetmintán gyakorolunk, hanem egy PA6 jelű poliamid próbatestre vonatkozó adatokat mutatjuk be. Ennek az az oka, hogy magának a módszertannak a demonstrációja a célunk, nem pedig a kőzetekre jellemző összetettebb viselkedés leírása. Tekintsük a 10. ábrán látható alakváltozás időfüggését, amely a próbatest lépcsős felterhelését, majd gyors leterhelését mutatja.

Tegyük fel, hogy a Poynting-Thomson-Zener-modellt paramétereit szeretnénk meghatározni, azaz a

$$\tau d_t \sigma(t) + \sigma(t) = E \varepsilon(t) + \hat{E} d_t \varepsilon(t) \quad (13)$$

egyenletben a τ , E , és $\hat{E}$ paraméterek az ismeretlenek. Esetünkben csak a deviatorikus rész hosszirányú komponensének a paramétereit határozzuk meg, így a σ feszültségtenzor és az ε alakváltozás-tenzor esetén ezeket külön nem jelöljük. A 10. ábrán a szakaszok azokat az idősor intervallumokat mutatják, amilyen sorrendben azokat felhasználjuk a paraméterek meghatározására. Az egyes szakaszokra a következő feltételezéseket és állításokat fogalmazzuk meg:

- I. szakasz: feltesszük, hogy a leterhelés után a testre ható erő megszűnik, a feszültség zérus, így az adott adatsorra való illesztésnél az $E/\hat{E}$ paraméterkombináció meghatározható a

$$0 = E \varepsilon(t) + \hat{E} d_t \varepsilon(t) \quad (14)$$

egyenlet felhasználásával.

- II. szakasz: feltesszük, hogy a feszültség konstans, azaz

$$\sigma \frac{1}{\hat{E}} = \frac{E}{\hat{E}} \varepsilon(t) + d_t \varepsilon(t) \quad (15)$$

megoldásából a $\hat{E}$ paramétert tudjuk illeszteni. Ebből megkapjuk az E Young-modulust is.

- III. szakasz: ekkor sem a feszültség, sem annak időderiváltja nem nulla, így

$$\tau d_t \sigma(t) + \sigma(t) = E \varepsilon(t) + \hat{E} d_t \varepsilon(t) \quad (16)$$

egyenlet megoldásából τ illeszthető. Ehhez azonban szükség van arra, hogy a feszültségre, és így annak időderiváltjára egy olyan feltevést adjunk meg, amivel az egyenlet baloldala megadható, és a kísérlet szempontjából is reális. Tekintsük a $\sigma(t) = \sigma_0 \exp(\frac{t-t_0}{r})$ függvényt, ahol az r egy olyan paraméter, ami azt a karakterisztikus időskálát adja meg, ami alatt a próbatest tehermentesült. Az adatsor alapján ezt válasszuk meg $r = 25$ másodpercnek.

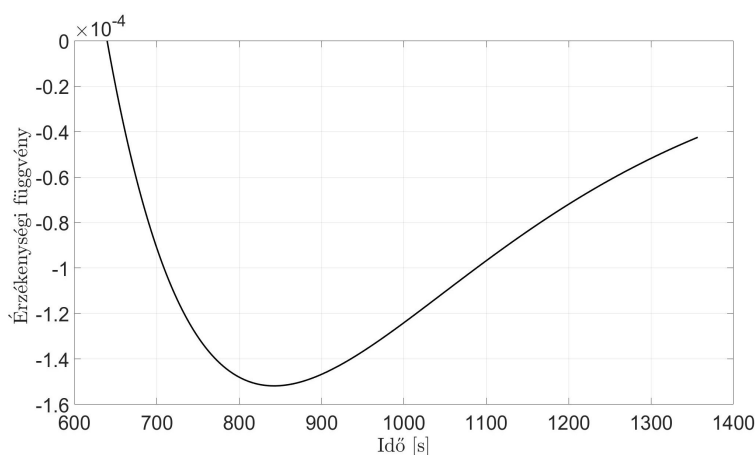
Ezekkel a feltevésekkel mindhárom szakaszra vonatkozó leíró egyenletek analitikusan előállíthatóak, így az érzékenységvizsgálat nem kívánja meg a differenciálegyenletek analitikus megoldását, de a (10) közelítést viszont kihasználjuk a paraméterek 1 %-os eltéréseivel definiálva. Vegyük sorra az egyes szakaszokat.

6.1 I. szakasz

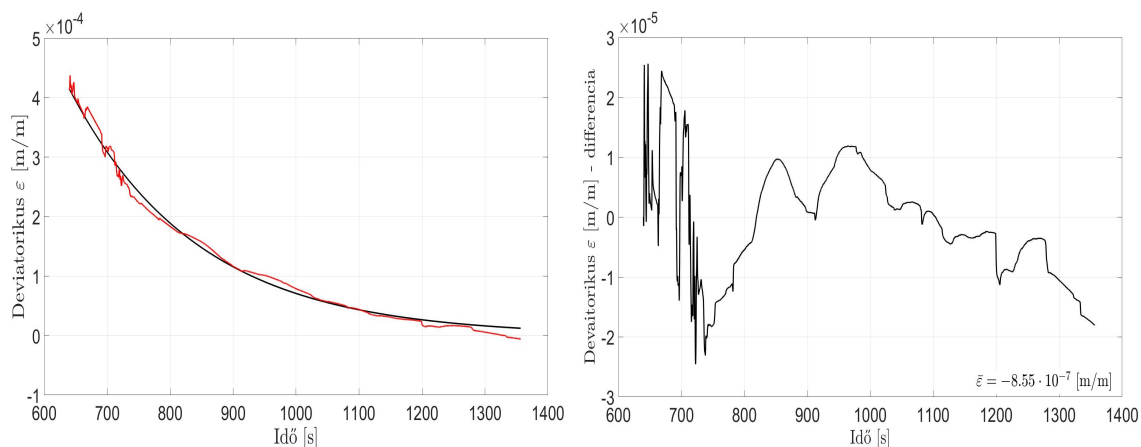
Erre az intervallumra vonatkozó analitikus megoldás

$$\varepsilon(t) = C_0 \exp(-(t - t_0)E/\hat{E}), \quad (17)$$

amiben a t_0 kezdeti időpillanatot 640 másodpercnek választjuk meg, C_0 pedig az ahhoz tartozó $\varepsilon(640)$ érték, ami az adatsorból adott. A 11-12 ábrák mutatják az érzékenységi függvényt, valamint az illesztett görbét a hozzá tartozó hibagörbével együtt. Az $E/\hat{E}$ paraméterre azt találjuk, hogy $E/\hat{E} = 0.00491 \pm 0.0014$.



11. ábra. Az $E/\hat{E}$ paraméterhez tartozó érzékenységi függvény. (The sensitivity curve for the $E/\hat{E}$ parameter.)



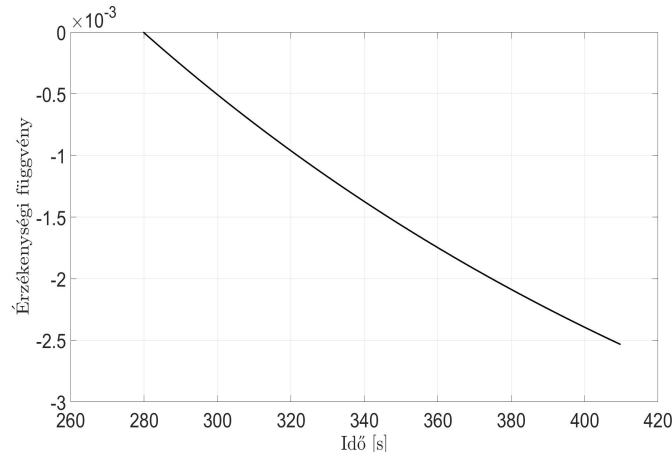
12. ábra. Az illesztett görbe és a hozzá tartozó hibagörbe. (The fitted curve and the related error diagram.)

6.2 II. szakasz

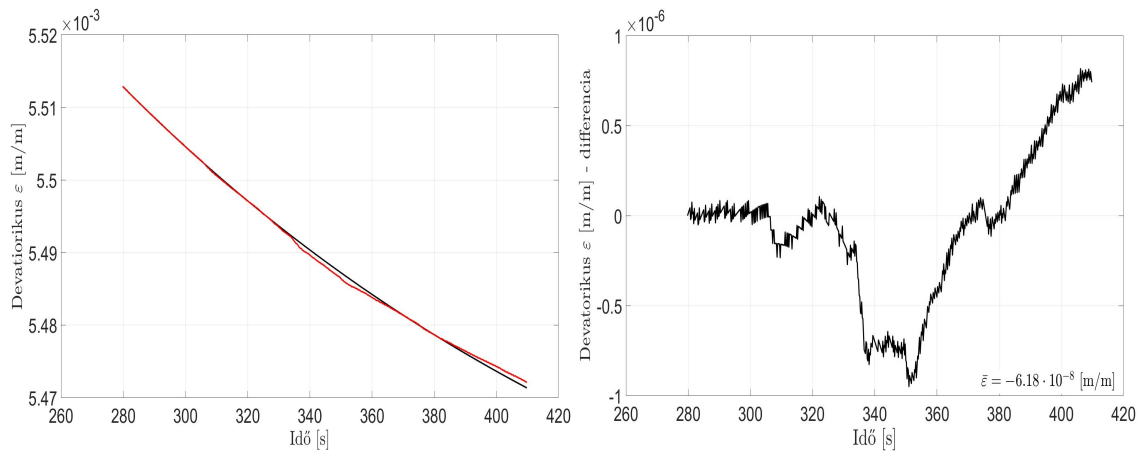
A feszültséget a 15 kN-os terhelésből, valamint a próbatest 46 mm-es átmérőjéből tekintjük meghatározottnak. Így vonatkozó differenciálegyenlet megoldása

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\hat{E} \frac{E}{\hat{E}}} e^{-t \frac{E}{\hat{E}}} \left(\sigma_0 e^{t \frac{E}{\hat{E}}} - \sigma_0 e^{t_0 \frac{E}{\hat{E}}} + \hat{E} \varepsilon(t_0) \frac{E}{\hat{E}} e^{t_0 \frac{E}{\hat{E}}} \right), \quad (18)$$

szintén adott $t_0 = 280$ s időpillanatban vett $\varepsilon(t_0)$ kezdeti feltétel figyelembevételével, ahol tehát $\hat{E}$ az illesztendő paraméterünk. Az intervallumot 410 s-ig vesszük figyelembe, és $\hat{E} = 338.91 \pm 0.1$ GPas adódik, így $E = 1.66$ GPa, ami modulus érték reális, mivel az irodalom szerint ennek értéke 0.8 és 2 GPa között változhat.



13. ábra. Az $\hat{E}$ paraméterhez tartozó érzékenységi függvény. (The sensitivity curve for the $\hat{E}$ parameter.)



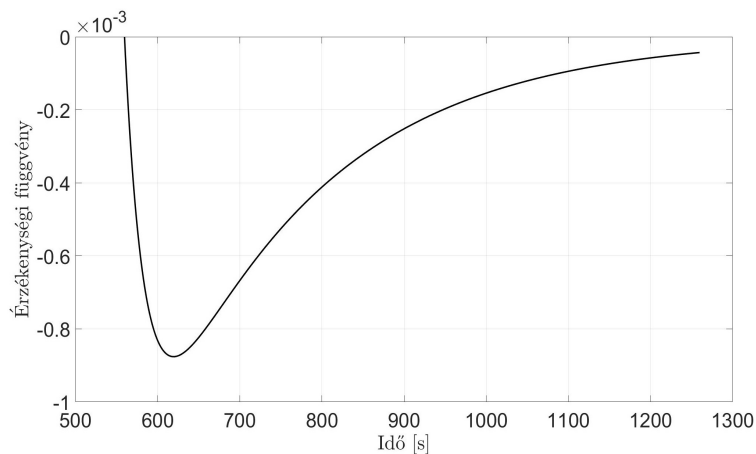
14. ábra. Az illesztett görbe és a hozzá tartozó hibagörbe. (The fitted curve and the related error diagram.)

6.3 III. szakasz

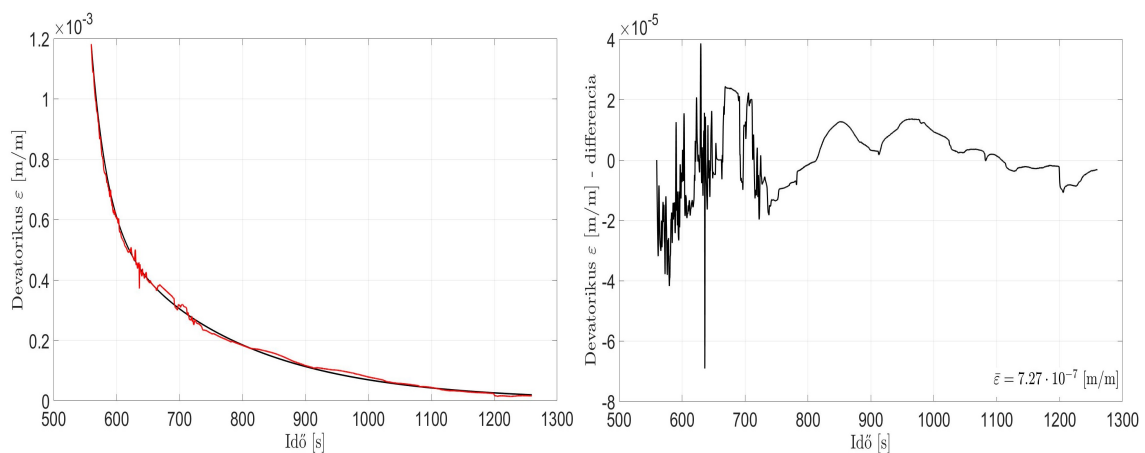
A $\sigma(t) = \sigma_0 \exp(\frac{t-t_0}{r})$ függvényt, valamint az $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$ kezdeti feltételt figyelembe véve, a

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\hat{E} - Er} e^{-\left(\frac{E}{\hat{E}} + \frac{1}{r}\right)t} \left(-e^{\frac{Et}{\hat{E}} + \frac{t_0}{r}} \sigma_0 (r - \tau) + e^{\frac{t}{r} + \frac{Et_0}{\hat{E}}} (\hat{E} \varepsilon_0 - E \varepsilon_0 r + r \sigma_0 - \sigma_0 \tau) \right) \quad (19)$$

megoldást kapjuk, amiben τ az illesztendő paraméter, ahol $t_0 = 560$ s, és a teljes adatsor végéig futtatjuk az időt. Így kapjuk, hogy $\tau = 44.11 \pm 4.23 \cdot 10^{-4}$ s, az illesztéshez tartozó kiegészítő információkat a 15-16 ábrák mutatják.



15. ábra. A τ paraméterhez tartozó érzékenységi függvény. (*The sensitivity curve for the τ parameter.*)



16. ábra. Az illesztett görbe és a hozzá tartozó hibagörbe. (*The fitted curve and the related error diagram.*)

SZERZŐI HOZZÁJÁRULÁS

Fehér Anna: az illesztési eljárás átültetése a Guyer-Krumhansl-egyenletre és annak hővezetési alkalmazása, kézirat és ábrák szerkesztése.

Kovács Róbert: az illesztési iterációs eljárás alkalmazása mechanikai példára, kézirat és ábrák szerkesztése.

HIVATKOZÁSOK

- [1] J. A. Krumhansl. R. A. Guyer. Thermal Conductivity, Second Sound And Phonon Hydromechanic Phenomena In Non-metallic Crystals. *Phys. Rev*, 148, 1966.
- [2] P. Ván R. Kovács. Generalized Heat Conduction In Heat Pulse Experiments. *International Journal of Heat And Mass Transfer*, 83:613–620, 2015.
- [3] T. Fülöp P. Ván. Universality In Heat Conduction Theory: Weakly Nonlocal Thermodynamics. *Ann. Phys.*, 8(524):470–478, 2012.
- [4] A. Fehér R. Kovács. Heterogén anyagok hőimpulzus kísérletének kiértékelési eljárása. *Magyar Energetika*, 29:4 pp. 2-10., 9 p., 2022.
- [5] P. Le Masson et al. Metti 6 Advanced School: Thermal Measurements and Inverse Techniques. Lecture notes. Biarritz, Franciaország, 2015. március 1-6.

Az alakváltozási tenzor előállítása felületen mért elmozdulásjelből

Strain recovery from measured surface displacement

Fülöp Tamás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék; Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, fulop.tamas@gpk.bme.hu

Szücs Mátyás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék; Wigner Fizikai Kutatóközpont, Részecske- és Magfizikai Intézet, Elméleti Fizikai Osztály; Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, szucsmatyas@energia.bme.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: Az alakváltozási állapot kísérleti meghatározását általában nyúlásmérő bélyegekkel végzik. A módszer előnye, hogy a mérés megbízható, átlagolt felületi alakváltozás értékeket eredményez, azonban az alakváltozási tenzor minden független elemének meghatározása bonyodalmas, ehhez több mérőbélyegre van szükség. Ugyanakkor az optikai technológiák egyre pontosabban, napjainkban már mikrométeres nagyságrendben képesek felületen elmozdulást mérni, mely jelekből szintén becsülhető az alakváltozási tenzor 6 független komponense közül 3. Ebben az írásban egy hurokintegrálokra alapuló módszert ismertetünk, melynek alkalmazásával a felületi elmozdulásjelekből egy homogén alakváltozási tenzor elemeire tudunk becslést adni. Módszerünk görbült geometriák esetén egyetlen felületen mért elmozdulásjelből képes az alakváltozási tenzor mind a 6 független elemének meghatározására.

Kulcsszavak: Felületi elmozdulás, alakváltozás, hurokintegrál

ABSTRACT: The experimental determination of deformation state is usually carried out with strain gauges. The advantage of the method is that the measurement results in reliable, averaged surface deformation values, however, the determination of each independent component of the strain tensor is complicated, several gauges are required for this. At the same time, optical technologies are becoming more and more accurate, and today they are already able to measure surface displacements in the order of micrometers, from which signals 3 of the 6 independent components of the strain tensor can also be estimated. In this paper, we present a method based on loop integrals, which can be used to estimate the elements of a homogeneous strain tensor from surface displacement. In case of curved geometries, our method is able to determine all 6 independent components of the strain tensor from displacement measured on a single surface.

Keywords: Surface displacement, strain, loop integral

1 MOTIVÁCIÓ

A kőzetmechanikai gyakorlatban a feszültségi állapot felmérése és meghatározása elengedhetetlen feladat, gondoljunk például alagutak falának megfelelő biztosítására, ehhez kellő pontossággal szükséges ismereni az alagút környezetében fellépő erőket. Ugyanakkor a feszültségi állapot közvetlenül nem mérhető, a kőzet anyagi paramétereinek ismeretében a mérhető alakváltozásokból lehet a feszültségre következtetni. Egy tipikusan ilyen technológia az ASR (Anelastic Strain Recovery) módszer [1, 2, 3], ahol nyúlásmérőbélyegekkel mért alakváltozási idősorokból extrapolálnak vissza egy kezdeti alakváltozási állapotra, amiből a kőzetre meghatározott rugalmas és reológiai együtthatók segítségével lehet becslést adni a feszültségi állapotra. Tehát a kőzETFeszültség meghatározásához elengedhetetlen az alakváltozási állapot megfelelő ismerete.

Hagyományosan az alakváltozás mérése nyúlásmérőbélyegekkel történik, azonban a teljes alakváltozási tenzor meghatározásához több bélyegre is szükség van, ezen felül a bélyegzett felületek megfelelő előkészítése is szükséges. A bélyeges mérések további problémái, hogy a bélyeg elengedheti a felületet, így a továbbiakban már nem mér. Ha alakváltozást nem is, de elmozdulást lehet mérni optikai elven is,

például holografikus interferometria segítségével. Az ilyen módszerek előnye, hogy rendkívüli pontosság érhető el, napjainkban mikrométeres felbontással mikrométeres elmozdulásokat lehet mérni egy felületen, mindhárom koordinátairányban, továbbá a minta nem igényel felületi előkészítést. Ezen módszerek hátránya, hogy a mért elmozdulásadatokból kell meghatározni először az alakváltozási tenzort, majd a feszültséget. Az alakváltozás elmozdulásból történő előállításának több módja is lehet. Jelen írásban egy hurokintegrálokra alapuló módszert mutatunk be, aminek segítségével felületi elmozdulásból határozzuk meg az alakváltozási tenzort.

2 KINEMATIKAI HÁTTÉR

Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk a hurokintegrál módszerhez szükséges kinematikai hátteret. Ez az összefoglaló erősen kivonatolt, a teljes képet az olvasó pl. [4]-ben találja.

2.1 A kontinuum mozgása

Vizsgáljuk egy deformálható test mozgását három dimenziós, euklideszi térünkben, melyet $\mathbb{E}$ -vel jelölünk. Feltételezzük, hogy a test folytonosan kitölti a rendelkezésére álló térfogatot, így a kontinuum elnevezés is használatos. A testet tekinthetjük lokális fizikai tulajdonságokkal rendelkező anyagi pontok összességének, melyet a továbbiakban $\mathcal{B}$ -vel jelölünk. A szokásos kontinuummechanikai tárgyalásnak megfelelően vezessünk be két koordinátarendszert, az egyiket három dimenziós térünk egy tetszőleges pontjához, a másikat pedig a test egy tetszőleges pontjához rögzítve. Előbbit szokás térbeli vagy labor, utóbbit pedig anyagi vagy referencia koordinátarendszernek nevezni. A test egy tetszőleges (anyagi) pontjának helyzetét az anyagi koordinátarendszerből nézve az $\mathbf{R} \in \mathcal{B}$ vektorral jellemezhetjük – mely az anyagi koordinátarendszerből nézve időtől független, hiszen ez a koordinátarendszer együtt mozog és deformálódik az anyaggal –, mely anyagi pont a $t \in \mathbb{T}$ időpillanatban az $\mathbf{r} \in \mathbb{E}$ vektorral jellemzett térpontban tartózkodik, itt $\mathbb{T}$ az időtartamok mértékegységét jelöli. A kontinuum térbeli helyzetének időbeli egymásutánjai a test mozgása, melyet a $\chi : \mathbb{T} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{E}$ leképezéssel adhatunk meg, amit mozgásfüggvénynek nevezzük, így

$$\mathbf{r} = \chi(t, \mathbf{R}). \quad (1)$$

Célszerűen a kezdeti időpillanatban – másképpen egy referencia időpillanatban – a labor és anyagi koordinátákat megegyeztetjük, azaz

$$\mathbf{r}_0 = \chi(t_0, \mathbf{R}) = \mathbf{R}. \quad (2)$$

Tulajdonképpen az (1)-gyel definiált mozgásfüggvény egy változótranszformáció, mellyel az $\mathbf{R} \in \mathcal{B}$ vektorokat az $\mathbf{r} \in \mathbb{E}$ vektorokba képezzük, melyet az

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{R}) = \chi(t, \mathbf{R}) \otimes \nabla_{\mathbf{R}} \quad (3)$$

ún. mozgásgradienssel reprezentálhatunk, ahol $\otimes \nabla_{\mathbf{R}}$ az anyagi koordináták szerint képzett jobboldali gradienst jelöli. A (2)-ben bevezetett konvenciónk szerint

$$\mathbf{F}(t_0, \mathbf{R}) := \chi(t_0, \mathbf{R}) \otimes \nabla_{\mathbf{R}} = \mathbf{1}, \quad (4)$$

itt $\mathbf{1}$ az egységtenzort jelöli. Az $\mathbf{R}$ vektorral jellemzett anyagi pont környezetében az anyagi koordinátarendszerben értelmezett dV és a térbeli dv elemi térfogatok közötti transzformációt a

$$dv(t, \mathbf{R}) = J(t, \mathbf{R})dV(\mathbf{R}) \quad (5)$$

alakban adhatjuk meg, ahol

$$J(t, \mathbf{R}) := \det \mathbf{F}(t, \mathbf{R}), \quad 0 < J(t, \mathbf{R}) < \infty \quad (6)$$

azaz a koordinátatranszformáció Jacobi-determinánsa, melynek pozitív és véges volta azt fejezi ki, hogy egy véges anyagi térfogat a térbeli koordinátákban is véges marad. Továbbá (4) következményeként

$$J(t_0, \mathbf{R}) = 1 \quad \text{és} \quad dv(t_0, \mathbf{R}) = dV(\mathbf{R}). \quad (7)$$

A Jacobi-determinánsra vonatkozó végességi feltétel [ld. (6)-ot] biztosítja továbbá a mozgásfüggvény invertálhatóságát, azaz létezik a $\chi^{-1} : \mathbb{T} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{B}$ ún. inverz mozgásfüggvény, ami azt mutatja meg, hogy a t időpillanatban az $\mathbf{r}$ térpontban mely anyagi pont tartózkodik, azaz

$$\mathbf{R} = \chi^{-1}(t, \mathbf{r}). \quad (8)$$

Az előbbieket alapján szokás értelmezni a kontinuumelméletek két leírási módját:

- Lagrange-i vagy anyagi leírás: a fizikai mennyiségeket az idő és az anyagi koordináták függvényében adjuk meg;
- Euleri vagy térbeli leírás: a fizikai mennyiségeket az idő és a térkoordináták függvényében adjuk meg.

Előbbi tipikusan szilárd közegek, utóbbit pedig folyadékok esetén szokás alkalmazni.

A kontinuum mozgását a kezdeti (referencia) időpillanatban elfoglalt helyzetéhez képest is megadhatjuk, erre szolgál az $\mathbf{u} : \mathbb{T} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{B}$ elmozdulásmező. Előbbi megállapításunk matematikai megfogalmazása

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{R}) = \chi(t, \mathbf{R}) - \chi(t_0, \mathbf{R}) \stackrel{(2)}{=} \chi(t, \mathbf{R}) - \mathbf{R}, \quad (9)$$

melynek kezdeti időpillanatbeli értéke (magától értetődően) (2) alapján

$$\mathbf{u}(t_0, \mathbf{R}) = \mathbf{0}, \quad (10)$$

További vizsgálataink céljából vezessük be a elmozdulás (anyagi) gradiensét:

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{R}) := \mathbf{u}(t, \mathbf{R}) \otimes \nabla_{\mathbf{R}} \stackrel{(9)}{=} \mathbf{F}(t, \mathbf{R}) - \mathbf{1}. \quad (11)$$

2.2 Deformáció és alakváltozás

A kontinuum mozgása – ellenben a merev testekkel – nem homogén, így a test alakjának megváltozását is jellemeznünk kell. Erre szolgálnak a különböző deformáció és alakváltozási tenzorok. Tekintsük az $\mathbf{R}$ vektorral jellemzett anyagi pont környezetében a $d\mathbf{R}$ anyagi vonalelemet, melynek anyagi hossza $dL = \sqrt{d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}}$, iránya az anyagi koordinátarendszerben pedig $\mathbf{N}$, így $d\mathbf{R} = dL\mathbf{N}$. Ezen vonalelem a térbeli koordinátarendszerben a

$$d\mathbf{r}(t, \mathbf{R}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = dL\mathbf{F}(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{N} \quad (12)$$

összefüggéssel határozható meg, melynek hossza

$$dl(t, \mathbf{R}) = \sqrt{d\mathbf{r}(t) \cdot d\mathbf{r}(t)} = \sqrt{d\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^T(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R}} = dL\sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^T(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{N}}, \quad (13)$$

ahol T a transzponáltat jelöli. Szokás továbbá bevezetni a

$$\lambda(t, \mathbf{R}) := \frac{dl(t, \mathbf{R})}{dL} = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^T(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{N}} \quad (14)$$

fajlagos ívhosszat, illetve a

$$\mathbf{C}(t, \mathbf{R}) := \mathbf{F}^T(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{R}) \quad (15)$$

Green-féle deformációs tenzort, mely a kezdeti időpillanatban (4) alapján

$$\mathbf{C}(t_0, \mathbf{R}) = \mathbf{1}. \quad (16)$$

Ezek alapján a fajlagos ívhossz a

$$\lambda(t, \mathbf{R}) = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{N}} \quad (17)$$

alakban is megadható. Bevezetve az anyagi vonalelem $d\mathbf{r}$ térbeli megfelelőjéhez tartozó $\mathbf{n}$ térbeli irányt

$$d\mathbf{r}(t, \mathbf{R}) = d\mathbf{l}(t, \mathbf{R})\mathbf{n}(t, \mathbf{R}), \quad (18)$$

melyből az anyagi és térbeli koordináta-rendszerben értelmezett irányok között a (12) és (14) alapján az

$$\mathbf{n}(t, \mathbf{R}) = \frac{1}{\lambda(t, \mathbf{R})} \mathbf{F}(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{N} \quad (19)$$

összefüggés áll fenn.

Történelmileg a test alakjának megváltozását egy anyagi vonalelem hosszának fajlagos megnyúlásával, többféleképpen szokás értelmezni. Mi most a Green–Lagrange-féle

$$\varepsilon(t, \mathbf{R}) := \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{l}^2(t, \mathbf{R}) - dL^2}{dL^2} \quad (20)$$

definícióra szorítkozunk, ami (14) alapján

$$\varepsilon(t, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \left(\lambda^2(t, \mathbf{R}) - 1 \right) = \frac{1}{2} [\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{N} - 1] = \frac{1}{2} \mathbf{N} \cdot [\mathbf{C}(t, \mathbf{R}) - \mathbf{1}] \cdot \mathbf{N}. \quad (21)$$

Ezek szerint az $\mathbf{N}$ irányban a fajlagos megnyúlás az

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{R}) := \frac{1}{2} [\mathbf{C}(t, \mathbf{R}) - \mathbf{1}] = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T(t, \mathbf{R})\mathbf{F}(t, \mathbf{R}) - \mathbf{1}] \quad (22)$$

Lagrange-féle alakváltozási tenzor segítségével számítható, melynek kezdeti időpillanatbeli értéke (4) szerint

$$\mathbf{E}(t_0, \mathbf{R}) = \mathbf{0}. \quad (23)$$

A Lagrange-féle alakváltozási tenzort a (11)-ben definiált $\mathbf{G}$ elmozdulásgradiens segítségével az

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} [\mathbf{G}(t, \mathbf{R}) + \mathbf{G}^T(t, \mathbf{R}) + \mathbf{G}(t, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{G}^T(t, \mathbf{R})] \quad (24)$$

alakban is megadhatjuk.

2.3 Kis alakváltozások

A műszaki gyakorlatban az elmozdulás gradiens sokszor „elegendően kicsi”, azaz matematikailag a

$$\|\mathbf{G}(t, \mathbf{R})\| = \sqrt{\mathbf{G}(t, \mathbf{R}) : \mathbf{G}(t, \mathbf{R})} \ll 1 \quad (25)$$

reláció érvényes, itt : másodrendű tenzorok mindkét indexében való összejtését jelenti, azaz az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ másodrendű tenzorok esetén $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$, ahol pedig tr a másodrendű tenzor nyoma. (11) szerint ekkor

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{R}) \approx \mathbf{1}, \quad (26)$$

így (3) és (1) következményeképpen

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{R}, \quad (27)$$

ami szerint az anyagi és térbeli leírás jó közelítéssel megegyezik, így a továbbiakban nem különböztetjük meg ezeket, továbbá $\nabla_{\mathbf{R}} \approx \nabla_{\mathbf{r}} =: \nabla$.

Ezek szerint (24)-ben a másodrendű tag az elsőrendű tagokhoz képest elhanyagolható, így bevezetjük az

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r}) := \frac{1}{2} [\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}(t, \mathbf{r})] = [\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) \otimes \nabla]^{\text{Sym}} = \mathbf{G}^{\text{Sym}}(t, \mathbf{r}) \quad (28)$$

(infinitézimális) alakváltozási tenzort, mely a Lagrange-féle alakváltozási tenzor linearizáltja, tehát $\mathbf{E}(t, \mathbf{R}) \approx \boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r})$, $^{\text{Sym}}$ pedig egy másodrendű tenzor szimmetrikus részét jelöli. (28)-at a rugalmasságtan kis alakváltozási elmélete geometriai egyenletnek is szokta nevezni.

3 A HUOKINTEGRÁLOK MÓDSZERE

A közetmechanikai mérési gyakorlatnak megfelelően kis alakváltozásokat feltételezünk.

Tételezzük fel, hogy adott egy test, aminek felszínén (vagy felszínének egy részén) valamilyen módszerrel mérjük az elmozdulásmezőt. Vezessük be a következő koordinátázást:

1. Válasszuk ki a felület egy tetszőleges pontját, melyet a továbbiakban O -val jelölünk. A felület O pontjában értelmezett érintősíkját az x és y derékszögű koordináták feszítik ki.
2. A z koordináta merőleges az érintősíkra és áthalad az O ponton, viszont nullpontját szabadon választhatjuk meg (pl. hengeres minta esetén célszerű a henger szimmetriatengelyét választani, mint a z koordináta nullszintjét).

A vizsgált felületet egyértelműen jellemzik az x és y koordináták, ugyanis a felület z koordinátáját a test geometriájának ismeretében a $\hat{z} = \hat{z}(x, y)$ függvénnyel kifejezhetjük. Vezessük be a a felület koordinátázására a

$$\mathcal{Z} : (x, y) \mapsto (x, y, \hat{z}(x, y)) \quad (29)$$

hozzárendelést.

A test felületén a mérésből ismert elmozdulásmezőt jelöljük $\tilde{\mathbf{u}}$ -val, ami a teljes testre értelmezett

$$\mathbf{u}(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} u_x(t, x, y, z) \\ u_y(t, x, y, z) \\ u_z(t, x, y, z) \end{pmatrix} \quad (30)$$

elmozdulásmező felületre vett leszűkítése, amit matematikailag az $\mathbf{u}$ elmozdulásmező $\mathcal{Z}$ felületi koordinátázással való kompozíciójaként fejezhetünk ki, azaz

$$\tilde{\mathbf{u}}(t, \{x, y\}) = \mathbf{u} \circ (\text{Id}_{\mathbb{T}}, \mathcal{Z}) = \begin{pmatrix} u_x(t, x, y, \hat{z}(x, y)) \\ u_y(t, x, y, \hat{z}(x, y)) \\ u_z(t, x, y, \hat{z}(x, y)) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

itt $\text{Id}_{\mathbb{T}}$ az időtartamok mértékegyenesén értelmezett identitás leképezést jelöli. A felületi koordináták szerint képzett gradiensre bevezetjük a $\hat{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$ jelölést. A felületi elmozdulásmező felületi gradiense (31) szerint

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{u}} \otimes \hat{\nabla} = (\mathbf{u} \otimes \nabla) (\mathcal{Z} \otimes \hat{\nabla}) = \mathbf{G} (\mathcal{Z} \otimes \hat{\nabla}), \quad (32)$$

amit mátrixreprezentációban a

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (33)$$

alakban adhatunk meg. (32)-vel kapcsolatosan a következő megjegyzéseket tehetjük:

1. Elviekben a felületen mért elmozdulásjelből képzett felületi elmozdulásgradiens az elmozdulásgradiens összes független komponensét tartalmazza. Ha (32) invertálható, akkor $\tilde{\mathbf{G}}$ -ból meghatároz-

ható $\mathbf{G}$. Vezessük be a $\mathbf{Z} := \mathcal{Z} \otimes \hat{\mathbf{V}}$ jelölést. A Moore-Penrose-inverz (gyakran csak pszeudoinverz) gondolatmenetet követve szorozzuk meg (32)-t $\mathbf{Z}^T$ -tal, ekkor

$$\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{Z}^T = \mathbf{G}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T) \quad (34)$$

összefüggésre jutunk. Sajnos $\det \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = 0$, így (34)-ből [ezáltal (32)-ből] $\mathbf{G}$ nem fejezhető ki.

2. Amennyiben a mért felület sík, úgy $\hat{z}(x, y) = \text{konst}$, ekkor

$$\mathcal{Z} \otimes \hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{melynek következtében} \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Ekkor az alakváltozási tenzornak csak 3 független eleme képezhető:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \bullet \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}, \quad (36)$$

melyek a felület síkjába eső megnyúlásokat és szögváltozásokat jellemzik.

Elsőre magától értetődőnek tűnne, hogy az elmozdulásgradienst a felületen a (28) geometriai egyenletből közvetlenül deriválással határozzuk meg. Mivel a mérések véges felbontásúak, azaz diszkrét felületi pontokban ismerjük az elmozdulásmező értékeit, így az elmozdulásgradiens meghatározásához numerikus deriválások elvégzésére van szükség, ami általában nagy zajjal (hibával) terhelt. Természetesen a zajos eredmény szűrésére is van lehetőség, vagy akár a diszkrét elmozdulásmezőt is simíthatjuk, interpolálhatjuk, amivel már folytonosan képezhetők a deriváltak. Ezen módszerek alkalmazása viszont nagy körülményt igényel. Mindezekon túl, az elmozdulásgradiens komponensei csak nagyon speciális esetekben lesznek homogének, így például az anyagi együttthatók kísérleti meghatározásához az elmozdulásgradiensből képzett alakváltozási tenzor homogenizálását is el kell végeznünk.

Most egy olyan, hurokintegrálokra alapuló módszert mutatunk be, mellyel az előbbi bonyodalmak mind kiküszöbölhetők, eredményül pedig homogén elmozdulásgradiens komponenseket kapunk. Mindezekon túl, (32) invertálása nélkül, görbült felületek esetén az elmozdulásgradiens (ezáltal az alakváltozási tenzor) minden független komponense meghatározható.

A felület egy P pontjának környezetében az elmozdulásmezőt első rendig Taylor-sorba fejtvé az

$$\hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{u}^P(t) + \mathbf{G}(t, \mathbf{r}^P) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \quad (37)$$

összefüggésre jutunk, ahol $\mathbf{u}^P(t) = \mathbf{u}(t, \mathbf{r}^P)$ magának a P pontnak az elmozdulása. Figyeljük meg, hogy itt az alakváltozási gradiens csak az idő függvénye, mivel a P pontban értékeltük ki, tehát a P pont környezetében homogénnek tekintjük. Vegyük körbe a P pontot egy Γ -val jelölt hurokkal, majd képezzük

- az elmozdulásmező skaláris és vektoriális vonalintegráljait, illetve ívhossz szerinti integrálját:

$$\oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \times d\mathbf{r}, \quad \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) |d\mathbf{r}|, \quad (38)$$

- az elmozdulásmező P pontra vett vektormomentumának skaláris és vektoriális vonalintegráljait, illetve ívhossz szerinti integrálját:

$$\oint_{\Gamma} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \times \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r}, \quad \oint_{\Gamma} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \times \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r})] \times d\mathbf{r}, \quad \oint_{\Gamma} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \times \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r})] |d\mathbf{r}|, \quad (39)$$

- valamint az elmozdulásmező P pontra vett skalármomentumának skaláris vonalintegrálját és ív-

hossz szerinti integrálját:

$$\oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \cdot \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}, \quad \oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \cdot \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] |\mathbf{dr}|. \quad (40)$$

Ezen integrálokat (37) behelyettesítésével értékeljük ki. Az egyszerűség és a praktikus alkalmazások fényében a hurkot egy $a \times b$ nagyságú téglalap éleiként választjuk meg. Sík felület esetén a fenti integrálok eredményei:

$$\frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = (G_{yx} - G_{xy}), \quad (41)$$

$$\frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \times d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -G_{zx} \\ -G_{zy} \\ G_{xx} + G_{yy} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$\frac{1}{2(a+b)} \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) |\mathbf{dr}| = \begin{pmatrix} u_x^P \\ u_y^P \\ u_z^P \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$\frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \times \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] \cdot d\mathbf{r} = -2u_z^P, \quad (44)$$

$$\frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \times \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] \times d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -u_y^P \\ u_x^P \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$\oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \times \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] |\mathbf{dr}| = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} b^2 (3a+b) G_{zy} \\ -a^2 (a+3b) G_{zx} \\ a^2 (a+3b) G_{yx} - b^2 (3a+b) G_{xy} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$\frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \cdot \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -u_y^P \\ u_x^P \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$\oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \cdot \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] |\mathbf{dr}| = \frac{1}{6} \left[a^2 (a+3b) G_{xx} + b^2 (3a+b) G_{yy} \right]. \quad (48)$$

Figyeljük meg, hogy (41), (42), (46) és (48) tartalmazza a 6 meghatározható (G_{xx} , G_{yy} , G_{xy} , G_{yx} , G_{zx} és G_{zy}) elmozdulásgradiens komponenset. Mivel a 4 integrál 8 egyenletet jelent a 6 ismeretlenre, így lehetőségünk nyílik az ellenőrzésre, vagy az elmozdulásgradiens komponensek különböző képpen történő meghatározására.

Tekintsünk most egy R sugarú és L hosszúságú hengert (az utóbbi méret esetünkben lényegtelen), aminek palástjának (görbült felületének) egy részén mérjük az elmozdulást. A henger tengelye essen egybe a felületet koordinátázó x tengellyel, erre merőlegesek az y és a z tengelyek, melyek origói legyenek a henger szimmetriatengelyén. Ekkor a vizsgált felület $\hat{z}$ koordinátája

$$\hat{z}(x, y) = \pm R \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}. \quad (49)$$

Gondoljunk például arra, hogy ha egy kamerával rögzítjük az elmozdulást, akkor csak a henger felét látjuk, így a továbbiakban csak (49) pozitív ágával foglalkozunk. Sőt, távol a szimmetriatengelytől az optikai képek torzulnak, így (49)-et $y = 0$ körül másodrendig sorba fejtve a

$$\hat{z}(x, y) \approx R \left(1 - \frac{y^2}{2R^2} \right) \quad (50)$$

alakot alkalmazzuk. Ha szükséges, a sorfejtésben továbbléphetünk negyed, vagy akár magasabb (páros) rendig is. A hurkot továbbra is egy $a \times b$ nagyságú téglalap éleiként megválasztva a hengerpaláston vett integrálok eredményei:

$$\frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = (G_{yx} - G_{xy}) + \frac{y^P}{R} (G_{xz} - G_{zx}), \quad (51)$$

$$\frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \times d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -G_{zx} \\ -G_{zy} \\ G_{xx} + G_{yy} \end{pmatrix} + \frac{y^P}{R} \begin{pmatrix} -G_{yx} \\ G_{xx} + G_{zz} \\ -G_{yz} \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$\oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) |d\mathbf{r}| = c_{3,1} \begin{pmatrix} u_x^P \\ u_y^P \\ u_z^P \end{pmatrix} + c_{3,2} \begin{pmatrix} G_{xy} \\ G_{yy} \\ G_{zy} \end{pmatrix} + c_{3,3} \begin{pmatrix} G_{xz} \\ G_{yz} \\ G_{zz} \end{pmatrix}, \quad (53)$$

ahol az egyes vektorok együtthatói

$$c_{3,1} = 2a + \frac{b^- \sqrt{-} + b^+ \sqrt{+}}{4R} + R \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right), \quad (54)$$

$$c_{3,2} = \frac{(\sqrt{+} - \sqrt{-}) (b^2 + 4R^2) + y^P (\sqrt{+}b^- + \sqrt{-}b^+)}{12R} - Ry^P \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right), \quad (55)$$

$$c_{3,3} = -\frac{ab^2}{4R} - \frac{2y^P (\sqrt{+} - \sqrt{-}) \left[3b^2 + 2(R^2 - 2(y^P)^2) \right] + b (\sqrt{+} + \sqrt{-}) \left[b^2 + 2(R^2 + 2(y^P)^2) \right]}{64R^2} \\ + \frac{R^2 + 4(y^P)^2}{8} \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right), \quad (56)$$

itt és a továbbiakban pedig a

$$b^- := b - 2y^P, \quad b^+ := b + 2y^P, \quad (57)$$

$$\sqrt{-} := \sqrt{4R^2 + (b^-)^2}, \quad \sqrt{+} := \sqrt{4R^2 + (b^+)^2} \quad (58)$$

jelöléseket alkalmazzuk. Továbbá

$$\frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \times \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] \cdot d\mathbf{r} = -2u_z^P - 2\frac{y^P}{R}u_y^P + \frac{b^2}{R} \left[\frac{1}{24} (G_{xx} - 5G_{yy} + 4G_{zz}) + \frac{3y^P}{8R} G_{yz} \right], \quad (59)$$

$$\frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \times \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] \times d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -u_y^P \\ u_x^P \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y^P}{R} \begin{pmatrix} u_z^P \\ 0 \\ -u_x^P \end{pmatrix} + \frac{b^2}{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{24} (G_{yz} + 2G_{zy}) + \frac{y^P}{8R} (G_{xx} - G_{zz}) \\ \frac{1}{24} (2G_{zx} - 3G_{xz}) + \frac{y^P}{8R} G_{yx} \\ \frac{1}{24} (G_{yx} - 3G_{xy}) + \frac{y^P}{4R} G_{xz} \end{pmatrix}, \quad (60)$$

$$\oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \times \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] |d\mathbf{r}| = \begin{pmatrix} c_{61,1}G_{yy} + c_{61,2}G_{yz} + c_{61,3}G_{zy} + c_{61,4}G_{zz} + c_{61,5}u_y^P + c_{61,6}u_z^P \\ c_{62,1}G_{xy} + c_{62,2}G_{xz} + c_{62,3}G_{zx} + c_{62,4}u_x^P \\ c_{63,1}G_{xy} + c_{63,2}G_{xz} + c_{63,3}G_{yx} + c_{63,4}u_x^P \end{pmatrix}, \quad (61)$$

ahol az együtthatók:

$$c_{61,1} = \frac{ab^2y^P}{2R} - \frac{\left\{ 32R^4 + 94R^2(y^P)^2 - 28(y^P)^4 - b^2[3b^2 + 4R^2 + 7(y^P)^2] \right\} (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{480R^2} \quad (62)$$

$$+ \frac{by^P \left[33b^2 + 2R^2 - 28(y^P)^2 \right] (\sqrt{+} + \sqrt{-})}{960R^2} + \frac{y^P \left[R^2 + 4(y^P)^2 \right]}{8} \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right),$$

$$c_{61,2} = -\frac{ab^2 \left[b^2 + 16(y^P)^2 \right]}{32R^2} - \frac{y^P \left[5b^4 + 3b^2R^2 - 6R^4 + 4(b^2 - 5R^2)(y^P)^2 + 16(y^P)^4 \right] (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{384R^3} \quad (63)$$

$$- \frac{\left\{ b^3 \left[b^2 + R^2 + 28(y^P)^2 \right] - 2b \left[3R^4 + 6R^2(y^P)^2 + 8(y^P)^4 \right] \right\} (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{768R^3}$$

$$- \frac{R^4 + 4R^2(y^P)^2 + 8(y^P)^4}{32R} \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right),$$

$$c_{61,3} = \frac{ab^2}{2} + \frac{b \left[3b^2 + 6R^2 - 4(y^P)^2 \right] (\sqrt{+} + \sqrt{-})}{96R} + \frac{y^P \left[b^2 - 26R^2 + 4(y^P)^2 \right] (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{48R} \quad (64)$$

$$+ R \left\{ (y^P)^2 \ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \frac{R^2}{4} \ln \frac{-b^- + \sqrt{-}}{2R} + \left[(y^P)^2 - \frac{R^2}{4} \right] \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right\},$$

$$c_{61,4} = -\frac{ab^2y^P}{2R} - \frac{\left\{ b^2 \left[3b^2 + 4R^2 + 7(y^P)^2 \right] - 32R^4 - 94R^2(y^P)^2 + 28(y^P)^4 \right\} (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{480R^2} \quad (65)$$

$$- \frac{by^P \left[33b^2 + 2R^2 - 28(y^P)^2 \right] (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{960R^2} + \frac{y^P \left[R^2 + 4(y^P)^2 \right]}{8} \left(\ln \frac{-b^- + \sqrt{-}}{2R} - \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right),$$

$$c_{61,5} = \frac{ab^2}{4R} + \frac{y^P \left[3b^2 + 2R^2 - 4(y^P)^2 \right] (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{32R^2} + \frac{b \left[b^2 + 2R^2 + 4(y^P)^2 \right] (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{64R^2} \quad (66)$$

$$+ \frac{R^2 + 4(y^P)^2}{8} \left(\ln \frac{-b^- + \sqrt{-}}{2R} - \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right),$$

$$c_{61,6} = \frac{\left[b^2 + 4R^2 - 2(y^P)^2 \right] (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{12R} + \frac{by^P (\sqrt{+} + \sqrt{-})}{12R} + Ry^P \left(\ln \frac{-b^- + \sqrt{-}}{2R} - \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right), \quad (67)$$

$$c_{62,1} = -\frac{ab^2y^P}{2R} - \frac{\left\{ b^2 \left[3b^2 + 4R^2 + 7(y^P)^2 - 32R^2 - 94R^2(y^P)^2 + 28(y^P)^4 \right] \right\} (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{480R^2} \quad (68)$$

$$- \frac{by^P \left[33b^2 + 2R^2 - 28(y^P)^2 \right] (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{960R^2} + \frac{y^P \left[R^2 + 4(y^P)^2 \right]}{8} \left(\ln \frac{-b^- + \sqrt{-}}{2R} - \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right),$$

$$\begin{aligned}
 c_{62,2} = & \frac{ab^2 \left[b^2 + 16 (y^P)^2 \right]}{32R^2} + \frac{y^P \left[5b^4 + 3b^2 R^2 - 6R^4 + 4 (b^2 - 5R^2) (y^P)^2 + 16 (y^P)^4 \right] (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{384R^2} \\
 & + \frac{\left\{ b^3 \left[b^2 + R^2 + 28 (y^P)^2 \right] - 2b \left[3R^4 + 6R^2 (y^P)^2 + 8 (y^P)^4 \right] \right\} (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{768R^3} \\
 & + \frac{R^4 + 4R^2 (y^P)^2 + 8 (y^P)^4}{32R} \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right), \quad (69)
 \end{aligned}$$

$$c_{62,3} = -\frac{a^3}{6} - \frac{a^2 b (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{16R} - \frac{a^2 y^P (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{8R} - \frac{a^2 R}{4} \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right), \quad (70)$$

$$\begin{aligned}
 c_{62,4} = & -\frac{ab^2}{4R} - \frac{y^P \left[3b^2 + 2R^2 - 4 (y^P)^2 \right] (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{32R^2} - \frac{b \left[b^2 + 2R^2 + 4 (y^P)^2 \right] (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{64R^2} \\
 & + \frac{R^2 + 4 (y^P)^2}{8} \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} - \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right), \quad (71)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{63,1} = & -\frac{ab^2}{2} - \frac{b \left[3b^2 + 6R^2 - 4 (y^P)^2 \right] (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{96R} - \frac{y^P \left[b^2 - 26R^2 + 4 (y^P)^2 \right] (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{48R} \\
 & + R \left\{ \frac{R^2}{4} \ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + (y^P)^2 \ln \frac{-b^- + \sqrt{-}}{2R} + \left[\frac{R^2}{4} - (y^P)^2 \right] \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right\}, \quad (72)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{63,2} = & \frac{ab^2 y^P}{2R} + \frac{\left\{ b^2 \left[3b^2 + 4R^2 + 7 (y^P)^2 \right] - 32R^4 - 94R^2 (y^P)^2 + 28 (y^P)^4 \right\} (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{480R^2} \\
 & + \frac{b y^P \left[33b^2 + 2R^2 - 28 (y^P)^2 \right] (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{960R^2} + \frac{y^P \left[R^4 + (y^P)^2 \right]}{8} \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right), \quad (73)
 \end{aligned}$$

$$c_{63,3} = \frac{a^3}{6} + \frac{a^2 b (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{16R} + \frac{a^2 y^P (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{8R} + \frac{a^2 R}{4} \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right), \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
 c_{63,4} = & -\frac{\left[b^2 + 4R^2 - 2 (y^P)^2 \right] (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{12R} - \frac{b y^P (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{12R} + R y^P \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right). \quad (75)
 \end{aligned}$$

Illetve

$$\frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \cdot \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -u_y^P \\ u_x^P \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y^P}{R} \begin{pmatrix} u_z^P \\ 0 \\ -u_x^P \end{pmatrix} + \frac{b^2}{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} (G_{yz} + G_{zy}) - \frac{y^P}{4R} G_{zz} \\ -\frac{1}{24} (G_{xz} + G_{zx}) \\ -\frac{1}{12} (G_{xy} + G_{yx}) + \frac{y^P}{8R} (G_{xz} + G_{zx}) \end{pmatrix}, \quad (76)$$

$$\oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \cdot \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] |d\mathbf{r}| = c_{8,1} G_{xx} + c_{8,2} G_{yy} + c_{8,3} G_{zz} + c_{8,4} (G_{yz} + G_{zy}) + c_{8,5} u_y^P + c_{8,6} u_z^P, \quad (77)$$

az együtthatók pedig

$$c_{8,1} = a^2 \left[\frac{a}{6} + \frac{b (\sqrt{-} + \sqrt{+}) + 2y^P (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{16R} + \frac{R}{4} \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right) \right], \quad (78)$$

$$c_{8,2} = \frac{ab^2}{2} + \frac{b \left[3b^2 + 6R^2 - 4(y^P)^2 \right] (\sqrt{+} + \sqrt{-}) + 2y^P \left[b^2 - 26R^2 + 4(y^P)^2 \right] (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{96R} \quad (79)$$

$$+ R \left[(y^P)^2 \ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \frac{R^2}{4} \ln \frac{-b^- + \sqrt{-}}{2R} \right] + R \left[(y^P)^2 - \frac{R^2}{4} \right] \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R},$$

$$c_{8,3} = \frac{ab^2 \left[b^2 + 16(y^P)^2 \right]}{32R^2} + \frac{\left\{ y^P \left[5b^4 + 3b^2R^2 - 6R^4 + 4(b^2 - 5R^2)(y^P)^2 + 16(y^P)^4 \right] \right\} (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{384R^3}, \quad (80)$$

$$+ \frac{b^3 \left[b^2 + R^2 + 28(y^P)^2 \right] - 2b \left[3R^4 + 6R^2(y^P)^2 + 8(y^P)^4 \right]}{768R^3}$$

$$+ \frac{R^4 + 4R^2(y^P)^2 + 8(y^P)^4}{32R} \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right),$$

$$c_{8,4} = -\frac{ab^2y^P}{2R} + \frac{\left\{ 32R^4 + 94R^2(y^P)^2 - 28(y^P)^4 - b^2 \left[3b^2 + 4R^2 + 7(y^P)^2 \right] \right\} (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{480R^2} \quad (81)$$

$$+ \frac{by^P \left[33b^2 + 2R^2 - 28(y^P)^2 \right] (\sqrt{+} + \sqrt{-})}{960R^2} + \frac{y^P \left[4(y^P)^2 + R^2 \right]}{8} \left(\ln \frac{-b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right),$$

$$c_{8,5} = \frac{\left[b^2 + 4R^2 - 2(y^P)^2 \right] (\sqrt{+} - \sqrt{-}) + by^P (\sqrt{+} + \sqrt{-})}{12R} + Ry^P \left(\ln \frac{-b^- + \sqrt{-}}{2R} - \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right), \quad (82)$$

$$c_{8,6} = -\frac{ab^2}{4R} - \frac{y^P \left[3b^2 + 2R^2 - 4(y^P)^2 \right] (\sqrt{+} - \sqrt{-})}{32R^2} - \frac{b \left[b^2 + 2R^2 + 4(y^P)^2 \right] (\sqrt{-} + \sqrt{+})}{64R^2} \quad (83)$$

$$+ \frac{R^2 + 4(y^P)^2}{8} \left(\ln \frac{b^- + \sqrt{-}}{2R} + \ln \frac{b^+ + \sqrt{+}}{2R} \right).$$

Az (51)–(77) integrálok az $R \rightarrow \infty$ (azaz a sík) határesetben rendre a (41)–(48), felületen kiértékelt integrálok értékét adják vissza [ezek (51), (52), (59), (60), (76) integrálok esetén ránézésre látszódnak is].

Az elmozdulásgradiens komponenseinek kísérleti meghatározásánál célszerű lehet a hurkot úgy megválasztani, hogy annak középpontja y irányban éppen a henger szimmetriatengelyére essen, azaz $y^P = 0$, ekkor az (51), (52), (59), (60), (76) integrálok

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} \frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = (G_{yx} - G_{xy}), \quad (84)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} \frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \times d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -G_{zx} \\ -G_{zy} \\ G_{xx} + G_{yy} \end{pmatrix}, \quad (85)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} \frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \times \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] \cdot d\mathbf{r} = -2u_z^P + \frac{b^2}{24R} (G_{xx} - 5G_{yy} + 4G_{zz}), \quad (86)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} \frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \times \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] \times d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -u_y^P \\ u_x^P \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b^2}{24R} \begin{pmatrix} G_{yz} + 2G_{zy} \\ 2G_{zx} - 3G_{xz} \\ G_{yx} - 3G_{xy} \end{pmatrix}, \quad (87)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} \frac{1}{ab} \oint_{\Gamma} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^P) \cdot \hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}) \right] d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -u_y^P \\ u_x^P \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b^2}{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} (G_{yz} + G_{zy}) \\ -\frac{1}{24} (G_{xz} + G_{zx}) \\ -\frac{1}{12} (G_{xy} + G_{yx}) \end{pmatrix}, \quad (88)$$

ekkor pedig a másik három integrál együtthatói:

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{3,1} = 2a + \frac{b\sqrt{4R^2 + b^2}}{2R} + 2R \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R}, \quad (89)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{3,2} = 0, \quad (90)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{3,3} = -\frac{ab^2}{4R} - \frac{b(2R^2 + b^2)\sqrt{4R^2 + b^2}}{32R^2} + \frac{R^2}{4} \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R}, \quad (91)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{61,1} = 0, \quad (92)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{61,2} = -\frac{ab^4}{32R^2} + \frac{b(b^4 + b^2R^2 - 6R^4)\sqrt{b^2 + 4R^2}}{384R^3} - \frac{R^3}{16} \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R}, \quad (93)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{61,3} = \frac{ab^2}{2} + \frac{b(b^2 + 2R^2)\sqrt{b^2 + 4R^2}}{16R} + \frac{R^3}{4} \left(\ln \frac{-b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R} - \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R} \right), \quad (94)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{61,4} = 0, \quad (95)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{61,5} = \frac{ab^2}{4R} + \frac{b(b^2 + 2R^2)\sqrt{b^2 + 4R^2}}{32R^2} + \frac{R^2}{8} \left(\ln \frac{-b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R} - \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R} \right), \quad (96)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{61,6} = 0, \quad (97)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{62,1} = 0, \quad (98)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{62,2} = \frac{ab^4}{32R^2} + \frac{b(b^4 + b^2R^2 - 6R^4)\sqrt{b^2 + 4R^2}}{384R^3} + \frac{R^3}{16} \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R}, \quad (99)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{62,3} = -\frac{a^3}{6} - a^2 \left(\frac{b\sqrt{b^2 + 4R^2}}{8R} + \frac{R}{2} \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R} \right), \quad (100)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{62,4} = -\frac{ab^2}{4R} + \frac{b(b^2 + 2R^2)\sqrt{b^2 + 4R^2}}{32R^2} + \frac{R^2}{4} \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R}, \quad (101)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{61,1} = -\frac{ab^2}{2} - \frac{b(3b^2 + 6R^2)\sqrt{b^2 + 4R^2}}{48R} + \frac{R^3}{2} \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R}, \quad (102)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{61,2} = 0, \quad (103)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{61,3} = \frac{a^3}{6} + a^2 \left(\frac{b\sqrt{b^2 + 4R^2}}{8R} + \frac{R}{2} \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R} \right), \quad (104)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{61,4} = 0, \quad (105)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{8,1} = \frac{a^3}{6} + a^2 \left[\frac{b\sqrt{4R^2 + b^2}}{8R} + \frac{R}{2} \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R} \right], \quad (106)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{8,2} = \frac{ab^2}{2} + \frac{b \left[(b^2 + 2R^2) \sqrt{4R^2 + b^2} \right]}{16R} - \frac{R^3}{2} \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R}, \quad (107)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{8,3} = \frac{ab^4}{32R^2} + \frac{b \left\{ [b^2 (b^2 + R^2) - 6R^4] \sqrt{4R^2 + b^2} \right\}}{384R^3} + \frac{R^3}{16} \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R}, \quad (108)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{8,4} = 0, \quad (109)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{8,5} = 0, \quad (110)$$

$$\lim_{y^P \rightarrow 0} c_{8,6} = -\frac{ab^2}{4R} - \frac{b \left[(b^2 + 2R^2) \sqrt{4R^2 + b^2} \right]}{32R^2} + \frac{R^2}{4} \ln \frac{b + \sqrt{4R^2 + b^2}}{2R}. \quad (111)$$

4 AZ ALAKVÁLTOZÁSKOMPONENSEK MEGHATÁROZÁSÁNAK LÉPÉSEI

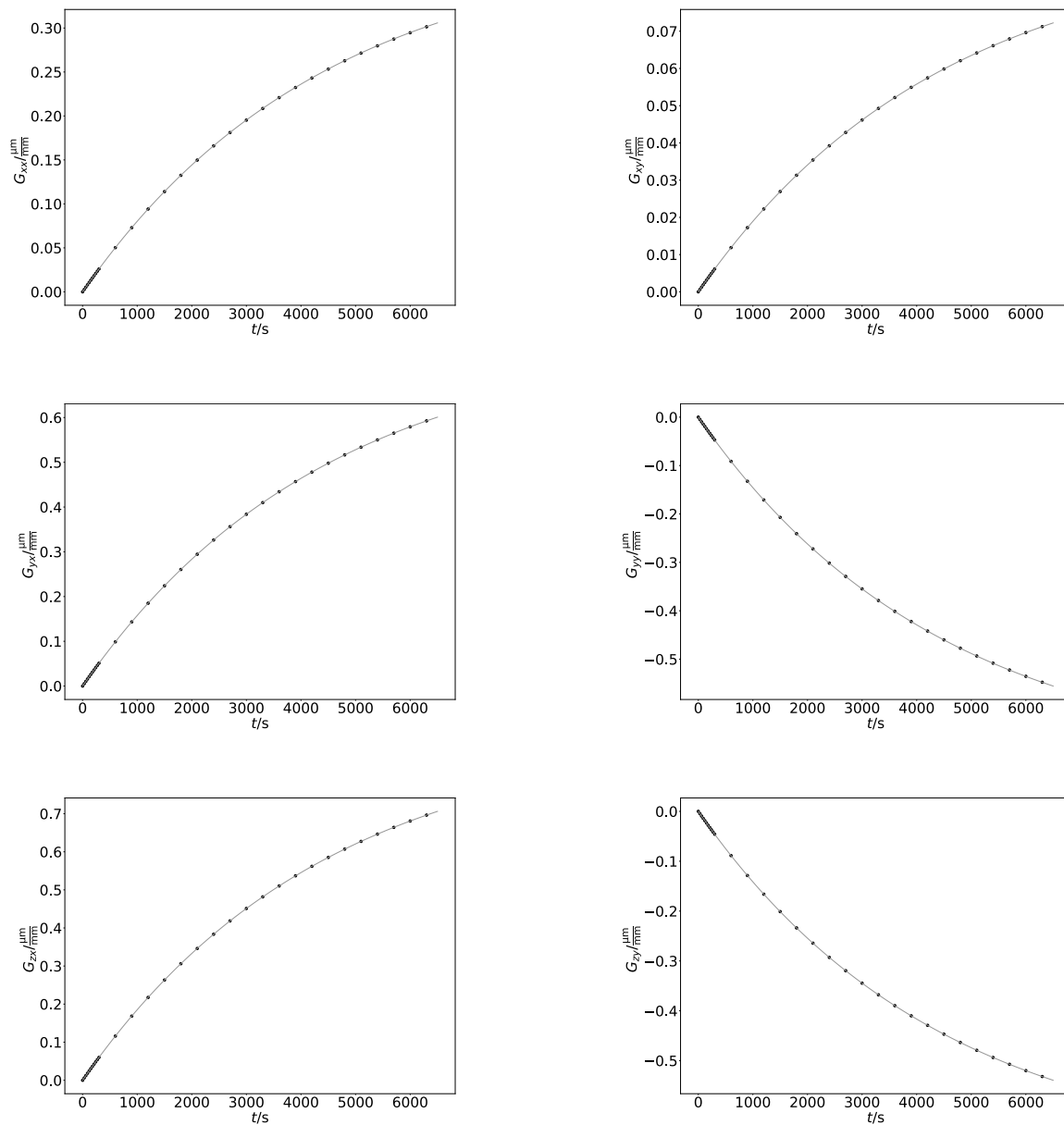
Teszt példaként kollégánk, Kovács Róbert a homogén, de időfüggő

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0.3980 & 0.0940 & -0.4850 \\ 0.7820 & -0.7230 & 0.6820 \\ 0.9190 & 0.7020 & -0.4920 \end{pmatrix} \left(1 - e^{-2.2502 \cdot 10^{-4} t} \right) \cdot 10^{-3} \quad (112)$$

elmozdulásgradienssel (37) alapján generált nekünk „felületi elmozdulásmezőt”. Ezeken a mesterséges adatsorokon teszteltük a módszert. A továbbiakban bemutatjuk az elmozdulásgradiens, illetve ezáltal az alakváltozási tenzor komponenseinek meghatározását lépésről-lépésre. Míg sík felület esetén sok lehetőség nincsen, addig görbült esetben rengeteg lehetőség és sorrend áll rendelkezésre, mi ebből egy robosztus mutatunk be.

4.1 Sík felületen mért elmozdulásjel

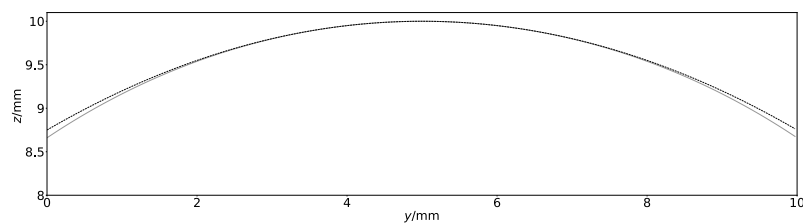
Sík felület esetén (elvieken) egyetlen hurok elegendő a meghatározható elmozdulásgradiens komponensek becsléséhez. Válasszunk tetszőlegesen egy hurok középpontot, majd vegyünk fel tetszőlegesen egy hurkot, esetünkben az oldalhosszok aránya $\frac{a}{b} = 2$. Az felületi elmozdulásokat numerikusan integrálva (azaz pixelről-pixelre összegezve a hurok mentén) meghatározzuk (41), (42), (46) és (48)-at. Míg G_{zx} és G_{zy} közvetlenül meghatározható akár (42), akár (46) első és második komponenséből, addig G_{xx} és G_{yy} a (42) harmadik komponense és (48) által alkotott algebrai egyenletrendszer megoldásaként állítható elő, illetve hasonlóan G_{xy} és G_{yx} a (41) és (46) harmadik komponense által alkotott algebrai egyenletrendszer megoldásaként adódik.



1. ábra. Sík felületen „mért” elmozdulásokból rekonstruált elmozdulásgradiens komponensek az idő függvényében. A folytonos vonal (112) megfelelő komponenseit, a markerek pedig a diszkrét időpillanatokban rendelkezésre álló elmozdulásmezőkből a hurokintegrálmódszerrel meghatározott értékeket jelölik.

4.2 Hengerpaláston mért elmozdulásjel

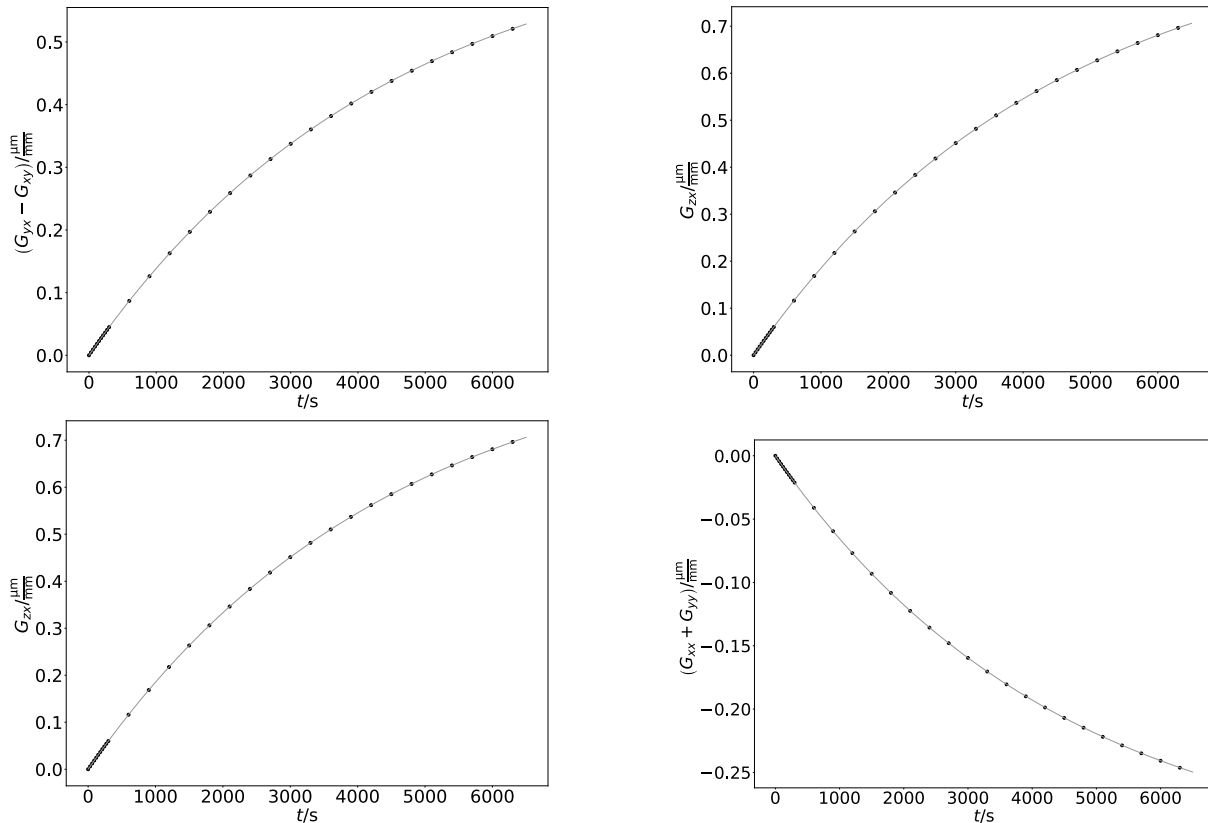
A hengerpalástot és az azt közelítő (50) függvényt a 2. ábra szemlélteti.



2. ábra. Folytonos vonal: a hengerpalást; szaggatott vonal: a hengerpalást másodrendű közelítése.

Mivel az (51)–(77) hurokintegrálokat már az (50) közelítéssel határoztuk meg, így célszerű a hurok középpontját y irányban minél közelebb vennünk a henger szimmetriatengelyéhez. Most két hurkot

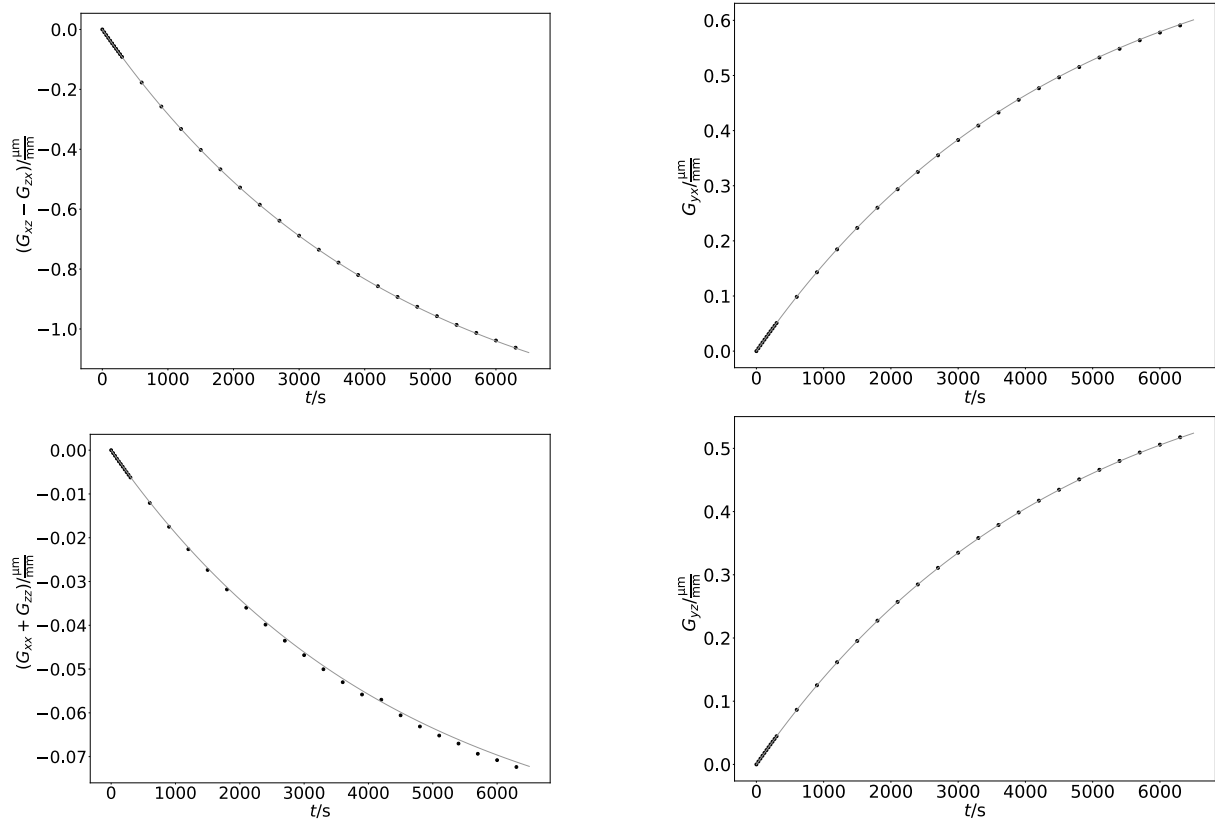
fogunk használni, egyet a szimmetriatengelyre koncentrálnunk, egyet pedig attól „nem túl távol”, konkrétan a (2) ábrának megfelelően előbbi $y^P = 5$ mm, míg utóbbi $y^Q = 5.8$ mm. Először is mindkét hurokra meghatározzuk (51) és (52) integrálokat. A szimmetriatengelyre koncentrált hurokból megkapjuk G_{zx} és G_{zy} komponenseket, illetve a $G_{yx} - G_{xy}$ és $G_{xx} + G_{yy}$ kombinációkat, míg a másik pont körül történő integrálásból az előbbiek ismeretében adódnak a G_{yx} és G_{yz} komponensek, valamint $G_{xz} - G_{zx}$ és $G_{xx} + G_{zz}$. Ezek után számíthatók a még hiányzó offdiagonális komponensek, azaz G_{xy} és G_{xz} . Ezeket szemléltetik 3, 4 és 5 ábrák.



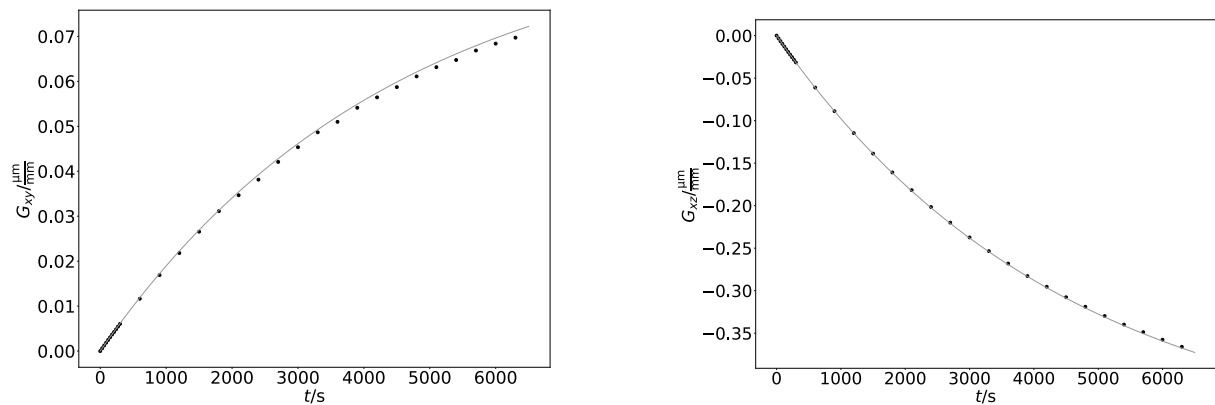
3. ábra. Az (51)-ből és (52)-ből nyert eredmények a szimmetriatengelyre koncentrált hurok esetén. A folytonos vonal (112) megfelelő komponenseit, a markerek pedig a diszkrét időpillanatokban rendelkezésre álló elmozdulásmézőkből a hurokintegrálmódszerrel meghatározott értékeket jelölik.

Ezek után már csak az elmozdulásgradiens diagonális komponenseinek meghatározása marad hátra. Ehhez alapvetően használhatnánk (59)-et vagy (60) és (76) első komponensét együttesen. Ezek az utak azonban már a mesterséges adatsor esetén sem működtek, a numerikus értékekkel végzett műveletek a numerikus hibákat erősen felnagyították. Ehelyett nyúlunk vissza a sík esetéhez, ahol a diagonális komponensek meghatározásához (42) mellett még (48)-at használtuk. Kiértékelve (77)-et a szimmetriatengelyre koncentrált hurok esetén az csak a G_{xx} , G_{yy} , G_{zz} komponenseket valamint a hurokközéppont z irányú elmozdulását tartalmazza. A hurok megválasztható úgy, hogy G_{zz} együtthatója a másik két elmozdulásgradiens komponens együtthatóihoz képest elhanyagolható legyen. A pont z irányú elmozdulását akár közvetlenül a mért értékekből is vehetnénk, de ténylegesen mért adatok esetén ez szórhat, hibával terhelt lehet, így ehelyett ezt is célszerűbb valamely integrálból becsülni (ez egyben simítja is az értéket). Mi (53) harmadik komponenséből határozzuk meg, hasonlóan mint az előbb, ekkor is megválasztható úgy a hurok, hogy csak az elmozduláskomponenset elegendő figyelembe venni, az így meghatározott elmozdulást szemlélteti a 6. ábra. Ezek után már (77)-ből és (52)-ből rendelkezésre álló $G_{xx} + G_{yy}$ összegből meghatározzuk G_{xx} -et és G_{yy} -t, végül $G_{xx} + G_{zz}$ -ből G_{zz} -t. A diagonális komponenseket a 7. ábra mutatja.

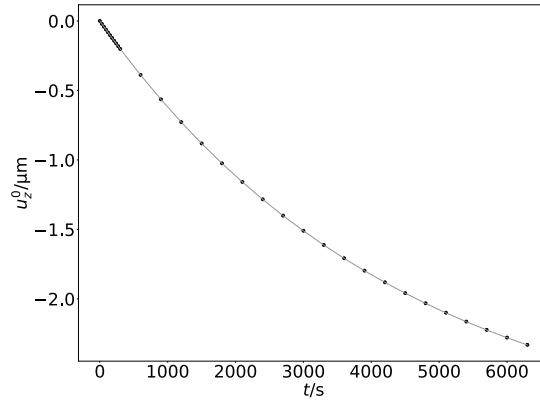
Nem maradt más hátra, mint az alakváltozási tenzor független komponenseinek meghatározása. Mivel $G_{xx} = \varepsilon_{xx}$, $G_{yy} = \varepsilon_{yy}$, $G_{zz} = \varepsilon_{zz}$, így azokat nem ábrázoljuk, viszont az alakváltozás gömbi részét, valamint a deviatorikus rész diagonális elemeit bemutatjuk.



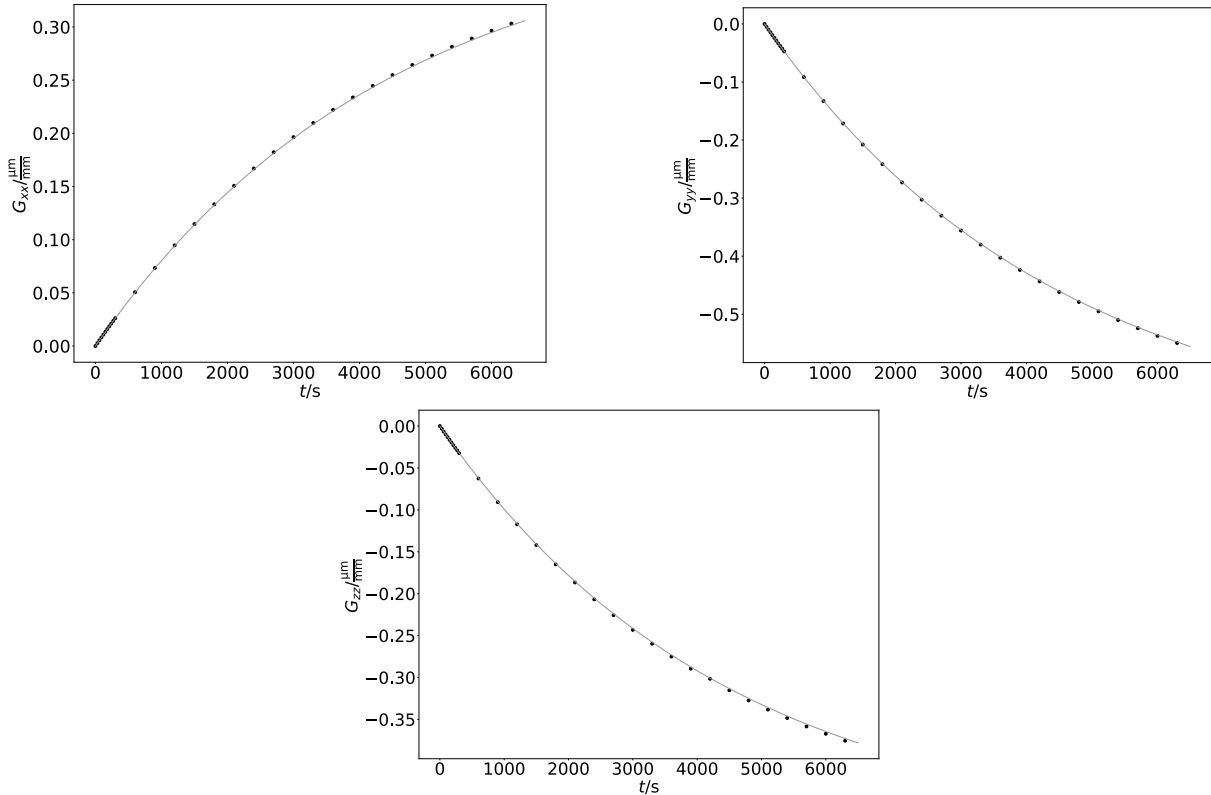
4. ábra. Az (51)-ből és (52)-ből nyert eredmények a nem szimmetriatengelyre koncentrált hurok esetén. A folytonos vonal (112) megfelelő komponenseit, a markerek pedig a diszkrét időpillanatokban rendelkezésre álló elmozdulásmezőkből a hurokintegrálmódszerrel meghatározott értékeket jelölik.



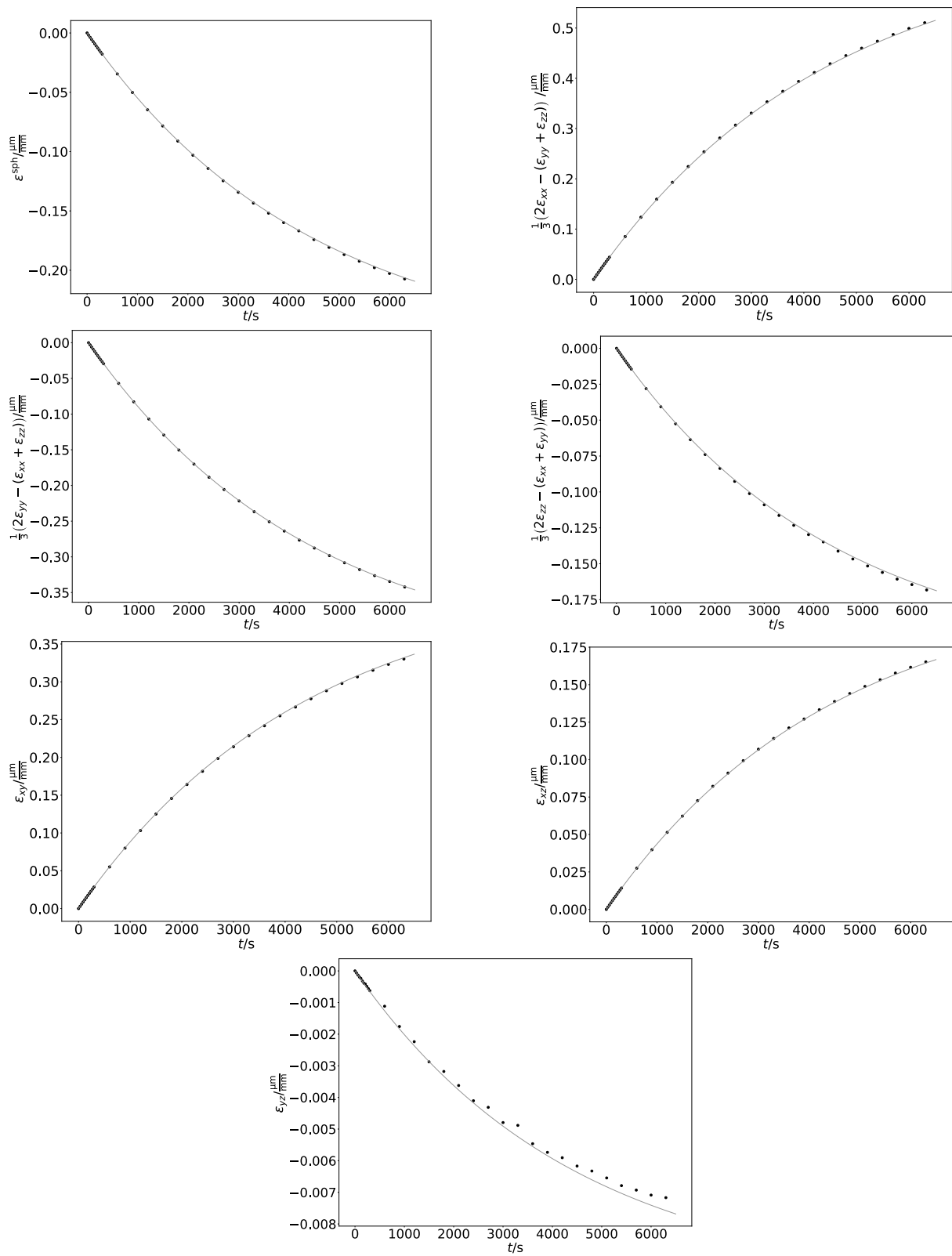
5. ábra. A maradék két offdiagonális. A folytonos vonal (112) megfelelő komponenseit, a markerek pedig a diszkrét időpillanatokban rendelkezésre álló elmozdulásmezőkből a hurokintegrálmódszerrel meghatározott értékeket jelölik.



6. ábra. A z irányú elmozdulás a szimmetriatengelyre koncentrált hurok középpontjában, (53)-ból meghatározva. A folytonos vonal (112) megfelelő komponenseit, a markerek pedig a diszkrét időpillanatokban rendelkezésre álló elmozdulásmezőkből a hurokintegrálmódszerrel meghatározott értékeket jelölik.



7. ábra. Az elmozdulásgradiens diagonális komponensei. A folytonos vonal (112) megfelelő komponenseit, a markerek pedig a diszkrét időpillanatokban rendelkezésre álló elmozdulásmezőkből a hurokintegrálmódszerrel meghatározott értékeket jelölik.



8. ábra. Az alakváltozási tenzor komponensei. A folytonos vonal (112) megfelelő komponenseit, a markerek pedig a diszkrét időpillanatokban rendelkezésre álló elmozdulásmezőkből a hurokintegrál módszerrel meghatározott értékeket jelölik.

5 KONKLÚZIÓK

A hurokintegrálokon alapuló módszerünk a mintaadatsor esetén jól teljesített. Következő lépésként célszerűen tényleges mérési adatokon kívánjuk tesztelni a módszert. Mivel a valóságban az elmozdulásgradiens nem homogén, így a hurokméretet célszerű kellően kicsinek megválasztani, de úgy, hogy még kellően sok adatpont a rendelkezésünkre álljon. Ehhez – és más mérésekkel való összevetéshez – tipikusan jó méret lehet egy mérőbéllyeg geometriájának megfelelő hurok. A jövőben tervezzük felületi integrálok vizsgálatát is, ugyanis azok simító és átlagoló hatása jobb lehet.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerzők ezúton fejezik ki köszönetüket Kovács Róbertnek a mintaadatsorok elkészítéséért.

HIVATKOZÁSOK

- [1] K. Matsuki, K. Takeuchi: Three-dimensional in situ stress determination by anelastic strain recovery of a rock core. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* 30, pp. 1019–1022, 1993.
- [2] K. Matsuki: Anelastic strain recovery compliance of rocks and its application to in situ stress measurement. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 45, pp. 952–956, 2008.
- [3] W. Lin *et al.* : A case study of 3D stress orientation determination in Shikoku Island and Kii Peninsula, Japan. **In:** Vrkljan, Ivan: Rock Engineering in Difficult Ground Conditions – Soft Rock and Karst, Proceedings of the Regional Symposium of the International Society for Rock Mechanics (ISRM), CRC Press, Boca Raton – London – New York – Leiden, pp. 277–282, 2010.
- [4] Béda Gy., Kozák I., Verhás J.: Kontinuummechanika. Műszaki Kiadó, Budapest, 1986.

Gradiens termomechanika és reológia

Gradient thermomechanics and rheology

Ván Péter

Wigner Fizikai Kutatóközpont, Részecske- és Magfizikai Intézet, Elméleti Fizikai Osztály;
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Energetikai Gépek és Rendszerek Tsz.;
Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, van.peter@wigner.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: A gyengén nemlokális, azaz gradiens rugalmasságtan és reológia termodinamikai feltételeknek megfelelő egyenleteit vezetjük le a divergencialeválasztás klasszikus módszerével. Az extenzivitás szerepét kiemelten elemezzük.

Kulcsszavak: Kluitenberg–Verhás-test, második főtétel, entrópiamérleg

ABSTRACT: The evolution equations of weakly nonlocal elasticity and rheology are derived according to thermodynamic conditions. The method of derivation is divergence separation. The role of extensivity is investigated in detail.

Keywords: Kluitenberg–Verhás body, second law, entropy inequality

1 BEVEZETÉS

A reológiai egyenletek termodinamikai keretelméletét Verhás József dinamikai szabadsági fokokra, azaz, mai terminológiával belső változókra alapozta, [1, 2]. A kapcsolódó jelenségkör a nem-Newtoni folyadékok (például fogkrém, aszfalt, műanyagok vagy folyadékkristályok) esetén könnyen felismerhető, viszont a szilárd rugalmas anyagok esetén kevésbé látványosan jelentkezik. A kövek folyása nem mindennapos, nagy nyomások és hosszú idő kell hozzá. Hogy ennek a bányászatban és az építőiparban milyen fontos szerepe van Asszonyi Csaba ismerte fel és vezette be a mérnöki gyakorlatba, különféle technológiák kidolgozásával és alkalmazásával. Ezen kívül mindennek elméleti megalapozását angol nyelven kiadott úttörő könyvükben Richter Richárddal együtt kezdték el, [3].

Ezt az elméleti munkát folytatva a Verhás-féle elmélettel Asszonyi és munkatársai rugalmas anyagokban másodrendű tenzori rendű belső változó bevezetésével kidolgozták a lineáris viszkoeelaszticitás termodinamikai általánosítását, amely egységes keretben és termodinamikailag konzisztens módon vezeti le a reológiai anyagmodellek sorát, a termodinamikailag kitüntetett, úgy nevezett Kluitenberg-Verhás test speciális eseteiként, [4]. Erre a modellcsaládra alapozva a rugalmas reológiai és képlékeny kontinuumokra vonatkozó gyakorlatilag fontos elméleti példák sorát dolgozta ki munkatársai-val, amelyeket elsősorban a Kőzetmechanikai és Mérnökgeológiai Kiskönyvtár köteteiben publikáltak, [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32].

Az egyik ilyen kérdéskör, ahol az elmélet elengedhetetlen a megfelelően működő technológia kidolgozásához, a kőzetmechanika mélységi kőzetfeszültségek mérésére vonatkozó egyik eljárása, amelyet anelasztikus deformáció helyreállításnak (Anelastic Strain Recovery, a továbbiakban ASR) neveznek. A technológiát eredetileg japán szakemberek dolgozták ki, és a szükséges anelasztikus anyagmodellt empirikusan állították fel, majd a méréseikkel hitelesítették. A Montavid Termodinamikai Kutatócsoport kutatásai megmutatták, hogy a tapasztalati alapon kapott ASR anyagmodell (lásd például [33]) pontosan megfelel az előbb említett Kluitenberg-Verhás testnek [4].

A reológia az anyag belső szerkezetének változásából adódó késleltetési viszonyokat, azaz memóriahatásokat tud vizsgálni, nem foglalkozik a térbeli ártrendeződés és az inhomogenitások leírásának

[†]A cikkben leírt eredmények és gondolatok Asszonyi Csabával folytatott beszélgetéseink és vitáink közben csiszolódtak. A termodinamikai módszertan különböző jelentős és váratlan következményeiről történő eszmecserék a vele folytatott tudományos műhelymunka legteljesebb részét jelentették. Az extenzivitást, mint a kontinuumok méretfüggetlenségének kulcsát különösen a covidos elszigeteltség időszakában elemeztük.

finomításával. Holott, már régóta ismert, hogy az úgy nevezett gradiens rugalmasságtan, és az általánosított kontinuumok elmélete pontosan ilyen hatásokat hivatott leírni [34, 35]. Ez a kérdéskör, tehát a gyengén nemlokálisan kiterjesztett kontinuumok termodinamikai megalapozása a folyadékok esetén a Korteweg-elméletet instabilitásainak kiküszöböléséhez vezetett, [36], az általánosított hővezetés kísérleti kimutatását segítette szobahőmérsékleten, [37, 38], illetve rávilágít arra, hogy a kontinuumok és a mezőelméletek sokkal közelebbi rokonságban vannak, mint termodinamikai feltételek nélkül gondoltuk, [39, 40, 41].

A továbbiakban a nemegyensúlyi termodinamika módszerei segítségével általánosítjuk a rugalmasságtan egyenleteit, hogy egységesen kezelhessünk disszipatív és ideális, termikus és mechanikai jelenségeket. A leírásban figyelembe vesszük az anyagi eredetű memória- és nemlokalitási effektusok modellezhetőségét, az előbbit belső változó bevezetésével, az utóbbit illetően pedig megengedjük, hogy a konstitutív egyenletek függjenek a termodinamikai állapotváltozótól – jelen esetben a deformáció és a belső változó – gradiensétől is.

A tárgyalt elmélet két alappillére a *vonatkoztatási rendszer függetlenség* és a *termodinamika második főtétele*. Egyik esetben sem részletezzük a fundamentális hátteret, csak a gyakorlati oldalról fontos kérdésekre szorítkozunk. Az első pillér azt jelenti, hogy nemrelativisztikus téridőn a levezetett téregyenletek és anyagegyenletek vonatkoztatási rendszertől függetlenek, pontosabban ilyen, objektív egyenletekből származtathatóak. A második pillér tekintetbe veszi, hogy a második főtétel a kontinuum egyensúlyának stabilitására vonatkozik és az ezen alapuló nemegyensúlyi termodinamikai módszertant alkalmazza belső változókkal. A módszertan legfontosabb előnye, hogy univerzális, azaz nem használ semmilyen részletes anyagszerkezeti modellt, illetve, hogy bármely más alternatív módszernél és elméletkörnél egyszerűbben és rugalmasabban adaptálható gyakorlati kérdések tárgyalására. Az elméleti háttérrel kapcsolatban esetleg felmerülő kérdések tekintetében a [29, 41, 42] munkákra, illetve a bennük felsorolt további irodalomra utalunk.

Az alábbi fejezetek a szükséges termosztatikát, a mérlegeket, az entrópiaprodukció számítását és az izotróp anyagegyenletek felállítását mutatják be.

2 GRADIENS TERMORUGALMASSÁG EGY TENZORIÁLIS BELSŐ VÁLTOZÓVAL

2.1 Termosztatika a rugalmasságtanban

A továbbiakban kisdeformációs elméletet használunk, a tenzori tulajdonságokat indexekkel jelölve. Például a deformációt a továbbiakban ε^{ij} jelöli, ahol i, j a háromdimenziós térindexek, az alsó-felső kettőzött indexek pedig összegzést jelentenek, például ε^i_i a deformációtenzor nyoma. Az indexek absztraktok, nem koordinátákat jelölnek, csak a térszerű fizikai mennyiségek tenzori tulajdonságait a háromdimenziós térben. A felső és alsó indexek megkülönböztetése nem mindig lényeges, mert a tér háromdimenziós euklidészi vektortér, ezért a vektorok mindig azonosíthatók a kovektorokkal. Az indexek használatának előnye, hogy a kettőnél magasabbrendű tenzorokkal kapcsolatos számítások egyértelműen és egyszerűen jelölhetők.

A mechanikai deformáció, illetve az alakváltozás nem lehetnek extenzív termodinamikai állapotváltozók a szokásos értelemben. Alapvetően lokálisan definiált mennyiségekről van szó, egy véges térfogatú rugalmas kontinuum homogén deformációja homogén peremfeltételek esetén is alakfüggő, tehát a teljes véges térfogatra vonatkozó termodinamikai potenciálok nem teljesen anyagi természetűek, függenek a térfogatrész alakjától. Ezért gázokra-folyadékokra vonatkozó Gibbs relációban nem helyettesíthetjük egyszerűen a fajtérfogatot a deformációtenzonnal. Azonban a deformáció alapvetően lokálisan értelmezhető mennyiség, ezért egy kontinuumelmélet kiindulópontja nem feltétlenül kell, hogy véges térfogatú termodinamikai test legyen. Amennyiben nem kis, hanem véges deformációval foglalkozunk, akkor a lokális deformációt el kell választani a lokális forgásoktól és az energiaváltozásokért felelős lokális Riemann-metrikától. Kis deformációk esetén ezeket a problémákat viszonylag egyszerű feloldani. A rugalmas testek fajlagos entrópiája, s , az e belső energia és az ε^{ij} deformáció függvénye lesz és a parciális deriváltjai a következők:

$$s = s(e, \varepsilon^{ij}), \quad \frac{\partial s}{\partial e} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \varepsilon^{ij}} = -v \frac{\sigma_{ij}}{T}. \quad (1)$$

Itt σ_{ij} jelöli a termosztatikai feszültséget, v a fajtérfogatot és T a hőmérsékletet. A Gibbs reláció ezek után a következő:

$$de = Tds + v\sigma_{ij}d\varepsilon^{ij}. \quad (2)$$

A teljes entrópia elsőrendű Euler-homogenitása, jelen esetben a fajlagos entrópia nulladrendű Euler-homogenitása, azaz a termodinamikai rendszer extenzivitása a μ kémiai potenciál bevezetésével biztosítható:

$$\mu := e - Ts - v\sigma_{ij}\varepsilon^{ij}. \quad (3)$$

Ez az Euler reláció a fajlagos mennyiségekre vonatkozóan. Ezek után levezethetjük a sűrűségekre vonatkozó Gibbs relációt és Euler relációt is. Az utóbbi egyszerűen (3) összefüggésnek a $\rho = 1/v$ tömegsűrűséggel történő szorzásával adódik:

$$d\rho_e = Td\rho_s + \sigma_{ij}d\varepsilon^{ij} + \left(\mu + \frac{\sigma_{ij}\varepsilon^{ij}}{\rho}\right)d\rho, \quad (4)$$

$$\rho_e = T\rho_s + \sigma_{ij}\varepsilon^{ij} + \mu\rho. \quad (5)$$

Itt $\rho_e = \rho e$ a belső energia sűrűsége és $\rho_s = \rho s$ az entrópiásűrűség. Termodinamikai szempontból a sűrűségváltozások kis deformáció esetén sem elhanyagolhatóak. A teljes, véges térfogatú testre vonatkozó összefüggéseket homogén deformációs mező esetén a fenti fajlagos összefüggéseknek a test teljes M tömegével történő szorzással számolhatóak, ahol a megfelelő teljes testre vonatkozó termodinamikai extenzív változó $M\varepsilon^{ij}$ lesz. Speciális inhomogén deformációs mezők esetén a test térfogatára történő integrálással kaphatunk értelmezhető termodinamikai összefüggéseket.

Érdemes rámutatni, hogy kémiai potenciál miért nem játszik szerepet a kontinuummechanikában, annak ellenére, hogy sokszor a sűrűségeket tekintjük a meghatározandó alapmezőnek. Transzformáljuk át a fenti összefüggéseket az f szabadenergiasűrűség segítségével, amelyet az $f = \rho_e - T\rho_s = \sigma_{ij}\varepsilon^{ij} + \mu\rho$, sűrűségekre vonatkozó Legendre-transzformáció segítségével definiálunk. Ekkor a sűrűségekre vonatkozó Gibbs reláció, (4), így írható:

$$df = -\rho_s dT + \sigma_{ij}d\varepsilon^{ij} + \frac{f}{\rho}d\rho, \quad \rightarrow \quad \rho d\frac{f}{\rho} = -\rho_s dT + \sigma_{ij}d\varepsilon^{ij}, \quad (6)$$

azaz látszólag nincs szükség a kémiai potenciál bevezetésére, helyettesíthető a fajlagos szabadenergiával a fenti összefüggés baloldalán. Ha eleve az energiából, illetve a fenti termodinamikai Helmholtz-féle szabadenergiából indulunk ki, akkor könnyen abba az illúzióba ringathatnánk magunkat, hogy tulajdonképpen az az alaplmenyiség, és a kémiai potenciál illetve az entrópia szerepe másodlagos a kontinuummechanikában. Figyeljük meg, hogy a szabadenergia természetes változói a hőmérséklet, T , a deformáció, ε^{ij} , és a ρ sűrűség, ahogy az a (6) Gibbs-relációból látszik. A fajlagos mennyiségekkel a változók száma kisebb lesz, a fajlagos szabadenergia két változó függvénye, $\frac{f}{\rho}(T, \varepsilon^{ij})$, azonban a szabadenergia sűrűség ennek ellenére három változótól függ $f(T, \varepsilon^{ij}, \rho)$. Ez a fontos különbség a homogén deformációra előírt extenzivitás következménye [29].

Ideális rugalmas testeknél a rugalmas energiát ki kell vonnunk a belső energiából. Ekkor két választásunk van a lokális termodinamikai elméletben, aszerint, hogy a fajlagos mennyiségekre, vagy a sűrűségekre alapozzuk a potenciálokat. Ez részben elméleti egyszerűség kérdése, de természetesen végső soron a kísérletek döntenek el, illetve anyagtípustól függhet, hogy sűrűségek, vagy fajlagos mennyiségek használhatóak kényelmesebben. Itt mi a továbbiakban a fajlagos mennyiségeket tekintjük elsődlegesnek, ezért a fajlagos rugalmas energiát vonjuk ki a fajlagos belső energiából és így a fajlagos entrópia a izotróp anyagokban a következő függvény lesz:

$$s(e, \varepsilon^{ij}) = s\left(e - \mu\varepsilon^{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_i^i)^2\right), \quad (7)$$

ahol $\hat{\mu} = \rho\mu = 2G$ és $\hat{\lambda} = \rho\lambda = K - 2G/3$ a Lamé állandók, mert $\rho_{ela} = \hat{\mu}\varepsilon^{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\hat{\lambda}}{2}(\varepsilon_i^i)^2$ a rugalmas energia sűrűsége. Ekkor a hőmérsékletet, mint az entrópia belső energia szerinti deriváltját bevezetve a (1) összefüggésbe és állandó μ és λ együtthatók esetén azt kapjuk, hogy a termosztatikus feszültség a következő

$$\sigma^{ij} = 2\hat{\mu}\varepsilon^{ij} + \hat{\lambda}\varepsilon_k^k\delta^{ij}. \quad (8)$$

Itt δ^{ij} a Kronecker-delta, a szokásos egységtenzor absztrakt index jelölésekkel. A μ és a λ rugalmassági együtthatók nem lehetnek negatívak, amennyiben az entrópia konkáv. Ezt a követelményt nevezzük az anyag termodinamikai stabilitásának, a második főtétel stabilitási rendszerének a fontos részét képezi, tudjuk, hogy az anyag mechanikai egyensúlyának is szükséges követelménye. A fenti termodinamikai megfontolásoknak a következménye, hogy a Lamé-állandók arányosak az anyag sűrűségével.

2.2 Gyengén nemlokális rugalmasságra és egyetlen gyengén nemlokális belső változóra vonatkozó termosztatikai alapösszefüggések

A fizikai mennyiségek gradienseinek termodinamikai állapothatározóként történő bevezetésével ugyanaz a nehézség, mint ami már a deformáció kapcsán is felmerült: alakfüggő lesz a kiterjedt testre vonatkozó potenciál, ezért anyagjellemző paramétereket ilyen kísérletekből csak ennek tudatában kaphatunk¹. Az előző fejezet alapján kézenfekvő, hogy a rugalmaságtani Gibbs reláció kiterjesztéséhez lokális szintről kell kiindulnunk, sűrűségekkel, vagy méginkább fajlagos mennyiségekkel. Ekkor a fajlagos entrópia az e belső energiától, a ε^{ij} deformációtól és annak $\partial_k \varepsilon^{ij}$ gradiensétől, illetve a másodrendű tenzor ξ^{ij} belső változótól és ennek $\partial_k \xi^{ij}$ gradiensétől függ, azaz $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}, \partial_k \varepsilon^{ij}, \xi^{ij}, \partial_k \xi^{ij})$. Az entrópiafüggvény parciális deriváltjait ezek után a következőképpen jelöljük:

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \varepsilon^{ij}} = -\mathbf{v} \frac{\sigma_{ij}}{T}, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial (\partial_k \varepsilon^{ij})} = \mathbf{v} \frac{S_{ij}^k}{T}, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \xi^{ij}} = \mathbf{v} y_{ij}, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial (\partial_k \xi^{ij})} = \mathbf{v} Y_{ij}^k. \quad (9)$$

A fajtérfogat szorzók nem szükségesek, de kényelmesek a további számításokban. Az $S_{ij}^k, y_{ij}, Y_{ij}^k$ fizikai mennyiségek a megfelelő termosztatikai entrópiikus intenzív mennyiségek. Látni fogjuk, hogy a szokásos intenzív mennyiségektől elvárt tulajdonságok nem őrződnek meg maradéktalanul. A Gibbs reláció ezek után a következő formában írható:

$$d\mathbf{e} = T d\mathbf{s} + \mathbf{v} \sigma_{ij} d\varepsilon^{ij} - \mathbf{v} S_{ij}^k d\partial_k \varepsilon^{ij} - \mathbf{v} T y_{ij} d\xi^{ij} - \mathbf{v} T Y_{ij}^k d\partial_k \xi^{ij}. \quad (10)$$

Ez lesz a kiindulópontunk konstitutív törvények levezetéséhez. Ide fog tartozni az anelasztikus feszültségre és a hőáramsűrűségekre vonatkozó differenciális Hook-törvény és a hővezetés Fourier-törvényének kiterjesztése, illetve a ξ^{ij} belső változó idő és térbeli változását leíró parciális differenciálegyenlet, amelyet *evolúciós egyenletnek* fogunk nevezni. Azért nem mozgásegyenlet vagy dinamikai törvény a neve, mert nem csak mechanikáról van szó. A belső változóra vonatkozó intenzív változóban másként jelenik meg a hőmérséklet, nem osztunk vele, mint a deformációra és gradienseire vonatkozó esetben, a termosztatikai feszültségek esetén. Ez csak kényelmi szempontból van így, nincs mögötte mélyebb indoklás. Azt a fizikai elvárásunkat tükrözi, hogy míg a deformáció az energiát módosítja elsősorban, jobbra a kvadratis rugalmas energia révén, ahogy azt láttuk (8)-ban.

2.3 Entrópiaprodukción a gyengén nemlokális rugalmas anyagoknál

Az entrópiamérleg egyenlőtlensége, az entrópia növekedésének törvénye, egy feltételes egyenlőtlenség. A feltételek esetünkben a kompatibilitás, illetve a tömeg, a lendület, a perdület és az energia megmaradása. Az energia megmaradásából a belső energia mérlegét vezethetjük le és ez fog szerepelni a termodinamikai számításokban. A tömeg megmaradása, a kontinuitási egyenlet a következő

$$\dot{\rho} + \rho \partial^i v^i = 0, \quad (11)$$

ahol a pont a szubsztanciális időderiváltat jelöli, azaz $\dot{\rho} = \partial_t \rho + v^i \partial_i \rho$. Itt ∂_t és ∂_i a parciális időderivált és a gradiens, v^i pedig a kontinuum sebességmezője, amelyet a szokásos módon a tömeg és az impulzusáramlás segítségével definiáljuk. A lendületmérleg:

$$\rho \dot{v}^i - \partial_j \tilde{\sigma}^{ij} = 0^i. \quad (12)$$

Itt $\tilde{\sigma}^{ij}$ jelöli a feszültségtenzort. Ha a perdület megmarad, akkor a konduktív lendületáramsűrűség, azaz a fenti egyenletben szereplő feszültségtenzor szimmetrikus, $\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{\sigma}^{ji}$. Továbbá $\tilde{\sigma}^{ij}$ általában nem azonos és nem is egyenlő a statikai kísérletekben mérhető és az entrópia deriváltjaként származtatott termosztatikai σ^{ij} feszültséggel. Látni fogjuk, hogy ha egyenlőek, akkor nincs mechanikai disszipáció.

¹Ez nem független dolog, mert a deformáció is gradiens változó, amennyiben a kompatibilitási feltételt komolyan vesszük.

A belső energia mérlege a következő (lásd pl. [2])

$$\rho \dot{e} + \partial_i q^i = \bar{\sigma}^{ij} \partial_i v_j, \quad (13)$$

ahol q^i a hőáramsűrűség, a belső energia konduktív áramsűrűsége.

További kényszer a kompatibilitási feltétel kis deformációk esetén

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\partial^i v^j + \partial^j v^i) = L^{ij}, \quad (14)$$

azaz a deformáció szubsztanciális időderiváltja a sebességgradiens szimmetrikus része. Végül pedig a belső változó fejlődési egyenlete is feltétel az entrópiamérleghez, mégpedig a következő általános formában

$$\dot{\xi}^{ij} = f^{ij}(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}, \partial_k \varepsilon^{ij}, \xi^{ij}, \partial_k \xi^{ij}). \quad (15)$$

Itt az egyenlet jobb oldala, az f^{ij} függvény anyagi, konstitutív mennyiség, keressük a második főtételelől következő, rá vonatkozó megszorításokat. A további konstitutív függvények a feszültség $\bar{\sigma}^{ij}$, és a hőáramsűrűség q^i . A második főtétel megköveteli, hogy az entrópia elszigetelt rendszerben csak növekedhet és ez az említett konstitutív függvények speciális formájának következménye. Mivel csak az említett általános feltételeket követeljük meg az anyag szerkezetével kapcsolatban és semmi mást nem kell tudnunk annak mezoszkopikus vagy mikroszkopikus összetételéről, ezért ezek univerzális követelmények.

Az entrópiamérleg a második főtételel a következő felételes egyenlőtlenség formájában tartalmazza

$$\rho \dot{s} + \partial_i J^i = \Sigma \geq 0, \quad (16)$$

ahol a (11)-(15) feltételeket a lehető legegyszerűbb módon fogjuk figyelembe venni, közvetlenül behelyettesítve az egyenleteket az entrópiamérlegbe. Az entrópiaáramsűrűség azonosítása után pedig az entrópiaprodukció egyszerűen levezethető, ráadásul konstruktívan használható formában. Az áram és a termelőzés szétválasztására a klasszikus irreverzibilis termodinamika módszerét, a divergenciák leválasztását fogjuk használni, mert ez teszi a legáttekinthetőbbé a levezetést gyengén nemlokális állapotterben. Megjegyezzük, hogy a bonyolultabb és modernebb módszerek praktikusán ugyanerre az eredményre vezetnek, azzal az előnnyel, hogy kevésbé heurisztikusak, és egyértelműbb a végeredmény.

A számításban az entrópiafüggvény szubsztanciális deriváltjának kiszámítása után, az állapotathározók időderiváltjait behelyettesítjük a kényszerekből az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} \rho \dot{s}(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}, \partial_k \varepsilon^{ij}, \xi^{ij}, \partial_k \xi^{ij}) &= \frac{\rho \dot{e}}{T} - \frac{\rho}{\rho T} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}^{ij} + \frac{S_{ij}^k}{T} (\partial_k \varepsilon^{ij}) + y_{ij} \dot{\xi}^{ij} + Y_{ij}^k (\partial_k \xi^{ij}) = \\ &= -\partial_k \left(\frac{q^k - S_{ij}^k \varepsilon^{ij}}{T} - Y_{ij}^k \xi^{ij} \right) + \partial_k \left(\frac{1}{T} \right) (q^k - S_{ij}^k \varepsilon^{ij}) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon_{ij}}{T} (\sigma^{ij} + \partial_k S^{kij}) + \frac{\partial_j v_i}{T} (\bar{\sigma}^{ij} - S_{kl}^j \partial^i \varepsilon^{kl} - T Y_{kl}^j \partial^i \xi^{kl}) + \\ &\quad + f^{ij} (y_{ij} - \partial_k Y_{ij}^k) \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Ez alapján az entrópia áramsűrűség

$$J^k = \frac{q^k - S_{ij}^k \varepsilon^{ij} - T Y_{ij}^k \xi^{ij}}{T}$$

lesz és ugyanakkor a hőáramsűrűséget is kiegészítjük egy extra taggal $\hat{q}^k = q^k - S_{ij}^k \varepsilon^{ij}$. A kompatibilitási feltétel felhasználásával végül az entrópiamérleg a következő formában írható:

$$\begin{aligned} \rho \dot{s} + \partial_k \left(\frac{q^k - S_{ij}^k \varepsilon^{ij} - T Y_{ij}^k \xi^{ij}}{T} \right) &= \\ &= \left(q^k - S_{ij}^k \varepsilon^{ij} \right) \partial_k \left(\frac{1}{T} \right) + \\ &\quad + \frac{\varepsilon_{ij}}{T} (\bar{\sigma}^{(ij)} - \sigma^{ij} - \partial_k S^{kij} - S_{kl}^{(i} \partial^j) \varepsilon^{kl} - Y_{kl}^{(i} \partial^j) \xi^{kl}) + \\ &\quad + \frac{\partial_{[j} v_{i]}}{T} (\bar{\sigma}^{ij]} - S_{kl}^{[j} \partial^i] \varepsilon^{kl} - T Y_{kl}^{[j} \partial^i] \xi^{kl}) + f^{ij} (y_{ij} - \partial_k Y_{ij}^k) \geq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

1. táblázat. Gyengén nemlokális rugalmas testek termodinamikai erői és áramai.

	termikus	mechanikai	forgató	belső
áramok	$\hat{q}^i$	$\sigma_{an}^{(ij)}$	$\sigma_{an}^{[ij]}$	f^{ij}
erők	$\partial_i \left(\frac{1}{T} \right)$	$\frac{\dot{\varepsilon}^{ij}}{T}$	$\frac{\omega_{[ij]}}{T} = \frac{\partial_{[j} v_{i]}}{T}$	$y_{ij} - \partial_k Y_{ij}^k$

Itt az indexekben használt (..) zárójel a megfelelő tenzori komponensek szimmetrikus részét jelöli, [...] pedig az antiszimmetrikus részt. A számításban felhasználtuk, hogy a szubsztanciális és térderiváltak sorrendje nem felcserélhető és érvényes a következő azonosság:

$$(\partial_k \xi^{ij}) = \partial_k \xi^{ij} - \partial_k v^l \partial_l \xi^{ij}. \quad (19)$$

Bevezetjük a

$$\sigma_{an}^{(ij)} = \tilde{\sigma}^{(ij)} - \sigma^{ij} - \partial_k S^{kij} - S_{kl}^{(i} \partial^j) \varepsilon^{kl} - Y_{kl}^{(i} \partial^j) \xi^{kl} \quad (20)$$

szimmetrikus *anelasztikus* feszültségtenzort. Ez a formula a viszkózus feszültségre vonatkozó Newton-féle feszültségtenzor, azaz $\sigma_{visc}^{ij} = \tilde{\sigma}^{ij} - \sigma^{ij}$ kiterjesztése. A további tagok a belső változó és a deformáció gradiensei miatt jelennek meg. Láthatjuk, hogy a gyenge nemlokalitás miatt a sebességgradiens antiszimmetrikus része nem feltételen nulla még akkor sem, ha az anelasztikus feszültség szimmetrikus, mert ekkor a $\partial_{[j} v_{i]}$ tag szorzótényezője még nem biztos, hogy nulla.

A $\hat{q}^i$ hőáram, a $\tilde{\sigma}^{ij}$ feszültség és a belső változó fejlődési egyenletét meghatározó f^{ij} anyagi természetű konstitutív függvények. Az entrópiaegyenlőtlenség miatt nem lehetnek akármilyenek. Az egyenlőtlenség legegyszerűbb megoldása, ha feltételezzük, hogy $\hat{q}^i$, σ_{an}^{ij} és f^{ij} lineáris függvényei a szorzótényezőiknek az entrópiaprodukcióban, azaz bevezetjük a termodinamikai erőket és áramokat az 1. táblázat szerint.

A termodinamikai erők és áramok azonosítása a fenti egyenlőtlenségben elsősorban matematikai kérdés, az egyenlőtlenség megoldhatósága a döntő feltétel. Termodinamikai áramok az egyes tagokban azok, amelyekben meghatározandó konstitutív függvények szerepelnek. Az erők pedig a megfelelő tagok szorzói. Például (18) utolsó tagjában az f^{ij} konstitutív mennyiség szorzója, a belső változóra vonatkozó termodinamikai erő, az nem az entrópiasűrűségből meghatározott intenzív változó gradiense, hanem entrópiasűrűség teljes funkcionálderiváltja lesz:

$$y_{ij} - \partial_k Y_{ij}^k = \rho \frac{\partial s}{\partial \xi^{ij}} - \partial_k \left(\rho \frac{\partial s}{\partial (\partial_k \xi^{ij})} \right) = \frac{\delta(\rho s)}{\delta \xi^{ij}}(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}, \partial_k \varepsilon^{ij}, \xi^{ij}, \partial_k \xi^{ij}). \quad (21)$$

Sima és izotróp konstitutív függvények esetén az entrópia egyenlőtlenség megoldása a következő:

$$\hat{q}^i = \Lambda \partial_i \frac{1}{T}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{an}^{\langle ij \rangle} &= l_{11}^{dev} \varepsilon^{\langle ij \rangle} + l_{12}^{dev} \left(y_{\langle ij \rangle} - \partial_k Y_{\langle ij \rangle}^k \right) \\ \dot{\xi}^{\langle ij \rangle} &= l_{21}^{dev} \varepsilon^{\langle ij \rangle} + l_{22}^{dev} \left(y_{\langle ij \rangle} - \partial_k Y_{\langle ij \rangle}^k \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{an})_k^k &= l_{11}^{sph} \varepsilon_k^k + l_{12}^{sph} \left(y_k^k - \partial_l Y_k^{lk} \right) \\ \dot{\xi}_k^k &= l_{21}^{sph} \varepsilon_k^k + l_{22}^{sph} \left(y_k^k - \partial_l Y_k^{lk} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{an}^{[ij]} &= l_{11}^{rot} \omega^{ij} + l_{12}^{rot} \left(y_{[ij]} - \partial_k Y_{[ij]}^k \right) \\ \dot{\xi}^{[ij]} &= l_{21}^{rot} \omega^{ij} + l_{22}^{rot} \left(y_{[ij]} - \partial_k Y_{[ij]}^k \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Az izotróp függvények reprezentációs tételeit alkalmaztuk, amely alapján a másodrendű tenzorokat deviatorikus, gömbi és antiszimmetrikus részekre bontottuk. Néhány együttható ezek közül jól ismert. Például $\Lambda_F = \Lambda/T^2$ a Fourier-féle hővezetés együttható, l_{11}^{dev} és l_{11}^{sph} pedig a lineáris viszkoelaszticitás elméletében fellépő nyírási és térfogati viszkozitási együtthatók. Az entrópia növekedése megköveteli,

hogy a fenti lineáris együttható mátrixok pozitív definitnek legyenek, ezért a következő egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$\begin{aligned} \Lambda, l_{11}^{dev}, l_{22}^{dev}, k_{11}^{sph}, k_{22}^{sph}, l_{11}^{rot}, l_{22}^{rot} &\geq 0, \\ l_{11}^{dev} l_{22}^{dev} - \frac{l_{12}^{dev} + l_{21}^{dev}}{4} &\geq 0, \quad k_{11}^{sph} k_{22}^{sph} - \frac{k_{12}^{sph} + k_{21}^{sph}}{4} \geq 0, \\ l_{11}^{rot} l_{22}^{rot} - \frac{l_{12}^{rot} + l_{21}^{rot}}{4} &\geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

(23) és (24) a termodinamikai reológiában alapvető Kluitenberg-Verhás test gyengén nemlokális általánosítása [4]. A gyengén nemlokális általánosítás az eredeti lokális alaktól abban különbözik, hogy az anelasztikus feszültség és a belső változóra vonatkozó termodinamikai erők gradiensfüggők. Ezen felül fontos megjegyeznünk, hogy nem tételeztük fel az Onsager-féle vezetési együtthatókra sem szimmetriát, sem antiszimmetriát, tehát például $l_{12}^{dev} \neq l_{21}^{dev}$, $k_{12}^{sph} \neq k_{21}^{sph}$, $l_{12}^{rot} \neq l_{21}^{rot}$. A makroszkopikus reverzibilitás elve itt nem alkalmazható, mert a belső változó paritása nem rögzíthető. Ez a határozatlanság összhangban van a kövekre vonatkozó megfelelő kísérleti tapasztalatokkal. Feltételezzük továbbá, hogy az anyagi együtthatók állandók.

2.3.1 Ideális anelasztikus anyag.

Fontos speciális eset az, amikor az anyag nem disszipatív, azaz az entrópiatermelés nulla. Ez többféleképpen is lehetséges. Tegyük fel, hogy a belső termodinamikai erő, azaz $y_{ij} - \partial_k Y_{ij}^k$ nulla és az általános hőáramsűrűség és az anelasztikus feszültség is külön-külön nulla. Ekkor a következő konstitutív függvények és téregyenletek érvényesek:

$$q^k = S_{ij}^k \dot{\xi}^{ij}, \quad (27)$$

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} + \partial_k S^{kij} + S_{kl}^i \partial^j \varepsilon^{kl} + TY_{kl}^i \partial^j \xi^{kl}, \quad (28)$$

$$0^{ij} = \rho \frac{\partial s}{\partial \xi^{ij}} - \partial_k \left(\rho \frac{\partial s}{\partial (\partial_k \xi^{ij})} \right) = \frac{\delta(\rho s)}{\delta \xi^{ij}}. \quad (29)$$

Tehát a kontinuum nem feltétlenül van nyugalomban, a deformációsebesség nem nulla, ahogy ez a fenti, (23)-(25), konstitutív egyenletekből látszik.

Különösen érdekes, hogy a hőáramsűrűség sem feltétlen nulla és ez alapján a belső energia terjedhet együtt a deformációval. Azaz (27) behelyettesítésével a belső energia (13) mérlegébe azt kapjuk, hogy

$$\rho \dot{e} + \partial_k (S_{ij}^k \dot{\xi}^{ij}) = 0. \quad (30)$$

Ekkor a belső energia megmarad, mert a mechanikai teljesítmény, a fenti kifejezés forrástagja nulla, (28) miatt. Viszont az impulzusmérleg a következő:

$$\rho \dot{v}^i - \partial_i (\sigma^{ij} + \partial_k S^{kij} + S_{kl}^i \partial^j \varepsilon^{kl} + TY_{kl}^i \partial^j \xi^{kl}) = 0 \quad (31)$$

Az ideálisság feltétele szerint a belső termodinamikai erő nulla, így (29) felhasználásával látjuk, hogy a belső változó miatti anelasztikus feszültség erősűrűségként jelentkezik:

$$\rho \dot{v}^i - \partial_i (\sigma^{ij} + \partial_k S^{kij} + S_{kl}^i \partial^j \varepsilon^{kl}) = -\rho \nabla_{\xi}^i s \quad (32)$$

ahol

$$\nabla_{\xi}^i s = \partial_{\xi^{kl}} s \partial^i \xi^{kl} + \partial_{(\partial_j \xi^{kl})} s \partial_j^i \xi^{kl}, \quad (33)$$

a fajlagos entrópiának a belső változóra vonatkozó parciális gradiense, azaz térbeli deriváltja az összes többi változóját állandónak tekintve. Ezt a tulajdonságot *klasszikus holografikusságnak* nevezzük, [41]. Ha például az entrópiafüggvény additívan a deformációtól és a belső változótól függő részekre bontható, azaz $s(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}, \partial_k \varepsilon^{ij}, \xi^{ij}, \partial_k \xi^{ij}) = s_{ela}(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}, \partial_k \varepsilon^{ij}) + s_{int}(\xi^{ij}, \partial_k \xi^{ij})$, akkor egyszerűen a második tagnak, s_{int} -nek a gradiense lesz a fajlagos erősűrűség, hiszen $\nabla_{\xi}^i s = \partial_i s_{int}$. Ez azt jelenti, hogy a belső változónak közvetlen mechanikai hatása van, ebből a szempontból akár általánosított deformációként is interpretálható.

Néhány további megjegyzés:

- A kontinuitási egyenlet és a kompatibilitási feltétel, (14) és (11), következménye, hogy a sűrűség és a deformáció nem függetlenek, mert: $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \varepsilon_i^i$. Ezért $\varepsilon_i^i = \ln \frac{\rho}{\rho_0}$, ahol ρ_0 állandó.
- Természetes peremfeltételeket adhatunk meg az összes mezőre az áramok, különösen az entrópia-áram, többféle speciális előírásával is.
- Néha a belső változót a termodinamika feltételek megállapítása után valamilyen más mező gradienseként interpretálják egy lokális elmélet keretei között (pl. [43, 44]). A fentiekben láttuk, hogy ez félrevezető lehet, mert ekkor a felületi és térfogati hatások különböznek és a fejlődési egyenlet és a peremfeltételek is mások.
- Egy véges deformációs elméletben a belső változó fejlődési egyenletében megjelennek természetes objektív időderiváltak, mint a közegre vonatkozó Lie-deriváltak, illetve a térbeli kölcsönhatások is módosulnak, [29]. Anyagi sokaságok bevezetésével a fenti számítások kiegészíthetők ebben az irányban, de kőzetek esetén ez nem tűnik fontosnak.
- A holografikus tulajdonság, egzotikus elnevezése ellenére, jól ismert a folyadékok esetén. Ugyanis egy komponensű, ideális Euler-folyadékoknál, adiabatikus folyamatokra a μ kémiai potenciál egyben mechanikai potenciál is, mert a Gibb-Duhem reláció miatt $\nabla p = \rho \nabla \mu$, ahol p a termosztatikai nyomás.
- A holografikus tulajdonság, azaz az ideális esetben fellépő erő-feszültség viszony egy természetes dinamikai homogenizációs mechanizmust jelent a belső változóban megjelenő heterogenitásokra vonatkozóan. Ez elég nyilvánvaló, ha figyelembe vesszük a disszipatív dinamika egyensúlyt stabilizáló szerepét. Ha a belső változó gradiense nulla, akkor csak a hagyományos, deformációs eredetű feszültségek vezetnek lokális gyorsulásra.

3 ÖSSZEGZÉS

A fentiekben megadtuk a Kluitenberg-Verhás-test belső változóban és deformációban is másodrendű gyengén nemlokális kiterjesztését. Megmutattuk továbbá, hogy a kapott egyenletek visszadják a Kluitenberg-Verhás test alapegyenleteit, amennyiben a termodinamikai potenciálok lokálisak, nem függenek sem a deformáció, sem a belső változó deriváltjaitól.

A holografikus tulajdonság csak a belső változó esetén volt kimutatható. A deformációra látszólag nem érvényes, annak speciális viszonya miatt a sűrűséggel. Ez a kérdés még tovább vizsgálendő.

4 KÖSZÖNETEK

A munkát az Nemzeti Kutatási és Fejlesztési Hivatal FK134277 és NKFIH 2018-1.1.2-KFI-2018-00207 pályázatai támogatták. A FIKP támogatását is köszönettel fogadtuk.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Verhás J. *Termodinamika és reológia*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [2] J. Verhás. *Thermodynamics and Rheology*. Akadémiai Kiadó and Kluwer Academic Publisher, Budapest, 1997.
- [3] Cs. Asszonyi and R. Richter. *The continuum theory of rock mechanics*. Trans. Tech. Publications, USA, 1979.
- [4] Cs. Asszonyi, T. Fülöp, and P. Ván. Distinguished rheological models for solids in the framework of a thermodynamical internal variable theory. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 27:971–986, 2015. arXiv:1407.0882.
- [5] Ván P. és Asszonyi Cs. Az általános törvényszerűségek. In Asszonyi Cs., szerkesztő, *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 3. kötet, 2. fejezet, 25–87. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.

- [6] Asszonyi Cs. Ván P. és Szarka Z. *Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 5. kötet. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007.
- [7] P. Ván, A. Berezovski, and J. Engelbrecht. Internal variables and dynamic degrees of freedom. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33(3):235–254, 2008. cond-mat/0612491.
- [8] Ván P. és Asszonyi Cs. Izotrop kontinuumok anyagtörvénye és speciális esetei. In Asszonyi Csaba, szerkesztő, *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 6. kötet, 1. fejezet, 13–50. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [9] Asszonyi Cs., Fülöp T., Szarka Z. Ván P., and és Horváth R. Reológiai alapmodellek és összekapcsolásuk. In Asszonyi Csaba, szerkesztő, *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 6. kötet, 2. fejezet, 51–92. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [10] Asszonyi Cs., szerkesztő. *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 3. kötet, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [11] Asszonyi Cs., szerkesztő. *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 6. kötet, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [12] Fülöp T., szerkesztő. *Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 8. kötet, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008. uegyetemi Kiadó.
- [13] Asszonyi Cs., szerkesztő. *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, v Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 9. kötet, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009.
- [14] Fülöp T., szerkesztő. *Idő és térderiváltak anyagtörvényekben, of Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 10. kötet, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010.
- [15] Asszonyi Cs., szerkesztő. *A képlékenység termodinamikájáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 13. kötet, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2012.
- [16] Fülöp T. Reológiai elemkapcsolások. In Asszonyi Csaba, szerkesztő, *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 6. kötet, 3. fejezet, 93–120. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [17] Asszonyi Cs. és Fülöp T. Szarka Z. Anyagok mechanikai tulajdonságai az anyagtörvény alapján. In Asszonyi Csaba, szerkesztő, *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 6. kötet, 4. fejezet, 121–188. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [18] Fülöp T. A tér nem abszolút - a téridő, mint a Galilei-féle relativitási elv következménye. In Fülöp T., szerkesztő, *Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 8. kötet, 1. fejezet, 11–35. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [19] Fülöp T. Kontinuumok kinematikájának új értelmezése. In Fülöp T., szerkesztő, *Új eredmények a kontinuumfizikában*, volume 8 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 3, 55–99. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [20] P. Béda. A Portevin-le Chatelier hatás reológiai eredete. In Fülöp T., szerkesztő, *Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 8. kötet, 6. fejezet, 137–144. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [21] Vásárhelyi B. és Asszonyi Cs. Bojtár I. A Young-féle rugalmassági modulus és a Poisson-tényező. In Fülöp T., szerkesztő, *Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 8. kötet, 4. fejezet, 101–120. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [22] Asszonyi Cs., Szarka Z., Csátár A., Horváth R., and Kocsis D. és Ván P. Tömör anyagok képlékeny deformációjáról. In Asszonyi Cs., szerkesztő, *A képlékenység termodinamikájáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 13. kötet, 1. fejezet, 9–21. Hungarian Printing House, Budapest, 2012.
- [23] Fülöp T. és Béda Gy. Hidrosztatikus környezetben nyitott hengerszimmetrikus alagút körüli reológiai időfüggés. In Asszonyi Cs., szerkesztő, *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 9. kötet, 99–114. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009.

- [24] Fülöp T. Rugalmas és reológiai lineáris feladatok. In Asszonyi Cs., szerkesztő, *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 9. kötet, 11–51. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009.
- [25] Szarka Z. és Béda Gy. Asszonyi Cs. Körszelvényű földalatti folyosók körül kialakuló mechanikai mezők. In Asszonyi Cs., szerkesztő, *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 9. kötet, 115–171. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009.
- [26] Asszonyi Cs. és Doležalova M. Mérnöki létesítmények modellezésének és tervezésének egy módszeréről. In Asszonyi Cs., szerkesztő, *A képlékenység termodinamikájáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 13. kötet, 74–90. Hungarian Printing House, Budapest, 2012.
- [27] T. Fülöp. Objective thermomechanics. 2015. arXiv:1510.08038.
- [28] B Fekete and A Szekeres. Investigation on partition of plastic work converted to heat during plastic deformation for reactor steels based on inverse experimental-computational method. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 53:175–186, 2015.
- [29] A. Berezovski and P. Ván. *Internal Variables in Thermoelasticity*. Springer, 2017.
- [30] D. M. Takács, Á. Pozsár, and T. Fülöp. Thermodynamically extended symplectic numerical simulation of viscoelastic, thermal expansion and heat conduction phenomena in solids. arXiv:2211.12120, 2022.
- [31] Á. Pozsár, M. Sziucs, R. Kovács, and T. Fülöp. Four spacetime dimensional simulation of rheological waves in solids and the merits of thermodynamics. *Entropy*, 22(12):1376, 2020.
- [32] Ván P. és Csatár A. Fülöp T. Szilárd testek rugalmas, hőtágulási és képlékeny folyamatainak termodinamikája. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, 16. kötet, 333–338, Hantken Kiadó, Budapest, 2013.
- [33] K. Matsuki. Anelastic strain recovery compliance of rocks and its application to in situ stress measurement. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 45:952–965, 2008.
- [34] C. Eringen. *Microcontinuum Field Theories I. Foundations and Solids*. Springer-Verlag, Berlin-etc., 3th edition, 1999.
- [35] A. Bertram and S. Forest. *Mechanics of Strain Gradient Materials*. Springer, 2020.
- [36] J. E. Dunn and J. Serrin. On the thermomechanics of interstitial working. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 88:95–133, 1985.
- [37] R. Kovács and P. Ván. Generalized heat conduction in heat pulse experiments. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 83:613–620, 2015. arXiv:1409.0313v2.
- [38] S. Both, B. Czél, T. Fülöp, Gy. Gróf, A. Gyenis, R. Kovács, P. Ván, and J. Verhás. Deviation from the fourier law in room-temperature heat pulse experiments. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 41(1):41–48, 2016. arXiv:1506.05764.
- [39] P. Ván and T. Fülöp. Weakly nonlocal fluid mechanics - the Schrödinger equation. *Proceedings of the Royal Society, London A*, 462(2066):541–557, 2006. (quant-ph/0304062).
- [40] P. Ván and S. Abe. Emergence of modified Newtonian gravity from thermodynamics. *Physica A*, 588:126505, 2022. arXiv:1912.00252.
- [41] P. Ván. Holographic fluids: a thermodynamic road to quantum physics. *Physics of Fluids*, 2023. arXiv:2301.07177v2.
- [42] P. Ván. Thermodynamically consistent gradient elasticity with an internal variable. *Theoretical and Applied Mechanics*, 47(1):1–17, 2020. arXiv:2005.13662.
- [43] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and G. A. Maugin. Generalized thermomechanics with dual internal variables. *Archive of Applied Mechanics*, 81(2):229–240, 2011.
- [44] P. Ván and T. Fülöp. Universality in heat conduction theory: weakly nonlocal thermodynamics. *Annalen der Physik*, 524(8):470–478, 2012. arXiv:1108.5589.

Kapcsolat a gradiens és a viszkoelasztikus kontinuumok anyagtörvényei között

The connection of constitutive equations of gradient and visco-elastic materials

Béda Gyula

BME, Műszaki Mechanikai Tanszék, beda@mm.bme.hu

Béda Péter

BME, VJJT, beda.peter@kjk.bme.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: Felhasználva, hogy az anyagban keltett zavarás nem jelenik meg egyidőben mindenütt, hanem terjed, felírható a hullám terjedési egyenlet, amely alapján az anyag változóira következtetéseket vonhatunk le. Így kiderül, hogy ennek a felvetésnek a Poyting-Thomson-Jeffery egyenlet nem tesz eleget.

Kulcsszavak: másod- és harmadrendű hullám, gradiens test, viszkoelasztikus test, Poyting-Thomson-Jeffery anyagtörvény

ABSTRACT: Using the fact that the disturbance caused in the body does not appear everywhere at the same time, but propagates, the wave propagation equation can be written, based on which conclusions can be drawn about the variables of the material. Thus, it turns out that the Poynting-Thomson-Jeffery equation does not fulfill this condition.

Keywords: second and third order wave, gradient material, visco-elastic material, Poynting-Thomson-Jeffery constitutive equation

1 BEVEZETÉS

Gradiens kontinuumnak fogjuk nevezni a következő anyagtörvényű kontinuumot

$$\sigma = f_1(\varepsilon, \varepsilon_x) \quad (1)$$

$$\sigma = f_2(\varepsilon, \varepsilon_x, \varepsilon_{xx}) \quad (2)$$

A viszkoelasztikus kontinuum anyagtörvénye pedig legyen

$$\sigma = f_3(\varepsilon, \varepsilon_t) \quad (3)$$

vagy Lebon (1971), Verhás (1985)

$$\sigma = f_4(\varepsilon, \varepsilon_t, \varepsilon_{tt}) \quad (4)$$

A képletekben σ a feszültség, ε az alakváltozás. Ezek x -szerinti deriváltja

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \equiv \varepsilon_x, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \equiv \varepsilon_{xx},$$

és hasonlóan

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \equiv \varepsilon_t, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \equiv \varepsilon_{tt}.$$

A vizsgálatot az egydimenziós esetben végezzük.

A gradiens anyagtörvényekkel az anyag nemlokális tulajdonságait próbálják megközelíteni. Hasonlóan a viszkoelasztikus anyaggal a mindig jelenlévő disszipációt meg a lejátszódó thermomechanikai anyag irreverzibilis folyamatát.

A következők az eddig felvetett tulajdonságokat vizsgálja, illetve keres olyan lehetséges függvénykapcsolatot, amely ezeket kifejezi.

2 A MÁSOD- ÉS HARMADRENDŰ HULLÁMOK Béda Gy. (1997)

A következő számítások egydimenziós esetre vonatkoznak. Így ha x a hely t idő koordináta, akkor pl. a σ feszültség

$$\sigma = \sigma(x, t)$$

az x helynek és a t időnek a függvénye. Hasonlóan

$$\varepsilon = \varepsilon(x, t)$$

a részecske sebesség

$$v = v(x, t)$$

függvény. A kapott eredmények a három dimenziós esetre is kiterjeszthetők. Az anyagtörvény vizsgálataira egy lehetséges eljárás a következő:

A kontinuum a vizsgálat kezdetén legyen egy meghatározott fizikai állapotban. Ezt az állapotot egy adott helyen érje valamilyen fizikai, jelen esetben mechanikai, hatás. Ez a zavarás nem jelentkezik azonnal a kontinuum minden részénél. A zavarás helyétől távolabbi részén később. A zavartalan [1] tartományt és a [2] megzavartat a

$$\varphi(x, t) = \text{áll.}$$

határoolja. A $\varphi(x, t)$ a hullámfront, amelynek terjedési sebessége jellemző a kontinuum anyagára. A hullámfront biztos követése érdekében a zavar legyen egy szingularitás a σ, ε, v függvényekben, vagy ezek első, illetve második deriváltjában. A szingularitás legyen ugrás, ennek jele például σ esetében

$$[\sigma] \equiv \sigma_2 - \sigma_1.$$

A σ_2 a $\varphi(x, t)$ mögött σ értéke a [2] tartományban. Hasonlóan σ_1 a σ értéke a [1] tartományban. Ha

$$[\sigma] = 0,$$

akkor a függvény folytonos. A bevezetett jelölés és értelme minden függvényre és deriváltjaira is ugyanazt jelenti. Így pl.

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \equiv \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_1,$$

és így tovább.

A következőkben a deriváltak indexben szerepelnek, azaz

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \equiv \varepsilon_x, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \equiv \varepsilon_t, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \equiv \varepsilon_{xx}, \dots$$

és így tovább.

A szinguláris hullámok osztályai

1. elsőrendű, vagy ütéshullám, ha

$$[\sigma] \neq 0, \quad [\varepsilon] \neq 0, \quad [v] \neq 0,$$

2. másodrendű, vagy gyorsuláshullám, ha

$$[\sigma] = 0, \quad [\varepsilon] = 0, \quad [v] = 0,$$

de

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right] \neq 0, \quad \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] \neq 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] \neq 0,$$

3. harmadrendű hullám, ha

$$[\sigma] = 0, \quad [\varepsilon] = 0, \quad [v] = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] = 0, \dots, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] = 0,$$

de

$$\left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right] \neq 0, \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t} \right] \neq 0, \dots, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] \neq 0, \text{ stb.}$$

Az egydimenziós esetben, minden rendű szinguláris hullám terjedési sebessége

$$c = -\frac{\varphi_t}{\varphi_x} \quad (5)$$

A terjedési sebesség tehát a zavarás terjedése és jellemezheti a kontinuum anyagát. A következő számítások a 2. másodrendű hullám esetére vonatkoznak. Az itt kifejtett számítás menete a magasabb rendű hullámok esetére is kiterjeszthető Bédagy. (2010).

A másodrendű hullámfront létezésének kinematikai feltétele ha

$$[\sigma] = 0, \quad [\varepsilon] = 0, \quad [v] = 0,$$

de

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right] \neq 0, \quad \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] \neq 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] \neq 0,$$

a Hadamard lemma szerint

$$\begin{aligned} [\sigma_x] &= \mu \varphi_x, & [\sigma_t] &= \mu \varphi_t, & [\varepsilon_x] &= \kappa \varphi_x, \\ [\varepsilon_t] &= \kappa \varphi_t, & [v_x] &= \nu \varphi_x, & [v_t] &= \nu \varphi_t. \end{aligned} \quad (6)$$

a dinamikai kompatibilitási feltétel a

$$\sigma_x = \rho v_t$$

mozgásegyenletből és az

$$\varepsilon_t = v_x$$

alakváltozási sebesség definíciójából

$$\mu \varphi_x = \rho \kappa \varphi_t \quad (7)$$

és

$$\kappa \varphi_t = \nu \varphi_x. \quad (8)$$

A képletekben ρ a tömeg sűrűség, μ, κ, ν az általános hullám amplitudó. Ezeken felül teljesül az anyagi kompatibilitási egyenlet. Az (1) és (3) egyenleteknél általánosabb

$$F(\sigma, \varepsilon, \sigma_x, \sigma_t, \varepsilon_x, \varepsilon_t) = 0$$

implicit függvény az anyagtörvény. Írjuk az F -et a hullámfront előtt

$$F_0(\dots),$$

a hullámfront mögött

$$F(\dots)$$

alakban. Az anyagi kompatibilitási feltétel

$$F(\dots) - F_0(\dots) = 0. \quad (9)$$

Az F a σ, ε változókon kívül a φ_x és φ_t -nek is függvénye, mert itt

$$\sigma_x \equiv (\sigma_x)_1 + \mu \varphi_x, \quad \sigma_t \equiv (\sigma_t)_1 + \mu \varphi_t, \quad \varepsilon_x \equiv (\varepsilon_x)_1 + \kappa \varphi_x, \quad \varepsilon_t \equiv (\varepsilon_t)_1 + \kappa \varphi_t.$$

Ezek után

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \mu + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x} \kappa \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi_t} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_t} \mu + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_t} \kappa \quad (10)$$

a

$$\frac{\partial F_0}{\partial \varphi_x} = \frac{\partial F_0}{\partial \varphi_t} = 0.$$

A (9) φ -re nézve első rendű nemlineáris parciális differenciálegyenlet, a karakterisztikái, vagyis a hullámfront (vetülete)

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}} = \frac{dt}{\frac{\partial F}{\partial \varphi_t}},$$

a

$$\frac{dx}{dt} = c$$

a terjedési sebesség. A két utóbbi egyenletből

$$c \frac{\partial F}{\partial \varphi_t} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}. \quad (11)$$

A (10)-et felhasználva a (11)-ben

$$c \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_t} \mu + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_t} \kappa \right) = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \mu + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x} \kappa \quad (12)$$

A μ és a κ közötti kapcsolat a (7) és (8) dinamikai feltételekből adódik

$$\kappa = \frac{1}{\rho c^2} \mu \quad (13)$$

Ennek, és a (12) egyenletbe való behelyettesítése után, ha $\mu \neq 0$, kapjuk a hullámterjedési egyenletet

$$\rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_t} c^3 - \rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} c^2 + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_t} c - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x} = 0 \quad (14)$$

Az index a parciális deriváltat jelöli.

A (14)-ben c hatványainak szorzói valós értékű függvények, tehát az egyenletnek van valós megoldása. A hullám minden irányban terjed, ezért még egy ellentétes előjelű valós megoldás van. Végül a c -ben harmadfokú egyenlet 3 különböző előjelű valós megoldást ad.

Minden anyagtörvény persze függ a σ és ε változóktól. Az alakváltozás második gradiensét is tartalmazó anyagtörvény lehetőségességét a harmadrendű hullámok vizsgálatára van szükség. A harmadrendű hullám esetében

$$[\sigma] = [\varepsilon] = [\sigma_x] = [\sigma_t] = [\varepsilon_x] = [\varepsilon_t] = 0,$$

de a második deriváltak nem nullák. A hullám létezésének kinematikai feltétele

$$\begin{aligned} [\sigma_{xx}] &= \mu^* \varphi_x \varphi_x, & [\sigma_{xt}] &= [\sigma_{tx}] = \mu^* \varphi_x \varphi_t, & [\sigma_{tt}] &= \mu^* \varphi_t \varphi_t \\ [\varepsilon_{xx}] &= \kappa^* \varphi_x \varphi_x, & [\varepsilon_{xt}] &= [\varepsilon_{tx}] = \kappa^* \varphi_x \varphi_t, & [\varepsilon_{tt}] &= \kappa^* \varphi_t \varphi_t \end{aligned} \quad (15)$$

A dinamikai kompatibilitási feltételből származó (13) egyenlet most is érvényes

$$\kappa^* = \frac{1}{\rho c^2} \mu^* \quad (16)$$

Az anyagtörvényt most is általános és implicit alakba írva

$$G(\sigma, \varepsilon, \sigma_x, \sigma_t, \sigma_{xx}, \sigma_{xt}, \sigma_{tt}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xt}, \varepsilon_{tt}) = 0$$

Az anyagi kompatibilitási feltétel

$$G(\dots) - G_0(\dots) = 0.$$

Ez az egyenlet a φ_x és φ_t -re nézve elsőrendű nemlineáris parciális differenciálegyenlet, a karakterisztikái

$$\frac{dx}{d\varphi_x} = \frac{dt}{d\varphi_t},$$

emlékeztetünk, hogy

$$c = \frac{dx}{dt} = -\frac{\varphi_t}{\varphi_x}. \quad (17)$$

Az egyenletben

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi_x} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{xx}} 2\mu^* \varphi_x + \frac{\partial G}{\partial \sigma_{tx}} \mu^* \varphi_t + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}} 2\kappa^* \varphi_x + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xt}} \kappa^* \varphi_t$$

és

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi_t} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}} 2\mu^* \varphi_t + \frac{\partial G}{\partial \sigma_{xt}} \mu^* \varphi_x + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}} 2\kappa^* \varphi_t + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xt}} \kappa^* \varphi_x$$

A (17)-ba helyettesítve, rendezve és a c terjedési sebességet beírva, a (16) szerint κ^* és μ^* közötti kapcsolatot felhasználva, a hullámterjedési egyenlete

$$2\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}} c^4 - \rho \frac{\partial G}{\partial \sigma_{xt}} c^3 + \left(\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma_{xx}} + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}} \right) c^2 - \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xt}} c + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}} = 0 \quad (18)$$

3 GRADIENS ÉS VISZKOELASZTIKUS ANYAGOK

3.1 *Néhány eset, ahol az anyagtörvény σ , ε és ezek első deriváltját tartalmazza*

- Az (1) egyenlet anyagtörvény esetében a (14) egyenlet együtthatói

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_t} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_t} = 0,$$

így az (14) egyenlet

$$-\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x} = 0,$$

vagyis az F nem lehet anyagtörvény.

- Az (3) anyagtörvény esetében a (14) egyenlet

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_t} c = 0$$

a (3) szintén nem lehet anyagtörvény.

- Ez utóbbi esetében, ha az egyenlet változója σ_t is, azaz

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_t} \neq 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_t} \neq 0,$$

akkor a Szokolovszki–Malvern egyenlet lehet anyagtörvény, ugyanis most a (14)

$$\left(\rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_t} c^2 + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_t} \right) c = 0$$

gyökei teljesíthetik a hullámterjedéssel kapcsolatos kívánalmakat.

- Ha az anyagtörvény ε_x és ε_t -től függ, akkor a (14) egyenlet

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_t} c - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x} = 0,$$

a c -re nézve csak egy valós gyöke van.

- Az első gradiens ε_x -től függő anyag lehetséges anyagtörvénye, ha az ε_x mellett az ε_t helyett σ_x a változó, mert ekkor (14)

$$-\rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} c^2 - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x} = 0.$$

- Az ε_x első gradienst tartalmazó anyagtörvény lehetséges, ha az ε_x mellett ε_t és σ_t változókat is tartalmazza az egyenlet Bédagy & Bédagy (1999). Ez kísérletileg is igazolt vörösréz esetében.

3.2 *Néhány eset, ahol az anyagtörvény σ , ε és ezek második deriváltját tartalmazza*

- A (18) egyenlet alapján megállapítható, hogy (2) és (4) egyenletek nem lehetnek anyagtörvények, ugyanis az (2) esetében a hullám terjedési egyenlet

$$\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}} = 0$$

vagyis a feltevésünkkel ellentétben a G nem függvénye az ε_{xx} -nek. Az (4) esetében hasonlóan

$$\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}} c^2 = 0$$

szerint a G nem lehet függvénye az ε_{tt} -nek.

- A (2) és (4) anyagmodellek egyesítése egy lehetséges anyagtörvényhez vezet. Ugyanis ekkor a hullámterjedési egyenlet

$$\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}} c^2 + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}} = 0.$$

Most a

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{xt}} = 0$$

és a hullám terjedése

$$c = \sqrt{-\frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}}}{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}}}} \quad (19)$$

ha

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}}}{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}}} < 0.$$

- Végül legyen az anyagtörvény ε_{tt} és σ_{tt} függvénye. A (18) -ből

$$\left(2 \frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}} c^2 + \frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}}\right) c^2 = 0.$$

Így a terjedési sebesség

$$c = \sqrt{-\frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}}}{2 \frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}}}} \quad \text{ha} \quad \frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}}}{\frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}}} < 0. \quad (20)$$

Most az anyagtörvény az ε_{xx} -től független.

4 A KAPOTT EREDMÉNYEK

Az anyagtörvényt akkor tekintjük lehetségesnek, ha változói olyanok, amelyek esetében létezik legalább egy pozitív és egy negatív valós gyöke a (14) vagy a (18) hullámterjedési egyenletnek.

Ezt felhasználva, az ε_x , illetve ε_{xx} független változókat megtartva, a hullámterjedési egyenletekből származó lehetséges anyagtörvények

$$F(\sigma, \varepsilon, \sigma_x, \varepsilon_x) = 0, \quad c = \sqrt{-\frac{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x}}{\rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}}}, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_x}}{\rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}} < 0. \quad (21)$$

vagy

$$F(\sigma, \varepsilon, \sigma_t, \varepsilon_x, \varepsilon_t) = 0,$$

ha (14) egyenletnek három valós gyöke van c -re, és ezek között legalább egy negatív, BédaGy (1997), (gradiens anyag).

A (14)-et megtartva, és megkövetelve, hogy ε_t változó maradjon, a lehetséges anyagtörvény változói a σ és ε mellett σ_t és ε_t lehet, ekkor

$$c = \sqrt{-\frac{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_t}}{\rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_t}}}, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_t}}{\rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_t}} < 0. \quad (22)$$

Ha σ_x , σ_t , ε_x , ε_t az anyagtörvény változói, akkor a c -ben harmadfokú egyenlet gyöke valós pozitív és negatív mennyiségek, BédaGy (1997).

A (18) hullámterjedési egyenlet használatával nézzük meg az alakváltozás második gradiensét tartalmazó ε_{xx} -re vonatkozó lehetséges anyagtörvényt.

Ha ε_{xx} mellett ε_{tt} is változója az anyagtörvénynek az egy lehetséges egyenlet mert ekkor a terjedési sebesség (19) képletnek megfelelő

$$c = \sqrt{-\frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}}}{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}}}} \quad \text{ha} \quad \frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}}}{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}}} < 0 \quad (23)$$

Másik lehetséges anyagtörvény, ha az ε_{xx} mellett σ_{xx} is változó. Ekkor a c terjedési sebesség

$$c = \sqrt{-\frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}}}{\frac{\partial G}{\partial \sigma_{xx}}}} \quad \text{ha} \quad \frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}}}{\frac{\partial G}{\partial \sigma_{xx}}} < 0 \quad (24)$$

Harmadik eset, hogy ε_{xx} mellett még a σ_{tt} is a változó. A terjedési sebesség

$$c = \sqrt[4]{-\frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}}}{2\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}}}} \quad \text{ha} \quad \frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}}}{\frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}}} < 0 \quad (25)$$

Végül lehetséges, hogy valamennyi deriváltat tartalmazó anyagtörvény a lehetséges. Ebben az esetben a negyedfokú (18) egyenletnek legalább két valós gyöke van, egy pozitív és egy negatív.

Legyen most olyan az anyagtörvény, amelyben σ_{tt} mellett még ε_{tt} -t is változó (első eset) vagy σ_{xx} (második eset). Az első esetben a terjedési sebesség

$$c = \sqrt{-\frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}}}{\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}}}} \quad \text{ha} \quad \frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{tt}}}{\frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}}} < 0 \quad (26)$$

a második esetben

$$c = \sqrt{-\frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}}}{2\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}}}} \quad \text{ha} \quad \frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{xx}}}{\frac{\partial G}{\partial \sigma_{tt}}} < 0 \quad (27)$$

A dolgozat kezdeti feladata az volt, hogy vizsgálja a Poyting-Thomson-Jeffery ε_{tt} -t is tartalmazó, és a ε_{xx} második alakváltozási gradienst tartalmazó anyag-törvényeket. Eredmény a két modell egyesítése, vagyis olyan anyagtörvény lehetséges, amely az ε_{tt} -t és ε_{xx} -et is tartalmazza. Az anyag általában ennek alapján nem lokális, a lokális alakban ε_{tt} és σ_{tt} változókat tartalmazza

Lehetséges anyagtörvények a lokális anyagok esetében is vannak. Ilyen a (22), (26) és (20), ekkor az anyagtörvénynek az ε_x , illetve az ε_{xx} nem változója.

Az anyagok többsége nem lokális. A Poyting-Thomson-Jeffery anyagtörvény akkor lehetséges, ha nem-lokális az anyag, azaz az ε_{xx} -et tartalmazza. A törvény lehet lokális, ha változók ε_{tt} és σ_{tt} második deriváltak. A (25) és (26) terjedési sebességű anyagok anyagtörvényei módosított egyenleteknek tekinthetők.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- Béda Gy. 1997. Constitutive equations and nonlinear waves. *Nonlinear Analysis* 30, 397-407.
- Béda Gy., Béda P.B. 1999. A study on constitutive relations for copper using the acceleration waves and the theory of dynamical systems *Proc. Estonian Academy of Scis.* 5, 1010-111
- Béda Gy. 2010 The principle of virtual work and the third order wave for continua with second order constitutive equation. *Int. Appl. Mechanics* 10, 136-143
- Lebon G. 1971 Thermodynamique des phenomenes inversible *Cahiers de Mécanique* 34
- Verhás J. 1985. *Termodinamika és reológia* Műszaki könyvkiadó

Termodinamikailag konzisztens, kiterjesztett szimplektikus numerikus végesdifferencia-séma csatolt termo-viszkoelasztikus problémák megoldásához

Thermodynamically consistent, extended symplectic finite difference scheme for solving coupled thermo-viscoelastic problems

Takács Donát M.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék; Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, takacs@energia.bme.hu

Fülöp Tamás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék; Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, fulop.tamas@gpk.bme.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: Kőzetek esetében gyakran megfigyelhető jelenség a reológiai ill. viszkoelasztikus mechanikai viselkedés. Ehhez gyakran olyan körülmények is társulnak, melyek elengedhetlenné teszik a termikus viselkedés (hővezetés, hőtágulás) figyelembevételét is. Az alábbiakban az ilyen, csatolt termo-viszkoelasztikus problémák megbízható numerikus szimulációjára ismertetünk egy termodinamikailag konzisztens kontinuum-modellt és végesdifferencia-sémát egy térdimenzióban. A szimplektikus módszerek kiterjesztésén alapuló séma képes a termodinamikai értelemben vett összenergia megőrzésére hosszú időn át az elenyésző numerikus disszipációnak köszönhetően, és a diszperziós hiba is minimalizálható, így a séma alkalmas disszipatív folyamatok és hullámterjedés egyidejű modellezésére is. A termodinamikai konzisztencia által biztosított diszkretizált entrópiatermelődés követése pedig előrejelzést nyújthat a séma stabilitásvesztéséről.

Kulcsszavak: szimplektikus numerikus módszerek, végesdifferencia módszerek, termomechanika, termo-viszkoelasztikus viselkedés

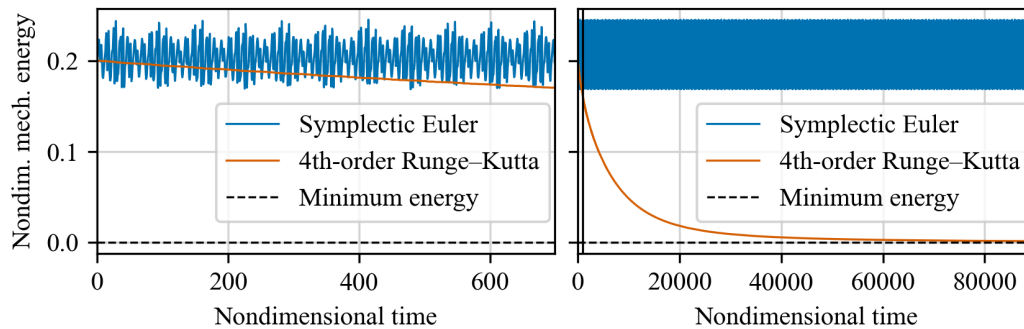
ABSTRACT: In rocks, viscoelastic or rheological behaviour is commonly observed. This often occurs in situations where thermal effects must also be taken into account. For the reliable solution of such coupled thermo-viscoelastic problems, we present a thermodynamically consistent continuum model and a corresponding numerical scheme in one spatial dimension. Based on the extension of symplectic methods, our method is able to conserve the total (thermodynamical) energy of the system over long timescales due to the negligible numerical dissipation, while the dispersion error can also be minimized, thus the numerical method is suitable for modelling dissipative processes occurring simultaneously with wave propagation. Furthermore, by following the discretized entropy production provided by the thermodynamical consistency, stability loss can be anticipated before it actually occurs.

Keywords: symplectic numerical methods, finite difference schemes, thermomechanics, thermo-viscoelastic behaviour

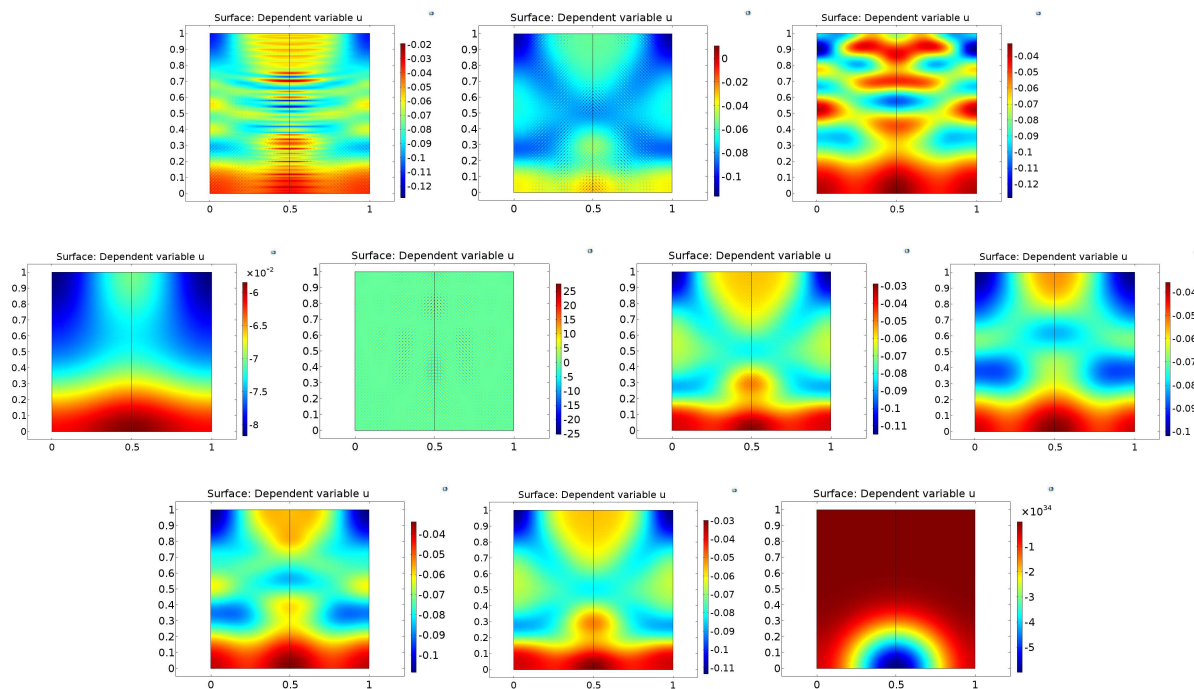
1 BEVEZETÉS

Autonóm (időfüggetlen) hamiltoni mechanikai rendszerek szimulációja esetében jól bevált eljárás a szimplektikus numerikus módszerek használata [7]. Ezek lehetővé teszik a hamiltoni mechanika egyes előnyös tulajdonságainak megőrzését a diszkretizált, numerikus esetben is. Ilyen tulajdonság például az, hogy egy időinvariáns dinamikai rendszer összenergiája hosszabb távon is a valódi összenergia közelében marad, ellentétben olyan hagyományos eljárásokkal, mint például az explicit Euler-módszer vagy a Runge–Kutta-módszerek családja, melyek a diszkretizáción keresztül fizikailag valótlanul energiát disszipálnak el a rendszerből, ill. éppen energiát adnak ahhoz. (Ezt az 1. ábra illusztrálja.) Ez a jelenség számos elterjedt numerikus módszer esetében megfigyelhető, és messzemenő problémákat okozhat olyan

[†]Jelen írás a 2022-ben Portóban tartott 1st International Conference on Mechanics of Solids konferencián bemutatott, folyóiratcikként is benyújtott eredményeket és az azóta elért újabb, kapcsolódó eredményeket ismerteti.



1. ábra. Két szabadságfokú, rugós síkinga mozgásának szimulációja szimplektikus Euler- és negyedrendű Runge–Kutta-módszerrel (balra: rövidebb, jobbra: hosszabb időskálán). Míg az előbbi séma esetén a rendszer összenergiája az egzakt érték körül marad hosszú időn át is, az utóbbi esetén valótlan módon lecsökken. (Az időlépés a két számítás során azonos, és – a különbségek illusztrálása végett – viszonylag nagy, $\Delta t = 0.7$.) (Simulation of two DoF planar elastic pendulum using symplectic Euler and Runge–Kutta numerical methods (left: shorter, right: longer timescale). While, with the former method, the total energy of the system stays around the exact value even after a long time, for the latter it decreases in an unrealistic way. (The size of the time step for the two simulations was identical, and was chosen – for demonstrational purposes – to be relatively large, $\Delta t = 0.7$))



2. ábra. A megoldásmező $u(2, x, y)$ pillanatképe a $\partial^2 u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2$ egyenlet Neumann-peremfeltétellel, a COMSOL kereskedelmi szoftverrel végzett numerikus szimulációjából, az alsó élen impulzusszerű gerjesztéssel, tíz különféle numerikus módszerrel (balról jobbra és lentől felfelé: BDF 2-5, DP5 Smooth, BDF 2-3; BDF 1-1, DP5 PI-Standard, DP5 PI-Quick, BDF 3-5 Strict; Generalized- α , RK34 Auto, Gen.- α Predictor Const.) (Solution snapshot $u(2, x, y)$ of $\partial^2 u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2$ with Neumann boundary condition, a single pulse applied at the bottom edge, via ten different solution methods (left-to-right and top-to-bottom: BDF 2-5 etc., see above))

egyszerű numerikus szimulációk során is, mint például egy kétdimenziós hullám terjedése, ahogyan a 2. ábrán is látható.

Disszipációt a valóságban is mutató – például hővezetést, reológiát vagy koncentrált paraméterű csillapítást tartalmazó – rendszerek modellezése esetében a numerikus disszipáció minimálisra csökkentése különösen előnyös tulajdonsága lehetne egy megfelelő numerikus módszernek: hiszen ellenkező esetben az eredmények értelmezése során lehetetlen elkülöníteni a fizikai jelenségekhez tartozó disszipációt a

diszkrétizálásból származótól. Ahhoz azonban, hogy ezeket a folyamatokat fizikai modellekben is meg tudjuk fogalmazni, egy olyan megközelítésre van szükség, amely képes különféle jelenségek egységes tárgyalására: ilyenek a jelen írásban vizsgált termo-viszkoelasztikus problémák is.

Az irreverzibilis termodinamika elméleti eszköztárát ad arra, hogy disszipatív folyamatokat is tartalmazó csatolt jelenségek fizikai modelljeit egységes keretben, ellentmondásmentesen fogalmazhassuk meg. Így lehetséges az, hogy a hagyományosan termodinamikához köthető belső energia fogalmát például olyan mechanikai rendszerekre is alkalmazhatjuk, melyekben a disszipált energia mennyisége mechanikai folyamatok eredménye, pl. reológiai vagy viszkoelasztikus anyagokat leíró kontinuum-mechanikai modellekben, vagy csillapítással is rendelkező pontmechanikai rendszerek esetében. Az egységes keret ráadásul olyan konzisztenciát nyújt, mely konkrét numerikus alkalmazások esetén is igen hasznosnak bizonyul, például a termodinamika második főtétele és az általa megtestesített aszimptotikus stabilitáson keresztül.

Ezt a megközelítést alkalmazva számos korábbi eredmény született már kutatócsoportunkban, például saját fejlesztésű végesdifferencia-sémák a Poynting–Thomson–Zener (PTZ) anyagi viselkedést mutató kontinuumok egy- [6] ill. háromdimenziós [13, 12] egyszerű geometriákon való numerikus szimulációjára. Jelen írásban ennek a törekvésnek egy következő állomását mutatjuk be, ahol a viszkoelasztikus mechanikai viselkedéshez csatolódó hővezetést és hőtágulást is modellezzük egy egydimenziós tartományon, valamint ezt a modellt egy kiterjesztett szimplektikus sémával léptetjük térben és időben. Először a jelenségeket leíró kontinuum-modellt tekintjük, majd ennek numerikus számításokhoz használható diszkrétizációját, végül pedig az elvégzett konkrét numerikus szimulációkat és a módszer gyakorlati alkalmazhatóságát ismertetjük.

2 KONTINUUM-EGYENLETEK

A vizsgált, egydimenziós kontinuumot leíró egyenletek a következők:

$$\varrho \dot{v} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\sigma = \sigma_{\text{el}} + \hat{\sigma}, \quad (2)$$

$$L = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\hat{\sigma} + \tau \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial t} = \hat{I} L, \quad (4)$$

$$e_{\text{tot}} = \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{e_{\text{kin}}} + e_{\text{int}}, \quad (5)$$

$$e_{\text{int}} = \underbrace{c_{\text{ex}} (T - T_{\text{ex}})}_{e_{\text{thermal}}} + \underbrace{\frac{E}{2\varrho} \epsilon (\epsilon + \alpha T_{\text{ex}})}_{e_{\text{el}}} + \underbrace{\frac{\tau}{2\varrho \hat{I}} \hat{\sigma}^2}_{e_{\text{rheol}}} \quad (6)$$

$$s = c_{\text{ex}} \ln \frac{T}{T_{\text{ex}}} + \frac{E\alpha}{\varrho} \epsilon, \quad (7)$$

$$j_e = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (8)$$

$$j_s = \frac{1}{T} j_e, \quad (9)$$

$$\pi_s = \frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial x} j_e + \frac{1}{\hat{I} T} \hat{\sigma} \left(\hat{I} L - \tau \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial t} \right), \quad (10)$$

$$\varrho \frac{\partial e_{\text{int}}}{\partial t} = -\frac{\partial j_e}{\partial x} + \sigma L, \quad (11)$$

$$\varrho \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial j_s}{\partial x} + \pi_s, \quad (12)$$

$$(13)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = L, \quad (14)$$

$$\epsilon = D + \alpha(T - T_{\text{ex}}), \quad (15)$$

$$\sigma_{\text{el}} = ED. \quad (16)$$

Itt a térbeli dimenzió mentén az x koordináta írja le az állandó ρ sűrűségű test pontjainak helyzetét, kis alakváltozásokat feltételezve. Az (1) lendületmérleg megadja a v sebesség időbeli fejlődését a σ feszültség divergenciáján keresztül. A feszültség egy σ_{el} reverzibilis és egy $\hat{\sigma}$ irreverzibilis rész összege (2). Az L sebességgradiens (3) segítségével $\hat{\sigma}$ onsageri időfejlődése (4) szerint fejezhető ki ([2] nyomán, a PTZ-esetre alkalmazva). Itt az onsageri relációk következménye, hogy $\hat{I}$ pozitív kell, hogy legyen [4].

A belső energia (11) és az entrópia (12) mérlegének megfogalmazásához szükség van a konstitúciós összefüggésekre. Az e_{tot} fajlagos összenergia az e_{kin} fajlagos mozgási energia és az e_{int} fajlagos belső energia összege. A belső energiára vonatkozó (6) összefüggés [9, 10] nyomán lett meghatározva, részletesebb leírást [16] tartalmaz.

A belső energia második állapotjelzője, T mellett, az ϵ geometriai mennyiség, amely megegyezik a hagyományos alakváltozással abban az esetben, ha a folyamat a feszültségmentes és termodinamikailag egyensúlyi $T = T_{\text{ex}}$ állapotból indul. Erre nézve másodrendű Taylor-sor szerinti kifejtés biztosítja a hooke-i rugalmas energia, valamint a hőtágulás figyelembe vételét az állandónak választott α hőtágulási együtthatón keresztül.

Végül, a harmadik állapotváltozó $\hat{\sigma}$,¹ melyhez tartozó e_{rheol} fajlagos reológiai energia (6)-beli kifejezésében az állandó $\tau/(2\rho\hat{I})$ együtthatót rögzíti a (4) és (11) egyenletekkel való termodinamikai konzisztencia. Hasonlóan, termodinamikai megfontolásokon keresztül adódik az s fajlagos entrópiát meghatározó (7) összefüggés is, az $e_{\text{thermal}} + e_{\text{el}}$ reverzibilis összegre alkalmazott Gibbs-reláción keresztül. A j_e hőáramsűrűség a Fourier-törvénynek (8) megfelelően viselkedik állandó λ hővezetési tényezővel, a j_s entrópiaáram-sűrűség pedig a szokásos (9) viszonyban van a j_e hőáramsűrűséggel.

A π_s entrópiatermelődési ráta-sűrűség két tagból áll, melyek közül az első a (8) egyenletnek, a második a (4) egyenletnek megfelelően nemnegatív lesz, így (fizikailag értelmes előjelű együtthatók mellett) az egyenletekbe beépítve teljesül a termodinamika második főtétele.

Végül, ϵ időbeli változását L határozza (14) meg [8, p. 21.], ahol ϵ a D rugalmas és az $\alpha(T - T_{\text{ex}})$ termikus részre bontható (15); előbbi a Hooke-törvényen (16) keresztül kapcsolódik a feszültség rugalmas részéhez. Érdekes megjegyezni, hogy itt az egyenletek megfogalmazásában nincsen direktben használva az u elmozdulás, azonban megkapható a sebesség időbeli integrálásával.

Ez az egyenletrendszer a korábbi [6, 13, 12] vizsgálatok során használt rendszer kiterjesztése Fourier-féle hővezetéssel és lineáris hőtágulással. Látható, hogy számos különféle mennyiség együttesen írja le a rendszert: ilyen esetekben gyakori megközelítés minél kisebbre csökkenteni ezek számát a numerikus megoldás során. Ettől eltérő módon mi a továbbiakban az összes mennyiséget megtartjuk annak érdekében, hogy azokon keresztül különféle peremfeltételek rugalmas alkalmazhatóságát biztosítsuk, valamint hogy lehetőséget adjanak a numerikus megoldás minőségének monitorozására, ami egy ilyen összetett, csatolt probléma esetében igen értékes a numerikus megoldások kiértékelése során.

3 DISZKRETIZÁCIÓ

A fenti (1)–(16) kontinuum-egyenleteket időben és térben is diszkretizáljuk. A szimplektikus numerikus módszerek hagyományosan véges dimenziójú dinamikai rendszerekhez használatosak, így jelen esetben külön térbeli diszkretizációra van szükség. (A nemreverzibilis jelenségeket leíró egyenletek léptetésére nem használható a szimplektikus megközelítés, ezeknél más, e célra kifejlesztett, másodrendben pontos explicit léptetést alkalmazunk.) A térbeli és időbeli diszkretizációs séma azonban sajátos, mivel egyes mennyiségek esetében az indexek fél lépéssel el vannak tolva térben vagy időben.

Ez a megközelítés a [6, 5]-ban foglaltak kiterjesztése további mennyiségekre: téridő-alapú megfontolások alapján bizonyos (tipikusan időbeli vagy térbeli deriváltakkal származtatott) mennyiségek természetesebben számíthatóak a féllel eltolt indexű helyeken az egész indexű mennyiségekből. Ezt az elrendezést

¹PTZ-esetben a Kluitenberg–Verhás-modellbeli belső változó $\hat{\sigma}$ formájában fejezhető ki.

1. táblázat. A végesdifferencia-séma. A szürkével jelölt mennyiségek segédmennyiségek, nem részei a diszkrét megoldásmezőnek. (*The finite-difference scheme. Grey quantities are auxiliary ones, not considered to be numerical solution values*)

$t \backslash x$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$\dots$	$n - \frac{1}{2}$	n	$n + \frac{1}{2}$	$\dots$
$-\frac{1}{2}$	v, j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	v, j_e	$\dots$	v, j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	v, j_e	$\dots$
0	j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	j_e	$\dots$	j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	j_e	$\dots$
$+\frac{1}{2}$	v, j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	v, j_e	$\dots$	v, j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	v, j_e	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$j - \frac{1}{2}$	v, j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	v, j_e	$\dots$	v, j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	v, j_e	$\dots$
j	j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	j_e	$\dots$	j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	j_e	$\dots$
$j + \frac{1}{2}$	v, j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	v, j_e	$\dots$	v, j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	v, j_e	$\dots$
$j + 1$	j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	j_e	$\dots$	j_e	$D, \epsilon, \sigma, \hat{\sigma},$ $\sigma_{el}, e_{int}, T, L$	j_e	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$

illusztrálja az 1. táblázat. Egyes mennyiségek azonban mind egész, mind féllel eltolts indexű helyeken számítva vannak: ilyen esetben az 1. táblázatban szürkével jelölt mennyiségek nem számítási eredményeknek tekintendők, hanem segédmennyiségeknek, hasonlóan a Runge–Kutta-módszerek közbülső számítási értékeihez. Ezek a segédmennyiségek a [6, 5]-beli sémát megtörő Fourier-hővezetés miatt lettek bevezetve, annak érdekében, hogy a séma időben másodrendű maradjon. Az így kapott séma mind térben, mind időben másodrendű pontosságot nyújt.

A fentieknek megfelelően a térben egész ill. feles indexű térpontok jelölése $x_n = n\Delta x$ ill. $x_{n-1/2} = (n - 1/2)\Delta x$. Hasonlóan, a megfelelő időpillanatok jelölése $t^j = j\Delta t$ ill. $t^{j-1/2} = (j - 1/2)\Delta t$. Az alábbiakban a diszkrétizált egyenletekből számított mennyiségek indexelése is ezt a konvenciót követi.

A kezdeti feltételeket az eltolts időlépéseknek megfelelően kell előírni a t^0 ill. $t^{-1/2}$ pillanatokban a számított mennyiségekre. A jelen írásban vizsgált minden szimuláció egyensúlyi állapotból (azaz $v, \sigma_{el}, \hat{\sigma}, L, \epsilon, D, j_e, j_s$ és π_s zérus), és homogén $T = T_{ex}$ hőmérséklettel indul.

A peremfeltételek a vizsgált esetekben mind adiabatikusak, azaz $j_e = 0$ van előírva az $x_{-1/2}$ és $x_{N+1/2}$ pontokban, mechanikailag pedig egyetlen, t_b időtartamú és v_b nagyságú sebességimpulzus van előírva az $x_{-1/2}$ peremen, azaz

$$v(t, x_{-1/2}) = \begin{cases} \frac{v_b}{2} \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{t_b}\right) \right] & \text{ha } 0 \leq t \leq t_b \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad (17)$$

míg az $x_{N+1/2}$ végpont végig rögzített, azaz ott $v = 0$ minden időpillanatban. Ezekkel a peremfeltételekkel a sebességimpulzus után a rendszer összenergiája nem csökkenhet, hiszen miattuk sem termikus energiaközlés, sem mechanikai munkavégzés nem történhet a peremeken. A rendszer összenergiájának növekedése pedig megjósolható az $x_{-1/2}$ -nél lévő peremen vett mechanikai teljesítmény időbeli integráljával, ha $t \leq t_b$.

A diszkrétizált egyenletekből származtatott explicit numerikus sémát a (18)–(20) összefüggések írják le. Az egyes egyenlőségjelek feletti számok azokat az egyenleteket jelölik, amelyekből az adott diszkrétizált egyenlet származtatva lett.

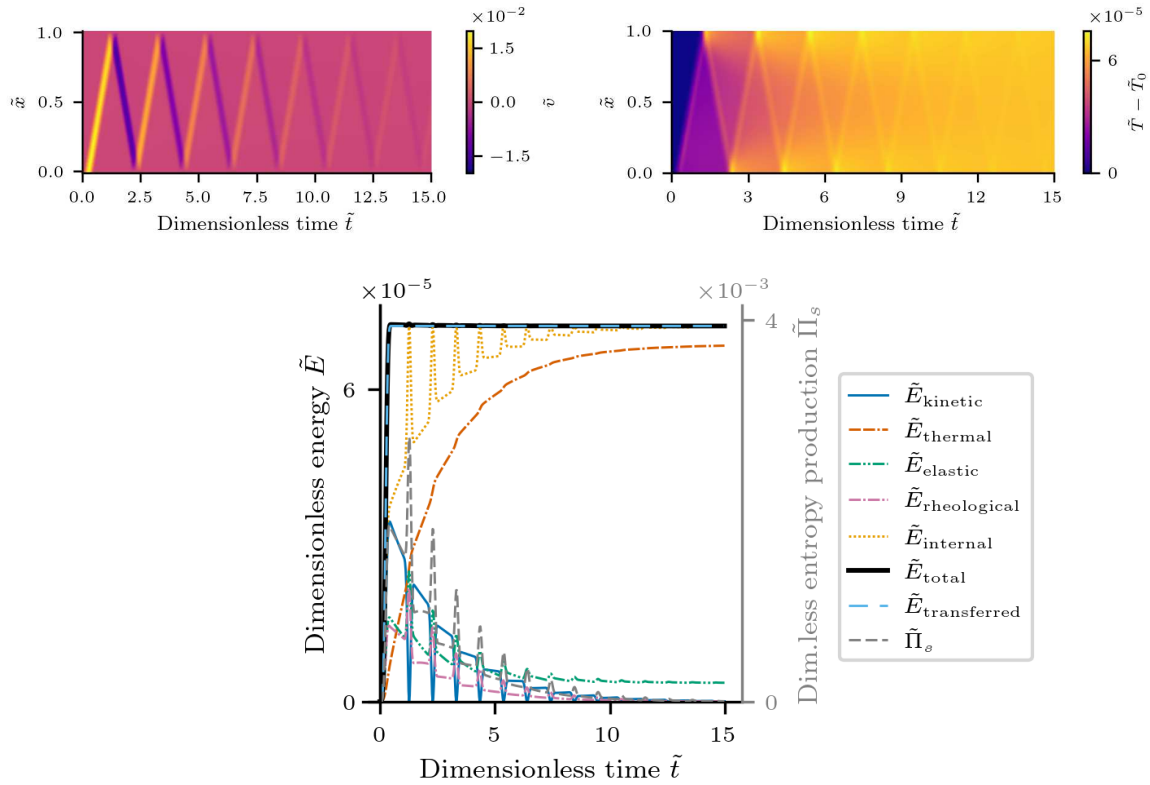
$$\begin{aligned}
v_{n+1/2}^{j+1/2} &\stackrel{(1)}{=} v_{n+1/2}^{j-1/2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sigma_{n+1}^j - \sigma_n^j \right), \\
L_n^{j+1/2} &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\Delta x} \left(v_{n+1/2}^{j+1/2} - v_{n-1/2}^{j+1/2} \right), \quad L_n^j = \frac{1}{2} \left(L_n^{j+1/2} + L_n^{j-1/2} \right), \\
\epsilon_n^{j+1} &\stackrel{(14)}{=} \epsilon_n^j + \Delta t L_n^{j+1/2}, \quad \epsilon_n^{j+1/2} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_n^{j+1} + \epsilon_n^j \right), \\
\hat{\sigma}_n^{j+1} &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{\frac{\tau}{\Delta t} + \frac{1}{2}} \left[\hat{L}_n^{j+1/2} + \left(\frac{\tau}{\Delta t} - \frac{1}{2} \right) \hat{\sigma}_n^j \right], \quad \hat{\sigma}_n^{j+1/2} = \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}_n^{j+1} + \hat{\sigma}_n^j \right),
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
(e_{\text{int}})_n^{j+1/2} &\stackrel{(11)}{=} (e_{\text{int}})_n^{j-1/2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(j_e)_{n+1/2}^j - (j_e)_{n-1/2}^j \right] + \frac{\Delta t}{\varrho} \sigma_n^j L_n^j, \\
T_n^{j+1/2} &\stackrel{(6)}{=} T_{\text{ex}} + \frac{1}{c_{\text{ex}}} \left[(e_{\text{int}})_n^{j+1/2} - \frac{E}{2\varrho} \epsilon_n^{j+1/2} \left(\epsilon_n^{j+1/2} + \alpha T_{\text{ex}} \right) - \frac{\tau}{2\varrho \hat{I}} \left(\hat{\sigma}_n^{j+1/2} \right)^2 \right], \\
(j_e)_{n+1/2}^{j+1/2} &\stackrel{(8)}{=} -\frac{\lambda}{\Delta x} \left(T_{n+1}^{j+1/2} - T_n^{j+1/2} \right), \\
D_n^{j+1/2} &\stackrel{(15)}{=} \epsilon_n^{j+1/2} - \alpha \left(T_n^{j+1/2} - T_{\text{ex}} \right), \\
(\sigma_{\text{el}})_n^{j+1/2} &\stackrel{(16)}{=} E D_n^{j+1/2}, \quad \sigma_n^{j+1/2} \stackrel{(2)}{=} (\sigma_{\text{el}})_n^{j+1/2} + \hat{\sigma}_n^{j+1/2},
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
(e_{\text{int}})_n^{j+1} &\stackrel{(11)}{=} (e_{\text{int}})_n^j - \frac{1}{\varrho} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[2(j_e)_{n+1/2}^j - (j_e)_{n+1/2}^{j-1/2} \right] - \left[2(j_e)_{n-1/2}^j - (j_e)_{n-1/2}^{j-1/2} \right] \right\} + \frac{\Delta t}{\varrho} \sigma_n^{j+1/2} L_n^{j+1/2}, \\
T_n^{j+1} &\stackrel{(6)}{=} T_{\text{ex}} + \frac{1}{c_{\text{ex}}} \left[(e_{\text{int}})_n^{j+1} - \frac{E}{2\varrho} \epsilon_n^{j+1} \left(\epsilon_n^{j+1} + \alpha T_{\text{ex}} \right) - \frac{\tau}{2\varrho \hat{I}} \left(\hat{\sigma}_n^{j+1} \right)^2 \right], \\
(j_e)_{n+1/2}^{j+1} &\stackrel{(8)}{=} -\frac{\lambda}{\Delta x} \left(T_{n+1}^{j+1} - T_n^{j+1} \right), \\
D_n^{j+1} &\stackrel{(15)}{=} \epsilon_n^{j+1} - \alpha \left(T_n^{j+1} - T_{\text{ex}} \right), \\
(\sigma_{\text{el}})_n^{j+1} &\stackrel{(16)}{=} E D_n^{j+1}, \quad \sigma_n^{j+1} \stackrel{(2)}{=} (\sigma_{\text{el}})_n^{j+1} + \hat{\sigma}_n^{j+1}.
\end{aligned} \tag{20}$$

4 NUMERIKUS EREDMÉNYEK

A fentebb bemutatott numerikus sémával, kezdeti és peremfeltételekkel az anyagjellemzőktől függően különféle jelenségek figyelhetők meg, melyek jól illusztrálják a modell mögött meghúzódó fizikai folyamatokat és a numerikus módszer jellegzetességeit. Ehhez háromféle anyagot használtunk, melyek: Stripa gránit [15, 3, 14], poliamid-6 polimer [11, 1], és egy nem létező, virtuális anyag egyes jelenségek jobb megjelenítésére.



3. ábra. *Első sor:* A sebességmező (bal) és a hőmérséklet (jobb) tér-idő szerinti ábrázolása, erős mechanikai disszipáció és hővezetés mellett. A sebességmezőhöz hasonlóan viselkedik a többi mechanikai és kinematikai mennyiség is. A disszipáció által okozott (és a mozgó impulzus körül koncentrálódó) hőmérséklet-inhomogenitást kisimítja a hővezetés. *Második sor:* a különféle energiafajták (térbeli integrálok) és az entrópiatermelés-ráta (π_s térbeli integrálja) időbeli alakulása. (*First row: Space-time dependence of velocity (left) and of temperature (right) when both mechanical dissipation and heat conduction are strong. Other mechanical and kinematic quantities behave similarly to velocity. Temperature inhomogeneity created by dissipation (which is concentrated along the path of the travelling pulse) gets homogenized by heat conduction. Second row: time dependence of the corresponding various energies (space integrals) and of entropy production rate (space integral of π_s).*)

A numerikus szimulációk számítása dimenziótlan mennyiségekben történt (ezek felső hullámmal vannak jelölve): hosszegységként a minta X hosszát, időegységként a – maximálisan $(\hat{E}\tau/\rho)^{1/2}$ sebességgel terjedő – reológiai hullám által X megtételéhez szükséges időt használtuk. Ezek, és az E Young-modulus segítségével kifejezhető a tömeg egysége, c_{ex} segítségével pedig a hőmérséklet egysége.

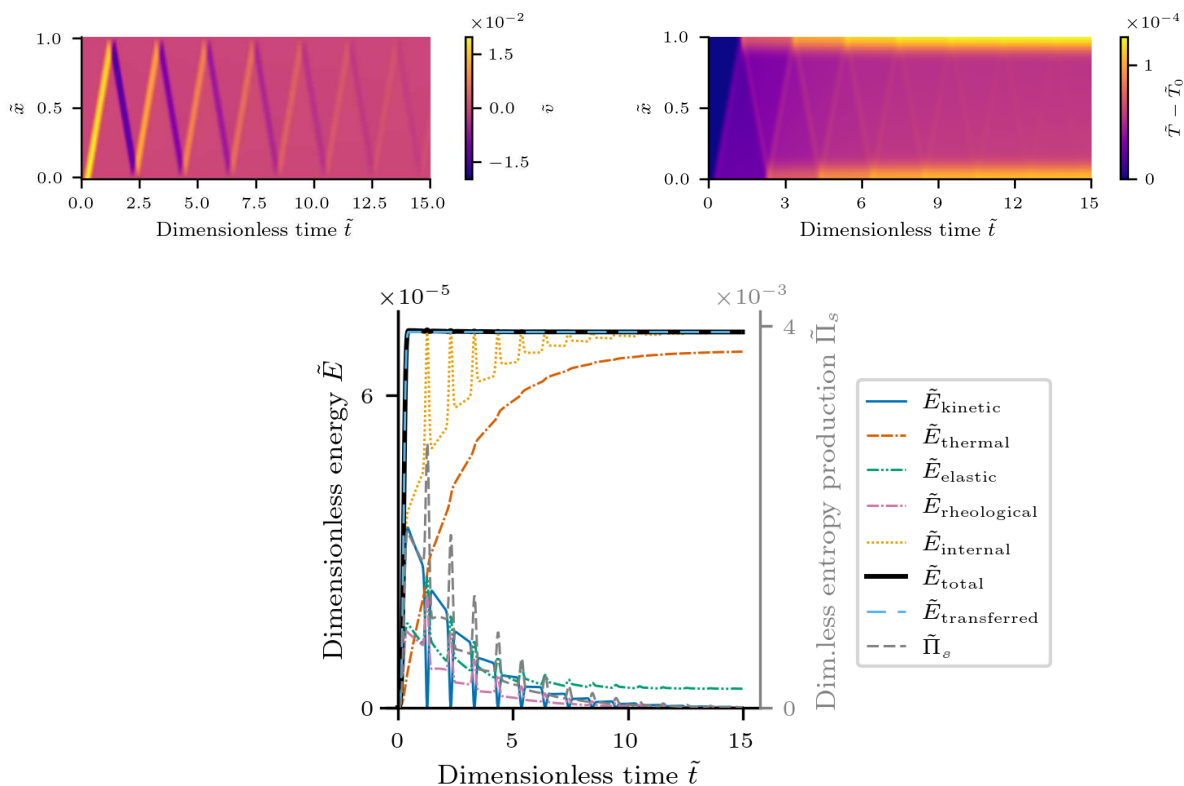
A térbeli diszkretizációhoz $N = 40$ cellát alkalmaztunk, a szimuláció teljes dimenziótlan ideje minden esetben $\tilde{t} = 15$ volt. (Azaz egy maximális sebességgel terjedő reológiai hullám éppen 15-ször futna végig a szimuláció alatt a minta mentén.) Az időlépést azokban az esetben, ahol ez nincsen külön kiemelve, úgy határoztuk meg, hogy a $\hat{C} = \hat{c} \frac{\Delta t}{\Delta x}$ reológiai Courant-szám 1 legyen.

A 3. ábrán látható eredmények a virtuális anyagjellemzőkkel való szimulációból származnak, ahol a reológiai disszipáció és a hőterjedés sebessége hasonló, így jól megfigyelhetők a csatolt jelenségek. A sebességimpulzus terjedése közben, különösen a széleken való visszapattanáskor, a reológia folytán hő fejlődik, ami szétterjed a mintában és megemeli annak hőmérsékletét. Ez a folyamat jól láthatóan a termikus és mechanikai egyensúly felé tart, $\tilde{t} = 15$ -nél már közelítőleg be is állt a homogén hőmérséklet, és a sebességimpulzus amplitúdója is jelentősen csökkent a kezdetihez viszonyítva.

Ennek megfelelően alakulnak a 3. ábra alsó grafikoján ábrázolt különféle típusú energiák is. A mozgási és rugalmas energia fokozatosan termikus (és így belső) energiává alakul. Minden energiátípus az előre megjósolható, egyensúlyi értékéhez tart aszimptotikusan. Eközben a numerikusan kapott megoldásmezőkből számított összenergia a sebességimpulzus megjelenése után – a peremfeltételeknek megfelelően – végig szinte teljesen állandó marad. Vegyük észre, hogy az összenergia nem időléptető egyenletből származik, tehát az energiaőrzés a numerikus séma saját, belső tulajdonsága. Ezeken túl az entrópiater-

melődés végig nemnegatív marad, a második főtéttel összhangban.

A környezettel való kezdeti kölcsönhatás során további ellenőrzési lehetőség a peremeken bevitt teljesítmény diszkrét integráljának összehasonlítása a rendszer összenergiájával. Ahogyan a 3. ábra alsó grafikóján is látható, a teljesítmény-integrált ($\tilde{E}_{\text{transferred}}$) végig követi a megoldámezőkből számított összenergia ($\tilde{E}_{\text{total}}$).



4. ábra. A 3. ábrával analóg szimuláció eredményei, de hővezetés nélkül. (*Results analogous to those in Figure 3 but with no heat conduction.*)

A numerikusan számított összenergián jól megfigyelhető, hogy a bemutatott séma nem mutat numerikus disszipációt, hiszen a mechanikailag és termikusan zárt rendszerből a szimuláció során nem tűnik el semmilyen energia, csak egyik típusból a másikba alakul a csatolt jelenségeken keresztül. Ezzel összhangban a valódi, fizikai disszipációs folyamatok a numerikus módszertől függetlenül figyelhetőek meg. Olyan, gyakran használt más időbeli léptetések, mint az explicit Euler- vagy a Runge–Kutta-séma esetén az összenergia nem maradna állandó magára hagyott rendszer esetében sem.

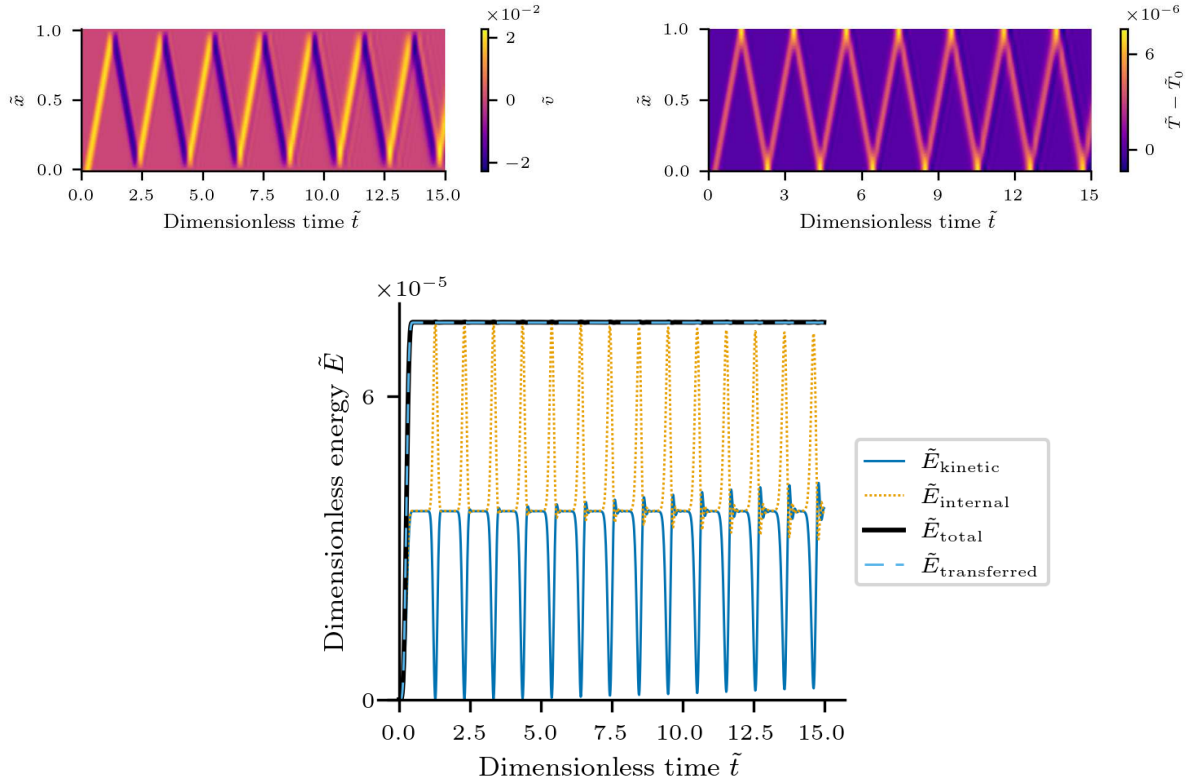
A 4. ábrán látható eredmények egy, az előzővel majdnem azonos futtatásból származnak, ahol az egyetlen különbség a két szimuláció között a hővezetés léte: az utóbbiban ez ki volt kapcsolva. Bár itt is ugyanúgy termelődik hő a reológiai folyamatok eredményeképpen, mint az előbbi esetben, de ennek megfelelően a hőmérséklet nem tud kiegyenlítődni a minta hossza mentén.

Az 5. ábrán látható eredmények egy poliamid-6 anyagjellemzőkkel történt szimulációból származnak. Itt az előző futtatásokkal ellentétben a Courant-szám $\hat{C} = 0,5$ -re lett állítva, hogy megfigyelhető legyen a numerikus módszer viselkedése diszperziós hiba mellett is. Lényeges eredmény, hogy bár a belső és a mozgási energiákban látható egy, a diszperzióból származó fiktív oszcilláció, de az összenergiában ez nem jelenik meg, az továbbra is állandó marad a kezdeti transziens után.

A termodinamikai konzisztenciából származó előnyöket jól illusztrálják a 6. ábrán látható eredmények. Ezt a szimulációt szándékosan olyan beállításokkal végeztük, hogy a séma hővezetésből származó stabilitási feltétele² ne teljesüljön: így egy idő után stabilitásvesztés történik. Ez jól látható $\tilde{t} = 2$ körül a sebesség tér-idő-diagramján és az összenergia exponenciális növekedésén is.

Azonban már ennél jóval előbb, $\tilde{t} = 1$ idő környékén megfigyelhető, hogy a Π_s entrópia-termelődés

²Numerikus kísérletek alapján: $\frac{\lambda}{\rho c_{\text{ex}}} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 0.333$.



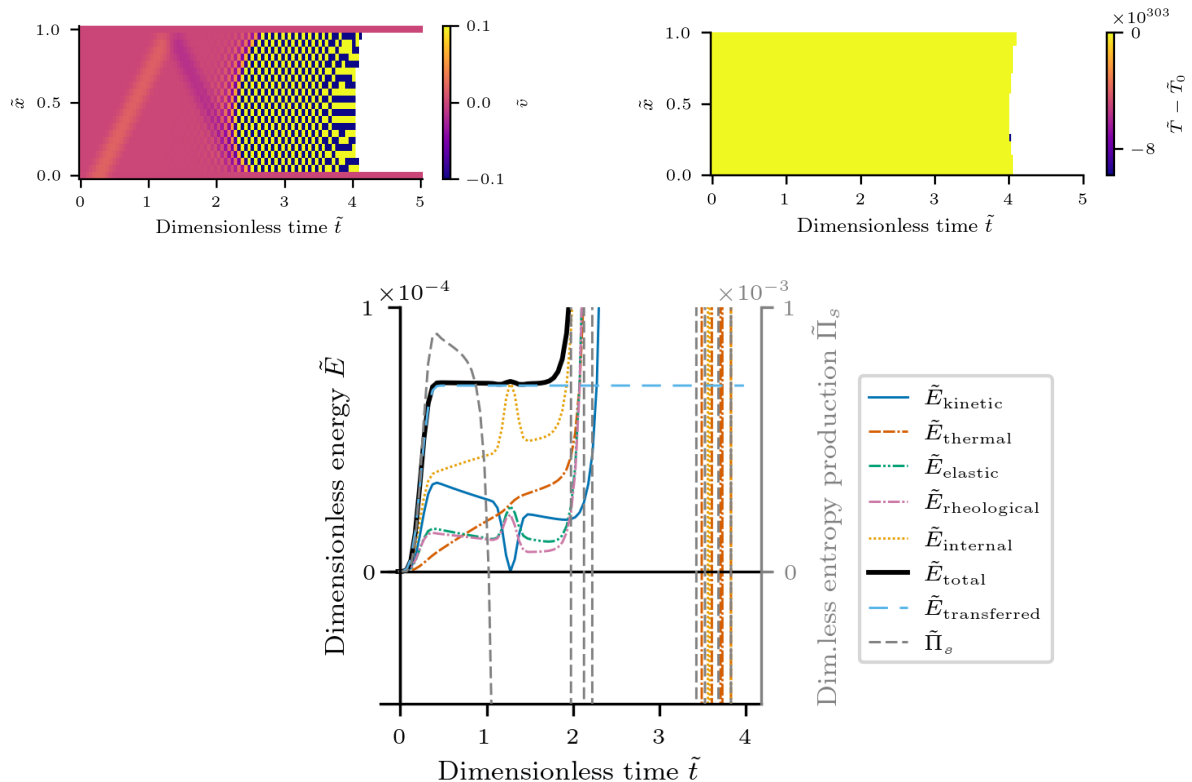
5. ábra. A Courant-szám $\hat{C} = 0,5$ -es értéke mellett diszperziós hiba figyelhető meg. Ezt a téridő-diagramokon az impulzus körül fokozatosan megjelenő szellemképeken, és a belső ill. mozgási energia oszcillációján láthatjuk. *(With Courant number $\hat{C} = 0.5$, dispersion error is observable. Note the gradually emerging ghost images around the pulse in the space-time diagrams, and the artificial oscillations in internal and kinetic energies.)*

negatívvá válik, ami ellentmond a termodinamika második főtételenek. Az ehhez használt – kontinuum-esetben garantáltan pozitív definit – π_s fajlagos mennyiség diszkretizálása szándékosan nem pozitív definit módon történt, a

$$(\pi_s)_n^{j+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{1}{T_{n+1}^j} - \frac{1}{T_n^j} \right) (j_e)_{n+1/2}^{j+1} + \left(\frac{1}{T_n^j} - \frac{1}{T_{n-1}^j} \right) (j_e)_{n-1/2}^{j+1} \right] + \frac{1}{\hat{I}} \frac{1}{T_n^j} \hat{I} L_n^{j+1/2} - \frac{\tau}{\Delta t} (\hat{\sigma}_n^{j+1} - \hat{\sigma}_n^j) \quad (21)$$

egyenlet szerint (a [13]-beli ötlet alapján, hogy monitorozhassuk a stabilitásvesztést). Mivel a termodinamika második főtétele a Ljapunov-féle aszimptotikus stabilitáshoz kapcsolódik, numerikus megsértése numerikus instabilitásra utalhat. Ezek alapján – megfelelő diszkretizációval – a Π_s mennyiség jól használható arra, hogy már a stabilitásvesztés láthatóvá válása előtt megjósoljuk azt. Ez egy összetett, időigényes szimuláció esetében igen hasznos eszközzé válhat a gyakorlatban.

A poliamid-6 és a Stripa gránit anyagjellemzőkkel való futtatások esetében nehezebb megfigyelni a csatolt folyamatokat, mivel a valós anyagoknál a hővezetés általában sokkal lassabb folyamat, mint a mechanikai (reológiai) hullámterjedés. Ezenkívül a reológiai folyamatok jelentősen lassabbak, mint a hullámterjedési sebesség, így a reológiából származó disszipált hő jóval nagyobb időskálán válna csak láthatóvá – annak ellenére, hogy a reológia hatása egyértelműen megjelenik a hullámterjedés során, hiszen a reológiai hullám terjedési sebessége eltér az rugalmas hullámétól. Egy ilyen, Stripa gránit anyagjellemzőkkel végzett szimulációt mutat a 7. ábra. A tény, hogy a numerikus módszer szimplektikussága megőrzi az összenergiát hosszútávon is a hullámterjedés megbízható számítása mellett, izgalmas lehetőségeket nyújt a módszer olyan későbbi alkalmazásaira nézve is, ahol ezeknek a kis változásoknak a kumulált hatása mégis megfigyelhető a gyakorlatban.



6. ábra. Stabilitásvesztés, melyet előrejelez a korábban negatívvá váló (és így a második főtétele sértő) diszkretizált entrópiatermelődés. (Vegyük észre a jobb felső ábrán a 10^{303} -os nagyságrendet.) (*Loss of stability, and how discretized entropy production rate becoming negative reveals the problem early, well before energies become problematic. (Note the 10^{303} scale in the upper right figure.)*)

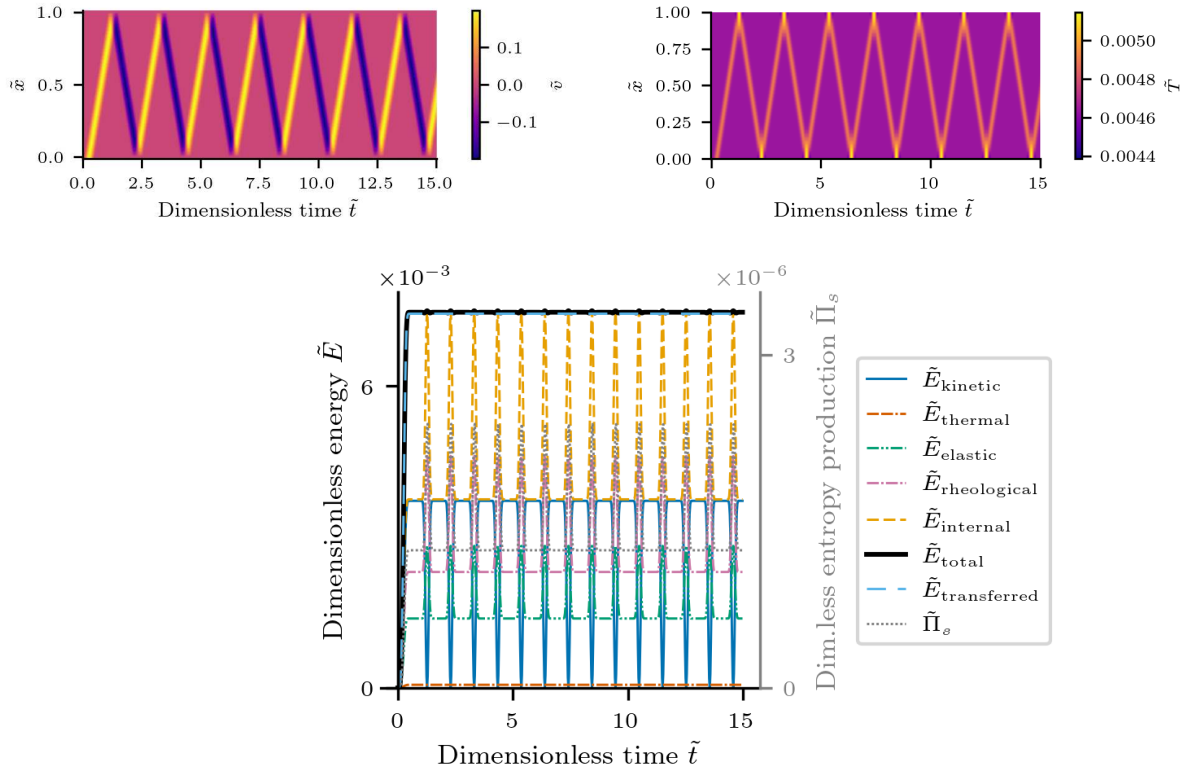
5 GYAKORLATI ALKALMAZHATÓSÁG

A bemutatott numerikus séma alkalmazhatósága igen széleskörű. Kifejlesztésének egyik fő motivációja a közetek viselkedésének több időskálán való modellezése volt olyan esetekben, ahol egyszerre és csatolva jelennek meg olyan hőtani és reológiai folyamatok, melyek elhanyagolása nem megengedhető. Ilyen alkalmazási terület például az elmozdulás-alapú overcoring feszültségmérési eljárás, a dilatációs rezonanciafrekvencia-módszer, vagy egy különösen nagy pontosságú ASR (Anelastic Strain Recovery) mérés.

A séma hosszútávú energiaőrzése lehetővé teszi elasztikus vagy reológiai hullámok megbízható szimulációját is kontinuumokban, a hőmérsékleti viszonyok figyelembevételével. Ez kulcsfontosságú olyan esetekben, amikor pl. a hagyományos modális módszerek nem alkalmazhatóak: ilyen a fentebb említett rezonanciafrekvencia-mérés is viszkoelasztikus anyagi viselkedés mellett, de ez a megközelítés nagyobb léptékű, földalatti létesítmények körüli szeizmikus és egyéb eredetű hullámok viselkedésének vizsgálatára is használható. Ez elengedhetetlen például a gravitációshullám-detektorok működését akadályozó gravitációs zaj előrejelzéséhez.

A közetek mellett sok esetben a polimerek, műanyagok viselkedése is erősen viszkoelasztikus és hőmérsékletfüggő [1]. A termodinamikailag konzisztens modellezés és megbízható numerikus szimuláció tehát lehetőséget nyújt a kúszási ill. feszültségrelaxációs jelenségek pontos előrejelzésére, additív gyártástechnológiák modellezésére és fáradási hatások figyelembevételére.

A bemutatott módszer gyakorlati felhasználását nagyban elősegíti, hogy a termodinamikai konzisztencia és a kiterjesztett szimplektikusság számos ellenőrzési lehetőséget nyújt a szimulációs eredmények értelmezése során. Az összenergia numerikus megtartása teljesíti a termodinamika első főtételének fizikai elvárásait, így az ettől eltérő eredmények felhívhatják a figyelmet a szimuláció beállításainak, kezdeti vagy peremfeltételeinek ill. a használt anyagi jellemzők valótanságára. Hasonlóan, az entrópia folyamatos követése a második főtételel keresztül további ellenőrzési lehetőségeket nyújt a numerikus számítás stabilitására nézve.



7. ábra. A 3. és a 4. ábrák szimulációjaihoz hasonló futtatás, azonban a Stripa gránit anyagjellemzőivel. Jól látható, hogy a reológiai relaxációs idő itt jelentősen nagyobb a hullámterjedéshez tartozó karakterisztikus időnél.

6 ÖSSZEFOGLALÓ, KITEKINTÉS

A bemutatott numerikus séma egy termodinamikailag konzisztens, egydimenziós kontinuum-modellre építve térben és időben másodrendű pontosságot nyújtva képes csatolt termo-viszkoelasztikus jelenségek szimulációjára végesdifferencia-módszerrel. Az időbeli léptetés a hagyományos szimplektikus módszerek kiterjesztése, így magára hagyott a rendszerek összenergiáját hosszú távon is megőrzi. Ennek megfelelően nem lép fel számottevő numerikus disszipáció, így a valós, disszipatív fizikai folyamatok megbízható előrejelzésére is lehetőség van, melyet a bemutatott numerikus eredményekkel is demonstráltunk. A diszkretizált entrópiatermelődést figyelemmel kísérve továbbá lehetőség nyílik a séma stabilitásvesztésének előrejelzésére a második főtételek keresztül.

A séma fentebb ismertetett, tervezett és lehetséges alkalmazási területei közül a kőzetek anyagjellemzőinek meghatározásánál alkalmazott dilatációs rezonanciafrekvencia-módszer eredményeinek kiterjesztett értelmezése különösen ígéretes: a reológiai és termikus jelenségek figyelembevételével pontosabb kiértékelés várható.

A még szélesebb alkalmazhatóság érdekében elengedhetetlen a séma kiterjesztése háromdimenziós geometriákra: ehhez a [6, 13, 12] szerinti, hőtágulás és hővezetés nélküli modellek esetén alkalmazott skaláris, majd tenzoriális megközelítés általánosítására van szükség.

Szintén további figyelmet érdemel a peremfeltételek szisztematikus kezelése: a séma explicitiségének megőrzése mellett a peremfeltételek egész ill. fél lépéseknél való megadása néhány esetben nem triviális, ennek konzisztens kezelése kézenfekvőbbé teheti a séma használatát különféle alkalmazások esetén.

7 KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutatás a Kulturális és Innovációs és Minisztérium ÚNKP-22-3-I-BME-96 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával, az NKFIH FK 134277 pályázat, és az NKFIH 2018-1.1.2-KFI-2018-00207

projekt támogatásával készült.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Asszonyi, C., Csátár, A. és Fülöp, T. „Elastic, thermal expansion, plastic and rheological processes – theory and experiment”. *Periodica Polytechnica Civil Engineering* 60.4 (2016), 591–601. old. doi: [10.3311/PPci.8628](https://doi.org/10.3311/PPci.8628).
- [2] Asszonyi, C., Fülöp, T. és Ván, P. „Distinguished rheological models for solids in the framework of a thermodynamical internal variable theory”. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 27.6 (2015), 971–986. old. doi: [10.1007/s00161-014-0392-3](https://doi.org/10.1007/s00161-014-0392-3).
- [3] Chan, T., Hood, M. és Board, M. „Rock properties and their effect on thermally induced displacements and stresses”. *Journal of Energy Resources Technology* 104.4 (1982), 384–388. old. doi: [10.1115/1.3230433](https://doi.org/10.1115/1.3230433).
- [4] Davarpanah, S. M., Ván, P. és Vásárhelyi, B. „Investigation of the relationship between dynamic and static deformation moduli of rocks”. *Geomechanics and Geophysics for Geo-Energy and Geo-Resources* 6.1 (2020), 29. old. doi: [10.1007/s40948-020-00155-z](https://doi.org/10.1007/s40948-020-00155-z).
- [5] Fülöp, T. „Wave Propagation in Rocks – Investigating the Effect of Rheology”. *Periodica Polytechnica Civil Engineering* 65.1 (2021), 26–36. old. doi: [10.3311/PPci.16096](https://doi.org/10.3311/PPci.16096).
- [6] Fülöp, T. és tsai. „Thermodynamical Extension of a Symplectic Numerical Scheme with Half Space and Time Shifts Demonstrated on Rheological Waves in Solids”. *Entropy* 22.2 (2020), 155. old. doi: [10.3390/e22020155](https://doi.org/10.3390/e22020155), URL: <https://doi.org/10.3390/e22020155>.
- [7] Hairer, E., Lubich, C. és Wanner, G. *Geometric numerical integration*. Second. 31. köt. Springer Series in Computational Mathematics. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations. Springer-Verlag, Berlin, 2006, xviii+644. old. ISBN: 3-540-30663-3; 978-3-540-30663-4.
- [8] Hetnarski, R. B. és Eslami, M. R. *Thermal stresses – Advanced theory and applications*. Dordrecht: Springer, 2009. ISBN: 978-1-4020-9246-6. doi: [10.1007/978-1-4020-9247-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9247-3).
- [9] Lubarda, V. A. „On Thermodynamic Potentials in Linear Thermoelasticity”. *International Journal of Solids and Structures* 41 (2004), 7377–7398. old. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2004.05.070](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.05.070).
- [10] Nowacki, W. *Thermoelasticity*. Oxford etc.: Pergamon Press, 1986. ISBN: 0-08-024767-9.
- [11] *Polyamide - Nylon 6 - Rod*. <https://www.goodfellow.com/uk/en-gb/displayitemdetails/p/am30-rd-000105/polyamide-nylon-6-rod> (Retrieved 2022-02-12). Goodfellow.
- [12] Pozsár, Á. „Wave propagation in viscoelastic solid media – thermodynamically consistent finite difference numerical investigations”. MSc thesis. Budapest, Hungary: Budapest University of Technology és Economics, 2021.
- [13] Pozsár, Á. és tsai. „Four Spacetime Dimensional Simulation of Rheological Waves in Solids and the Merits of Thermodynamics”. *Entropy* 22.12 (2020), 1376. old. doi: [10.3390/e22121376](https://doi.org/10.3390/e22121376).
- [14] RockStudy Ltd. *Rheological properties of rocks*. Pécs, Hungary. 2022.
- [15] Swan, G. *The mechanical properties of Stripa granite*. Techn. jel. LBL-7074, SAC 03, UC-70. Stockholm – Berkeley: Swedish Nuclear Fuel Supply Co. – Lawrence Berkeley Laboratory, 1978. URL: <https://escholarship.org/uc/item/02r1h3zp>.
- [16] Takács, D. M., Pozsár, Á. és Fülöp, T. *Thermodynamically extended symplectic numerical simulation of viscoelastic, thermal expansion and heat conduction phenomena in solids*. 2022. doi: [10.48550/ARXIV.2211.12120](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2211.12120), URL: <https://arxiv.org/abs/2211.12120>.

A newtoni gravitáció termodinamikai módosításának hatása a galaxisok sebességgörbéire

The effect of thermodynamic modified Newtonian gravity on galactic rotation curves

Pszota Máté

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest; Budapesti Műszaki Egyetem, Budapest; Wigner Fizikai Kutatóközpont, Budapest, mpszota@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÁS: A modern kozmológiai megfigyelések szerint a galaxisok mért forgási sebesség-görbéi eltérnek a bennük lévő fényes anyag alapján a klasszikus newtoni gravitációs elméletből várható sebességeloszlástól. Ennek az ellentmondásnak a feloldására számos kutatás irányul. Az egyik legelterjedtebb elmélet a sötét anyag feltételezése, amelyet eddig csak gravitációs hatása alapján tudtak mérni.

Azonban a sötét anyaggal kapcsolatos megfigyelések magyarázata nem feltétlenül igényli valamilyen anyag jelenlétét, a gravitáció elmélete is indokolhatja. A MOND (Modified Newtonian Dynamics) például a dinamikai törvény gyorsulásfüggését feltételezi, illetve többféle elképzelés alapul gravitáció-termodinamika kapcsolattal motivált általánosításokon [1]. A szakdolgozatban az egyik ilyen elmélet [2] egyenleteit vizsgálom egyszerű gömbszimmetrikus esetben.

Munkámban a vonatkozó parciális differenciálegyenleteket numerikusan megoldva vizsgálom az elméletet, és adott egyszerű anyageloszlást feltételezve összevetem a számítást az NGC 3198 galaxis megfigyelt sebességgörbéjével. Végül a megfigyelésből kapott sűrűségeloszlással is megvizsgálom a kapható sebességgörbét az NGC 3198, NGC 925 és DDO 154 galaxisokra.¹

Kulcsszavak: módosított gravitáció, sötét anyag, galaktikus sebességgörbék, termodinamikus gravitáció

ABSTRACT: The explanation of dark matter observation does not necessarily require assuming some matter, but a modification of gravity could solve it as well. For example, MOND (Modified Newtonian Dynamics) assumes the acceleration-dependence of the law of dynamics, and there have been various theories regarding the connection of thermodynamics and gravity as well [1]. This work examines one such theory [2] in a spherically symmetric case and the numerical solution of the related differential equations. Using observational density distribution data, I investigate its effects on the rotation curves of galaxies NGC 3198, NGC 925 and DDO 154.

Keywords: modified gravity, dark matter, galactic rotation curves, thermodynamic gravity

1 KOZMOLÓGIAI ÁTTEKINTÉS

1.1 A sötét anyag kozmológiai problémája

Mire gondol az ember, ha meghallja a „sötét anyag” kifejezést? Megpróbál elképzelni egy valóságtól elrugaszkodott anyagot, esetleg kis, láthatatlan részecskékre gondol, vagy valami másra? Az elmúlt évtizedek kutatásai bár megerősítették a létezéséről való bizonyosságot a kutatók körében, de egyelőre nem sikerült kézzelfogható eredményre jutni a mibenlétével kapcsolatban. Számos modell és kísérlet próbálta megmagyarázni a sötét anyag eredetét. A részecskefizikai kutatások az ismert részecskéket leíró standard modell kiterjesztésével, a kozmológiaiak pedig nem világító égitestek, például apró fekete lyukak feltevésével próbálkoztak, de napjainkig egyik sem vezetett meggyőző eredményre. Ennek ellenére a feltételezett, általában csak gravitációval kölcsönható részecskékkel modellezett elmélet páratlanul sikeres a világegyetem legnagyobb méretskálákon zajló fejlődésének leírásában. De hogyan is jutottunk el ahhoz, hogy hiányzó anyagot tételeznek fel a kutatók a megfigyelt sebességek alapján?

A naprendszerbeli gravitáció hatását az 1600-as évek elején Johannes Kepler írta le, a róla elnevezett

¹Pszota Máté azonos című diplomamunkájának bővített változata, konzulens: Csabai István, témavezető: Ván Péter

Kepler-törvényekben foglalva össze a bolygómozgás általa felismer törvényszerűségeit. Isaac Newton az 1687-ben megjelent, *Principia* címmel hivatkozott munkájában pedig többek közt megmagyarázta a naprendszerbeli gravitációs hatásokat ([3]), amely páratlanul sikeres leírása volt a jelenségeknek, mind-össze az Einstein által leírt általános relativitáselmélet tudta felülmúlni. A newtoni elmélettel pontosan meghatározható egy gravitációs erőterben mozgó tetszőleges test pályája, és levezethetőek belőle Kepler törvényei is. A fő problémája azonban, hogy minden erőhatást pillanatnyinak tesz fel, akármilyen változás (például egy test tömegében) azonnal kihat az egész világegyetemre, ami ellentmondásban van a speciális relativitáselméletben lefektetett alapelvekkel, miszerint van egy univerzális sebességhatár, amivel az ilyen hatások terjedhetnek. Az einsteini általános relativitáselmélet is úgy van kalibrálva, hogy határesetben visszaadja a földi és a naprendszerbeli mozgásokon megfigyelt gravitációs hatásokat. Ugyan jelenleg ez a legpontosabb leírása a világegyetem gravitációs kölcsönhatásainak és jelenségeinek, mégis sokszor a jól bevált és sokkal egyszerűbben kezelhető newtoni tömegvonzást használják a kutatók. Érdekes észrevennünk a rejtett feltevést, miszerint az univerzum tetszőleges léptékű és távolságú tartományain is ugyanazt a gravitációs törvényt használjuk, remélve, hogy a relatíve kis méretskálákon igazolt törvény univerzálisan is alkalmazható.

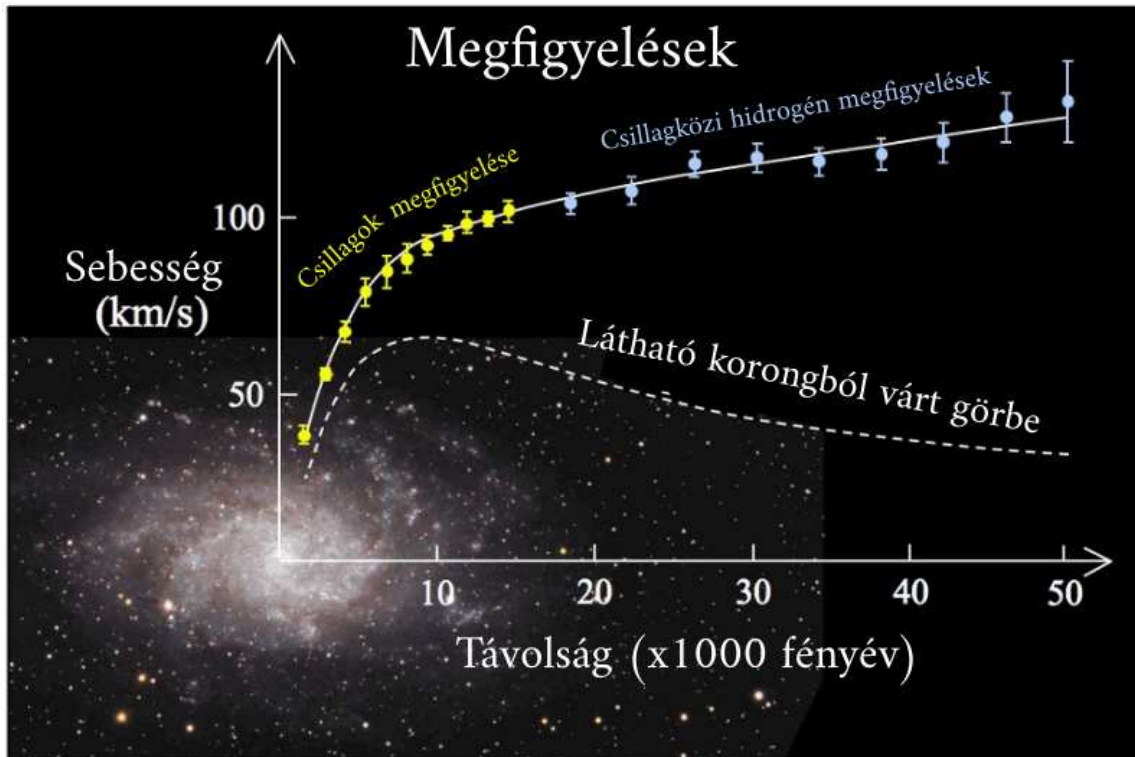
A svájci Fritz Zwicky 1933-ban a Coma-galaxishalmazbeli galaxissebességek eloszlásából következtette ki a halmaz tömegét, és jelentős eltérést talált a látható és a számolásból adódót érték közt [4]. Az eltérést egy feltételezett „sötét anyag”, (eredeti német megfogalmazás szerint „dunkle Materie”) számlájára írta, ami itt még magába foglalhatott olyan nem látható, de jól ismert anyagokat is, mint például a nem világító csillag- és galaxisközi gázfelhők. Habár mások is feltételeztek nem látható anyagot a galaxisokban, és Zwicky eredményei se voltak pontosak, de a feltételezés, miszerint a megfigyelt mozgásokat okozó tömeg nagy része nem látható a távcsöveinkkel, helyes volt.

Igazán azonban csak az amerikai Vera Rubin 70-es évekbeli eredményeinek hatására vált komolyan vett elméletté, aki a galaxisokban lévő csillagok keringési sebességét mérte meg a távolság függvényében [5]. A naprendszerbeli bolygómozgást jól leíró newtoni gravitációs törvényből várt mozgáshoz itt is hiányzott a vonzóerőt biztosító anyag, mint ahogy az 1. ábrán is látható. Később a galaxishalmazok elrendeződésének magyarázatához is figyelembe kellett venni az így feltett anyagot (a sötét anyag több mint ötször nagyobb tömeggel van jelen az univerzumban!). Ezen kívül legtávolabbra és ezáltal a legrégebbre történő megfigyelések a korai univerzumból hátramaradt háttérsugárzás is arra utalnak (a jelenleg elfogadott kozmológiai modell alapján), hogy az anyageloszlás egyenetlenségeinek magyarázatához már akkor is jelen kellett lennie egy gravitációs hatást kifejtő sötét anyagnak.

Egy példa a jelöltekre az ún. steril neutrínó, amely a standard modell "szupergyenge" kiterjesztésével jelenik meg [6]. További példa a "gyengén kölcsönható nagytömegű részecske" (angol betűszóval WIMP), amely általában a standard modell különböző kiterjesztéseiből adódik. Egy másik megközelítésben jelennek meg a "masszív asztrofizikai kompakt halóbeli objektumok" (MACHO), amelyek többek közt halvány, kevés fényt kibocsátó égitestek, mint például barna vagy fehér törpék vagy csillagközi bolygók. Láthatjuk, hogy sokféle javaslat létezik a lehetséges részecskék vagy égitestek modellezésére, amelyek állatkertjéből (a teljesség igénye nélkül) ízelítőt ad a 2. ábra. Végül érdemes kitérni a Krasznahorkay Attila és kollégái nevéhez kötődő X17 részecskére, amelyet a debreceni ATOMKI-ban fedeztek fel, és egy könnyű, új erőt közvetítő elemi részecske [7]. Ez a lehetséges felfedezés nagy figyelmet kapott, azonban a más kutatók által való igazolás még várat magára.

A sikerei ellenére azonban ezeknek az elméleteknek is vannak hiányosságaik. A feltett, de hiányzó alkotó részecskén túl, csillagászati megfigyelések alapján több kapcsolatot fedeztek fel a galaxisok látható („barionikus”, például csillagok, gázfelhők) tömege és a korábban említett sebességgörbék bizonyos tulajdonságai közt, annak ellenére, hogy a sötét anyag dominanciája alapján azt várnánk, hogy ez elnyomja az előbbi. Ezen kívül a feltett „sötét anyag részecskével” végzett számítógépes szimulációk is ellentmondások a megfigyelésekkel a galaxisok középső tartományán.

Számos fizikus azonban egy más megközelítéssel vizsgálja a kérdéskört. Előfordulhat, hogy nem valamilyen ismeretlen anyag okozza a fenti hatásokat, hanem magukban a jelenséget leíró matematikai törvényekben van hiányosság, más szóval a newtoni gravitáció módosításra szorul ezeken a méretskálákon? Az általános relativitáselmélet, aminek a szokásos, „hétköznapi” határeset a newtoni gravitáció, szintén lehetővé teszi, hogy bizonyos kiegészítésekkel módosított hatást kapjunk, megőrizve a kísérletekkel bizonyított tartományon a pontosságot.



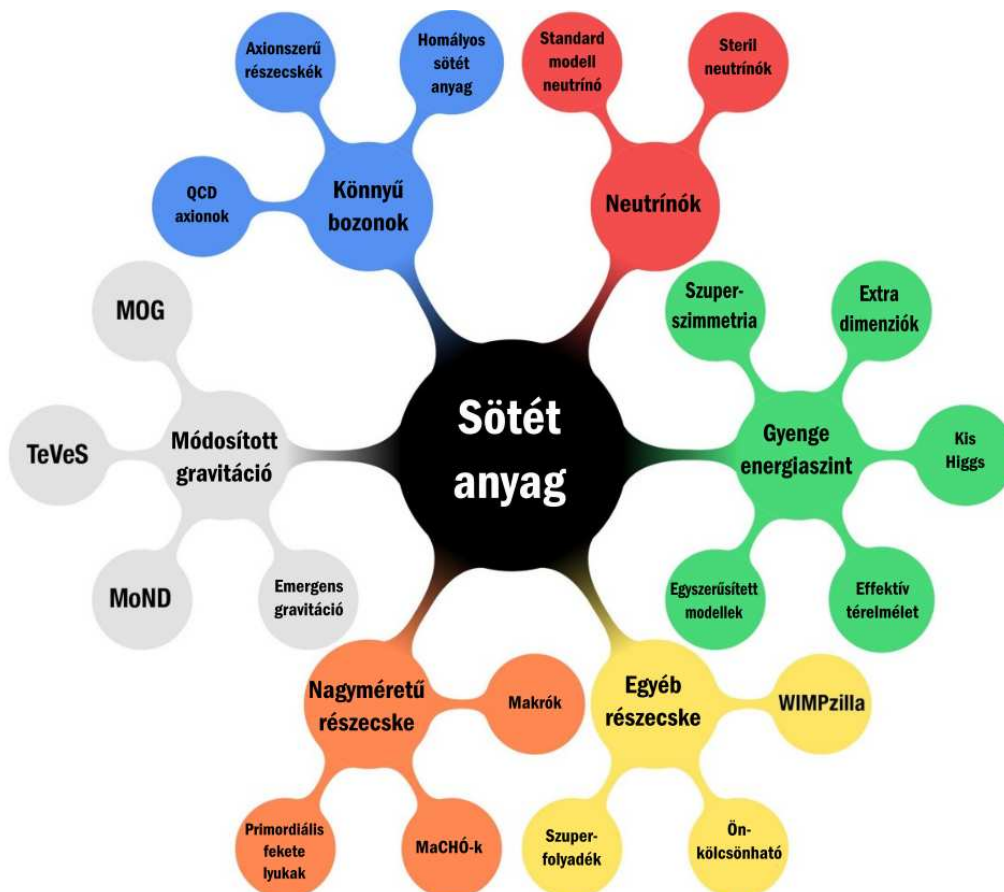
1. ábra. Egy tipikus rotációs görbe, mely szemlélteti, hogy a látható anyagból adódó tömeg nem képes elegendő gravitációs hatást kifejteni (alsó, szaggatott vonal) a megfigyelt sebességekhez (felső, folytonos vonal), forrás: Mario De Leo, szerkesztve. (A typical rotation curve, which illustrates how the contribution from visible matter cannot provide enough gravitational effect (lower, dashed line) to account for the observed phenomena (upper, continuous line), source: Mario De Leo, modified.)

A sebességgörbék elemzése alapján az NGC1052-DF2 galaxisban például alig vagy egyáltalán nincs sötét anyag. Ennek magyarázata lehet a törpegalaxis egyedi fejlődése, például alacsony fémtartalmú gáz kvazárszél miatt való összesűrűsödése, de a nagy mérete, alacsony sötét anyag és nagy mennyiségű fényes objektum tartalma miatt ez magyarázatra szorul. Az eredmény mindenképp fényt vet arra a tényre, hogy a sötét anyag elválasztható lehet a galaxisoktól, azaz a sötét anyag nem mindig követi a barionikus anyagot, akár teljesen hiányozhat [8].

Az egyik ilyen ismertebb módosítási irányzat Mordehai Milgrom nevéhez fűződik [9], és a gravitációs erőtvény *gyorsulásfüggését* teszi fel, más szóval a kis gyorsulással bíró, külső részén a galaxisoknak más lesz a vonzóerő, így a csillagok körmozgási sebessége is. Ez az elmélet a sötét anyaghoz mérhetően sikeres az egyes galaxisok leírásában, azonban relativisztikus kiterjesztései ellenére nem nyújt egy átfogó keretet az összes korábban tárgyalt jelenség magyarázatára, és még ezzel a módosítással is hiányzik anyag nagy mérettartományokon. Nehézséget jelent az is, hogy bár a gravitációs törvény módosítása leírható egy új paraméter bevezetésével a szokásos és a módosított határesetekben, de a legjobb illesztést csak ennek a galaxisonkénti változtatásával lehet kapni, így az elmélet sokat veszít az általános prediktív erejéből és ad hoc jelleget vesz fel.

Az empirikus Tully-Fisher relációt (miszerint a galaxis teljes tömege arányos a sebességgörbe lapos részének maximumával v -edik hatványon) se magyarázza meg a sötét anyag. A látható és a barionikus anyagra a mért értékek $\nu = 4,48 \pm 0,38$ (szteλλáris T-F esetben) és $\nu = 3,64 \pm 0,28$ (barionikus T-F esetben). A módosított newtoni dinamika (MOND) elmélet jelentős eredménye például, hogy természetesen adódik belőle a $\nu = 4$ [10]. A MOND-ot és a sötét anyag elméletet ötvözi a szuperfolyékony sötét anyag elképzelés [11]. Ebben a szuperfolyékony rész sötét fotonokból áll, a MOND hatással kombinált skalármező effektív térelmélete generálja a bozonikus járulékat.

Egy másik kutatási irányzatban a termodinamika és a gravitáció kapcsolatából próbálnak a kutatók egy sikeres módosított gravitációs leírást adni. Feltehetnénk a kérdést, hogy mi köze a két, látszólag távol álló tudományterületnek egymáshoz? A válasz az, hogy a megfelelő termodinamikai megközelítés valójában a vizsgált jelenség teljeskörű leírását adhatja. Erik Verlinde az univerzum gyorsuló tágulásáért felelős



2. ábra. A sötét anyag lehetséges magyarázatainak „állatkertje”: a sokféle részecske mellett a módosított gravitáció is fontos kutatási irány. A MOG a módosított gravitáció különböző változatait, a MoND a Milgrom-féle elméletet, a TeVeS pedig annak a relativisztikus általánosítását jelenti. Forrás: G. Berone és T. M. P. Tait, szerkesztve. (*The 'zoo' of various explanations of dark matter: aside from the various particles, modified gravity is an important research avenue. MOG refers to theories of Modified Gravity, MoND to the theory of Milgrom and TeVeS to its relativistic generalisations. Source: G. Berone and T. M. P. Tait, modified.*)

sötét energia és a sötét anyag közös eredete mellett érvel a fekete lyukak elméletének és termodinamikai megfontolások felhasználásával [1]. Egy másik elméletben viszont a termodinamika önmagában is megmagyarázhatja a gravitációs erőtvény méretskálafüggő változását [12]. Ez választ adna arra a kérdésre, hogy miért pont bizonyos méreteknél (például a galaxisoknál) jelent problémát a megszokott newtoni tömegvonzással való magyarázat.

A szokásos feltevések sokféle anyagfajtát, könnyű és nehéz részecskéket vizsgáltak magyarázatként, még a korai univerzumból származó, úgynevezett primordiális fekete lyukakat is, de egyelőre sikertelenül. Minthogy a több évtizedes részecskefizikai kutatás eddig nem vezetett sikerre olyan részecske felfedezésében, amely a világunkat jól leíró standard modellen túl kielégítő magyarázatot adhatna a sötét anyag eredetére, így érdemes észben tartani, hogy nem feltétlenül ez lehet az egyetlen út, és lehet, hogy valójában magát a gravitációt kell a megfelelő mérettartományokban kiterjesztenünk és általánosítanunk, hogy választ kapjunk a valódi természetének mibenlétére.

Végül érdemes egy harmadik megközelítést is figyelembe vennünk; ahogy Sabine Hossenfelder is rámutat [13], a két fenti megközelítés szembeállítását hamis, hisz a problémák és legjobb magyarázataik sokszor más méreteken és jelenségeknél merülnek fel, így miért ne lehetne mind a módosított gravitáció és valamilyen új, nem szokványos anyagfajta elmélete igaz? Tehát amíg a sötét anyag meg tudja magyarázni az univerzum legnagyobb léptékű szerkezetének tulajdonságait, addig a gravitáció például a galaxisok mérettartományán fellépő problémák esetén adhat magyarázatot a megfigyelések és a bevett leírásunk közti eltérésekre. Az érvelés szerint ez igazából nem jelenti két új dolog független feltevését, hanem amint a foton is az elektromágneses mezőhöz kapcsolódó részecske, úgy itt is a módosított gravitációs mezőhöz is rendelhető lehet egy részecske. Mindenképpen érdemes követnünk az asztrofizika újdonságait és híreit,

és észben tartanunk, hogy versengő modelleken túl helyett a szerteágazó jelenségeket akár egy együttes magyarázat írhatja le legjobban. A sötét anyag valódi természetének megismerése bár jelentős kihívást okozott a fizikusoknak az elmúlt évtizedekben, azonban a rejtély megfejtése mély betekintést nyújthat az Univerzum legnagyobb és legkisebb szintjein való működésébe.

Az irodalomban többféle modell létrejött a sötét anyag leírására, ezen dolgozatban a pseudo-izotermikus (ISO) sötét anyag haló-modellt használom, melyet Randriamampandry és Carignan [14] cikkében a (2)-es egyenlet ír le. Ezen munka egyik célja ennek összevetése az alább ismertetendő termogravitációs elmélettel.

1.2 Módosított newtoni gravitációs elmélet

A gravitáció és a termodinamika kapcsolatának fizikai alapja a két elméletkör hasonló univerzalitása. Mind a gravitáció törvénye, mind a termodinamikai hőmérséklet fogalma független az anyagtól és a mikroszkopikus szerkezettől. Ezen megfigyelésen alapul a newtoni gravitáció dolgozatban vizsgált elmélete. Itt a gravitációs potenciált termodinamikai állapothatározóként kezelve a Poisson-egyenletnél általánosabb téregyenleteket kaphatunk. Az alábbiakban Ván és Abe [2] cikkében szereplő nemlineáris elméletből fakadó módosított newtoni gravitációs (MOND-szerű) elméletet vizsgálom, amelynek egyszerűsített téregyenletei:

$$\tau \partial_t \varphi = l^2 (\Delta \varphi - 4\pi G \rho), \quad (1)$$

$$\tau \partial_t \varphi = l^2 \left(\Delta \varphi - K (\nabla \varphi)^2 - 4\pi G \rho \right), \quad (2)$$

ahol l a karakterisztikus hossz, τ a relaxációs idő, φ a gravitációs potenciál, G a Newton-féle gravitációs állandó, ρ az anyag sűrűségeloszlása, ∂_t a parciális időderivált, Δ a Laplace-operátor, ∇ a hely szerinti gradiens, K pedig egy elméleti s^2m^{-2} dimenziójú paraméter. A termodinamikai módszerből a gravitáló anyagot leíró mozgásegyenleteknek ettől általánosabb formái is következnek (lásd [15]). A fenti első egyenlet egyensúlyban visszaadja a szokásos newtoni gravitációt, a második nemlineáris egyenlet vákuumbeli egyensúlya pedig a következő alakú centrális potenciálra vezet:

$$\varphi(r) = \frac{1}{K} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right). \quad (3)$$

Mindkét fenti parciális differenciálegyenlet az egyensúlyi megoldásra relaxál a fázismező elméletek egyenleteihez hasonlóan.

A cél a nemegyensúlyi termodinamika, a gravitációelmélet és az asztrofizika határán fekvő elmélet vizsgálata. Ezen kívül közelítő összehasonlítást végzek az NGC 3198 galaxisnál mért sebességgörbékkel. Fontos kiemelni, hogy esetünkben elég egy paramétert (K) illeszteni, egy sötét anyag eloszlásfüggvényt illesztő modelljeihez képest [14].

2 A TERMODINAMIKAI HÁTTÉR

2.1 A termodinamikai elmélet ismertetése és a gravitációs potenciál, mint gyengén nemlokális állapothatározó használata

A nemegyensúlyi termodinamikai képből egy általános $\varphi(\mathbf{r}, t)$ skalármezőt bevezetve, majd termodinamikai változóként kezelve vezethetők le a potenciálra kapott egyenletek.

Vegyünk egy olyan teljes energiasűrűséget, amely külön tartalmazza a mező- és a kölcsönhatási energiát. Ekkor a belső energia sűrűsége, u , a szokásos teljes energiasűrűség, e , és a gravitáló anyag, φ , és mező energiáinak (utolsó tag) különbsége:

$$u = e - \varphi - \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi}{8\pi G \rho}, \quad (4)$$

ahol az utolsó tag, a gravitációs mező energiájának elkülönülése a belső energiától az elmélet egyik fontos eleme. Az ehhez hasonló termodinamikai elméleteket, amelyekben a termodinamikai potenciálok

az állapothatározók térbeli deriváltjaitól függhetnek, gyengén nemlokálisnak nevezzük. A már említett fázismező elméletek sorolhatóak ide, de a kontinuummechanika általánosított kontinuumelméletei is [16]. Itt ρ a gravitáló anyag sűrűségeloszlását írja le. Ekkor az s entrópia u , $v = \frac{1}{\rho}$, φ és $\nabla\varphi$ függvénye lesz, valamint a Gibbs-relációt a következőképpen írhatjuk fel (T hőmérséklet és p nyomás jelöléssel):

$$du = Tds - p dv = de - d\varphi - d \left[\frac{\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi}{8\pi G\rho} \right]. \quad (5)$$

Míthogy maga a gravitáló anyag is extenzív mennyiség, így az Euler-homogenitás alapján érvényes az alábbi egyenlőség:

$$u = Ts - pv + \mu = e - \varphi - \frac{\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi}{8\pi G\rho}. \quad (6)$$

A μ kémiai potenciál a későbbiekben nem jelenik meg, mivel anyagátadással nem foglalkozunk. A termodinamika II. főtétele alapján a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\rho\dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j} \geq 0, \quad (7)$$

ahol $\mathbf{j}$ a konduktív entrópia-áramsűrűség, mely együtt mozog a közeggel. Az időderivált is szubsztanciális derivált lesz, tehát $\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla s)$. Az egyenlőtlenség teljesülésének azonban a tömeg- és impulzusmegmaradás is feltétele, melyeket a következő egyenletekkel írhatunk le:

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (8)$$

$$\rho \dot{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \mathbf{P} = 0, \quad (9)$$

ahol $\mathbf{v}$ a közeg sebességmezeje, és a $\mathbf{P}$ nyomástenzor szimmetrikus, mert feltételezzük, hogy a közegnek nincs belső lokális impulzusmomentumsűrűsége. Továbbá felírhatjuk a belső energiamérleget is a következőképpen:

$$\rho\dot{e} + \nabla \cdot \mathbf{q} = -\mathbf{P} : \nabla \mathbf{v}, \quad (10)$$

ahol $\mathbf{q}$ a hőáramsűrűséget, vagyis a belső energia konduktív áramát jelöli. Ekkor ezen egyenletek alapján az entrópiamérleg a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} \rho\dot{s} + \nabla \cdot \left[\frac{1}{T} \left(\mathbf{q} + \frac{1}{4\pi G} \dot{\varphi} \nabla \varphi \right) \right] = \\ \left(\mathbf{q} + \frac{\dot{\varphi}}{4\pi G} \nabla \varphi \right) \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{\dot{\varphi}}{4\pi G T} (\Delta \varphi - 4\pi G \rho) - \\ - \left[\mathbf{P} - p\mathbf{I} - \frac{1}{4\pi G} \left(\nabla \varphi \nabla \varphi - \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \mathbf{I} \right) \right] : \frac{\nabla \mathbf{v}}{T} \geq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

ahol $\mathbf{I}$ az egységtenzor, és az entrópiaáram $\mathbf{j} = \frac{1}{T} \left(\mathbf{q} + \frac{1}{4\pi G} \dot{\varphi} \nabla \varphi \right)$. Itt a szorzatösszeg alakú entrópia-produkció első tagja a termikus, a második a gravitációs, az utolsó pedig a mechanikai kölcsönhatásra vonatkozik, bennük az ismeretlen konstitutív függvények a $\mathbf{q}$ hőáramsűrűség, a $\mathbf{P}$ nyomástenzor és $\dot{\varphi}$, a skalármező evolúciós egyenlete. Észrevehetjük, hogy a gravitációs potenciál bevezetése által a szokásos mechanikai és a termikus termodinamikai áramok megváltoztak, hiszen φ -t tartalmazó kifejezések szerepelnek az egyes tagokban. Az izotróp közegekre érvényes Curie-elv alapján kereszthatás csak a nyomás skaláris része és a skalár gravitációs tag közt léphet fel. Ezáltal, felírhatjuk a következő Onsageri-egyenleteket:

$$\mathbf{q} + \frac{1}{4\pi G} \dot{\varphi} \nabla \varphi = \lambda \nabla \left(\frac{1}{T} \right), \quad (12)$$

$$\left(-\frac{1}{3} [Sp(\mathbf{P}) - 3p\mathbf{I} - \frac{1}{8\pi G} \nabla \varphi \nabla \varphi] \right) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \varphi - 4\pi G \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

ahol a vezetési együtthatók mátrixára nem feltétlenül szimmetrikus vagy antiszimmetrikus, mert belső változós elméletek esetén nincs információ a mikroszerkezetről, ezért a mikroszkopikus időtükrözést

nem tudjuk megkövetelni. Mindenképp csak a szimmetrikus rész tekinthető disszipatívnak, az antiszimmetrikus részből ugyanis nem származik járulékos az entrópiatermeléshez. Ezáltal a termodinamikai erők és áramok arányosságát kifejező teljes egyenletrendszer a következő:

$$\mathbf{q} + \frac{\dot{\varphi}}{4\pi G} \nabla \varphi = \lambda \nabla \left(\frac{1}{T} \right) = -\lambda_F \nabla T, \quad (14)$$

$$\dot{\varphi} = 4\pi G l_1 (\Delta \varphi - 4\pi G \rho) + l_{12} \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (15)$$

$$\frac{1}{3} S p(\mathbf{P}) - p + \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi}{24\pi G} = l_{21} \left(\frac{\Delta \varphi}{4\pi G} - \rho \right) + l_2 \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (16)$$

$$\mathbf{P} - S p(\mathbf{P}) \frac{\mathbf{I}}{3} - \frac{1}{4\pi G} \left(\nabla \varphi \nabla \varphi - \frac{1}{3} (\nabla \varphi)^2 \mathbf{I} \right) = -\eta \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} \right), \quad (17)$$

ahol $\lambda_F = \lambda T^{-2}$ a Fourier-törvénybeli hővezetési tényező, $S p(\mathbf{P})$ a $\mathbf{P}$ tenzor spurja (nyoma), $\frac{l_2}{3T} = \eta$ a nyíró viszkozitási együttható, $\lambda, \eta, l_1, l_2, l_{12}, l_{21}$ transzport együtthatók. Itt l_2 a térfogati viszkozitás. Bevezetjük $\frac{l^2}{\tau} = 4\pi G l_1$ -t, ahol l a térbeli skálát jellemző mennyiség, τ pedig a relaxációs idő. Ekkor, ha a relaxációs idő sokkal kisebb, mint az anyag mozgásának karakterisztikus ideje, a (15)-s egyenletből egy, a Fourier-hővezetéshez hasonló egyenletet kapunk:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{l^2}{\tau} (\Delta \varphi - 4\pi G \rho). \quad (18)$$

amennyiben pedig a (16)-s egyenlet bal oldalán szereplő mennyiségek nagy (például galaktikus) méretskálán nem elhanyagolhatóak, akkor a $\det(l) = l_1 l_2 - l_{12} l_{21} (> 0)$ jelöléssel a (15)-s egyenletből a (16)-s egyenletbe helyettesítve a $\nabla \cdot \mathbf{v}$ -s tag kifejezésével a következő adódik:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi = 4\pi G \frac{\det(l)}{l_2} (\Delta \varphi - 4\pi G \rho) + 4\pi G \frac{l_{12}}{l_2} \left[\frac{1}{24\pi G} (\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{3} S p(\mathbf{P}) + p \right]. \quad (19)$$

Fontos megjegyezni, hogy ez a termogravitációs elmélet lehet nem disszipatív, ha a transzportegyenlet mátrixa antiszimmetrikus, azaz $l_{12} = -l_{21}$. Ebben az esetben l_{12} és l_{21} előjele külön-külön nincs termodinamikailag meghatározva, a vezetési mátrixnak csak a szimmetrikus részére ad megszorítást a második főtétele, az entrópiatermelés nemnegativitásának feltétele (tehát $l_1, l_2 > 0$ és $l_1 l_2 - (l_{12} + l_{21})/4 \geq 0$). A nemlineáris tagnak fizikai jelentése van, a gravitációs tér nyomásával kapcsolatos. Tekintsünk vákuumot, ahol ρ és p eltűnik, valamint természetesen adódik, hogy izotróp nyomástenzort használjunk: $P^{ij} = P \delta^{ij}$. Most vezessük be a $4\pi G \frac{\det(l)}{l_2} = \frac{l^2}{\tau}$ -t az előző részhez hasonlóan. Tegyük fel, hogy P elhanyagolhatóan kicsi, és a relaxációs idő kisebb, mint az anyag mozgásának karakterisztikus ideje, így a következő marad:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{l^2}{\tau} \left(\Delta \varphi - 4\pi G \rho + \frac{l_{12}}{24\pi G \det(l)} (\nabla \varphi)^2 \right), \quad (20)$$

ahol bevezethetjük a $K = \frac{l_{12}}{24\pi G \det(l)}$ paramétert. Észrevehetjük, hogy maga a termodinamikai háttér nem rögzíti K előjelét (hisz l_{12} előjele nem rögzített), ez a potenciál vonzó jellegéből adódik, G -hez hasonlóan. Így a teljes termogravitációs potenciálra a következő téregyenletet kapjuk:

$$\tau \partial_t \varphi = l^2 \left(\Delta \varphi - 4\pi G \rho - K (\nabla \varphi)^2 \right). \quad (21)$$

Ez az egyenlet nem származtatható hamiltoni típusú variációs elvből az időderivált miatt, de a statikus, időben állnadó része sem a nemlineáris tag miatt, amely a gravitációs tér nyomásából származik vákuumban. Ennek hatása akkor észlelhető, ha az anyag sűrűségéből és nyomásából származó tagok elhanyagolhatóak mellette. A továbbiakban ennek a megoldásait vizsgálom különféle forrástagokkal, egyszerűsítésekkel, illetve kezdeti- és permfeltételekkel.

2.2 Elméleti megoldás

Gömbszimmetrikus stacionárius esetben a 21. egyenlet a következő alakra egyszerűsödik:

$$\varphi'' = -\frac{2}{r} \varphi' + 4\pi G \rho(r) + K (\varphi')^2, \quad (22)$$

ahol a gravitációs gyorsulást használva, ami definíció szerint

$$\mathbf{g} = -\nabla\varphi, \quad (23)$$

és itt az alábbi alakot öltve

$$g(r) = -\varphi', \quad (24)$$

a következő alakra írhatjuk át:

$$g(r)' = -\frac{2}{r}g(r) - 4\pi G\rho(r) - Kg(r)^2. \quad (25)$$

Ez egy nemlineáris Ricatti-egyenlet, ami átalakítható egy közönséges másodrendű lineáris differenciálegyenletté, és bizonyos feltevésekkel élve $\rho(r)$ -re, megoldható lesz analitikusan. Az irodalomban bevett módszer alapján, az egyenletet átírható a következő jelöléseket bevezetve

$$R(r) = -\frac{2}{r}, \quad (26)$$

$$S(r) = -4\pi G\rho(r) \cdot K, \quad (27)$$

$$v(r) = Kg(r), \quad (28)$$

az alábbi alakba:

$$v(r)' = v(r)^2 + R(r) \cdot v + S(r). \quad (29)$$

Behelyettesítve a $v(r) = -\frac{u(r)'}{u(r)}$ kifejezést, a következőt kaphatjuk:

$$u(r)'' - R(r)u(r)' + S(r)u(r) = 0. \quad (30)$$

Megoldva a 30. egyenletet, megoldást kaphatunk $g(r)$ -re, ami az alábbi lesz:

$$g(r) = -\frac{u'}{u} \frac{1}{K}. \quad (31)$$

2.2.1 Vákuummegoldás

Vákuummegoldás, vagyis $\rho(r) = 0$ esetén, az $S(r)$ -re vonatkozó egyenlet a következő lesz:

$$S(r) = -4\pi G \cdot 0 \cdot K = 0. \quad (32)$$

A 30. egyenletből adódik, hogy ekkor

$$u(r)'' + \frac{2}{r}u(r)' = 0, \quad (33)$$

amely könnyen megoldható $u(r)'$ -ra és $u(r)$ -ra:

$$u(r)' = \frac{C_1}{r^2}, \quad (34)$$

$$u(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2. \quad (35)$$

Ez alapján, a 31. egyenletet használva, a következő adódik:

$$C = -\frac{C_2}{C_1}, \quad (36)$$

$$g_{\text{vacuum}}(r) = \frac{1}{Kr + Cr^2}, \quad (37)$$

$$\varphi_{\text{vacuum}}(r) = \varphi_0 + \frac{1}{K} \ln \frac{r}{Kr + Cr}. \quad (38)$$

Ennek a megoldásnak szingularitása van $r = 0$ -ban, tehát csak egy tömegeloszlás hatásának elhanyagolhatóvá válása után van értelme használni, (tehát távol a galaktikus tömeg zömétől) és a C állandót ezek alapján lehet a peremfeltételek segítségével illeszteni a vákuumtartományra való áttérés határán.

2.2.2 Konstans sűrűséggel való megoldás

A 30. egyenletet megoldhatjuk analitikusan akkor is, amennyiben a sűrűség egy adott ρ_c konstans:

$$S(r) = -4\pi G\rho(r) \cdot K = -4\pi G\rho_c \cdot K = S_c. \quad (39)$$

Behelyettesítve $R(r)$ -t, a 30. egyenlet megoldása a következő:

$$u(r) = C_1 \frac{e^{-i\sqrt{S_c}r}}{r} + C_2 \frac{e^{i\sqrt{S_c}r}}{r}. \quad (40)$$

Így magkaphatjuk a megoldást $g(r)$ -re:

$$u(r)' = -iC_1 \frac{e^{-i\sqrt{S_c}r}(\sqrt{S_c}r - i)}{r^2} + iC_2 \frac{e^{i\sqrt{S_c}r}(\sqrt{S_c}r + i)}{r^2}, \quad (41)$$

$$g(r) = -\frac{1}{K} \left(\frac{-iC_1 e^{-i\sqrt{S_c}r} \frac{1}{r^2} \sqrt{S_c}r - C_1 e^{-i\sqrt{S_c}r} \frac{1}{r^2} + iC_2 \frac{1}{r^2} e^{i\sqrt{S_c}r} \sqrt{S_c}r - C_2 \frac{1}{r^2} e^{i\sqrt{S_c}r}}{C_1 \frac{1}{r} e^{-i\sqrt{S_c}r} + C_2 \frac{1}{r} e^{i\sqrt{S_c}r}} \right). \quad (42)$$

Ez a kifejezés tovább egyszerűsíthető az alábbi lépések alapján:

$$g(r) = \frac{1}{K} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{C_1 e^{-i\sqrt{S_c}r} + C_2 e^{i\sqrt{S_c}r}}{C_1 e^{-i\sqrt{S_c}r} + C_2 e^{i\sqrt{S_c}r}} - \sqrt{S_c} r i \frac{-C_1 e^{-i\sqrt{S_c}r} + C_2 e^{i\sqrt{S_c}r}}{C_1 e^{-i\sqrt{S_c}r} + C_2 e^{i\sqrt{S_c}r}} \right) \right], \quad (43)$$

$$g(r) = \frac{1}{Kr} + \frac{\sqrt{S_c}}{K} i \frac{C_1 e^{-i\sqrt{S_c}r} - C_2 e^{i\sqrt{S_c}r}}{C_1 e^{-i\sqrt{S_c}r} + C_2 e^{i\sqrt{S_c}r}}, \quad (44)$$

$$(45)$$

bevezetve egy új C konstanst, mint

$$C = -\frac{1}{2} i \ln \frac{C_2}{C_1}, \quad (46)$$

$$e^{i \cdot 2C} = \frac{C_2}{C_1}, \quad (47)$$

ezáltal

$$g(r) = \frac{1}{Kr} + \frac{\sqrt{S_c}}{K} i \frac{e^{-i\sqrt{S_c}r} - e^{i(\sqrt{S_c}r + 2C)}}{e^{-i\sqrt{S_c}r} + e^{i(\sqrt{S_c}r + 2C)}}, \quad (48)$$

$$g(r) = \frac{1}{Kr} + \frac{\sqrt{S_c}}{K} \tan(\sqrt{S_c}r + C), \quad (49)$$

$$g(r) = \frac{1}{Kr} + \frac{\sqrt{-4\pi G\rho_c K}}{K} \tan\left(\sqrt{-4\pi G\rho_c K} \cdot r + C\right). \quad (50)$$

A további vizsgálat céljából érdemes különválasztani a $K > 0$ és $K < 0$ eseteket. A $K > 0$ esetben, a 50. egyenlet átírható mint

$$g_+(r) = \frac{1}{Kr} + \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{K}} \cdot i \tan\left(i\sqrt{4\pi G\rho_c K} \cdot r + C\right), \quad (51)$$

$$i\tilde{C} = C, \quad (52)$$

$$g_+(r) = \frac{1}{Kr} - \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{K}} \cdot \tanh\left(\sqrt{4\pi G\rho_c K} \cdot r + \tilde{C}\right), \quad (53)$$

és a $K < 0$ esetben mint

$$g_-(r) = -\frac{1}{|K|r} - \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{|K|}} \cdot \tan\left(\sqrt{4\pi G\rho_c |K|} \cdot r + C\right). \quad (54)$$

Mínt hogy a konstans sűrűségeloszlást leíró modellben kívánatos eltüntetni a szingularitást $r = 0$ -ban, ezt megtehetjük C vagy $\tilde{C}$ megfelelő választásával. $\tilde{C} = i\frac{\pi}{2}$ -t választva, a $\tanh(x)$ függvény $\coth(x)$ lesz, és a következő sorozatreprezentációja lesz az egyenletben:

$$g_+(r) = \frac{1}{Kr} - \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{K}} \cdot \coth\left(\sqrt{4\pi G\rho_c K} \cdot r\right), \quad (55)$$

$$g_+(r) = \frac{1}{Kr} - \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{K}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho_c K} \cdot r} + \frac{\sqrt{4\pi G\rho_c K} \cdot r}{3} - \frac{\left(\sqrt{4\pi G\rho_c K}\right)^3 \cdot r^3}{45} + O(r^5) \right), \quad (56)$$

$$g_+(r) = -\frac{1}{3} \cdot 4\pi G\rho_c \cdot r + \frac{K}{45} (4\pi G\rho_c)^2 \cdot r^3 + O(r^5), \quad (57)$$

ezáltal eltüntetve a szingularitást. Észrevehetjük, hogy az első tag megfelel a szokásos newtoni gravitációban kapott eredménnyel, míg a magasabb rendű tagok, amelyekben a K paraméter is szerepel, ehhez járulnak hozzá korrekcióként. A $g_-(r)$ -hoz, választhatjuk $C = \frac{\pi}{2}$ -t és hasonlóan megkaphatjuk a következőket:

$$g_-(r) = -\frac{1}{|K|r} + \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{|K|}} \cdot \cot\left(\sqrt{4\pi G\rho_c |K|} \cdot r\right), \quad (58)$$

$$g_-(r) = -\frac{1}{|K|r} + \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{|K|}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho_c |K|} \cdot r} - \frac{\sqrt{4\pi G\rho_c |K|} \cdot r}{3} - \frac{\left(\sqrt{4\pi G\rho_c |K|}\right)^3 \cdot r^3}{45} + O(r^5) \right), \quad (59)$$

$$g_-(r) = -\frac{1}{3} \cdot 4\pi G\rho_c \cdot r - \frac{|K|}{45} (4\pi G\rho_c)^2 \cdot r^3 + O(r^5), \quad (60)$$

ami az első két rendben ugyanazt az eredményt adja, mint az előző eset, a különbség csak a K -ban magasabb rendű tagokkal jelenik meg, ahogy a két sorozat egyre jobban eltér.

A 55. és 58. egyenletekből a potenciálok is meghatározhatóak:

$$\varphi_+(r) = \frac{1}{K} \ln \left(\frac{\sinh \left(\sqrt{4\pi G \rho_c K} \cdot r \right)}{r} \right) + \varphi_0, \quad (61)$$

$$\varphi_-(r) = -\frac{1}{|K|} \ln \left(\frac{\sin \left(\sqrt{4\pi G \rho_c |K|} \cdot r \right)}{r} \right) + \varphi_0. \quad (62)$$

Az így kapott megoldások bepillantást engednek a vizsgált termogravitációs modell viselkedésébe, és segítenek hitelesíteni az numerikusan kapott eredményeket.

3 AZ IDŐFÜGGŐ GRAVITÁCIÓS EGYENLETEK VIZSGÁLATA

3.1 Elméleti feldolgozás

3.1.1 Disszipatív newtoni gravitáció

Amennyiben a nemlineáris tag elhanyagolható, akkor $\varphi(t, x^i)$ potenciálra az (1) egyenletet kapjuk:

$$\partial_t \varphi = \frac{l^2}{\tau} (\Delta \varphi - 4\pi G \rho),$$

ahol a $\rho(t, x^i)$ sűrűségeloszlás rögzített, a kezdeti feltétel pedig bármi lehet. A fenti parabolikus lineáris parciális differenciálegyenletnek egyensúlyi megoldása a jobb oldalán látható Poisson-egyenlet megoldása, ez az egyensúly aszimptotikusan stabil, az egyenlet az egyensúlyi megoldására relaxál. Később R_M lesz az a távolság, amelyen túl már a nemlineáris tagot vesszük figyelembe. A gravitáció, amennyire tudjuk, nem disszipatív. Azonban a gravitációt emergens mezőként magyarázó, a termodinamikai kapcsolaton alapuló elméletek nem kerülhetik el a disszipáció kérdését. Ebből kiindulva természetes, hogy a szokásos Poisson-egyenletet egyensúlyban kapjuk vissza. Azt, hogy észlelni tudjuk-e a gravitációs tér egyensúlyra történő relaxációját a releváns időskálákon múlik. Diósi cikke, [17], alapján ha létezik is, a jelenlegi földi mérési adatok korlátai miatt ezen időskála lehet ms -os nagyságrendű. A gravitációs tér időfüggését feltételező spekulációk általában valamilyen tehetetlenséget vezetnek be és nem disszipatívak. Viszont disszipatív modellek is vannak, például az előbb említett, [17], késleltetett erőhatás disszipatív. A fenti időfüggő dinamikai egyenlet stabilitása jól kihasználható, lényegében a numerikus viszkozitás koncepciójához hasonlóan.

Gömbszimmetrikus esetben, a szimmetria miatt természetes peremfeltétel a középpontban nulla erő, $\partial_r \varphi(t, 0) = 0$, a Neumann-határfeltétel. A vizsgált tartomány sugara R_E , ebben a pontban pedig rögzített a potenciál, $\varphi(t, R_E) = \varphi_E$ Dirichlet-határfeltétellel, a $[0, R_E]$ tartományon keresem a megoldást. Dimenziótlanításhoz vezessük be a következőket:

$$t = \tau \tilde{t}, \quad (63)$$

$$r = R_E \tilde{r}, \quad (64)$$

$$\varphi = \varphi_0 \tilde{\varphi}, \quad (65)$$

$$\rho = \rho_0 \tilde{\rho}. \quad (66)$$

Behelyettesítve az egyenlet így alakul:

$$\frac{\varphi_0}{\tau} \tilde{\partial}_t \tilde{\varphi} = \frac{l^2 \varphi_0}{R_E^2 \tau} \tilde{\Delta} \tilde{\varphi} - \frac{l^2 \cdot 4\pi G \cdot \rho_0}{\tau} \tilde{\rho}. \quad (67)$$

Ekkor $\frac{l^2}{R_E^2} = 1$ és $\frac{4\pi G \cdot l^2 \cdot \rho_0}{\varphi_0} = 1$ választással élve, a következő dimenziótlan egyenletet kaphatjuk a gömbszimmetrikus Laplace-operátort használva:

$$\partial_t \varphi = \partial_{rr} \varphi + \frac{2}{r} \partial_r \varphi - \rho(r). \quad (68)$$

Oldjuk meg abban az egyszerű esetben, ha $\rho(r) = \rho_0$, ha $0 < r < R_C$, és 0, ha $r > R_C$, tehát egy $R_C < R_E$ sugáron belül egyenletes az anyageloszlás. Az egyenlet tulajdonsága, hogy relaxál a statikus, Poisson-megoldásra, és azt a megadott peremekkel lehet számolni. Ezt hívjuk tehát egzakt aszimptotikus megoldásnak, amit akkor kaphatunk meg, ha φ már nem változik időben. Ekkor az R_C -n belüli tartományon megadhatjuk a statikus megoldást:

$$\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' = \rho_0, \quad (69)$$

$$\varphi'(0) = 0, \quad \varphi(R_C) = \varphi_R \text{ peremekkel.}$$

Ennek a megoldását keressük $\varphi(r) = ar^2 + b$ alakban. Ekkor a deriváltak:

$$\varphi' = 2ar, \quad \varphi'' = 2a.$$

A (69)-s egyenletbe behelyettesítve és a peremfeltételeket felhasználva:

$$2a + 4a = \rho_0 \implies a = \frac{\rho_0}{6}, \quad (70)$$

$$\varphi(R_C) = \varphi_R = aR_C^2 + b \implies b = \varphi_R - \frac{\rho_0}{6}R_C^2. \quad (71)$$

Ezáltal a következőt kapjuk:

$$\varphi = \frac{\rho_0}{6}(r^2 - R_C^2) + \varphi_R. \quad (72)$$

Az egzakt aszimptotikus megoldást ebben az esetben R_C -n kívül a dimenziótlanított $r = 1$ határig meghatározhatjuk:

$$\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' = 0 \quad (73)$$

$$\varphi(R_C) = \varphi_R, \quad \varphi(1) = \varphi_1 \text{ peremekkel.}$$

Minthogy klasszikus newtoni potenciált várunk, keressük a megoldást $\varphi(r) = \frac{A}{r} + B$ alakban. Ekkor a deriváltak:

$$\varphi' = -\frac{A}{r^2}, \quad \varphi'' = \frac{2A}{r^3}.$$

A (73)-s egyenletbe behelyettesítve és a peremfeltételeket felhasználva az automatikusan teljesül. Továbbá a peremek alapján $\varphi_R = \frac{A}{R_C} + B$ és $\varphi_1 = A + B$, ezáltal:

$$\varphi_R = \frac{A}{R_C} + \varphi_1 - A \implies A = \frac{(\varphi_R - \varphi_1)R_C}{1 - R_C}, \quad (74)$$

$$B = \varphi_1 - \frac{(\varphi_R - \varphi_1)R_C}{1 - R_C} = \frac{\varphi_1 - \varphi_R R_C}{1 - R_C}. \quad (75)$$

Mivel végtelenben nulla potenciált szeretnénk, így $B = 0$, vagyis $\varphi_1 - \varphi_R R_C = 0 \rightarrow \varphi_R = \frac{\varphi_1}{R_C}$. A deriváltakat is illesztve legyenek a két tartomány határán:

$$\frac{\rho_0}{3}R_C = -\frac{(\varphi_R - \varphi_1)R_C}{(1 - R_C)R_C^2}, \quad (76)$$

melybe behelyettesítve, és kifejezve φ_R -t a következő adódik:

$$\varphi_R = -\frac{\rho_0 R_C^2}{3}. \quad (77)$$

Így a végső formulánk a potenciálra a belső tartományon:

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0}{6} r^2 - \frac{\rho_0}{2} R_C^2. \quad (78)$$

A külső tartományon pedig:

$$\varphi(r) = -\frac{\rho_0 R_C^3}{3} \frac{1}{r}. \quad (79)$$

Ezt az egzakt megoldást a numerikus eljárás kalibrációjára fogjuk használni.

3.1.2 Módosított newtoni gravitáció

A 2. fejezetben kapott teljes termogravitációs egyenlet:

$$\tau \partial_t \varphi = l^2 \left(\Delta \varphi - 4\pi G \rho - K(\nabla \varphi)^2 \right), \quad (80)$$

amelyet két tartományra bonthatunk a könnyebb feldolgozás céljából, 0-tól R_M -ig és R_M -től R_E -ig terjedő tartományra, ahol az R_M határ az a pont, ahol a newtoni termogravitációs egyenlethől kapott megoldás, és a deriváltja is megegyezik a teljes termogravitációs egyenletben szereplő potenciál és erő értékével, valamint R_E a tartomány határa, ameddig vizsgáljuk. A $\rho(r)$ jelen esetben ρ_0 , ha $0 < r < R_C$, és 0, ha $r > R_C$.

Ekkor az egyenletek a két tartományon:

$$\tau \partial_t \varphi = l^2 (\Delta \varphi - 4\pi G \rho_0), \quad (81)$$

$$\tau \partial_t \varphi_M = l^2 (\Delta \varphi_M - K(\nabla \varphi_M)^2). \quad (82)$$

A dimenzióatlanításhoz a következőket vezethetjük be:

$$\rho = \rho_0 \tilde{\rho}, \quad (83)$$

$$\frac{l^2}{\tau} = a, \quad (84)$$

$$r = R_E \tilde{r}, \quad (85)$$

$$t = t_0 \tilde{t} \rightarrow t_0 = \frac{R_E^2 \tau}{l^2} = \frac{R_E^2}{a}, \quad (86)$$

$$\varphi = \varphi_0 \tilde{\varphi}. \quad (87)$$

Ezeket behelyettesítve a (80)-s egyenletbe:

$$\frac{a \varphi_0}{R_E^2} \tilde{\partial}_t \tilde{\varphi} = a \left(\frac{\varphi_0}{R_E^2} \tilde{\Delta} \tilde{\varphi} - 4\pi G \rho_0 \tilde{\rho} - \frac{K}{R_E^2} \varphi_0^2 (\tilde{\nabla} \tilde{\varphi})^2 \right). \quad (88)$$

Melyet a következő alakra hozhatunk:

$$\tilde{\partial}_t \tilde{\varphi} = \tilde{\Delta} \tilde{\varphi} - \frac{4\pi G \rho_0 R_E^2}{\varphi_0} \tilde{\rho} - K \varphi_0 (\tilde{\nabla} \tilde{\varphi})^2. \quad (89)$$

Válasszuk $\frac{4\pi G \rho_0 R_E^2}{\varphi_0} = 1$ -et, valamint legyen $K \varphi_0 = \tilde{K}$ egy új paraméter. A korábban felírt paramétereket természetesen a dimenzióatlanított formájukban használjuk:

$$\tilde{R}_C = \frac{R_C}{R_E}, \quad (90)$$

$$\tilde{R}_M = \frac{R_M}{R_E}, \quad (91)$$

$$\tilde{\varphi}_E = \frac{\varphi_E}{\varphi_0}. \quad (92)$$

A hullámokat elhagyva a kapott egyenletünk a következő lesz a gömbszimmetrikus Laplace-t használva:

$$\partial_t \varphi = \varphi'' + \frac{2}{r} \varphi' - \rho - K(\varphi')^2, \quad (93)$$

ahol $\rho(r) = 1$, ha $0 < r \leq R_C$ és $\rho(r) = 0$, ha $R_C < r \leq 1$, valamint a következő határ- és illesztési feltételeink lesznek:

$$\begin{aligned} \partial_r \varphi(r=0, t) &= 0, \quad \varphi(r=R_M, t) = \varphi_M(r=R_M, t), \\ \partial_r \varphi(r=R_M, t) &= \partial_r \varphi_M(r=R_M, t), \\ \varphi_M(r=1, t) &= \varphi_E. \end{aligned}$$

Az első tartományt ekkor R_C -ig a következő egyenlet és peremfeltételek írják le:

$$\varphi_1'' + \frac{2}{r} \varphi_1' - 1 = 0, \quad (94)$$

$$\varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_1(R_C) = \varphi_R.$$

Hasonlóan járhatunk el, mint az előző fejezetben; próbálkozzunk $\varphi(r) = ar^2 + c$ alakú függvénnyel (Neumann peremfeltétel miatt nem lesz lineáris tag), ekkor a deriváltak behelyettesítve:

$$2a + \frac{2}{r} 2ar = 1 \implies a = \frac{1}{6}, \quad (95)$$

$$\varphi_R = aR_C^2 + c \implies c = \varphi_R - \frac{R_C^2}{6}. \quad (96)$$

Ezáltal ezen a tartományon a potenciál:

$$\varphi_1(r) = \frac{r^2 - R_C^2}{6} + \varphi_R. \quad (97)$$

A második tartomány, $R_C < r < R_M$ esetén az potenciált leíró egyenlet a következő alakú lesz:

$$\varphi_2'' + \frac{2}{r} \varphi_2' = 0. \quad (98)$$

Hasonlóan az előző fejezethez, itt szintén keressük a megoldást $\varphi(r) = \frac{A}{r}$ alakban, ekkor a (98)-s egyenlet automatikusan teljesül:

$$\frac{2A}{r^3} + \frac{2}{r} \cdot \left(-\frac{A}{r^2} \right) = 0. \quad (99)$$

Ez esetben a peremfeltételek:

$$\begin{aligned}\varphi_2(R_C) &= \varphi_R \rightarrow A = \varphi_R R_C, \\ \varphi_2'(R_C) &= \varphi_1'(R_C) \rightarrow -\frac{\varphi_R R_C}{R_C^2} = \frac{R_C}{3} \implies \varphi_R = -\frac{R_C^2}{3}.\end{aligned}$$

Tehát ezen a tartományon a megoldás:

$$\varphi_2(r) = -\frac{R_C^3}{3r}. \quad (100)$$

A harmadik tartományon, $R_M < r < 1$ esetén pedig a következőt kapjuk:

$$\varphi_3'' + \frac{2}{r}\varphi_3' - K(\varphi_3')^2 = 0. \quad (101)$$

Ennek a megoldását keressük $\varphi_3 = A \ln(r) + B$ alakban, ekkor a deriváltak:

$$\varphi_3' = \frac{A}{r}, \quad \varphi_3'' = -\frac{A}{r^2}.$$

Ezeket visszahelyettesítve:

$$-\frac{A}{r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{A}{r} - K \frac{A^2}{r^2} = 0 \implies A = \frac{1}{K}. \quad (102)$$

Ezen a tartományon a peremfeltételek:

$$\begin{aligned}\varphi_3(R_M) &= \varphi_2(R_M) \rightarrow \frac{1}{K} \ln(R_M) + B = -\frac{R_C^3}{3R_M} \implies B = -\left(\frac{1}{K} \ln(R_M) + \frac{R_C^3}{3R_M}\right), \\ \varphi_3'(R_M) &= \varphi_2'(R_M) \rightarrow \frac{1}{KR_M} = \frac{R_C^3}{3R_M^2} \implies R_M = \frac{KR_C^3}{3}.\end{aligned}$$

Ezeket visszahelyettesítve:

$$\varphi_3 = \frac{1}{K} \left(\ln\left(\frac{3r}{KR_C^3}\right) - 1 \right). \quad (103)$$

Ezt kiértékelve a külső peremen $\varphi_E = \varphi_3(1) = \frac{1}{K} \left(\ln\left(\frac{3}{KR_C^3}\right) - 1 \right)$ adódik.

Ezt az analitikus megoldást is a numerikus módszerünk ellenőrzésére használhatjuk.

3.2 Numerikus megoldás

3.2.1 Disszipatív newtoni gravitáció

A numerikus megoldásnál a (68)-s egyenletet és a következő deriváltakat használjuk, n -el jelölve a hely, j -vel jelölve az időindexet:

$$\varphi_{n,j}' = \frac{\varphi_{n+1,j} - \varphi_{n-1,j}}{2\Delta x}, \quad (104)$$

$$\varphi_{n,j}'' = \frac{\varphi_{n+1,j} - 2\varphi_{n,j} + \varphi_{n-1,j}}{\Delta x^2}. \quad (105)$$

Ekkor a következő léptetés adódik:

$$\frac{\varphi_{n,j+1} - \varphi_{n,j}}{\Delta t} = \frac{\varphi_{n+1,j} - 2\varphi_{n,j} + \varphi_{n-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{1}{r} \frac{\varphi_{n+1,j} - \varphi_{n-1,j}}{\Delta x} - \rho_n. \quad (106)$$

Amelyből egyszerűen kifejezve az időlépést:

$$\varphi_{n,j+1} = \varphi_{n,j} + \Delta t \left(\frac{\varphi_{n+1,j} - 2\varphi_{n,j} + \varphi_{n-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{1}{r} \frac{\varphi_{n+1,j} - \varphi_{n-1,j}}{\Delta x} - \rho_n \right). \quad (107)$$

Ezt tehát rögzített külső peremmel és belső deriválttal számolva a 5. ábrán a bal oldali grafikonokat kaphatjuk. A potenciál deriváltját véve egységnyi tömegre eső erőt kapunk, ez adja a körmozgáshoz a centripetális erőt:

$$m\partial_r\varphi = \frac{mv^2}{r}. \quad (108)$$

Így a sebességörbékét a kapott potenciálból a következő képlettel számolhatjuk:

$$v = \sqrt{\hat{G}r\partial_r\varphi}, \quad (109)$$

ahol a $\hat{G}$ faktor a Randriamampandry és Carignan [14] cikkében szereplő mértékegységekhez való skálázást adja, esetünkben $\hat{G} = 2,07 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$ lesz.

3.2.2 Módosított newtoni gravitáció

Általában a disszipatív rendszerek tárgyalására hatékonyabb a fizikai peremeket használó leírás. Erre jó példa a hővezetés, ahol a peremen a hőáramsűrűség megadása a természetes, nem-Fourier esetben nem is tudunk nagyon másként eljárni. Ilyen természetes peremet a mérlegegyenlet szerkezet, vagy variációs elvek sugallhatnak. Itt is ilyen, áramsűrűségi peremeket fogunk használni, ezért érdemes a következőképpen egyenletrendszerre bontani az integrálandó differenciálegyenletet:

$$q(r, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad (110)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{2}{r}q - Kq^2. \quad (111)$$

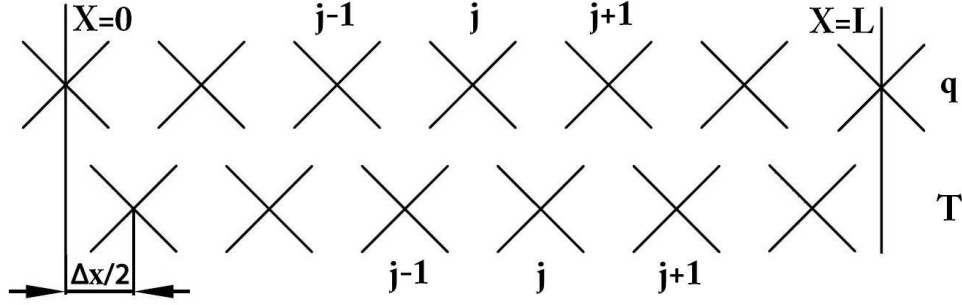
A megoldás során az első két tartományon az előző fejezethez hasonló léptetést használtam, valamint a harmadik tartomány adta a peremet R_M -ben. Minthogy másodfajú peremfeltétel is lesz, így numerikusan sokkal jobban kezelhető, ha eltolt mezős integrálást használunk. Ennek a lényege, hogy a potenciálhoz tartozó pontokat egy fél térlépéssel eltolva vesszük figyelembe, azaz a vizsgált tartomány peremétől $\frac{\Delta x}{2}$ -re van mindkét irányban. Ezt jól illusztrálja Kovács és Józsa [18] könyvében a 7.7-es ábra, amely a Guyer–Krumhansl-egyenletnél ábrázolja sematikus az elrendezést (így φ helyett ott T van):

A harmadik tartományt eltolt mezős módszerrel számoltam, az előzőhöz hasonló módon, a következő lépésekkel (itt is n jelöli a helylépést, és j az időlépést):

$$q_{n,j+1} = \frac{\varphi_{n,j} - \varphi_{n-1,j}}{\Delta x}, \quad (112)$$

$$\varphi_{n,j+1} = \varphi_{n,j} + \Delta t \left(\frac{q_{n+1,j} - q_{n,j}}{\Delta x} + \frac{2}{r}q_{n,j} - Kq_{n,j}^2 \right). \quad (113)$$

Ezt tehát a rögzített fenti peremfeltételekkel számolva a 6-8. ábrákon a bal oldali grafikonokat kaphatjuk. A sebességörbékét a kapott potenciálból az előző fejezethez hasonlóan számolhatjuk, ezek jobb oldalon vannak.



3. ábra. Az eltolt mezőkön alapuló diszkretizáció sematikus ábrázolása, Kovács és Józsa [18] könyvében a 7.7-es ábra. (*The schematic representation of the discretisation method of shifted fields, Fig. 7.7 in the book of Kovács and Józsa [18].*)

3.2.3 Használt paraméterek

A számolás során kétféle sűrűségmodellt használtam, egy egyszerű, adott R_C távolságig adott konstans sűrűséget, valamint Randriamampandry és Carignan [14] cikkében a (2)-es egyenletben szereplő pszeudo-ISO sötét anyag haló modellt:

$$\rho_{ISO}(r) = \frac{\rho_0}{1 + \left(\frac{r}{R_C}\right)^2}, \quad (114)$$

melynél egy ρ_0 konstans sűrűséghez tartozó elméleti görbét tüntettem fel a 5. ábrán. Ehhez a cikkben a (3)-as egyenlet írja le a sebességgörbét:

$$v_{ISO}(r) = \sqrt{4\pi G \rho_0 R_C^2 \left[1 - \frac{r}{R_C} \arctan\left(\frac{r}{R_C}\right) \right]}, \quad (115)$$

ahol ρ_0 a központi sűrűség, és R_C a haló központjának sugara. Ez a képlet a newtoni gravitáció elméleti aszimptotikus görbét adja. A Poisson-egyenlethez relaxáló megoldás során a megadott paraméterek R_C és ρ_0 voltak, a termogravitációs egyenletnél pedig a megadott paraméterek R_C és K voltak, ezek alapján készítettem 5. és 6-8. ábrákat.

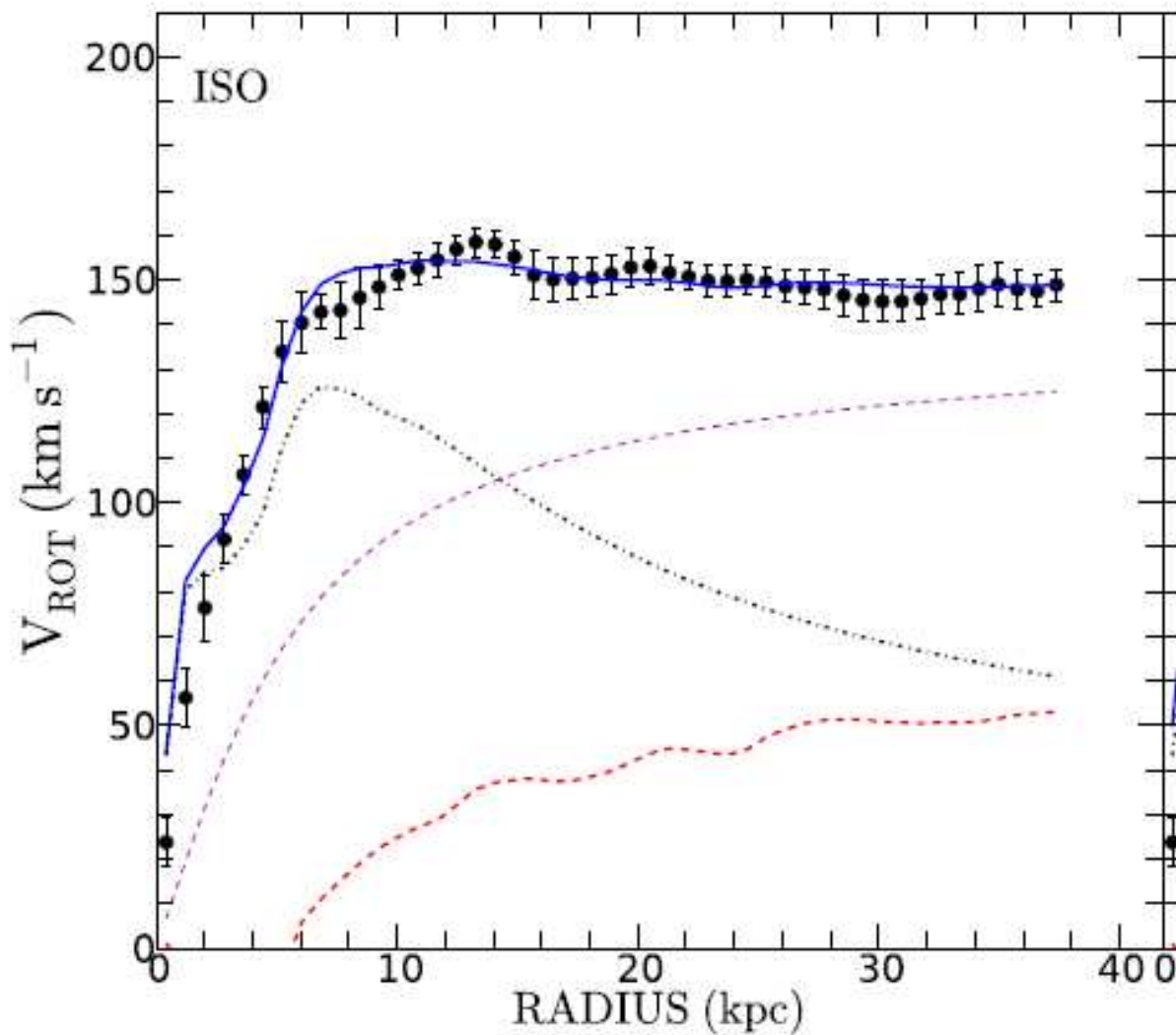
3.2.4 Stabilitás, kezdeti- és peremfeltételek

A kezdeti feltétel a newtoni termogravitációs egyenlet megoldásánál a Ván és Abe [2] cikkében szereplő exponenciális-szerű eloszlás volt, a teljes termogravitációs egyenletnél pedig a külső rögzített potenciállal megegyező konstans potenciál. A peremfeltétel a belső peremen a nulla derivált volt. A külső perem elméleti számolásoknál rögzített potenciál, a galaxisok adatainál pedig az utolsó mérési értékből számolt derivált értéke volt.

A stabilitáshoz a Jury-kritériumokat teljesítő (Kovács és Józsa [18] könyve alapján), az irodalmitól jóval biztosabb $\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{10}$ időlépést használtam. A tapasztalatok alapján ez a teljes termogravitációs egyenleteknél is stabil numerikát eredményezett, így további vizsgálatot nem igényelt.

3.3 Kapott eredmények grafikus ábrázolása

Az összehasonlításhoz a Randriamampandry és Carignan cikkében [14] is szereplő NGC 3198-as galaxis adatait választottam, mely sebességgörbéje a 4. ábrán látható. Az ábrán a pszeudoizotermikus (ISO) sebességgörbe látható, vörös, szaggatott vonallal a H_I korongnak, fekete, csík-pontozott vonallal a csillagok korongjának járulékát, a fekete pontok pedig a megfigyeléssel kapott forgási sebességeket jelzik, a szaggatott vonal a sötét anyag járuléka. A vastag kék vonal a pszeudoizotermikus sötét anyag sűrűség paramétereivel kapott legjobb illesztés, figyelembe véve fényes anyagot és az atomi hidrogént. A megkapott dimenziótlanított görbéket a cikkben szereplő $R_C = 4,85$ kpc, valamint $\rho_0 = 15,01 \cdot 10^{-3} M_{\odot} \text{pc}^{-3}$ adatokkal, valamint a fenti ábrán szereplő tengellyel számoltam, illetve skáláztam át a dimenziótlan tengelyeket.



4. ábra. Az NGC 3198 galaxis sebességgörbéje Randriamampandry és Carignan cikkében [14]. (*The rotation curve of galaxy NGC 3198 in the article of Randriamampandry and Carignan [14].*)

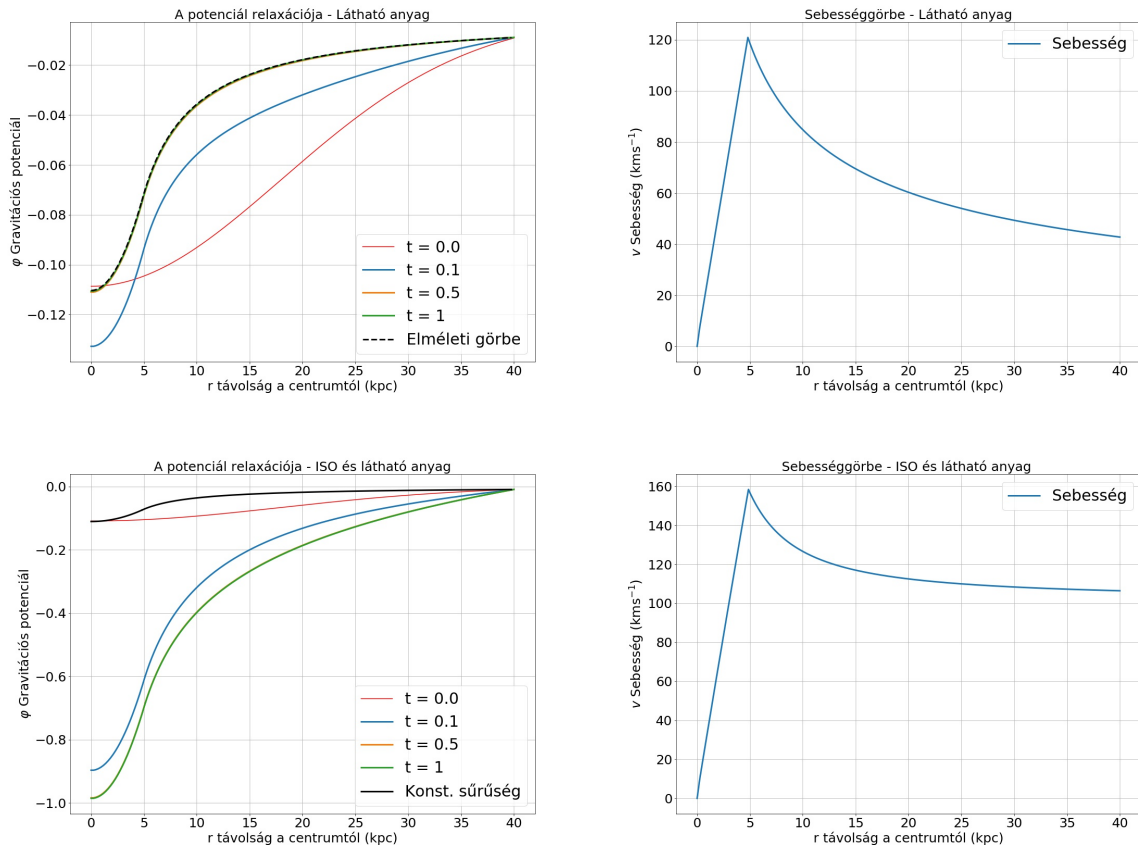
3.3.1 Disszipatív newtoni gravitációra kapott eredmények

Először a látható anyagra az egyszerű konstans sűrűségmodellt, majd a pszeudoizotermikus és a konstans sűrűséget is figyelembe véve $\rho(r)$ -ben határoztam meg a relaxáló potenciált és a hozzájuk tartozó sebességgörbéket. A két esetben a ρ_0 értékek egyeznek meg, valamint együttes esetben olyan konstans értéket választottam, hogy a cikkben szereplő ábrával összevethető görbét kapjunk. A szemléltetés céljából az együttes esetben a fekete görbe a ρ_0 konstans sűrűséghez tartozó potenciált jelzi, mint a 5. ábra felső részén.

Az integrálás külső pereme a dimenziótlanítás alapján 1-nél volt, továbbá a felhasznált ρ_0 és R_C értékekre Randriamampandry és Carignan [14] cikkében szereplő 2-es táblázatban lévő értékeket használtam, melyek alapján:

Galaxis neve	R_C [kpc]	ISO ρ_0 [$10^{-3} M_{\odot} \text{pc}^{-3}$]
NGC 3198	$4,85 \pm 0,42$	$15,01 \pm 2,15$

Az átskálázott értéke a sugárnak így a 40-es vízszintes tengelyből adódó skálázási faktor miatt $R_C = 4,85/40 \text{ kpc} = 0,12125 \text{ kpc}$ volt. A potenciál függőleges tengelye tájékoztató jellegű, dimenziótlan, fizikai értelmezésére és skálázására most nem vállalkoztam, hiszen a lényeges eredmény a belőle kapott sebességgörbe. Mint láthatjuk, csak a látható anyagot tekintve a sebességgörbe visszaadja a klasszikus lecsengést, míg a pszeudoizotermikus sötét anyagot is feltéve a sebességgörbe R_C -n túl ellaposodik, ahogy



5. ábra. Dimenziótlan potenciál relaxációja és sebességgörbék csak látható anyagra (felül), valamint ISO és látható anyagra. (*The relaxation of dimensionless potential and velocity curves for visible matter (up), and for ISO DM and visible matter.*)

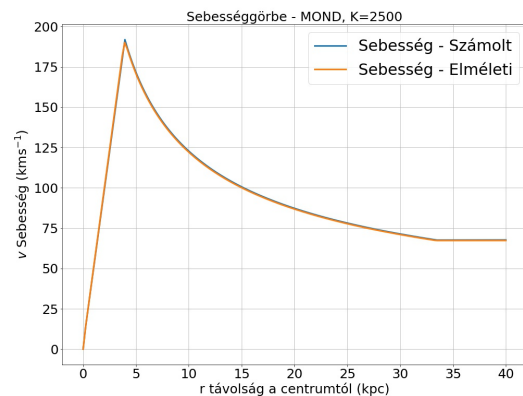
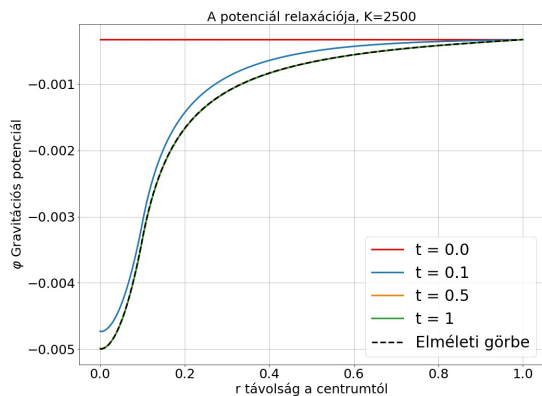
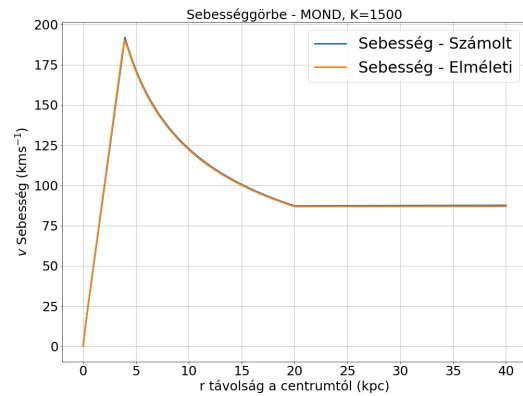
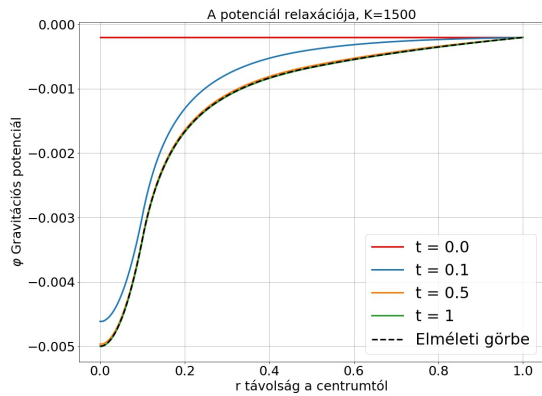
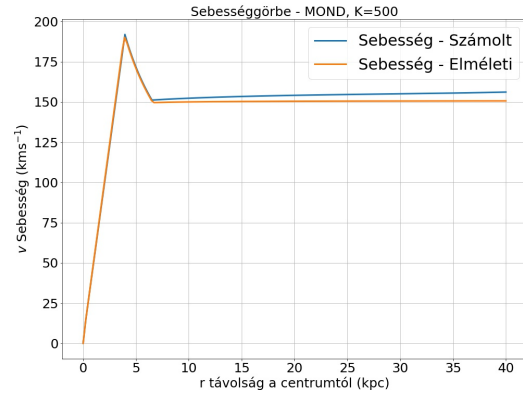
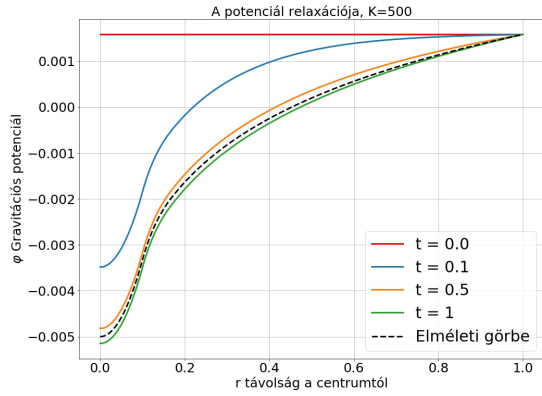
a csillagászati megfigyelések is mutatják. A számításnál adódó „csúcsot” a sűrűségmodell egyszerűsége okozza, kifinomultabb modellt használva a 4. ábrához jobban közelítő illeszkedés érhető el.

3.3.2 Módosított newtoni gravitációra kapott eredmények

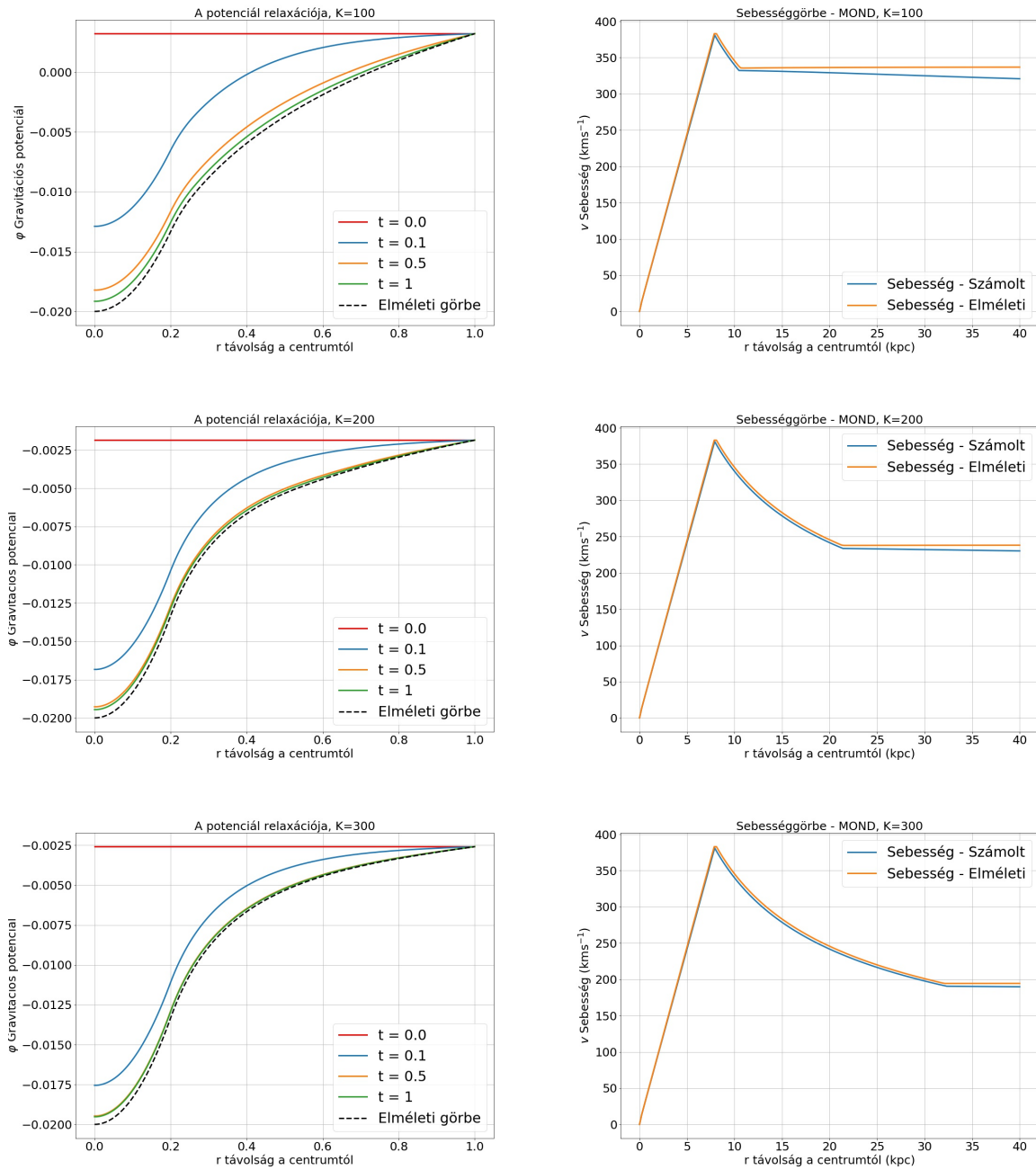
Mínt hogy $R_C < R_M < 1$, feltételnek teljesülnie kell a modell működéséhez, így a K paraméter értéke csak $\frac{3}{R_C^2} < K < \frac{3}{R_C^3}$ tartományon lehet a dimenziótlanítás alapján. Ábrázoltam a potenciál relaxációját, és a belőle kapott sebességgörbéket a teljes termogravitációs egyenlet alapján különböző R_C határokkal, ami a konstans $\rho_0 = 1$ sűrűség határa. R_M értékénél megy át a szokásos $\frac{1}{r}$ -es potenciál a logaritmikus növekedésbe, ennek érdekessége, hogy ez egy ponton túl mindenképpen pozitív értéket fog felvenni, hiszen a logaritmikusfüggvénynek nincs felső korlátja. Ez nem baj, mivel fizikai tartalma a deriváltjának, azaz az erőnek van. A sebességgörbéken láthatjuk, hogy a 5. ábra felső, csak látható anyagot tartalmazó grafikonjához hasonlóan viselkednek $R_M = \frac{1}{3} K R_C^3$ -ig, majd utána lapossá válnak. A sebességgörbén itt is megjelenő „csúcsot”, valamint a pontosabb illeszkedést a mért adatokhoz kifinomultabb sűrűségmodellel kaphatunk. A különböző paraméterek hatásának jobb megértése és láthatósága céljából a használt paraméterpárosokat a 6. ábra előtti táblázat foglalja össze.

A bal oldali ábrák dimenziótlan mennyiségeket mutatnak az egymással való jobb összevethetőségért, a sebességgörbék pedig dimenziósak a megfigyelési adatokkal való összevetéshez. A potenciált mutató ábrákon láthatjuk, ahogy az konvergál az elméleti értékhez, a sebességgörbéken pedig láthatjuk, ahogy különböző R_C értékekre a „csúcs” egyre kijebb tolódik, és a lapos rész aránya az egész görbéhez képest függ K paraméter relatív „helyzetétől” a lehetséges értékeinek intervallumában.

Ábra	R_C	K	Megengedett K intervallum
5.	0,1	500	300-3000
		1500	
		2500	
6.	0,2	100	75-375
		200	
		300	
7.	0,3	40	33,3-111,1
		70	
		100	

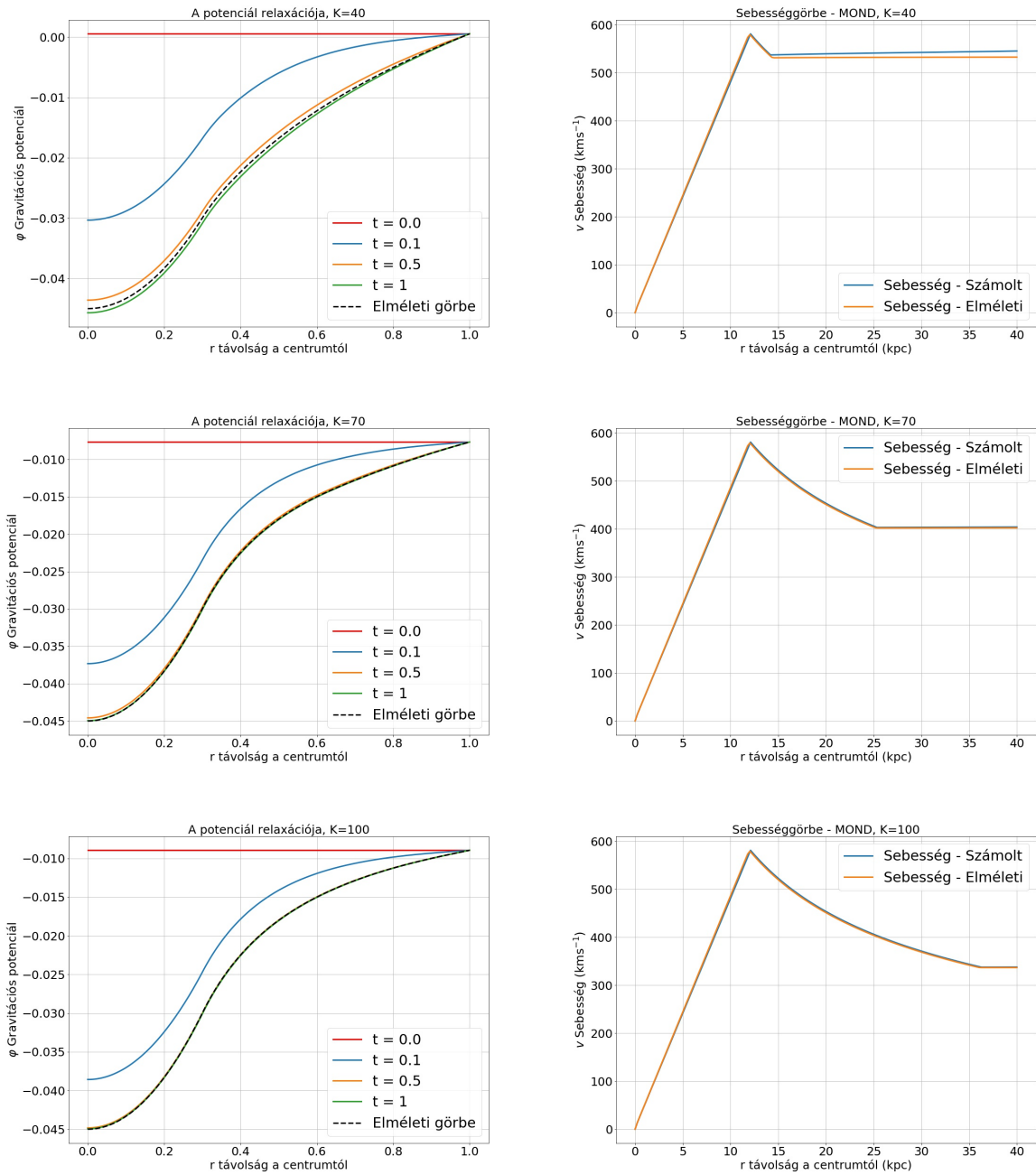


6. ábra. Potenciál relaxációja és sebességgörbék különböző K értékekre, bal oldali ábrák dimenziótlanok $R_C = 0,1$, jobb oldalt skálázva, ezért $R_C = 4 \text{ kpc}$. (The relaxation of the potential and velocity curves for various values of K, images on the left are dimensionless $R_C = 0,1$, images on the right are scaled, thus $R_C = 4 \text{ kpc}$.)



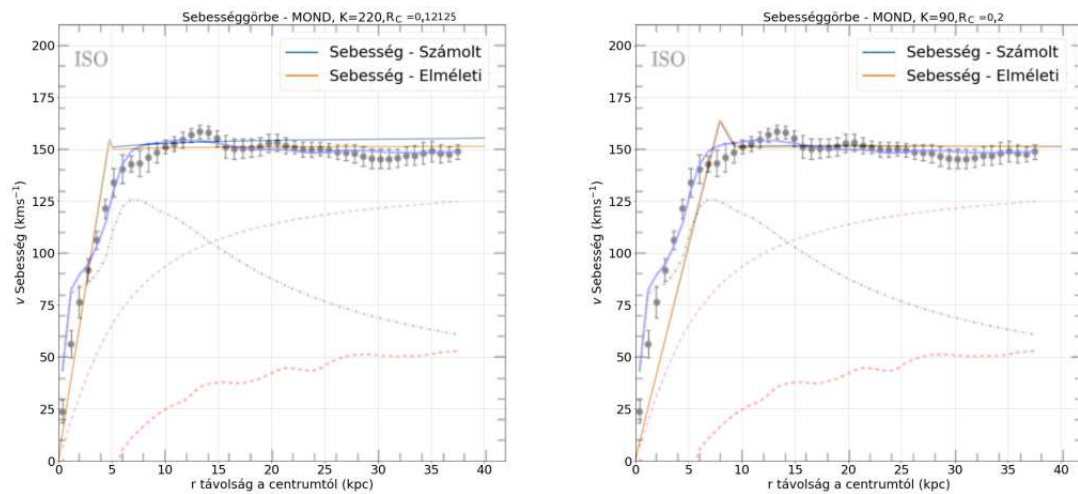
7. ábra. Potenciál relaxációja és sebességgörbék különböző K értékekre, bal oldali ábrák dimenziótlanak $R_C = 0,2$, jobb oldalt skálázva, ezért $R_C = 8 \text{ kpc}$. (*The relaxation of the potential and velocity curves for various values of K , images on the left are dimensionless $R_C = 0,2$, images on the right are scaled, thus $R_C = 8 \text{ kpc}$.*)

Láthatjuk, hogy a newtoni termogravitációs egyenlet megoldására a pseudoizotermikus és a konstans sűrűséges modell esetén az NGC 3198 galaxis sebességgörbéihez hasonlókat kaphatunk a 5. ábrán. A teljes termogravitációs egyenlet összeillesztett megoldásából különböző R_C értékekre láthatjuk, hogy itt is nagyjából visszkapjuk a galaxis sebességgörbéit a következő illusztrációs 9. ábrán, ahol a bal oldali grafikonon $R_C = 0,12125$ ($R_C = 4,85 \text{ kpc}$, a sötét anyag haló magsugara) és $K = 220$ (dimenziósan $K = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$), a jobb oldalin pedig $R_C = 0,2$ ($R_C = 8 \text{ kpc}$, a galaxis sugara az ábra szerint, a fényes anyag sebességgörbéjének csúcsa) és $K = 90$ (dimenziósan $K = 6,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$) voltak a paraméterek. Láthatjuk, hogy kevesebb feltételezett anyag nagyobb potenciált eredményez úgy, hogy a modellben nem tételezünk fel térfolyást, csak R_M távolságon túl. Ezzel demonstráltam, hogy az elmélet képes lehet a megfigyelési adatok magyarázatára, legalábbis nincs nyilvánvaló ellentmondásban velük.



8. ábra. Potenciál relaxációja és sebességgörbék különböző K értékekre, bal oldali ábrák dimenziótlanak $R_C = 0,3$, jobb oldalt skálázva, ezért $R_C = 12 \text{ kpc}$. (The relaxation of the potential and velocity curves for various values of K , images on the left are dimensionless $R_C = 0,3$, images on the right are scaled, thus $R_C = 12 \text{ kpc}$.)

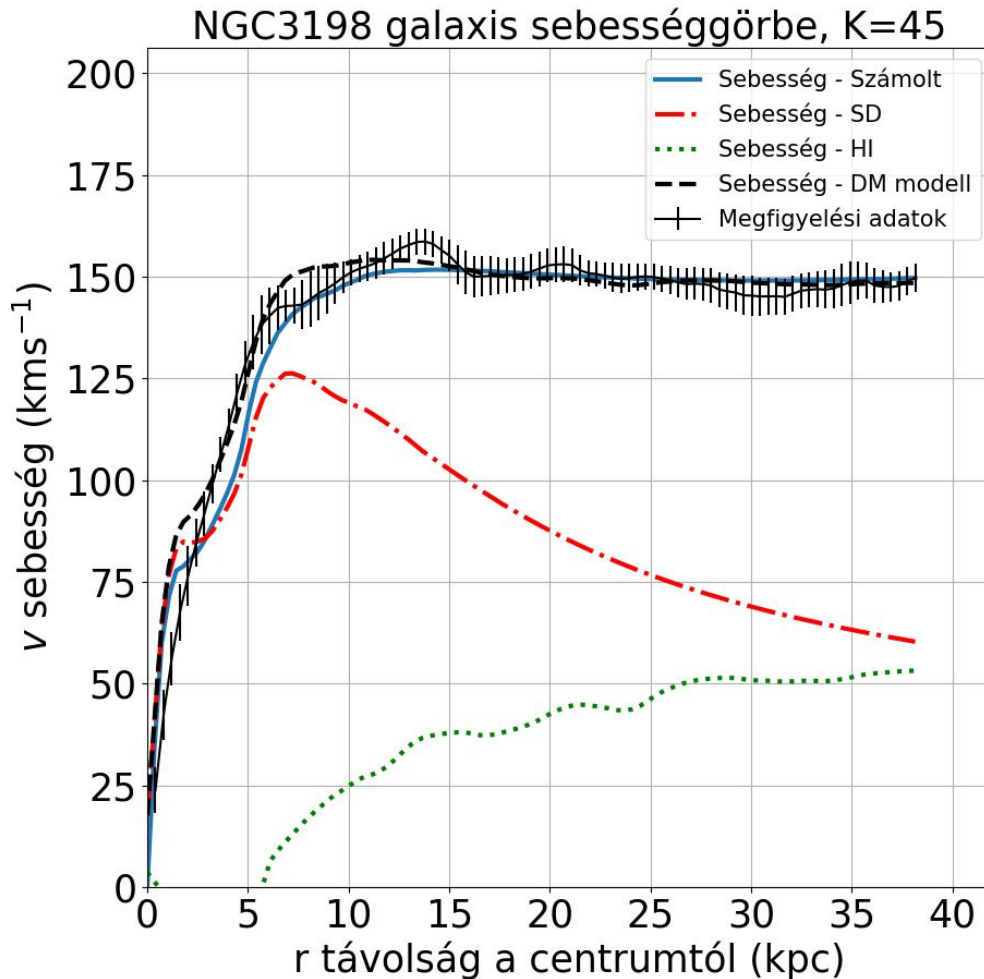
Természetesen a megfigyelési adatokkal való sokkal részletesebb összevetés szükséges ahhoz, hogy a newtoni gravitáció ilyen módosítását komolyan vehessük.



9. ábra. A Randriamampandry és Carignan [14] cikkében szereplő ábra superponálva az $R_C = 0,12125$ és $K = 220$ (balra) és $R_C = 0,2$ és $K = 90$ (jobbra) értékekkel számolt grafikonokra. (The figure from the article of Randriamampandry and Carignan [14] superponed onto figures with corresponding parameters of $R_C = 0,12125$ and $K = 220$ (left) and $R_C = 0,2$ and $K = 90$ (right).)

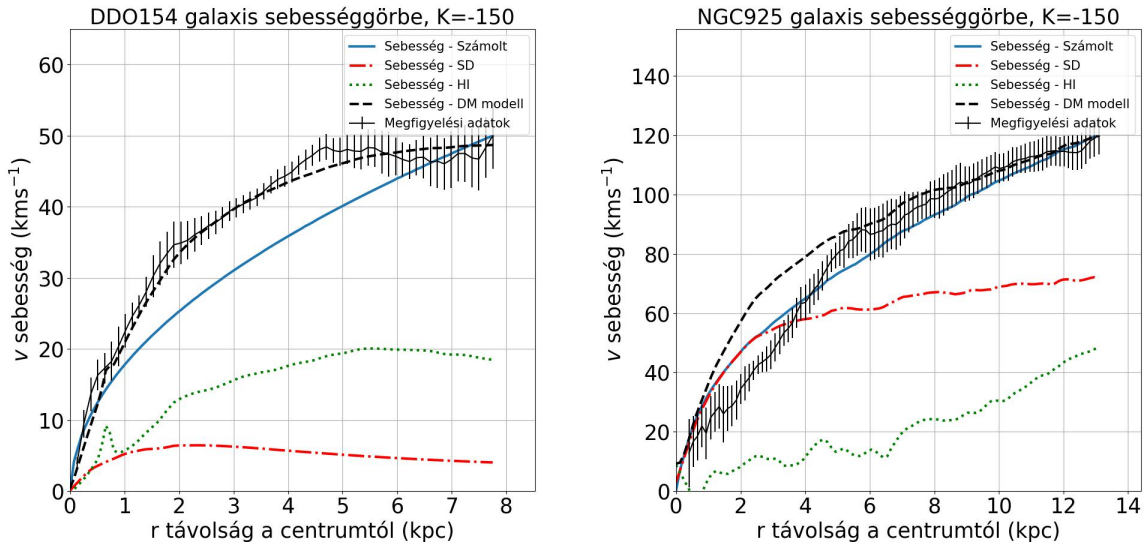
3.4 Disszipatív téregyenlet teljes megoldása megfigyelési sűrűségadatokra

A fenti eredmények hitelesítik a numerikus módszert és így valódi sűrűségadatokra is megbízhatunk az eredményekben. A továbbiakban a THINGS adatbázis galaktikus sűrűségmodelljeit felhasználva [19], a teljes, tehát az egész tartományon a módosított newtoni gravitációs egyenletet tartalmazó módon, az NGC 3198 galaxis világító anyagának és atomi hidrogénjének sűrűségadatait használva forrássűrűségként, szintén sebességgörbéket számoltam. A kapott görbék a következő ábrán láthatóak:



10. ábra. Az NGC 3198 galaxis sebességgörbéje $K = 45$ értékre ($K = 3,47 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-2}$ dimenziósan), $N = 105$. (*The velocity curve of galaxy NGC 3198 with $K = 45$, ($K = 3,47 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-2}$ with dimensions), $N = 105$.)*)

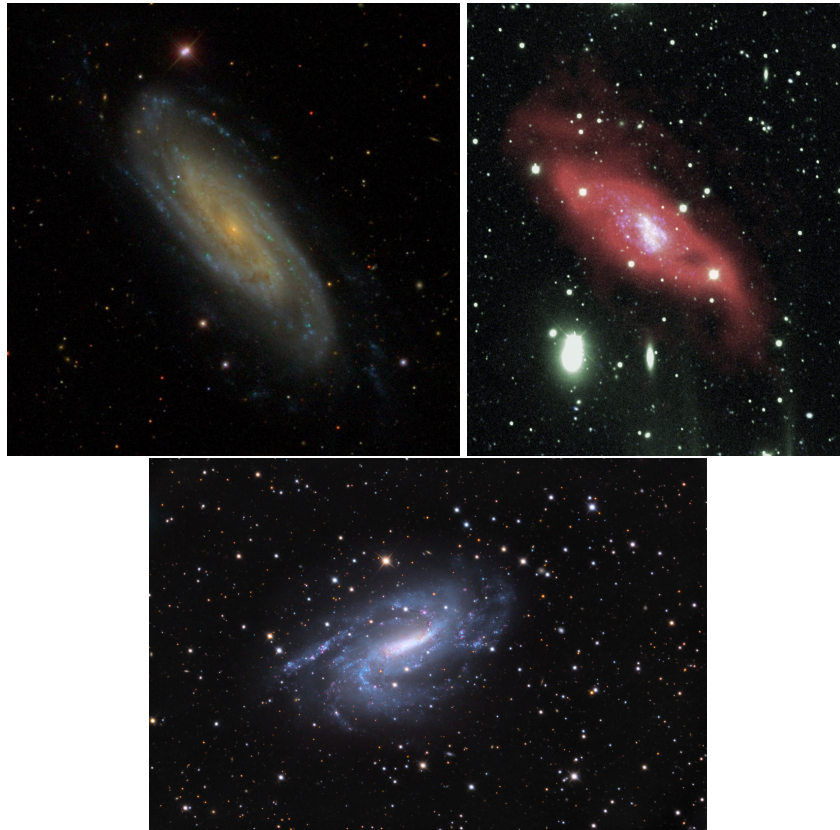
Ezen kívül még két galaxisra is megvizsgáltam a teljes egyenlet által jósolt sebességgörbét. Ellenőrzési céllal először az ISO modellt figyelembe véve reprodukáltam a Randriamampandry és Carignan [14] cikkében szereplő sebességgörbét (felhasználva a cikkben szereplő $R_C = 16,63 kpc$ és $\rho_0 = 3,40 \cdot 10^{-3} M_\odot pc^{-3}$ értékeket), ezután a teljes módosított egyenletet oldottam meg a korábban is használt módon. Az ábrákon a DM a sötét anyag járulékat, a HI az atomi hidrogén járulékat, az SD pedig a látható anyag járulékat jelöli, a DM modell pedig az ISO modellből adódó görbét. A megoldás során a korábban részletezett peremfeltételeket használtam. Megvizsgáltam a DDO 154 galaxist is, melyet azért is érdemes lesz tovább vizsgálni, mivel annál a megfigyelt sebességgörbe csak kis hányadát lehet a látható anyag és atomi hidrogén kontribúciójával megmagyarázni, és egy ilyen, a feltételezések szerint sötét anyag dominált galaxisra a sebességgörbék reprodukciója fontos lépés lenne. Itt is először reprodukáltam az ISO megoldását (a Randriamampandry és Carignan [14] cikkében szereplő $R_C = 1,34 kpc$ és $\rho_0 = 27,38 \cdot 10^{-3} M_\odot pc^{-3}$ értékeket használva), majd a teljes módosított egyenletet oldottam meg numerikusan. Eredményül a következő ábrákat kaptam:



11. ábra. A DDO 154 és NGC 925 galaxisok sebességgörbéi a módosított gravitációs esetben, $K = -150$ és $N = 105$. (*The rotation curves of galaxies DDO 154 and NGC 925 with modified gravity, $K = -150$ and $N = 105$.*)

Érdeemes megfigyelni, hogy itt K előjele különböző. Minthogy a háttérben lévő termodinamikai elmélet alapján az együtttható előjele nincs rögzítve, ez a galaxisok anyagának és dinamikájának különböző kapcsolatára utalhat.

A három bemutatott galaxis a következőképpen néz ki:



12. ábra. Balra: NGC 3198 galaxis, forrás: Sloan Digital Sky Survey, jobbra: DDO 154 galaxis, forrás: National Radio Astronomy Observatory, Little THINGS, lent: NGC 925 galaxis, forrás: Adam Block, Mount Lemmon SkyCenter, and University of Arizona. (*Left: Galaxy NGC 3198, source: Sloan Digital Sky Survey, right: galaxy DDO 154, source: National Radio Astronomy Observatory, Little THINGS, bottom: galaxy NGC 925, source: Adam Block, Mount Lemmon SkyCenter, University of Arizona.*)

3.5 Összefoglalás

A termodinamika és a gravitációelmélet kapcsolatának gondolata a fekete lyukak elméletének termodinamikai vonatkozásaiból kiindulva fokozatosan erősödött a gravitáció elméletén belül. Miután kiderült, hogy az általános relativitáselmélet bizonyos általánosításai is sikeresen megalapozhatóak a nemegyensúlyi termodinamika segítségével [20], az emergens gravitáció gondolata egyre nagyobb teret nyer. A kapcsolat gyökere a két elmélet hasonló univerzalitása, amelyen az ismertett nemrelativisztikus termogravitációs elmélet is alapul.

Ebben a dolgozatban ennek a nemrelativisztikus termogravitációs elmélet bizonyos jóslatait, elsősorban a galaxisok sebességgörbéire vonatkozó megoldásokat hasonlítom össze a megfigyelési adatokkal.

Pontos sűrűségadatokat használva, a teljes egyenlet megoldásából a DM modellel összemérhető pontos-ságú sebességgörbét is kaptam, mely a 10. és 11. ábrákon láthatók.

A jövőben érdemes lehet az elméletet tovább tesztelni, további galaxisok adataival is összevetni, illetve a numerikus módszert javítani, a peremfeltételek szerepének vizsgálatával és a numerikus stabilitás növelésével. Nem világos, hogy a DDO 154 galaxisánál tapasztalt illesztetlenségnek fizikai oka van vagy esetleg a termogravitációs modell valamilyen más peremfeltételével esetleg a ez a sötét anyag túltengés is megmagyarázható.

Ezért további kutatást igényel a teljes egyenlet megoldása, és annak lehetséges illesztése megfigyelési adatokra, különös tekintettel a használandó peremfeltételekre. Ebből a szempontból is tanulságos a szuperfolyékony-normális keverék sötét anyag modell [21], amelynek feltevései egy eredendően hidrodinamikai szerkezetű elméletbe könnyen beilleszthetőnek tűnnek.

Felmerülő probléma, hogy miként illeszthető egy ilyen, teljesen termodinamikai elmélet a már konvencionálisan elfogadott fizikai törvények közé, és hogy milyen egyéb következményekkel és lehetséges ellentmondásokkal járna ez. Ebből a szempontból természetes következő lépés a teljes gravohidrotermodinamikai egyenletrendszer vizsgálata, ahol biztató, hogy már önmagában csak a termikus kölcsönhatás figyelembe vételével megfelelően értelmezhetőek a klasszikus stabilitási problémák statikus esetben, termodinamikai stabilitásként, gyengén nemlokális állapotterben [22].

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Elsősorban szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Dr. Ván Péternek, a fáradságos munkáját. Vezetése és útmutatása nélkül ez a munka nem jöhetett volna létre.

Köszönet W. J. G. de Blok professzornak, aki rendelkezésünkre bocsátotta a THINGS sebességgörbéinek adatait. [19]

Köszönettel tartozom gimnáziumi tanáromnak, Szabó Endrének, aki a középiskolás éveim alatt áldozatkészen segítette fizikai tanulmányaimat.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Erik P. Verlinde. Emergent Gravity and the Dark Universe. *SciPost Phys.*, 2:016, 2017.
- [2] Péter Ván and Sumiyoshi Abe. Emergence of modified newtonian gravity from thermodynamics, 2019. arXiv: 1912.00252.
- [3] I. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687. <https://www.gutenberg.org/ebooks/28233>.
- [4] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, January 1933.
- [5] Vera C. Rubin and Jr. Ford, W. Kent. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *Astrophysical Journal*, 159:379, February 1970.
- [6] Sho Iwamoto, Károly Seller, and Zoltán Trócsányi. Sterile neutrino dark matter in a U(1) extension of the standard model. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2022(01):035, jan 2022.
- [7] A. J. Krasznahorkay, M. Csatlós, L. Csige, J. Gulyás, A. Krasznahorkay, B. M. Nyakó, I. Rajta, J. Timár, I. Vajda, and N. J. Sas. New anomaly observed in ^4He supports the existence of the hypothetical X17 particle. *Phys. Rev. C*, 104:044003, Oct 2021.
- [8] P. van Dokkum, S. Danieli, Y. Cohen, A. Merritt, A. J. Romanowsky, R. Abraham, J. Brodie, Ch. Conroy, D. Lokhorst, L. Mowla, E. O’Sullivan, and J. Zhang. A galaxy lacking dark matter. *Nature*, 555(7698):629–632, 2018.
- [9] M. Milgrom. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophysical Journal*, 270:365–370, July 1983.
- [10] L. Acedo. Modified newtonian gravity as an alternative to the dark matter hypothesis. *Galaxies*, 5(4), 2017.
- [11] L. Berezhiani and J. Khoury. Theory of dark matter superfluidity. *Physical Review D*, 92(10):103510, 2015.
- [12] Sumiyoshi Abe and Peter Ván. Crossover in extended newtonian gravity emerging from thermodynamics. *Symmetry*, 14(5), 2022.
- [13] Sabine Hossenfelder. Dark matter: The situation has changed. *BackRe(Action) blog*, May 2021.
- [14] Toky H. Randriamampandry and Claude Carignan. Galaxy mass models: MOND versus dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439(2):2132–2145, 02 2014.
- [15] P. Ván and R. Kovács. Variational principles and nonequilibrium thermodynamics. *Phil. Transactions of the Royal Society A: Mathem., Phys. and Eng. Sciences*, 378(2170):20190178, 2020.
- [16] A. Berezhovski and P. Ván. *Internal Variables in Thermoelasticity*. Springer, 2017.
- [17] L. Diósi. Note on possible emergence time of newtonian gravity. *Physics Letters A*, 377(31-33):1782–1783, 2013.
- [18] Kovács Róbert és Józsa Viktor. *Bevezetés a numerikus módszerekbe*. Akadémiai Kiadó, 2019.
- [19] W. J. G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, C. Trachternach, S-H. Oh, and R. C. Kennicutt. High-resolution rotation curves and galaxy mass models from things. *The Astronomical Journal*, 136(6):2648–2719, 2008.
- [20] C. Eling, R. Guedens, and T. Jacobson. Nonequilibrium thermodynamics of spacetime. *Physical Review Letters*, 96(12):121301, 2006.
- [21] S. Hossenfelder and T. Mistele. The Milky Way’s rotation curve with superfluid dark matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 498(3):3484–3491, 2020.
- [22] D. Giordano, P. Amodio, F. Iavernaro, A. Labianca, M. Lazzo, F. Mazzia, and L. Pisani. Fluid statics of a self-gravitating perfect-gas isothermal sphere. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 78:62–87, 2019. arXiv:1903.04044.

Térfogatfogalmak a fekete lyukak termodinamikájában

Volume Concepts in the Thermodynamics of Black Holes

Somogyfoki Réka

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar, Fizika Doktori Iskola, somogyfoki.reka@wigner.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: Az általános relativitáselméletben a térfogat egy koordináta-függő mennyiség, ezért a fekete lyukak termodinamikai leírásában általában nem szerepel a térfogat és a nyomás, mint változók. A dolgozatban megvizsgáljuk, hogyan lehet termodinamikailag konzisztens módon különböző térfogatfogalmakat bevezetni ezekbe a leírásokba, körüljárjuk az erre tett próbálkozásokat az irodalomban, és bemutatjuk a levonható konklúziókat. Elsősorban az Anti-de Sitter–Kerr fekete lyukak fázisszerkezetét és a Hawking–Page-fázishatárokat vizsgáljuk. A dolgozat célja a térfogat beilleszthetőségének vizsgálata különféle típusú fekete lyukak termodinamikai elméletébe.

Kulcsszavak: Másodrendű fázisátalakulás, Anti-de Sitter-metrika, extenzivitás

ABSTRACT: Volume is a coordinate-dependent quantity in General Relativity. Therefore, when it comes to thermodynamics of black holes, volume and its conjugate pressure are not used as thermodynamic variables. In this presentation we study how different types of volume concepts can be used in black hole descriptions in a thermodynamically consistent way and show the consequences taking results from literature into account. We study especially the phase structure of Anti-de Sitter–Kerr type black holes and their Hawking–Page phase boundaries. The main aim of this project is to find out how one can put the thermodynamic volume piece into place in the great puzzle of the theory of black holes.

Keywords: Second-order phase transition, Anti-de Sitter metric, extensiveness

1 BEVEZETÉS

A termodinamikai tárgyalás egy nagyon érdekes megközelítési módja a fekete lyukak leírásának. A tisztán csak relativitáselméleti princípiumokat figyelembe vevő vizsgálathoz képest egészen új megvilágításból kezeli a problémát, lényegében egy másik masszív fizikai diszciplínához csatolja. Lehetővé teszi, hogy az általános relativitáselmélet megoldásai konkrét kozmológiai megfigyelésekhez kapcsolódjanak. Ezen felül azért is fontos a fekete lyukak termodinamikája, mert a téridő holografikus elképzeléseit is ez alapozza meg [1, 2].

A fekete lyukak termodinamikáját és az általános relativitáselméletet kutatókat egyaránt foglalkoztatja ugyanannak a fogalomnak a tisztázása: a fekete lyukak térfogatfogalmáé. A geometriai térfogat koordinátarendszer-függő, relativisztikusan viszont csak koordináta-függetlenül lehetne fizikai mennyiség, a termodinamikai térfogatváltozó pedig azért fontos elem, hiszen nyomást is csak ezen keresztül lehet a számításokba bevezetni. A fekete lyukak esetén ez a két kérdéskör találkozik egymással, megnehezítve azzal a problémával, hogy a fekete lyukaknál elvileg nincs szó mechanikai munkavégzésről.

A fekete lyukak esetén a térfogat helyett a legfontosabb termodinamikai állapotváltozó szintén egy

geometriai mennyiség, az eseményhorizont felülete. Emiatt felmerülhet a kérdés: valóban érdemes-e invariáns térfogatfogalom bevezetésével vesződni? Christodoulou és Rovelli [3] nagy áttörést értek el ezen a téren, és megmutatták, hogy van értelme annak, hogy a fekete lyukak térfogattal bevezetett termodinamikájáról beszéljünk. Erre három féle kiindulási gondolatmenet áll a rendelkezésünkre: Az első a kopasszági tételt veszi alapul. Eszerint nincs értelme termodinamikai térfogatot bevezetni, hiszen az eseményhorizont úgyis magában hordozza a geometriai tulajdonságokat. Egy másik lehetőség a szokásos, geometriai $4\pi R^3/3$ háromdimenziós látszólagos gömbtérfogatot azonosítani a termodinamikai térfogattal. Többek közt Dolan [4], valamint Spallucci és Smailagic [5] is ezt használják fel gondolatmenetük felépítése során. Ők az Anti-de Sitter-téridőn keresztül, az entalpia segítségével vezetik be a térfogatot, mint termodinamikai változót. Végül, megközelíthetjük a problémát teljes mértékben termodinamikai szemszögből, ekkor a térfogatfogalom az extenzivitáson keresztül kerül bevezetésre. Az ilyen módon definiált térfogat pedig összhangba kerül az általános relativitáselmélet invariáns térfogatfogalmával.

A dolgozatomban azt vizsgálom, hogy ez a három különböző megközelítés egyes speciális esetekben milyen eredményre vezet, és ezek az eredmények termodinamikailag mennyire konzisztensek. Az irodalomban látott példák levezetésén túl alkalmazom a térfogatfogalmakat, elsősorban az Anti-de Sitter–Kerr-fekete lyukak fázisszerkezetét és a Hawking–Page-fázishatárokat vizsgálva.

A dolgozatot úgy építettem fel, hogy a második fejezet összefoglalja a termodinamikai alapfogalmakat, amelyek analógiában állhatnak a fekete lyukak vizsgálata során felmerülő problémákkal, vagy szükségesek lehetnek a későbbi fejezetekben leírt folyamatok megértéséhez. A harmadik fejezetben írok a különböző típusú fekete lyukakról, metrikájukról, különösen azokra helyezve a hangsúlyt, amelyeket később termodinamikai oldalról is vizsgálni fogok. Az utolsó fejezetben pedig rátérek a fekete lyukak termodinamikájára. Itt a már korábban említett három különféle térfogat-bevezetési szempont alapján haladva veszem górcső alá a Hawking–Page-fázisátalakulást.

2 TERMODINAMIKAI ALAPFOGALMAK

2.1 Potenciálosság

A termodinamika első főtétele az energiamegmaradást fejezi ki, amely megkülönbözteti az energiaátadás két formáját, a Q hőátadást, és a W végzett munkát, ezeket pedig összekapcsolja egy testre jellemző állapotfüggvény, a U belső energia megváltozásával:

$$dU = \delta Q + \delta W. \quad (1)$$

Ennek megfelelően egy homogén termodinamikai test fundamentális egyenlete energia reprezentációban:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN, \quad (2)$$

ahol az S entrópia, a V térfogat, valamint az N részecskeszám a belső energiához tartozó természetes állapotváltozók, a T hőmérséklet, a p nyomás, és a μ kémiai potenciál pedig a hozzájuk tartozó parciális deriváltjai U -nak. Ez a megállapítás azt is magában hordozza, hogy a termodinamikai állapotoknak létezik olyan állapotfüggvénye, amely a megfelelő termodinamikai változók potenciálja. Jelen esetben ez a belső energia, de bármelyik extenzív változó lehet potenciál, hiszen ebből a szempontból a differenciálok teljesen semlegesek. A későbbiekben az entrópiát tekintjük az elsődleges potenciálnak, melynek változói

(U, V, N) .

A belső energia és az entrópia mellett további potenciálok bevezetése is hasznos. Ezek között a Legendre-transzformáció jelenti a kapcsolatot, amely egy involúció valós értékű, konvex függvényeken. A további termodinamikai potenciálok a hozzájuk tartozó Legendre-transzformációkkal, feltüntetve a természetes változókat:

- szabadenergia: $F(T, V, N) = U - TS$,
- entalpia: $H(S, p, N) = U + pV$,
- Gibbs-potenciál: $G(T, p, N) = U - TS + pV$.

Az entrópia az alappotenciál, ezért központi fogalomként kell kezelnünk. Entropikus rendszer tárgyalásakor az entrópia teljes deriváltja (2) alapján

$$DS(U, V, N) = \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T}, -\frac{\mu}{T} \right), \quad (3)$$

ahol E , V , N a természetes változók. A mérésekkel meghatározott $\left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T}, -\frac{\mu}{T} \right)$ vektortér az (U, V, N) állapottérén. Az entrópiának, mint potenciálfüggvény létezésének a feltételei:

$$T \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial e}{\partial v} + p, \quad \text{és} \quad T \frac{\partial s}{\partial T} = \frac{\partial e}{\partial T} \quad (4)$$

ahol s , v , e , és p rendre az entrópia, a térfogat, az energia és a nyomás fajlagos mennyiségeit jelzik [6], vagyis $s = S/N$, $v = V/N$ és $e = U/N$. Ez akkor teljesül, ha a fenti vektortér teljes deriváltja szimmetrikus, ebből következik a vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlősége, valamint, hogy az entrópia csak egy additív konstans értékéig meghatározott.

Tisztáznunk kell még az exergia fogalmát, amely definíció szerint a legnagyobb elérhető hasznos munka, egy olyan folyamat során, amely egy rendszert termodinamikai egyensúlyba hoz egy hőtartállyal [7, 8]. A rendszer és a hőtartály egyensúlyba kerülésével az E_x exergia 0 lesz.

$$E_x = U - T_0 S, \quad (5)$$

ahol T_0 a hőtartály hőmérséklete. A fenti (5) egyenlet első ránézésre Legendre-transzformációnak is tűnhet, ám ez nem így van, hiszen az exergia nem egy termodinamikai potenciál. Ebből kifolyólag az exergiát a szabadenergiával helyettesíteni, vagy fordítva, hibás elgondolás. Fontos megjegyezni, hogy az exergia a termodinamikai rendszer, azaz a test és a környezet teljes entrópiájával kapcsolatos mennyiség [6].

2.2 A termodinamika főtételei

A termodinamika első főtétele, ahogyan már láthattuk fentebb, az (1) egyenlet fejezi ki. Szokás ehhez az egyenlethez még hozzátenni az energiaátadás egy harmadik formáját, az anyagmennyiséggel szállított belső energiát. Ekkor a főtételekre vonatkozó egyenlet egy, az anyagátadásra vonatkozó extra taggal egészíthető ki, a következő módon:

$$dU = \delta Q + \delta W + \delta L, \quad (6)$$

ahol tehát L az anyagátadásból származó energiaátvitelre jellemző mennyiség.

A termodinamika második főtételének sokféle megfogalmazása ismert. Clausius verziója úgy szól, hogy a hő mindig a melegebb hely felől terjed a hidegebb felé, a Kelvin–Planck-változat pedig kimondja, hogy nincs olyan periodikusan működő gép, amely egy hőtartállyal áll kapcsolatban, és az ebből felvett energiát teljes egészében munkává alakítja. Létezik olyan megfogalmazás is, hogy zárt rendszer entrópiája egyensúlyi helyzetben maximális, illetve, hogy nemegyensúlyi folyamatok során a rendszer entrópiája nem csökkenhet. Utóbbi állítást a disszipációs egyenlőtlenséggel fejezhetjük ki a matematika nyelvén. Ezen kívül még a belső stabilitási kritériumokat kell megszabnunk ahhoz, hogy az elv teljesüljön egy anyagra.

A termodinamika harmadik főtételét Nernst fogalmazta meg, ez azt foglalja magában, hogy a hőmérséklet nullához tartása az entrópia eltűnését is maga után vonja.

A termodinamikának, történeti okok miatt nulladik főtétele is van. Ezt az előző három után fogalmazták meg formálisan, viszont alapvetőbbnek tartják, mint bármely másikat. Eszerint, ha A rendszer termodinamikai egyensúlyban van a B rendszerrel és B rendszer termodinamikai egyensúlyban van a C rendszerrel, akkor az A és C rendszerek is termodinamikai egyensúlyban állnak egymással. Egy másik megfogalmazásban, a termodinamikai egyensúly szükséges és elégséges feltétele, hogy a megengedett kölcsönhatásoknak megfelelő intenzív mennyiségek egyenlő értéket vegyenek fel [6].

2.3 Extenzivitás

Az egyensúlyi termodinamikában az állapothatározók nagyon fontos tulajdonsága az extenzivitás. Matematikailag ezt úgy fogalmazzuk meg, hogy az entrópia a változóinak elsőrendű Euler-homogén függvénye, vagyis

$$S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda^\beta S(U, V, N), \quad (7)$$

ahol $\beta = 1$ a homogenitás rendjét adja meg [9]. A többi termodinamikai potenciál extenzivitási tulajdonságai a (7) egyenlet következményei. Az intenzív változókra nincs hatással a rendszer újráskálázása, ezért rájuk ez a feltétel természetesen nem teljesül, és más potenciálokra már nem minden változójukban ugyanez a tulajdonság jellemző. Általában is lehetnek esetek, amikor közvetlenül levezethetjük a skálázási tulajdonságokat, mint például a felületdominált aeroszolok. Ehhez hasonlatosan, a fekete lyukak esetén, ahol szintén a dimenzionálisan redukált a fizikailag megfoghatóan lényeges téridőtartomány (holográfia), bonyolultabb Euler-homogenitási összefüggések érvényesek.

Többváltozós függvények extenzív változói esetén különböző rendben is lehet homogén a függvény az egyes változóiban, vagyis

$$\Psi(\lambda^{\beta_1} E^1, \dots, \lambda^{\beta_n} E^n) = \lambda^{\beta_\Psi} \Psi(E^1, \dots, E^n), \quad (8)$$

ahol $\beta_a = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ valós konstansok, valamint β_Ψ az általánosított homogenitás rendje. (8) tehát az extenzivitás általánosított formája.

Érdemes megjegyezni, hogy a belső energián kívül, az összes többi, Legendre-transzformációval előállítható fundamentális potenciálnak legalább egy természetes változója intenzív. Egy közönséges rendszer esetén azonban ezek rendje $\beta = 0$, vagyis az újráskálázás során egyszerűen figyelmen kívül hagyhatjuk őket. [9] A fekete lyukak termodinamikájában jellemzőek a nem nullad- vagy elsőrendű homogén extenzivitási tulajdonságok. Ekkor az arra vonatkozó összefüggéseket, hogy egy termodinamikai potenciál

milyen rendű homogén függvénye a változóinak, Smarr-relációknak nevezzük [10].

A (2) egyenlethől az extenzivitási tulajdonság miatt következik, hogy a belső energia:

$$U(S, V, N) = TS - pV + \mu N, \quad (9)$$

és ugyancsak levezethető a Gibbs–Duhem-reláció,

$$-SdT + Vdp - Nd\mu = 0, \quad (10)$$

amely megmutatja a kapcsolatot egy rendszer intenzív változói között.

2.4 Termodinamikai és dinamikus stabilitás

Termodinamikai stabilitásnak szokás nevezni az entrópia azon tulajdonságát, hogy konkáv függvény. Pontosabban, az entrópia második deriváltja, ahol ez létezik, entropikus rendszer esetén mindig negatív szemidefinit. A matematika nyelvén ezt extenzív, egy komponensű gázokra, folyadékokra, ahol az állapot (U, V, N) , a következő egyenlőtlenség-rendszerrel is leírhatjuk. Az extenzivitás, azaz az elsőrendű Euler-homogenitás miatt tehát a stabilitási feltételek a már korábban bevezetett fajlagos mennyiségekkel:

$$\frac{\partial T(e, v)}{\partial e} = \frac{1}{c_v} > 0, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial p(T, v)}{\partial v} \leq 0, \quad (11)$$

ahol c_v az állandó térfogat melletti fajhő. Ezek szerint a hőmérséklet növekedése együtt jár a belső energia növekedésével, és fordítva, valamint, a térfogat növekedésével a nyomásnak csökkennie kell (egyszerű rendszerek esetében) [11]. Más megfogalmazásban, az izoterm kompresszibilitás és az izochor hőkapacitás pozitivitása a termodinamikai stabilitás feltétele, hiszen ebben az esetben lesz a fajlagos entrópia második parciális deriváltjaiból alkotott Hesse-mátrix pozitív definit.

Az izobár fajhő esetében a stabilitás feltételének matematikai leírása:

$$\frac{1}{c_p} = \frac{\partial T(e, p)}{\partial e} \Big|_p > 0, \quad (12)$$

ami a következménye a másik két stabilitási feltételnek (11)-ben, pozitivitása tehát nem jelent plusz kritériumot.

A termodinamikai stabilitás pedig a dinamikus stabilitás szükséges feltétele, nemegyensúlyi termodinamikai tárgyalásban, időfüggő folyamatok esetén [6].

2.5 Az ideális gáz

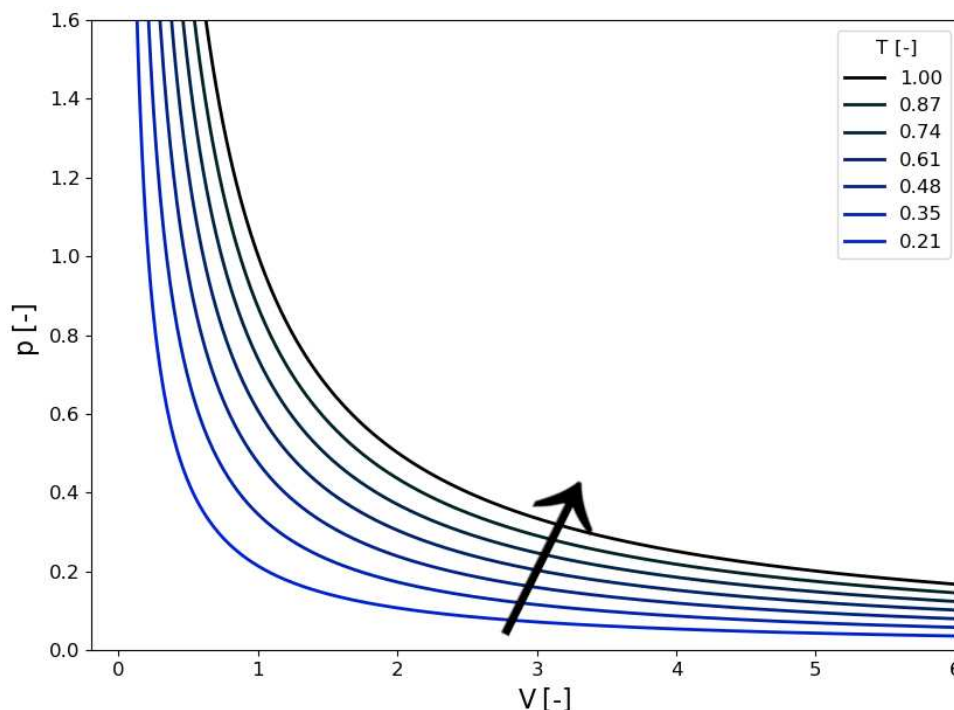
Az ideális gáz a gázok legegyszerűbb modellje. Energiasűrűségét a kalorikus állapotegyenlete adja meg:

$$e = cT, \quad (13)$$

ahol c a gáz fajhője, T pedig a hőmérséklete. Az ideális gáz termikus állapotegyenlete

$$pV = nR_u T, \quad (14)$$

ahol p a nyomás, V a gáz térfogata, n az anyagmennyiség mólban, $R_u = 8.314 \text{ J/(mol K)}$ pedig az univerzális gázállandó.



1. ábra. Izotermák az ideális gáz p - V diagramján. A feltüntetett hőmérsékletek a nyíl irányában növekednek. (Isotherms on the dimensionless p - V diagram of the ideal gas. The temperatures shown in the figure increase in the direction of the arrow.)

Az 1. ábrán az ideális gáz p - V diagramja látható, melyen az izotermák mindenhol monoton csökkenő, konvex függvények.

Az ideális gáz-modell jó közelítés nagy fajlagos térfogatú és magas hőmérsékletű reális gázokra. [6] Azonban, ha nem csak speciális eseteket szeretnénk leírni, több tényezőt kell figyelembe vennünk a reális gázok leírásánál.

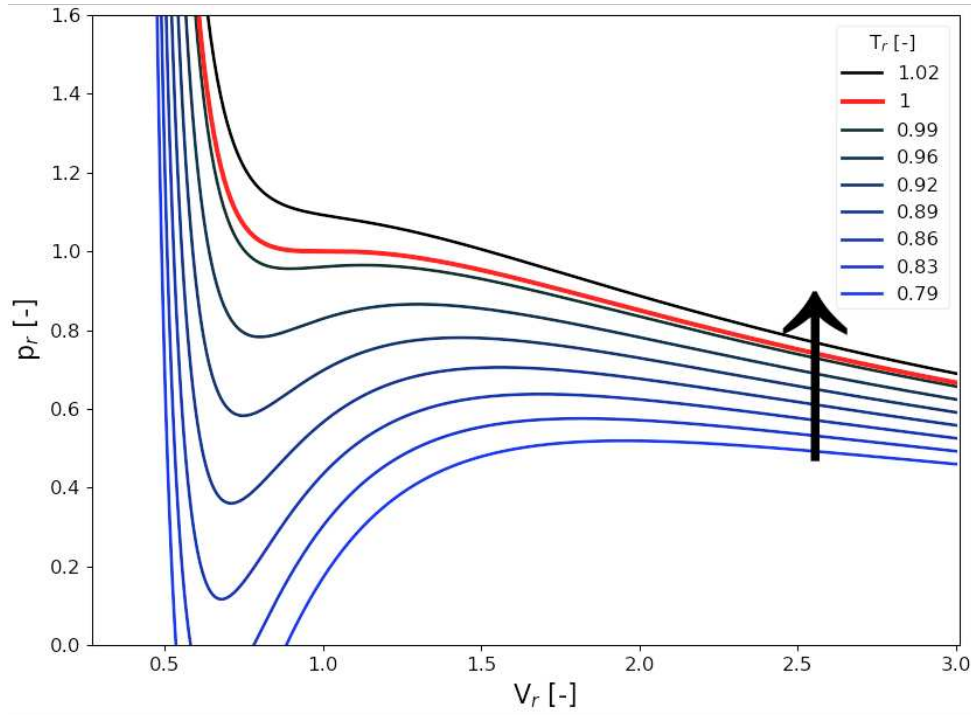
2.6 A van der Waals-gáz

1873-ban Johannes Diderick van der Waals elkészült doktori disszertációjával, melynek az *Over de Continuïteit van den Gasen Vloeistofoestand* (A gáz és folyékony halmazállapotok folytonosságáról) [12] címet adta. Az 1910-ben Nobel-díjjal jutalmazott kutatásokban szerepelt a következő egyenlet:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \sum \frac{1}{3}mv^2, \quad (15)$$

ahol p a külső nyomás, V a moláris térfogat, a a "fajlagos vonzási tényező", b a fajlagos térfogati tényező ($b < V$), v a molekulák sebessége, m pedig a molekulák tömege.

Van der Waals (Bernoulli felvetése alapján) figyelembe vette a gázmolekulák véges méretét, illetve a köztük fennálló vonzó kölcsönhatásokat (kohéziós erőket) a b és a paraméterek beiktatásával. Az egyenlet történeti jelentősége, hogy elsőként tartalmazta a légnemű és folyékony fázisok leírását, a fázisegyensúlytól elkezdve a kritikus pont alatt, egészen a folyadék-gáz fázisszeperációig.



2. ábra. Izotermák a van der Waals-gáz p - V diagramján, redukált koordinátákkal. A feltüntetett hőmérsékletek a nyíl irányában növekednek. (Isotherms in the phase diagram of a van der Waals material in reduced coordinates. The coordinate reduction is so that the critical point is at $(1,1,1)$. The temperatures shown in the figure increase in the direction of the arrow.)

A van der Waals-gáz termikus állapotegyenlete:

$$p(v, T) = \frac{NR_u T}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}, \quad (16)$$

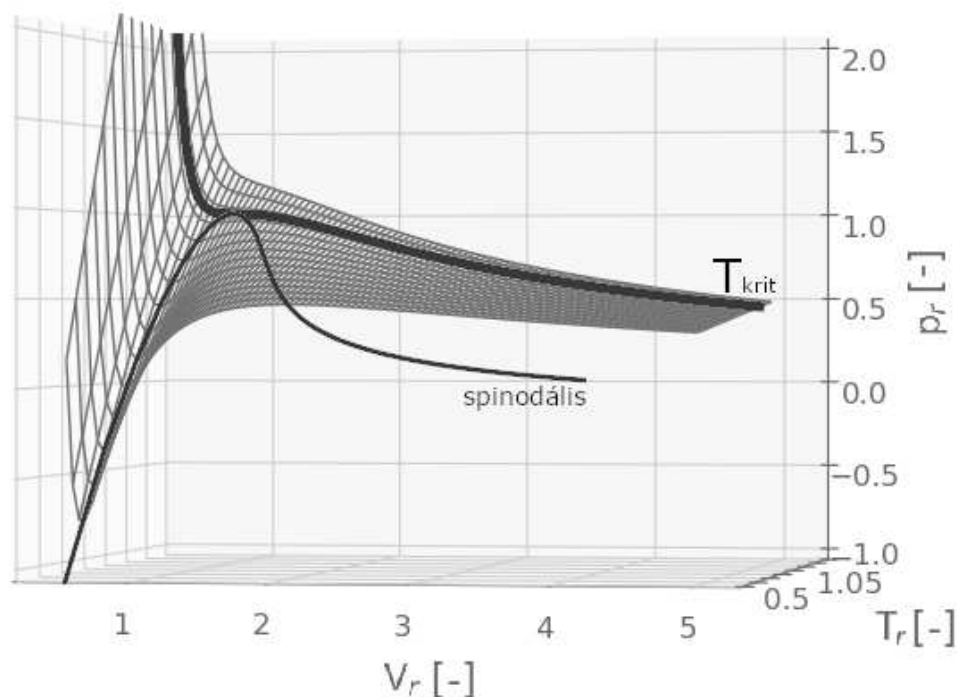
ahol T a hőmérséklet, immár Kelvinben, R_u a specifikus gázállandó, N a részecskeszám, $v = V/N$ pedig a fajlagos térfogat. További átalakításokat eszközölve, redukált nyomást (p/p_c), hőmérsékletet (T/T_c) és térfogatot (V/V_c) érdemes bevezetni, ahol a redukált koordinátázás a kritikus értékekkel való normálását jelenti. Ekkor a redukált termikus állapotfüggvény a következő alakot ölti:

$$p_r(v_r, T_r) = \frac{8T_r}{3v_r - 1} - \frac{3}{v_r^2}. \quad (17)$$

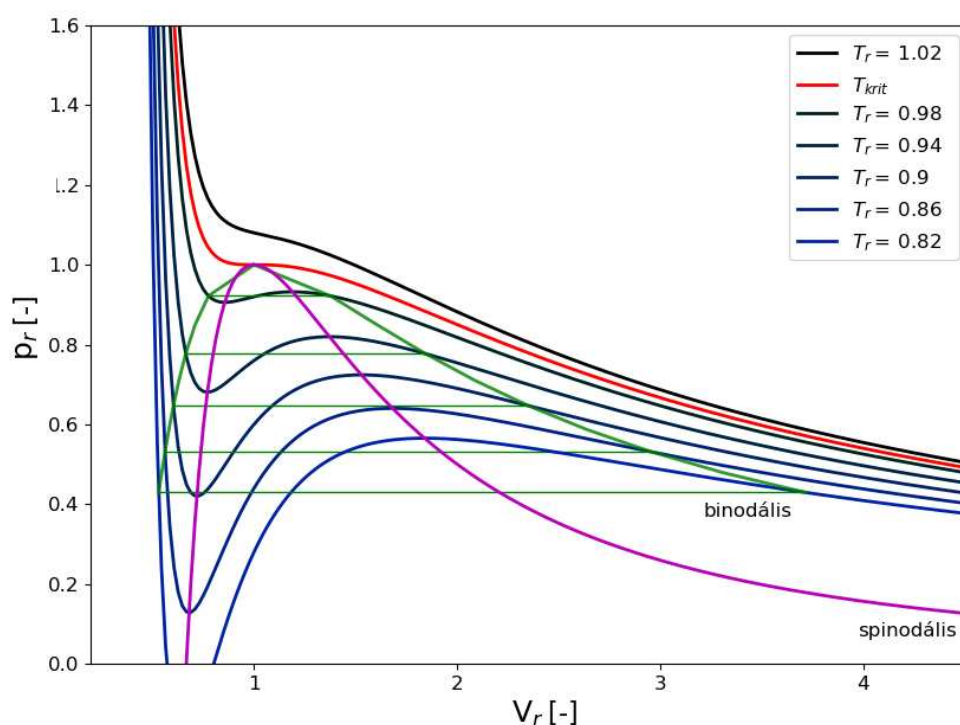
Az így kapott izotermákat a $p - V$ síkon ábrázolva, (2. ábra), szembeűnő, hogy a kritikus pont alatti hőmérsékletű görbék monoton csökkenő tendencia helyett egy szakaszon monoton növésbe váltanak, majd onnan vissza. A kritikus hőmérsékletű izotermának a kritikus pont inflexiós pontja. Az anyag belső stabilitási kritériumai kimondják, hogy az izochor fajhő és az izoterm kompresszibilitás csakis pozitív értékeket vehet fel, ami azt jelenti, hogy az izotermák csökkenő szakaszán a termodinamikai stabilitás sérül. Az ún. reguláris tartomány a van der Waals-anyagban tehát a $p - V$ diagramon a $b = V$ egyenes és a spinodális, vagyis az izotermák lokális szélsőértékei összekötő görbe között található. Ennek szemléltetése a 4. ábrán látható.

2.7 A fázisátalakulás

Azt a régiót nevezzük fázisnak, melyben az intenzív állapotjelzők egyértelműen meghatározzák az anyag állapotát [6]. Fontos megkülönböztetnünk egymástól a *fázisátalakulás*, illetve a *fáziskapcsolat* fogalmát.



3. ábra. Van der Waals-anyag termikus állapotfelülete, redukált koordinátákban. Vastag vonallal jelölve a kritikus hőmérséklet, illetve a spinodális görbe. (Thermal state surface of a van der Waals material in reduced coordinates pressure, volume and temperature. The critical temperature isotherm and the spinodal curve marked by bold curves. Both curves are running on the surface.)



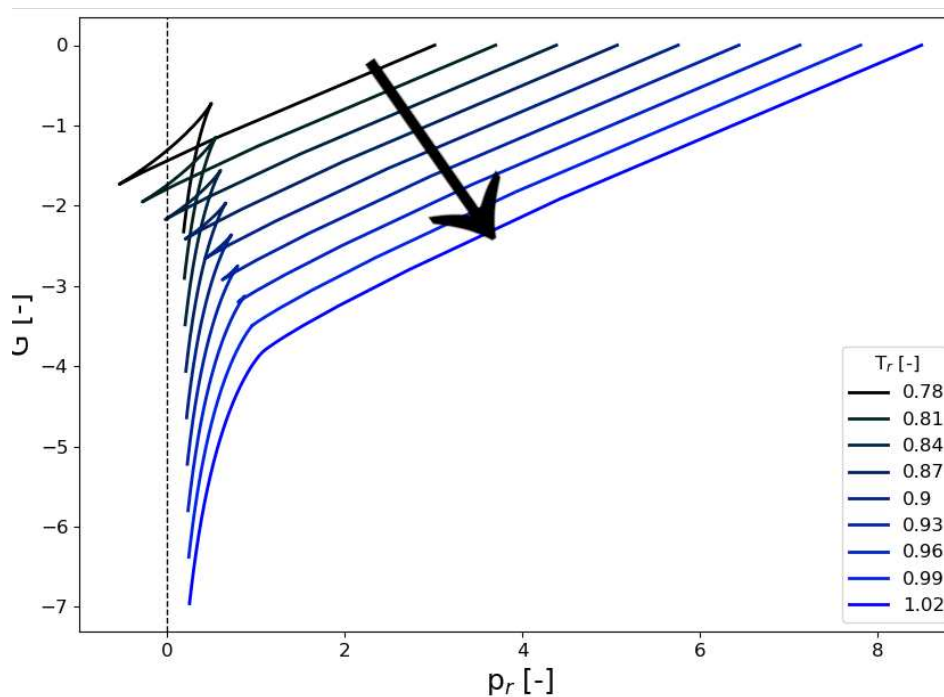
4. ábra. Izotermák a van der Waals-gáz p - V diagramján, a binodális és spinodális görbékkel, redukált koordinátázásban. (Isotherms on the p - V diagram of a van der Waals gas with binodal and spinodal curves in reduced coordinates.)

Míg előbbi egy folyamatot jelent, mely során a vizsgált test fázisállapota megváltozik, utóbbi a fázisdiagramokon megjelenő görbék leírására szolgál. A 2. ábrán látható a van der Waals-gáz fázisdiagramja. A van der Waals-anyag kétféle fázissal rendelkezik, ezek a folyadék- és gázfázis. A fázisegyensúlyt, vagy elsőrendű fáziskapcsolatot kijelölő görbét, ún. binodáliszt a $p - V$ síkon a fázisokra vonatkozó kémiai

potenciálok egyenlőségéből számíthatjuk ki. A 4. ábrán már ez is feltüntetésre került. A másodrendű fáziskapcsolat a van der Waals-gáz esetén a kritikus pont, amely a 4. ábrán ott látható, ahol a kritikus hőmérséklet izotermája érintője a binodális, illetve spinodális görbéknek. Utóbbiaknak ebben a pontban található a lokális maximuma. A 4. ábrán is feltüntetett spinodális görbe a kritikus hőmérséklet alatti izotermák lokális szélsőértékeit köti össze egymással.

A van der Waals-gáz modell állapotterének bizonyos tartományaiban a termodinamikai stabilitás jól láthatóan sérül. A Maxwell-konstrukció teszi lehetővé, hogy feloldjuk az ellentmondást: eszerint az elsőrendű fázisátalakulás során a térfogat növekedésével a nyomás egy adott értéken abbahagyja a csökkenést, beáll egy konstans értékre, majd amikor az anyag teljes egészében átalakult, folytatja tovább a csökkenést. Honnan tudjuk, mi ez a konstans érték? A 4. ábrán minden izotermához külön, egy-egy vízszintes vonalként jelenik meg, ami úgy helyezkedik el, hogy pontosan egyenlő nagyságúak legyenek az általa elhatárolt területek. Fizikailag ez annyit tesz, hogy a gáz pontosan akkora munkát végezne a vonal egyik oldalán, amekkora energia a másik oldalon felszabadulna. Termodinamikai szempontból ennek a terület-egyenlőségi elvnek a két fázis kémiai potenciáljainak egyenlősége felel meg. A binodális görbe ezen vízszintes vonalak végpontjait köti össze a kritikus hőmérséklet alatti izotermákon.

A 2. és 4. ábrán is látható izotermákat a Gibbs-potenciál és a nyomás függvényében ábrázolva (5. ábra) megfigyelhetjük, hogy a kritikus hőmérséklet alatti izotermák metszik saját magukat. A metszéspont helye minden esetben a Maxwell-konstrukció által kijelölt nyomásnál van.



5. ábra. Van der Waals-gáz izotermái a fajlagos Gibbs-potenciál vagy μ kémiai potenciál és a redukált nyomás függvényében ábrázolva. A feltüntetett hőmérsékletek a nyíl irányában növekednek. A szaggatott vonaltól balra eső régió nem fizikai. (Isotherms of the Van der Waals material as a function of specific Gibbs potential or μ chemical potential and reduced pressure. The temperatures shown in the figure increase in the direction of the arrow.)

2.8 Többkomponensű rendszer egyensúlya

Amennyiben a vizsgált rendszerünk több különböző anyagból tevődik össze, két különböző állapot-egyenlettel leírt anyag egyensúlyát termodinamikai egyenletekkel fogalmazhatjuk meg. Ezt az ideális

gáz és sugárzási tér példáján keresztül fogjuk szemléltetni. A sugárzási tér, vagy fotongáz különleges tulajdonsága, hogy az alkotó részecskéi tömegtelenek. A rá vonatkozó egyenletekben így $N = 0$, viszont meg kell jegyeznünk, hogy ettől még a sugárzási tér extenzív. A fotongáz ρ_U energiasűrűsége csak a hőmérséklettől függ, rá a Stefan–Boltzmann-féle sugárzási törvény vonatkozik, miszerint

$$\rho_U = \frac{U}{V} = \sigma T^4, \quad (18)$$

ahol σ a Stefan–Boltzmann-állandó, értéke $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4\text{)}$. Az extenzivitás miatt a Stefan–Boltzmann-törvény a fotongáz állapotát egyértelműen meghatározza. Fontos tulajdonsága még a sugárzási térnek, hogy belátható, hogy Gibbs-potenciálja mindezekből következően

$$G_{sug} = 0. \quad (19)$$

Tudjuk, hogy

$$dU = TdS - pdV, \quad (20)$$

ebből

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}, \quad \text{és} \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T}. \quad (21)$$

A sugárzási tér entrópiasűrűsége (18) alapján

$$\rho_{s,sug} = \frac{4}{3}\sigma^{\frac{1}{4}}\rho_U^{\frac{3}{4}}, \quad (22)$$

nyomása pedig

$$p_{sug} = \frac{\rho_U}{3} = \frac{\sigma}{3}T^4, \quad (23)$$

emiatt a sugárzási tér izotermái a $p - V$ -diagramon vízszintes vonalakként jelennek meg, ahogyan ezt a 6. ábra is szemlélteti. A sugárzási tér és az ideális gáz akkor van egymással egyensúlyban, amikor a nyomásuk kiegyenlítődik, vagyis $p_{id} = p_{sug}$. Ezt fekete görbe jelöli a 6. ábrán.

Határozzuk meg a fázisegyensúly-görbe egyenletét! Tudjuk, hogy

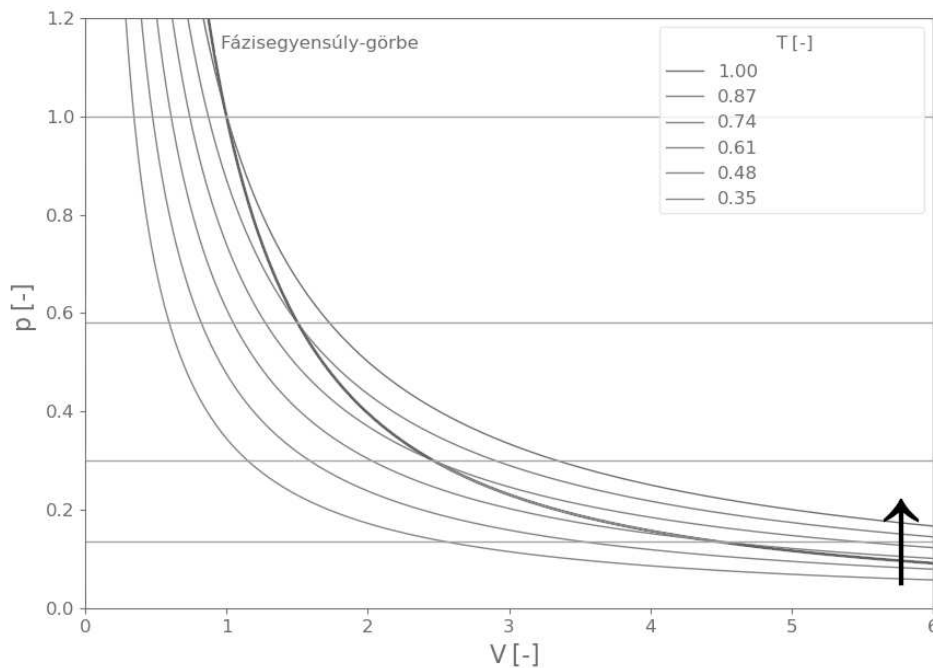
$$p(V_E, T_E) = \frac{\sigma}{3}T_E^4 = \frac{nR_u T_E}{V_E}, \quad (24)$$

ahol a nyomások egyenlőségét kihasználva kifejezhetjük T_E -t V_E segítségével, így egyváltozós alakra jutva:

$$p(V_E) = \frac{nR_u}{V_E} \left(\frac{\sigma}{3nR_u} V_E \right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{\sigma} (nR_u)^4 \right)^{\frac{1}{3}} V_E^{-\frac{4}{3}}. \quad (25)$$

Ez látható a 6 ábrán is, feketével jelölve. A görbe jól láthatóan követi az ideális gáz izotermáinak és a sugárzási tér nyomásfelületének metszéspontjainak vonalát. Ehhez az állításhoz szorosan hozzátartozik, hogy a fázisegyensúly-görbétől balra valójában nem léteznek a vízszintes vonallal feltüntetett állapotok, ott csak az ideális gáz izotermái léteznek fizikailag, a görbétől jobbra pedig az anyag teljes mértékben sugárzás-uralta. Ezért a 6. ábra ebben az értelemben pusztán illusztráció.

A Stefan–Boltzmann sugárzási törvény levezetéséből még továbbá egy olyan fontos következményre juthatunk, hogy a sugárzási térrel való egyensúly feltétele kiterjedt rendszer esetén a Gibbs-potenciál eltűnése.



6. ábra. Sugárzási tér és ideális gáz egyensúlya. A feltüntetett hőmérsékletek a nyíl irányában növekednek. (Radiation space and ideal gas equilibrium in the pressure-volume phase diagram. The temperatures shown in the figure increase in the direction of the arrow.)

3 MI AZ A FEKETE LYUK?

A klasszikus kiinduló elképzelés ennek a kérdésnek a megválaszolására egyszerű koncepción alapszik. Már 1784-ben John Michell és 1878-ban Laplace is arra a következtetésre jutott, hogy léteznie kell olyan "fekete csillagnak", azaz egy ultranehez objektumnak, amely esetén a szökési sebesség a fénysebességnél is nagyobb, vagyis még a fény sem tud a gravitációs mezejéből kijutni. Ám a Michell–Laplace-féle fekete test nem a szó szoros értelmében vett fekete lyuk, hiszen ennek esetében semmi nem zárja ki, hogy a fény, akár csak kis időre vagy kis távolságra elhagyja az objektum felszínét. Tehát, a fekete lyukak esetében nem beszélhetünk szökési sebességről [13, 14].

Sokan Albert Einsteinnek tulajdonítják a fekete lyukak felfedezését, pedig Ő maga sohasem vezette le a relativitáselméletből ilyen objektumok létezését. Az első, aki ezt megjósolta, David Hilbert volt. Ő ehhez Karl Schwarzschild német asztrofizikus Einstein-egyenletekre adott, homogén, tökéletes folyadékgömb körüli téridőre vonatkozó megoldását használta fel, ennek okán nevezzük ezt ma is Schwarzschild-megoldásnak. A fekete lyukak első matematikai leírását végül egymástól függetlenül Kruskal [15] és Szekeres [16] alkották meg, 1960-ban. A Kruskal–Szekeres-kiterjesztés a Schwarzschild-megoldást bővíti ki, és alapvető építőköve lett a fekete lyukak leírásának [14]. A kiterjesztett Schwarzschild-téridő struktúrája részletesen Wald könyvében [17] található. A fekete lyuk definíciója eszerint a téridőnek egy olyan régiója, amelybe, ha bármilyen külső forrásból érkező fénysugár vagy megfigyelő behatol, soha nem lesz képes onnan kijutni, és végül a téridő szinguláris pontjába zuhan majd bele, amely szingularitást gravitációs összeomlás hozott létre.

3.1 A Schwarzschild-metrika

A Schwarzschild-metrika a legáltalánosabb gömbszimmetrikus megoldása a vákuumra felírt Einstein-egyenleteknek. Statikus fekete lyukakra vonatkozik, amelyek nem forognak és nem töltöttek, tehát a számolások során nem jelenik meg sem az impulzusmomentum, sem a töltés, mint változó. Az egyes

Schwarzschild-fekete lyukak egyedül a tömegükben térhetnek el egymástól. Egyértelműen jellemzi őket az eseményhorizontjuk sugara, amelyet Schwarzschild-sugárnak nevezünk. Minden tömeghez egyértelműen hozzárendelhető a maga Schwarzschild-sugara, és minden tömeggel rendelkező objektumot fekete lyuknak nevezünk, ami kisebb ennél a hozzárendelt sugárnál. A metrika az ún. Schwarzschild-koordinátákban (t, r, θ, ϕ) a következőképpen írható fel:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (26)$$

ahol τ a sajátidő, c a vákuum-beli fénysebesség, M a gömbszimmetrikus objektum invariáns tömege, G pedig a Newton-féle gravitációs állandó. A Schwarzschild-sugár értéke

$$r_S = \frac{2GM}{c^2}, \quad (27)$$

jól láthatóan a (26) egyenletnek itt szingularitása van, ahogyan $r = 0$ -ban is. Az eseményhorizont ez alapján egy fényszerű hiperfelület, szokásos értelmezése, hogy ezt elérve a fény többé "nem tud kiszabadulni" a fekete lyuk gravitációs mezejéből, azaz egy, a lyuk tömege által egyértelműen meghatározott véges sajátidő alatt a középpontba zuhan [18]. Hawking és Ellis [19]-ben pontos matematikai definíciót adtak az eseményhorizontnak, illetve Bekenstein nyomán azt is megmutatták, hogy ez a definíció a termodinamika főtételeit kielégíti¹.

A nem forgó, töltetlen fekete lyuk-konceptióban a (27) egyenlet a $c = G = 1$ egységrendszerben a $r_S = 2M$ alakra egyszerűsödik. A Bekenstein–Hawking-entrópia, vagyis a fekete lyuk eseményhorizontjának "felülete" ekkor a következő alakot ölti:

$$S = \pi r_S^2. \quad (28)$$

A tömeget a belső energiával azonosítva és (28)-t kihasználva tehát felírhatjuk a következő állapotegyenletet [20]:

$$S(U) = 4\pi U^2. \quad (29)$$

Ebből következik az ún. negatív hőkapacitás-paradoxon, hiszen (29)-t kétszer deriválva az energia szerint a

$$-\frac{1}{CT^2} = 8\pi \quad (30)$$

egyenlőségre jutunk. Ennek jobb oldala egyértelműen, ennél fogva bal oldala is nagyobb, mint 0. Mivel a hőmérséklet mindenképpen egy pozitív mennyiség, a (30) egyenlet a hőkapacitás negativitását vonja maga után. Ezt negatív hőkapacitás-paradoxonnak nevezzük, a dolgozat egyik célkitűzése, hogy ezt oldja fel, termodinamikailag konzisztens módon.

Honnan tudjuk, hogy mekkora egy ilyen fekete lyuk? Induljunk ki a hagyományos gömbtérfogatok képletéből: $V_{geom} = 4\pi r^3/3$. A térfogat egy háromdimenziós fogalom, ez azt jelenti, hogy a 4 dimenziós téridő nulladik, időkomponensének rögzített értékénél értelmezhető. Ez a kikötés a Schwarzschild-metrikában egyet jelent azzal, hogy a térfogat egy fekete lyuk belsejében mindenképp nulla [21].

¹Fontos megjegyezni, hogy Hawking koncepciója értelmében egy magára hagyott Schwarzschild-féle fekete lyuk termodinamikai értelemben véve instabil: mivel hőkapacitása negatív, ezért ha normál fekete test lenne, akkor a hőmérsékleti sugárzás következtében energiát, így tömeget veszítene, a kisebb tömeg miatt megnőne a hőmérséklete, ami fokozott kisugárzást jelentene és így tovább. Viszont a fekete lyuk nem normál fekete test, ezért is volt termodinamikai tárgyalhatósága sokáig kérdéses.

3.2 A Reissner–Nordström-metrika

A Reissner–Nordström-féle fekete lyukak nem forognak, tehát impulzuszmomentummal nem, de töltéssel rendelkeznek. Az ívelemnégyzetet általános alakban a következő formában is felírhatjuk statikus, gömbszimmetrikus fekete lyukakra:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (31)$$

ahol $f(r)$ -ről tudjuk, hogy

$$|f'(r_S)| \Big|_{f(r_S)=0} = g, \quad (32)$$

ahol g a gravitációs gyorsulás értéke az eseményhorizonton ($f(r_S) = 0$). A Reissner–Nordström-metrika esetén ez az $f(r)$ függvény a

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = \left(1 - \frac{r^+}{r}\right)\left(1 - \frac{r^-}{r}\right) = 1 - \frac{r^+}{r} + \frac{r^-}{r} - \frac{r^+ r^-}{r^2} \quad (33)$$

alakban írható fel, ahol Q a töltés. A (33) egyenletben tehát

$$M = \frac{r^+ + r^-}{2}, \quad \text{illetve} \quad Q = \sqrt{r^+ r^-}, \quad (34)$$

hogyha az $r^\pm$ -ra vonatkozó másodfokú egyenlete(ke)t megoldjuk. (34) alapján pedig könnyen látható, hogy

$$dM = \frac{1}{2}dr^+ - \frac{1}{2}dr^-, \quad \text{és} \quad dQ = \frac{1}{2\sqrt{r^+ r^-}}(r^+ dr^- + r^- dr^+). \quad (35)$$

Tudjuk, hogy $Q = r \cdot \Phi$, ahol Φ a Coulomb-potenciál az eseményhorizonton. A belső energia egyenletében most nem jelenik meg a pdV tag, hiszen térfogatról (még) nem tudunk beszélni. (35)-t behelyettesítve így a következőképpen alakul az energia sugárfüggése:

$$\begin{aligned} dU = TdS = dM - \Phi dQ &= \frac{1}{2}dr^+ - \frac{1}{2}dr^- - \frac{Q}{2r} \left(\sqrt{\frac{r^+}{r^-}} dr^- + \sqrt{\frac{r^-}{r^+}} dr^+ \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Q}{r} \sqrt{\frac{r^-}{r^+}} \right) dr^+ + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Q}{r} \sqrt{\frac{r^+}{r^-}} \right) dr^- \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^-}{r} \right) dr^+ + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^+}{r} \right) dr^-. \end{aligned} \quad (36)$$

Az energia tehát két tagból tevődik össze, úgy is mondhatjuk, hogy $TdS = T^+ dS^+ + T^- dS^-$ alakban írható fel. Ezt az alakot kihasználva az entrópiát könnyen kiszámolhatjuk:

$$S = \int \frac{1}{T} TdS = \int \frac{1}{T} (dM - \Phi dQ) = \int 4\pi \int \delta(f(r)) (dM - \Phi dQ). \quad (37)$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$\frac{1}{T} = \frac{4\pi}{|f'(r)|} \Big|_{f(r)=0}. \quad (38)$$

37-t a fentiek alapján szét tudjuk bontani $S_\pm$ -ra a következőképpen:

$$\begin{aligned} S_\pm &= 4\pi \int \int \delta \left[\left(1 - \frac{r^+}{r} \right) \left(1 - \frac{r^-}{r} \right) \right] \left(1 - \frac{r^\pm}{r} \right) dr \frac{1}{2} dr^\pm \\ &= 2\pi \int r \delta \left(1 - \frac{r^+}{r} \right) \frac{dr}{r} dr^+ + 2\pi \int r \delta \left(1 - \frac{r^-}{r} \right) \frac{dr}{r} dr^-, \end{aligned} \quad (39)$$

ahol felhasználtuk a következő Dirac-delta azonosságot:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x). \quad (40)$$

A (40)-ben szereplő abszolút érték miatt diszkutálnunk kell. Amennyiben $r^\pm > r$ vagy $r^\pm < r$, akkor a két integrál szorzófaktorának előjele megegyezik, így egy kettes szorzót kapunk és a végeredmény

$$dS = 4\pi r dr. \quad (41)$$

Viszont $r^- \leq r \leq r^+$ esetén a (39)-ben szereplő integrálok előjele különböző lesz, így pont kiejtve egymást a végeredmény $S_\pm = 0$. Ily módon, mindössze a metrika mennyiségeinek segítségével, termodinamikai összefüggések feltételezésével ki tudtuk tehát számolni az entrópia sugárfüggését². Vagyis

$$S(r) = 2\pi r^2. \quad (42)$$

3.3 Az Anti-de Sitter – Kerr-metrika

Az Einstein-egyenletek teljesen szimmetrikus vákuum-megoldásai, amelyek konstans görbülethez tartoznak, a de Sitter-, a Minkowski- és az Anti-de Sitter-metrikák. Ezek rendre a pozitív, 0 és negatív értékű Λ kozmológiai konstanshoz tartozó megoldások, amikor a vákuum energiasűrűsége pozitív, a nyomása pedig negatív [22].

A Kerr-metrika egy töltetlen, forgó fekete lyuk körüli téridő geometriáját írja le. Az ívelemnégyzet [4, 23, 24] alapján Boyer–Lindquist-koordinátákban:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} \left(dt - \frac{a \sin^2 \theta}{1 - \frac{a^2}{L^2}} d\phi \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(a dt - \frac{r^2 + a^2}{1 - \frac{a^2}{L^2}} d\phi \right)^2, \quad (43)$$

ahol az a paraméter az egységnyi tömegre jutó impulzusmomentummal áll kapcsolatban, vagyis az $a = 0$ esetben a Schwarzschild-megoldást kapjuk vissza, L egy hosszparaméter, illetve

$$\Delta = \frac{(r^2 + a^2)(L^2 + r^2)}{L^2} - 2mr, \quad \Delta_\theta = 1 - \frac{a^2}{L^2} \cos^2 \theta, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (44)$$

és a kozmológiai konstans $\Lambda = -\frac{3}{L^2} = -8\pi P$.

A kozmológiai konstans esetében a 8π szorzófaktor valójában esztétikai okok miatt kapott helyet: ezzel a konstanssal számolva ugyanis a nyomáshoz konjugált termodinamikai térfogat éppen a háromdimenziós gömb megszokott, geometriai térfogata lesz. [25]

3.4 Egyéb fekete lyuk-típusok

A Kerr–Newman-metrika a legáltalánosabb stacionárius megoldása az Einstein-egyenleteknek, ami egy forgó, töltött, tömeges objektum téridő-geometriáját írja le, figyelembe véve egy elektromágneses mező

²A gondolatmenetért köszönet illeti Biró Tamást.

energiáját is. Az ívelemnégyzetet Eddington–Finkelstein-koordinátákban [26] a

$$ds^2 = - \frac{r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2(1 - \sin^2\theta)}{r^2 + a^2\cos^2\theta} dv^2 + 2dvdr + r^2 + a^2\cos^2\theta d\theta^2 + \quad (45)$$

$$+ \frac{A \sin^2\theta}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)} d\phi^2 - 2a \sin^2\theta drd\phi - 2 \frac{2Mr - Q^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta} a \sin^2\theta dv d\phi \quad (46)$$

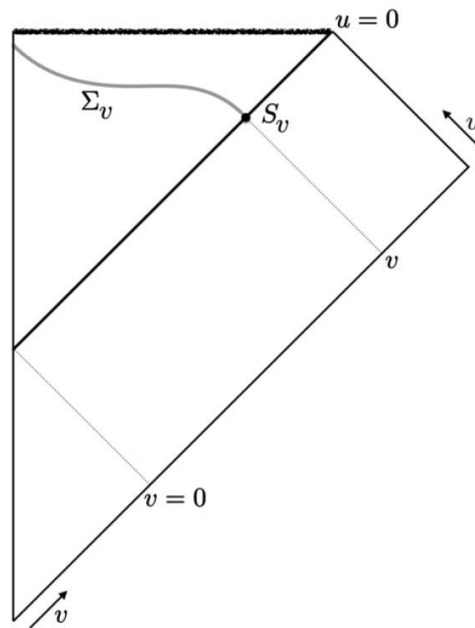
alakban írhatjuk fel, ahol M a tömeg, Q a töltés, a az impulzusmomentummal kapcsolatban álló paraméter, illetve

$$A = (r^2 + a^2)^2 - (r^2 + a^2 - 2Mr + Q^2)a^2\sin^2\theta. \quad (47)$$

Léteznek továbbá pulzáló, sugárzó és egyéb tulajdonságokkal rendelkező fekete lyukak is, amelyek leírására nem térek ki részletesen, hiszen termodinamikailag sem fogom vizsgálni őket.

3.5 A Christodoulou–Rovelli-térfogat

A kérdés, hogy *mekkor* egy fekete lyuk, sokféleképpen megközelíthető. A hagyományos téridő-koncepcióra alapuló térfogatfogalom nem lehet helytálló abban az esetben, ha az általános relativitáselméletben használatos görbült téridő-koncepciót vesszük alapul. Továbbá, a térfogat meghatározásának gátat vet a 4 dimenziós téridőben az egyidejűség nem egyértelmű mivolta is. A probléma másik aspektusa, hogy ebben az esetben a térfogat koordinátarendszer-függő, vagyis nem objektív, amely tehát látszólagos, nem lehet fizikai mennyiség, ahogyan termodinamikai állapothatározó sem. A Schwarzschild-metrika esetén a megalapozó feltevés, hogy a "külső" tartományok statikusak, míg a "belső" tartományok folyamatosan változnak, függnak az időkoordinátától. Ez újabb kérdést vet fel: mit nevezünk külső és belső tartománynak? Az [3] a Minkowski-téridőben úgy definiálja egy gömb térfogatát, mint egy adott K tartományba illeszkedő legnagyobb térszerű gömbszimmetrikus felület által határolt tartományt. Ez a definíció szerencsére adaptálható görbült téridőmodellekbe is, egyértelműsítve a belső és külső tartományok fogalmát bármilyen gömbszimmetrikus téridőre.



7. ábra. Schwarzschild-féle fekete lyuk konformális- vagy Penrose-diagramja. [3] (*The conformal or Penrose diagram of a Schwarzschild black hole is a good representation of the Christodoulou–Rovelli volume concept.*)

Az egyenlet, amely Christodoulou és Rovelli szerint megadja ezt a térfogatot:

$$V(v) = 3\sqrt{3}\pi M^2 v, \quad (48)$$

ahol M az objektum tömege, $v = t + r$ pedig a nullkoordináta az Eddington–Finkelstein-koordinátázásból [3]. Ezzel (26) a következő alakot ölti, egy Schwarzschild-fekete lyuk esetén:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (49)$$

a már eddig is használt jelölésekkel. A (48) egyenlet adja meg, hogy mekkora is egy fekete lyuk belsejének térfogata. Jól láthatóan ez növekszik az idővel, még úgy is, hogy a külső felület ugyanakkora marad. Ezt a fekete lyuk-beli görbült téridő okozza.

Zhang [27]-ben kimondja, hogy a Christodoulou és Rovelli által bevezetett (48) térfogat arányos a tömeg ötödik hatványával. Mivel a Schwarzschild-fekete lyukak tömege egyértelműen meghatározza a sugarukat is, így a Christodoulou–Rovelli-térfogatra a $V_{CR} \sim M^5 \sim r^5$ összefüggés teljesül.

4 A FEKETE LYUKAK TERMODINAMIKÁJA

1973-ban Bekenstein megfogalmazta a termodinamika második főtételeének kiegészített változatát: eszerint a fekete lyuk entrópiájának és a hagyományos, fekete lyukon kívüli entrópiának összege sosem csökkenhet [1]. 1974-ben Stephen Hawking fedezte fel, hogy a nulladik főtételel is vonható analógia, mégpedig a Hawking-sugárzás lehet az a jelenség, ami az ezzel kapcsolatos kiegyenlítődségi paradoxont megoldja [28, 29]. Ezekből egyenesen következő felfedezés, hogy a fekete lyukaknak van hőmérséklete, melynek nagysága a tömegükkel fordítottan arányos. Mindezek tették lehetővé, hogy értelme legyen a fekete lyukak termodinamikájáról beszélni.

Első ránézésre két tudományos diszciplína nem is tűnhetne egymástól távolabb állónak. Míg a fekete lyukak fizikáját szigorú differenciálgeometriai kritériumok halmazja alkotja, addig a termodinamika egy, a mikroszkopikus rendszerek viselkedését makroszkopikus közelítésekkel leíró tudományág [17]. Ám említésre méltó körülmény, hogy belső szerkezet ismeretének hiánya miatt a fekete lyukaknak nem létezik statisztikus fizikája, a kopaszsági tétel ezt nem teszi lehetővé. Bekenstein ezt úgy fogalmazta meg, hogy a fekete lyukak entrópiája valójában azok belső szerkezetére vonatkozó információ hiányának mértékét adja meg [30]. Ezek a körülmények a termodinamika szerepének jelentős átértékelődéséhez vezetnek.

4.1 A Schwarzschild-féle fekete lyukak termodinamikája

Az általános relativitáselmélet Schwarzschild-megoldásából adódó fekete lyukak vizsgálata során felfedezhetjük a termodinamika főtételeit a számítások között [13]. A 2.2. fejezetben részletesen ismertetett első főtétele analógiába lehet állítani a következő egyenlettel, vagyis, hogy a fekete lyuk teljes belső energiájának megváltozása a következőképpen alakul:

$$dM = \frac{dr_S}{2} = \frac{dA}{16\pi r_S} = \frac{T}{4} dA, \quad (50)$$

ahol a $c = k_B = \hbar = G = 1$ egységrendszert használtuk, r_S a Schwarzschild-sugár, M a fekete lyuk tömege, T a hőmérséklet, A pedig az eseményhorizont felülete. Észrevehető, hogy ez valóban

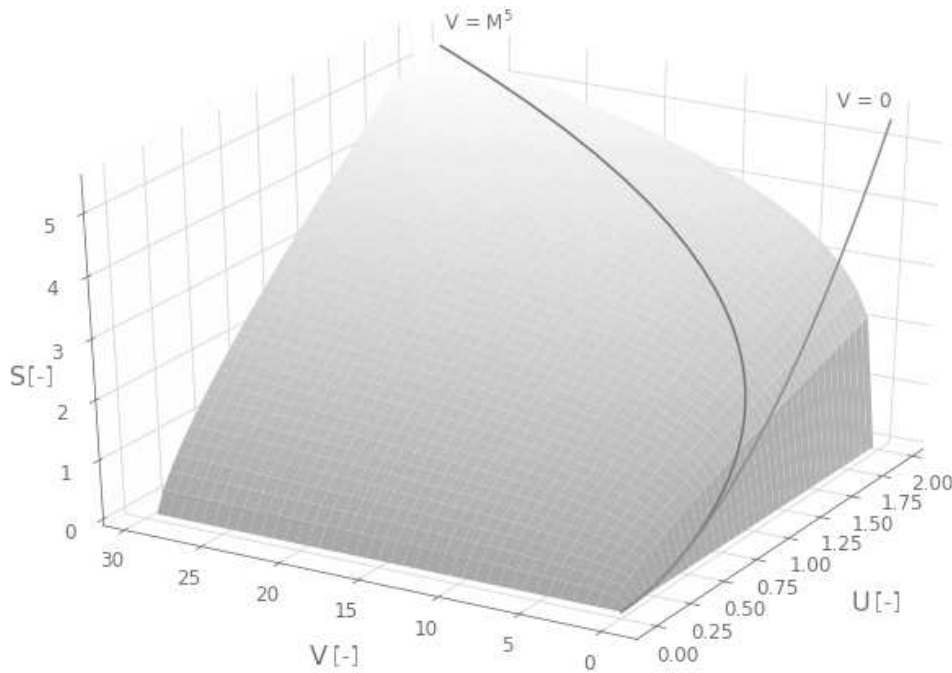
$$dU = TdS \quad (51)$$

alakú. Eszerint az entrópiát megfeleltethetjük a fekete lyuk eseményhorizontjának felületével:

$$S = 4\pi r_S^2. \quad (52)$$

A második főtétele megjelenése, amely szintén a 2.2. fejezetben került részletes tárgyalásra, a fekete lyukak leírásakor ugyancsak az entrópia eseményhorizont-felülettel való azonosításán alapul. Ugyanis, amikor egy pozitív energiasűrűségű anyag átlépi a fekete lyuk eseményhorizontját, megnöveli annak tömegét. A tömeg, ahogyan korábban láttuk, arányos a Schwarzschild-sugárral, vagyis ilyen esetben a fekete lyuk felülete is növekszik. Ez pedig, az előbb láttuk, hogy az entrópia növekedésével egyenértékű [13].

Megmutatható, hogy a térfogat, mint termodinamikai állapothatározó extenzivitáson alapul, konzisztens termodinamikai bevezetése a Christodoulou–Rovelli-térfogatfogalmat eredményezi [31]. A kétdimenziós $S(V)$ paraméterteren az entrópia mindenképpen konkáv, ami stabil termodinamikát eredményez. Bíró és társai [20]-ban erre alapozva egy új térfogatfogalom bevezetésével, mely a sugár (vagyis a tömeg) ötödik hatványával arányos, termodinamikailag konzisztens módon igyekeznek feloldani a (30) egyenletben bemutatott hőkapacitási paradoxont. Mindez az entrópia ábrázolásában egy új dimenziót eredményez: az $S(E, V)$ paraméterteret a 8. ábra szemlélteti.



8. ábra. A Schwarzschild-fekete lyuk entrópiája a térfogatot bevezetve konkáv. Ezen a $V = M^5$ kondíció kijelöl egy konkáv görbét, melynek a $V = 0$ síkra vett vetülete konvex, tehát termodinamikailag instabil eredményre vezet [20]. A koordináták mindenütt dimenziótlanok. (*The entropy of the Schwarzschild black hole is concave after the introduction of a volume. The condition $V \sim M^5$ designates a concave curve whose projection to the plane $V = 0$ is convex, so it leads to a thermodynamically unstable result. Coordinates are dimensionless everywhere.*)

Megfigyelhető, hogy az entrópia ebben az esetben már nem egy görbe, hanem egy felület, amely a

vizsgált fizikai tartományon, tehát pozitív térfogat-, entrópia- és energiaértékek esetén mindenhol konkáv. A $V \sim M^5$ kondíció által kijelölt tartományt kijelölő görbén a felület görbülete végig pozitív, tehát a termodinamika is stabil. Ennek vetülete a $V = 0$ síkra egy konvex görbe, ami azt jelenti, hogy a $V = 0$ kondíció, vagyis a térfogat nélküli fekete lyuk koncepciója termodinamikailag instabil.

4.2 A nem Schwarzschild típusú fekete lyukak termodinamikájáról

A Reissner–Nordström-metrika, vagyis a töltött fekete lyukak leírásával foglalkozó 3.2. fejezet-beli számítás során r^+ -t, illetve r^- -t használtunk, mint két különböző sugár. De mi is ezen sugarak fizikai jelentése? Beszélhetünk többhorizontos fekete lyukakról is. A de Sitter vagy Anti-de Sitter téridőbe ágyazott töltéssel vagy impulzusmomentummal rendelkező fekete lyukak esetén két horizont szokott megjelenni a számításokban, egy külső és egy belső, pontosan erre láthattunk példát a 3.2 fejezetben is. Volovik és társai [32]-ben megmutatták, hogy a kéthorizontúság nem befolyásolja a horizontok járulékát az entrópiához, és az ebben az esetben is független lesz a további paraméterektől, mint a töltés vagy az impulzusmomentum.

4.3 A Hawking–Page-féle leírás

Kezdetben a fekete lyukak termodinamikai leírásához az egyetlen termodinamikai paraméterpár a hőmérséklet és az entrópia volt. A kozmológiai konstans, akárcsak a töltés vagy az impulzusmomentum, szabad változóként jelent meg az egyenletekben. AdS téridőn az energia-impulzus tenzor, illetve a hidrodinamikai képpel történő kapcsolat szerint a kozmológiai állandó a nyomással kapcsolatos. Az univerzum tágulásának hatása lokálisan negatív nyomásként jelentkezik, tehát a kozmológiai állandó az, amit megfeleltethetünk egy reális gáz nyomásának, ahogyan ezt már a (44) egyenletben is láthattuk. Az ott szereplő 8π -s szorzófaktor beiktatása önkényes: valójában a két mennyiség megfeleltetésének az alapja, hogy a

$$p = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (53)$$

vákuum állapotegyenletet kielégítő energiaimpulzus-tenzor a dS/AdS-terek forrása lehet. Itt G a Newton-féle gravitációs állandót jelöli, amely a további számítások során a $G = 1$ egységrendszer használata miatt nem kerül feltüntetésre.

A nyomás és a térfogat bevezetésével a töltött AdS-fekete lyukak állapotterének vannak olyan tartományai (a van der Waals-gáz viselkedéséhez hasonlóan), ahol az entrópia második deriváltja nem negatív (szemi)definit, vagyis a termodinamikai stabilitás sérül. Mindez azt jelenti, hogy van értelme fázisátalakulás nyomait keresnünk a fekete lyukak termodinamikájára vonatkozó egyenleteinkben. Kiinduló összefüggéseink a

$$S = \pi R^2, \quad \text{illetve} \quad \Lambda = -\frac{3}{l^2} = -8\pi p, \quad (54)$$

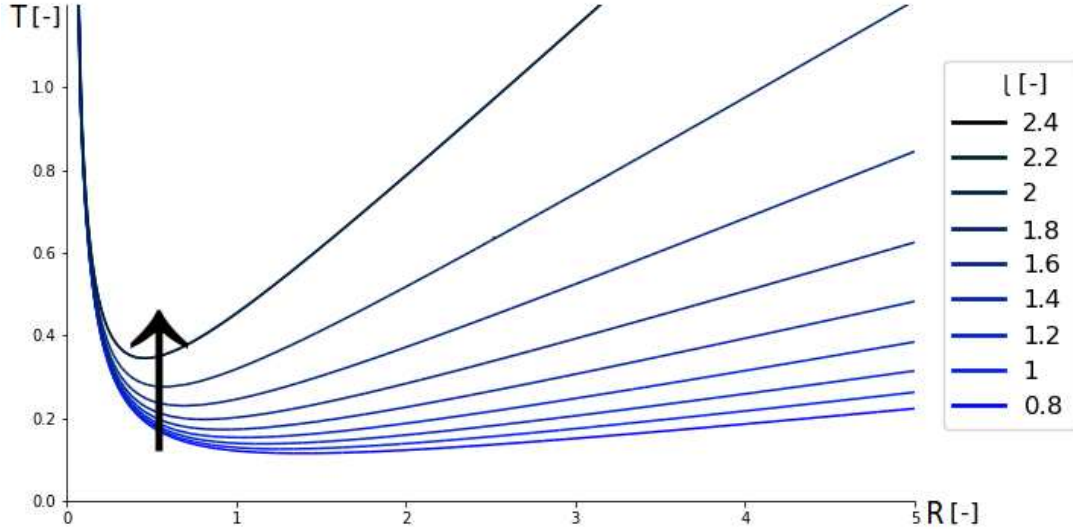
ahol S a Bekenstein–Hawking-entrópia, akárcsak a (28) egyenletben, Λ a kozmológiai konstans, és mivel az AdS-téridőt vesszük alapul számításainkhoz, értéke negatív, p a nyomás, l pedig egy hosszparaméter, aminek a fent látható formula a definíciója. Azt is tudjuk, hogy

$$M = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{\Lambda}{3} R^2 \right) = \frac{R}{2} \left(1 + \frac{R^2}{l^2} \right) \quad (55)$$

a tömeg, amelyet ebben a megközelítésben megfeleltethetünk az energiának, vagyis $M = U$. Ekkor a

következő összefüggést írhatjuk fel:

$$dU = TdS = dM = \frac{dR}{2} \left(1 + \frac{3}{l^2} R^2 \right) = T \, 2\pi R \, dR, \quad (56)$$



9. ábra. A hőmérséklet sugárfüggése különböző l paraméter-értékek esetén a Hawking és Page-féle modellben. Az l paraméter feltüntetett értékei a nyíl irányában növekednek. (*Radius dependence of temperature for different l length parameter values in the Hawking–Page approach. The values of the l parameter shown in the figure increase in the direction of the arrow.*)

ebből a hőmérséklet sugárfüggése

$$T = \frac{1}{4\pi R} \left(1 + \frac{3}{l^2} R^2 \right), \quad (57)$$

mely a 9. ábrán látható, az l hosszparaméter különböző értékeire. Figyeljük meg, hogy minden görbe egy minimumhellyel rendelkezik, melyek az l paraméter növelésével egyre kisebb sugár értéknél helyezkednek el. A lokális minimum felett, az $R_m < R$ tartományon, aszimptotikusan a hőmérséklet lineárisan függ a sugártól. A lokális minimum helyét a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\frac{1}{c} = \partial_E T = \partial_M T = \partial_R T \partial_M R = \frac{1}{4\pi} \frac{\left(-\frac{1}{R^2} + \frac{3}{l^2} \right)}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{R^2}{l^2}} = \frac{1}{2\pi R^2} \frac{3R^2 - l^2}{3R^2 + l^2}, \quad (58)$$

amiről tudjuk, hogy mindenképpen pozitívnak kell lennie. Ez alapján

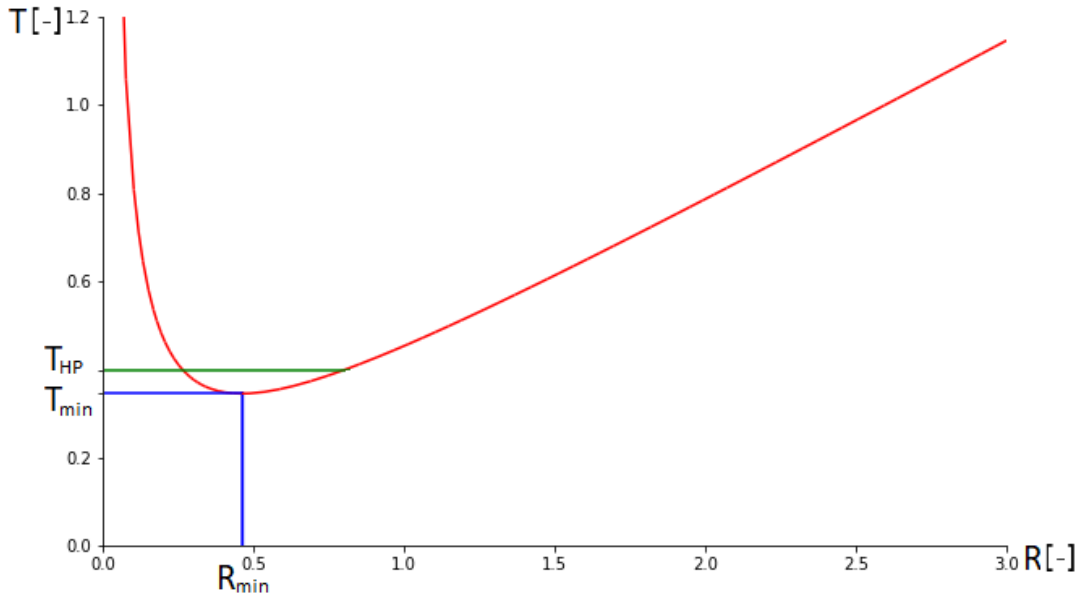
$$R > \pm \frac{l}{\sqrt{3}}, \quad (59)$$

vagyis a minimum helye, mivel l egy hosszparaméter, értéke mindig nemnegatív, $R_m = l/\sqrt{3}$. Itt a hőmérséklet értéke

$$T_{min} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi l}. \quad (60)$$

Ezeket az értékeket a 10. ábrán emeltem ki, az $l = 0.8$ hosszparaméterű görbén.

A Hawking–Page-hőmérsékletet, amely szintén szerepel a 10. ábrán, Hawking és Page a szabadenergiából



10. ábra. A hőmérséklet sugárfüggése $l = 0.8$ esetben a Hawking–Page-féle modellben, feltüntetve a lokális minimumot és a Hawking–Page-hőmérsékletet, amely ebben az esetben $T_{HP} = 0.398$. (*The radius dependence of the temperature in the case $p = 0.15$ in the Hawking–Page approach, indicating the local minimum and the Hawking–Page temperature, which is $T_{HP} = 0.3568$ in this case.*)

számították ki [29]. Az ide vonatkozó Gibbs–Duhem-reláció

$$F(T) = E(T) - TS(T) = -SdT, \quad (61)$$

amelyben nem szerepel a V -t tartalmazó tag, mivel itt nem is beszélünk bevezetett térfogatról. A hőmérséklet, aminél $F(T) = 0$, lesz az általunk keresett T_{HP} . (57)-t behelyettesítve áttérhetünk a sugárra, mint változó:

$$F(R) = \frac{R}{2} + \frac{R^3}{2l^2} - \frac{R}{4} \left(1 + \frac{3R^2}{l^2} \right) = \frac{R}{4} \left(1 - \frac{R^2}{l^2} \right), \quad (62)$$

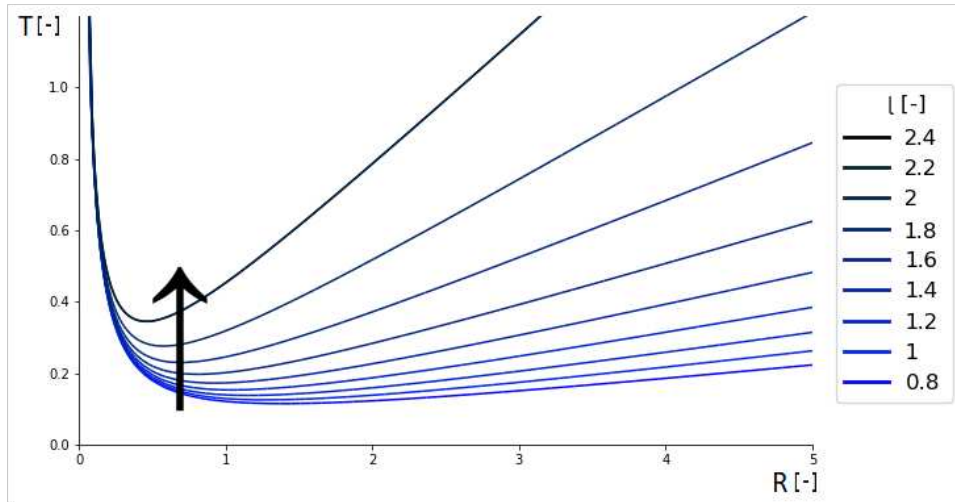
látjuk, hogy ez a kifejezés az $R^2 = l^2$ és az $R = 0$ esetekben tűnik el. Utóbbi nem lehet az általunk keresett megoldás, hiszen a (57) egyenletben láthatjuk, hogy ekkor a hőmérséklet divergálna. Az $R_{HP}^2 = l^2$ megoldást az (57) egyenletbe helyettesítve viszont megkapjuk a keresett

$$T_{HP} = T(R_{HP}) = \frac{1}{\pi l}. \quad (63)$$

Hawking–Page hőmérsékletet. A 10. ábrán ezt folytonos vízszintes vonal jelzi, habár valójában a jobb oldali, felfutó, termodinamikailag stabil ág az egyetlen, amelyen valóban bír fizikai jelentéssel.

4.4 A Spallucci–Smailagic-féle leírás

Az eddigiekben bemutatottakkal szemben [5]-ban Spallucci és Smailagic a tömeget az energia helyett az entalpiának feleltetik meg. Ez az elképzelés eredetileg nem tőlük származik, viszont a fejezetben a számolásaim során végig az ő munkásságukra fogok hivatkozni. Az entalpia természetes változói a nyomás és az entrópia, az (55) képletben látható tömeg tehát kis átalakításra szorul. Az (54) alapján a kozmológiai állandó helyett a nyomást vezetjük be változóként, a sugárfüggés pedig egyértelműen



11. ábra. A hőmérséklet sugárfüggése különböző l paraméter-értékek esetén Spallucci és Smailagic számításai alapján. Az l paraméter feltüntetett értékei a nyíl irányában növekednek. (*Radius dependence of temperature for different l parameter values based on calculations of Spallucci and Smailagic. The values of the l parameter shown in the figure increase in the direction of the arrow.*)

meghatározza az entrópiát. Így

$$M = H(S, p) = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{\pi} \right)^{1/2} + \frac{4\pi p}{3} \left(\frac{S}{\pi} \right)^{3/2}. \quad (64)$$

A hőmérséklet és a térfogat rendre az entalpia S , illetve p szerinti deriváltjai. Az entalpiára vonatkozó Gibbs-reláció

$$dH(S, p) = T dS + V dp. \quad (65)$$

Analóg módon az előző fejezet számításaival, itt is az entalpiát deriválva az entrópia szerint tudjuk kiszámítani a hőmérséklet sugárfüggését. Ez, az entrópia helyett a sugárral, mint változó, a következőképpen alakul:

$$T(R, p) = \frac{1}{4\pi R} + 2pR, \quad (66)$$

amelyet a 12. ábrán láthatunk. A hőmérséklet-görbének most is van egy lokális minimuma, amely felett lineáris a viselkedése. A minimum helye és értéke

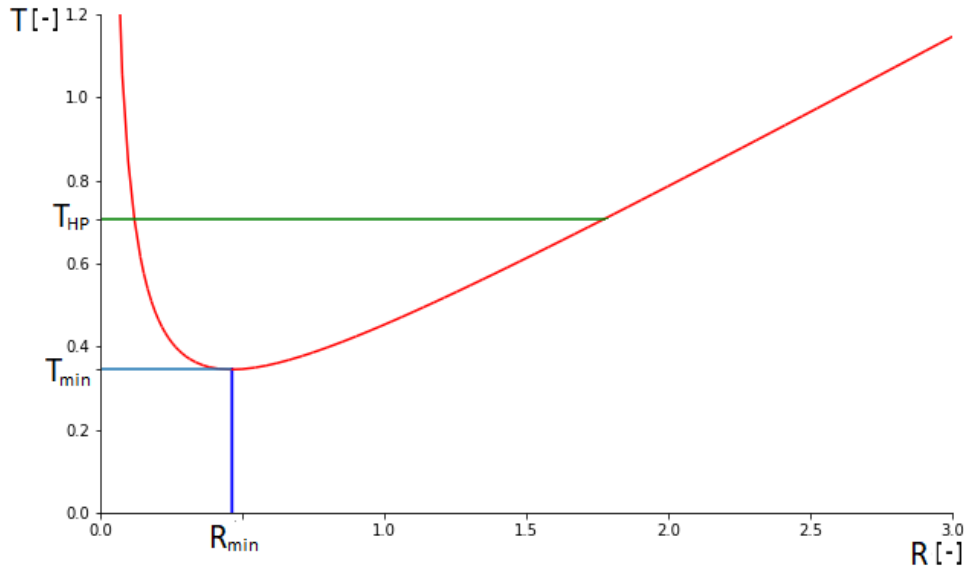
$$R_m = \frac{1}{\sqrt{8\pi p}}, \quad \text{és} \quad T_m = \sqrt{\frac{2p}{\pi}}, \quad (67)$$

melyek úgyszintén a 12. ábrán kerültek feltüntetésre.

Azonban ebben az esetben már beszélhetünk nyomásról, így ennek a sugárfüggését is vizsgálunk kell.

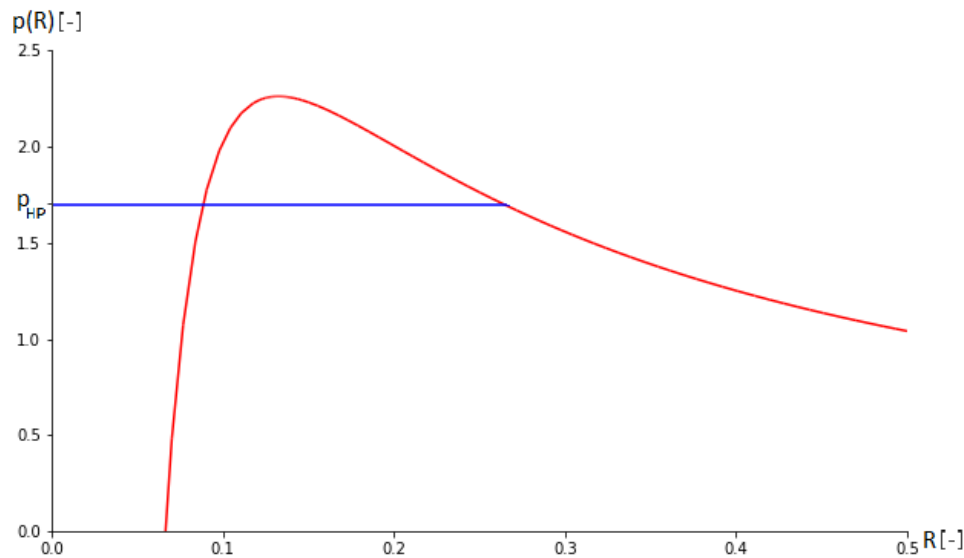
A (66)-t invertálva a nyomás a

$$p(R, T) = \frac{1}{2R} \left(T - \frac{1}{4\pi R} \right) \quad (68)$$



12. ábra. A hőmérséklet sugárfüggése $l = 0.8$ esetben Spallucci és Smailagic alapján, feltüntetve a lokális minimumot és a Hawking–Page-hőmérsékletet, amely ebben az esetben $T_{HP} = 0.7052$. (*Radius dependence of the temperature for pressure $l = 0.8$ according to Spallucci and Smailagic. Indicating the local minimum and the Hawking–Page temperature, which is $T_{HP} = 0.3568$ in this case.*)

alakban írható fel. Ezt a 13. ábrán tüntettem fel.



13. ábra. A nyomás sugárfüggése $T = 1.2$ hőmérsékletre, feltüntetve a Hawking–Page-nyomást, melynek értéke $p_{HP} = 1.6965$. (*Radius dependence of the pressure with a temperature $T = 1.2$ in the Spallucci–Smailagic approach, indicating the Hawking–Page pressure, the value of which is $p_{HP} = 1.6965$.*)

Spallucci és Smailagic szerint a térfogatos fekete lyukak termodinamikai egyensúlyának feltétele, hogy a Gibbs-potenciáljuk nulla. Ez észszerű, mert azt jelenti, hogy ebben az esetben nem beszélhetünk a fázisátalakulás során anyagátmenetről. Feltételnek tehát, a 5. ábrán látott területek egyenlősége, vagy Maxwell-szabály helyett ezt kell megszabnunk, vagyis $G(T, p) = 0$ -t. Hawking és Page [29]-ben a szabadenergiára mondják ki ezt a feltételt, tehát $F(T) = 0$ -val számolnak (náluk térfogat nincs bevezetve). A különbség abból adódik, hogy míg utóbbi esetben az invariáns tömeg az energiával van azonosítva, vagyis $M = U$, Spallucci és Smailagic az invariáns tömeg-entalpia egyenlőséggel számolnak, azaz $M = H$ -val. Ha elvégezzük a kétféleképpen definiált invariáns tömegben ugyanazt a Legendre-transzformációt,

az energia esetén szabadenergiát, az entalpia esetén pedig szabadentalpiát fogunk kapni:

$$U(S, V) - TS = F(T, V), \quad H(S, p) - TS = G(T, p). \quad (69)$$

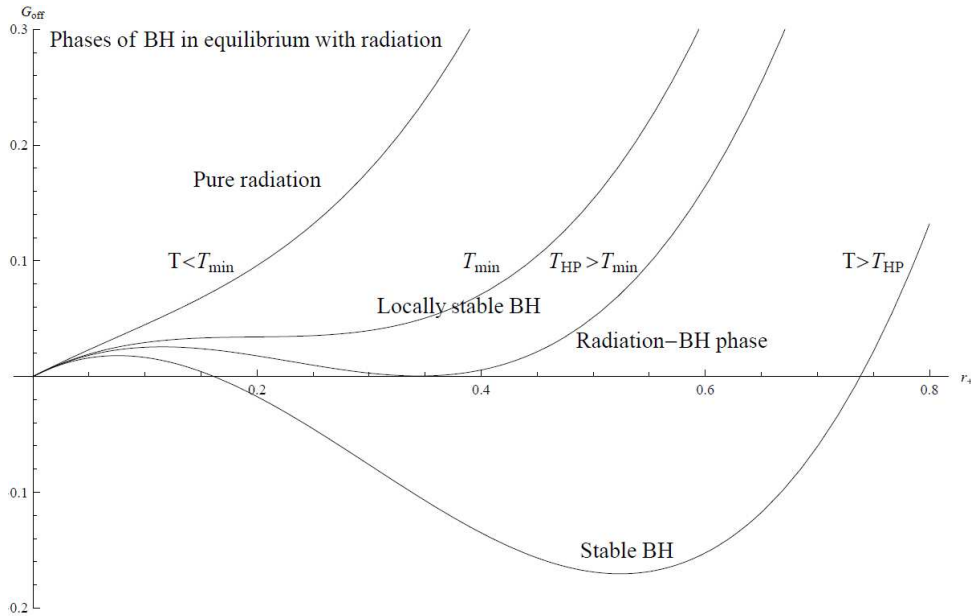
Ez az oka annak, hogy különböző kritériumokat megszabva a kétféle számítási mód ugyanarra az eredményre is vezethet. Ahogyan láttuk az egyszerű termodinamikai rendszerek tárgyalásánál a 2.8. fejezetben, a Gibbs-potenciál sugárzási térrel való egyensúlya pont az anyagátmenet hiányát vonja maga után. A feltételünk tehát most T_{HP} megtalálásához, hogy G eltűnjön.

$$G(R, p) = H(S, p) - TS = \frac{R}{2} + \frac{4\pi}{3}pR^3 - \pi R^2 \left(\frac{1}{4\pi R} + 2pR \right) = \frac{R}{4} - \frac{2\pi}{3}pR^3, \quad (70)$$

azonban ezek nem G természetes változói³. (66)-t invertálva és behelyettesítve azonban ki tudjuk fejezni $G(T, p)$ -t, ezt tegyük hát 0-val egyenlővé. Ebből T -t kifejezve jutunk a Hawking–Page-hőmérsékletre:

$$T_{HP} = \pm \sqrt{\frac{8p}{3\pi}}. \quad (71)$$

Mivel hőmérsékletről beszélünk, értéke csakis nemnegatív lehet, ezért a + előjeles megoldást tartjuk meg. Az is jól látható ebből, hogy a Hawking–Page-hőmérsékletnek csak pozitív nyomás, tehát negatív kozmológiai állandó esetén van fizikai értelme. A 12. ábrán ezt is feltüntettem $l = 0.8$ esetében. Figyeljük meg, hogy a 10. és a 12. ábrán a hőmérséklet sugárfüggésének karakterisztikája megegyezik, viszont a Hawking–Page-hőmérséklet mégsem ugyanaz a két esetben a termodinamikai nyomás paraméter, vagyis közvetve a térfogat megjelenése miatt.



14. ábra. Spallucci és Smailagic ábrája a Hawking–Page-hőmérséklet meghatározásához [5]. (Figure by Spallucci and Smailagic for determination of the Hawking–Page temperature.)

Azonban muszáj megjegyeznünk, hogy [5] tévesen használja a szabadentalpia fogalmát, hiszen állandónak tekintett hőmérséklet mellett derivál, miután a (8) képletben leszögezi, hogy T egy sugárfüggő mennyiség. A helyes fogalom erre, az általuk használt függvényre az *exergia*, amely esetében tényleg egy állandó külső hőmérsékletről beszélhetünk. A 14. ábrán láthatjuk annak módját, ahogyan Spallucci

³Habár megjegyezzük, hogy az eredmény G ezen formájával számolva is változatlan.

és Smailagic meghatározták a Hawking–Page-hőmérsékletet: pontosan az a hőmérséklet T_{HP} , aminek izotermája érinti a vízszintes tengelyt, hiszen ez az anyagátmenet hiányát figyelembevevő feltételrendszer. Viszont a 14. ábra függőleges tengelyén valójában nem a G szabadentalpia, hanem az exergia a mennyiség, amely hibásan G -ként szerepel. Így a Hawking–Page-hőmérséklet megtalálására sem ez a jó módszer. Az exergia

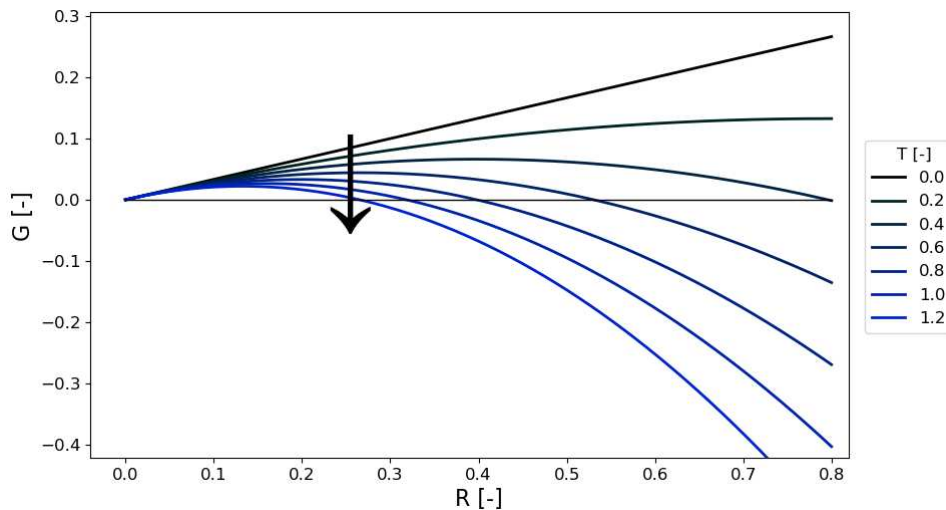
$$E_x = E - T_0 S = \frac{R}{2} + \frac{R^3}{2l^2} - T_0 \pi R^2 = E_x(R), \quad (72)$$

R szerinti deriváltja

$$E'_x(R) = E'(R) \left(1 - T_0 \frac{\partial S}{\partial E} \right) = E'(R) \left(1 - \frac{T_0}{T(R)} \right). \quad (73)$$

Az exergiának szélsőértéke vagy inflexió pontja tehát ott lesz, ahol a környezet T_0 hőmérséklete meg egyezik a rendszer $T(R)$ hőmérsékletével ($E'(R) > 0$ esetben, amely esetünkben teljesül).

A cikk nem veszi továbbá figyelembe, hogy a számítások során nem két stabil fázis jelenik meg, illetve azt sem, hogy a korábban említett anyagátmenet nélküli fázisátalakulás miatt, részecskeszám hiányában a $G = \mu N$ összefüggés sem felhasználható. A Gibbs-potenciál eltűnése azt jelenti, hogy a vizsgált rendszer sugárzási térrel tart egyensúlyt, hiszen ahogyan a termodinamikai bevezetőben láttuk, a $G = 0$ feltétel pontosan ennek felel meg.



15. ábra. Izotermák a Gibbs-potenciál-sugar diagramban a 14. ábrán helytelenül Gibbs-potenciálnak aposztrofált exergia helyett. Minden izoterma azonos tulajdonságokkal rendelkezik, nincs hőmérsékleti határérték, amely a görbék karakterisztikájának szeparátrixaként viselkedne. Ez azt jelenti, hogy nem biztos, hogy a Gibbs-potenciálból lehet következtetni a Hawking–Page hőmérsékletére, ahogyan azt korábban sejteni lehetett. A feltüntetett hőmérsékletek a nyíl irányában növekednek. (*Isotherms in the Gibbs potential-radius diagram instead of the exergy used in figure 14. All the isotherms have the same characteristics, there is no limit value in temperature. This means that we may not be able to infer the Hawking–Page temperature from the Gibbs potential as we thought we would. The temperatures shown in the figure increase in the direction of the arrow.*)

4.5 Leírás a Christodoulou–Rovelli-térfogattal

Nézzük, hogyan változnak ezek az eredmények, ha a Christodoulou–Rovelli-térfogatot vezetjük be a számításainkba, vagyis

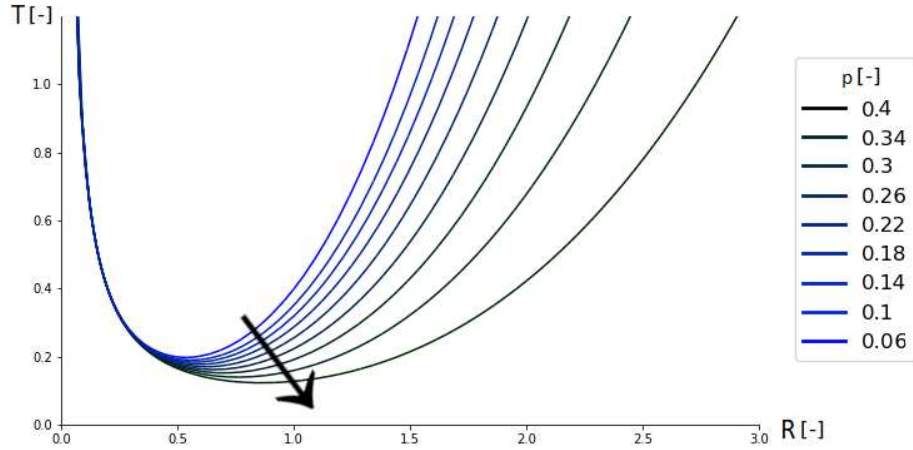
$$\Lambda = -\frac{3}{l^2} = -\frac{6pS}{\pi}t \quad (74)$$

használva

$$H(S, p) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} + p \left(\frac{S}{\pi} \right)^{5/2}, \quad \text{ebből} \quad \frac{\partial H}{\partial S} \Big|_p = T(S, p) = \frac{1}{4\sqrt{\pi S}} + \frac{5p}{2\pi} \left(\frac{S}{\pi} \right)^{3/2}, \quad (75)$$

vagy most is a sugarat használva változóként

$$H(R, p) = \frac{R}{2} + pR^5, \quad \text{és} \quad T(R, p) = \frac{1}{4\pi R} + \frac{5p}{2\pi} R^3. \quad (76)$$



16. ábra. A hőmérséklet sugárfüggése különböző p paraméter-értékek esetén a Christodoulou–Rovelli-térfogatot beépítve a modellbe. (Az l hosszparaméter most sugárfüggő mennyiség, ezért ennek függvényében nem ábrázolható a hőmérsékletfüggés.) A feltüntetett nyomás értékek a nyíl irányában növekednek. (*Radius dependence of temperature for different p parameter values incorporating the Christodoulou–Rovelli volume into the model. (The length parameter l is now a radius-dependent quantity.)*)

Mivel tudjuk, hogy $G(T, p) = H(S, p) - TS$ az ide vonatkozó Legendre-transzformáció, a Gibbs-potenciált a (76) egyenletekből ki tudjuk számítani:

$$G(R, p) = \frac{R}{4} - \frac{3}{2} p R^5, \quad (77)$$

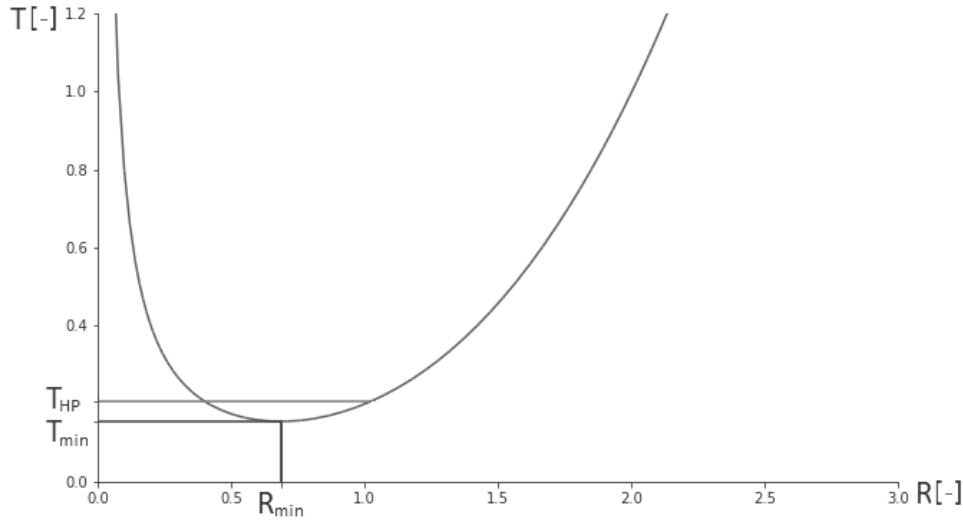
ezt egyenlővé téve nullával a Hawking–Page-hőmérséklet

$$T_{HP} = \frac{2}{3\pi} (6p)^{1/4}. \quad (78)$$

Mivel l most (74) miatt entrópia-, és így sugárfüggő mennyiség, így a 16. és a 17. ábrákon a rögzített paraméter az előző két fejezet ábráitól eltérő módon a p . A 17. ábrán tüntettem fel a jelenleg tárgyalt modell hőmérsékletének sugárfüggését, a lokális minimummal és a Hawking–Page-hőmérséklettel, melynek értéke itt $T_{HP} = 0.2067$ a dimenziótlan hőmérséklet egységekben kifejezve.

4.6 A fajhő szerepe

A Schwarzschild-féle fekete lyukak, illetve Hawking és Page leírása esetén térfogat hiányában nincs értelme izobár vagy izochor fajhőről beszélni, térfogat hiányában, annak értelmezése nélkül csak hőkapacitás létezik, ahogy láttuk, az ezzel való számításokkal a (30) egyenlet negatív hőkapacitás-paradoxonjára jutunk. A Spallucci, Smailagic, valamint Dolan által használt térfogat esetén viszont már tudunk ezekkel



17. ábra. A hőmérséklet sugárfüggése $p = 0.15$ esetben a Christodoulou–Rovelli-térfogattal, feltüntetve a lokális minimumot és a Hawking–Page-hőmérsékletet. (Az l paraméter most sugárfüggő mennyiség.)
(The radius dependence of the temperature in the case of $p = 0.15$ with the Christodoulou–Rovelli volume, indicated the local minimum and the Hawking–Page temperature, which is $T_{HP} = 0.2067$ in this case.)

számolni, hogy meghatározzuk a termodinamikai stabilitást. A negatív hőkapacitás-probléma egyszerű fekete lyukak esetén már a geometriai térfogat használatával is megoldódik, de fontos megjegyeznünk, hogy a fajhő negativitása, vagyis a termodinamikai instabilitás az előfeltétele a Dolan által [4]-ben vizsgált fázisátalakulás létezésének. Ez viszont nem egy globális fázisátalakulás, vagyis a kritérium csak az állapottér egy részét zárja ki. A van der Waals-esetben a negatív kompresszibilitás, a fekete lyukak esetén a negatív fajhő tartománya jelöli ki a fázishatárokat.

Azon fekete lyukak stabilitásának vizsgálatakor, amelyek invariáns tömegét az entalpiával azonosítjuk, a belső energiából származtatható izochor hőkapacitás helyett az entalpiából származtatható izobár hőkapacitás eltűnése jelenti a számolások során a vizsgálandó kritériumot, ahogyan a stabilitási feltételeket láthattuk a 2.4. fejezetben. A kiszámítás módja

$$c_P = \frac{T}{\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{P,J,Q}}, \quad (79)$$

ez eltűnik, amikor a számlálója, vagyis $T = 0$, és divergál, amikor a nevezője tűnik el, vagyis $\partial_S T = 0$ esetben.

Biró és társai megközelítésében [31] a negatív hőkapacitás-probléma megoldása abban rejlik, hogy az energia és a független termodinamikai változóként bevezetett térfogat hatványfüggvényként skálázódik a következő összefüggés szerint:

$$S(U, V) = \xi U^\alpha V^\beta, \quad (80)$$

ahol ξ egy arányossági tényező, az Euler-homogenitás pedig az $\alpha + \beta = 1$ feltételt szabja a hatványkitevőkre. További kiegészítése még ennek, ahogyan korábban is láttuk, S egyúttal a sugár négyzetével is arányos. A belső energia

$$U(S, V) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \frac{R}{2}. \quad (81)$$

Mivel a térfogat is mindenképpen a sugár valamely hatványával arányos mennyiség, a (80) egyenlet

alapján megszabott feltételt a következőképpen tudjuk módosítani:

$$S(R) = \xi R^\alpha R^\gamma, \quad (82)$$

tehát $\alpha + \beta\gamma = 2$. A (80) egyenletben látható entrópia első deriváltjai

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} = \alpha \frac{S}{U}, \quad \text{és} \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T} = \beta \frac{S}{V} \quad (83)$$

alakúak, amelyekből a

$$p = \frac{\beta}{\alpha} \frac{U}{V} \quad (84)$$

állapotegyenletre jutunk. A Stefan–Boltzmann-törvény alapján $\beta/\alpha = 1/3$ teljesíti a háromdimenziós sugárzási törvényt. Az entrópia belső energia szerinti második deriváltja

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\partial}{\partial U} \frac{1}{T} = -\frac{1}{V c_V T^2}, \quad (85)$$

amelyet (80) alapján a

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \alpha(\alpha - 1) \frac{S}{U^2} \quad (86)$$

formában is felírhatunk. Mindezekből kaphatjuk meg a

$$c_V = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{S}{V} \quad (87)$$

izochor fajhőre vonatkozó összefüggést. További átalakítások után Biró és társai arra az eredményre jutnak, hogy az entrópia, a belső energia és a nyomás pozitivitása ilyen formán maga után vonja a fajhő pozitivitását is. Az a térfogat, amely kielégíti az Euler-homogenitás megkötését is, mindenképpen a sugár ötödik hatványával kell, hogy arányos legyen, vagyis $\gamma = 5$. A Christodoulou–Rovelli-térfogat pont ilyen. Ennek esetében $\alpha = 0.75$ és $\beta = 0.25$ és az entrópia változatlanul az eseményhorizont felületével arányos mennyiség. Ha a hagyományos, geometriai térfogattal számolnánk, amely a sugár harmadik hatványával arányos, akkor $\alpha = \beta = 0.5$ -re jutnánk, amely kielégíti ugyan az $\alpha + \beta = 1$ Euler-homogenitási kritériumot, azonban az $\alpha = 3\beta$ sugárzási törvényből adódót már nem.

4.7 A kritikus pont

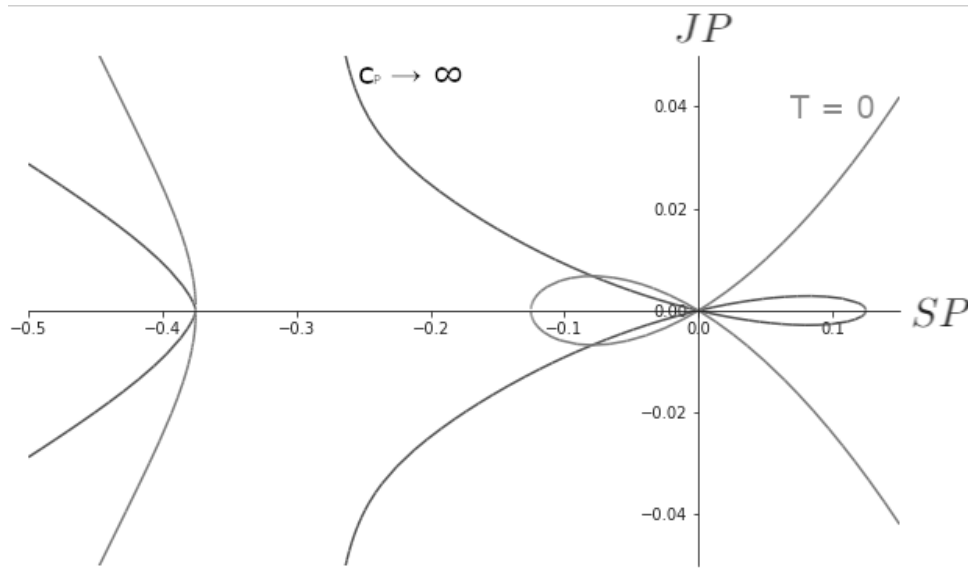
Caldarelli, Cognola és Klemm 2000-ben [25] teljes stabilitásvizsgálatot végeztek el az AdS-téridőn értelmezett Kerr–Newman típusú fekete lyukakra vonatkozóan. Dolan 2012-ben [4] azt is megmutatta, hogy a van der Waals-gázra jellemző fázisátalakuláshoz hasonló folyamat játszódhat le az ilyen típusú fekete lyukak esetében. Azt is megállapította, hogy ennek a folyamatnak a rendparamétere lehet a fekete lyukak termodinamikai állapotegyenleteibe bevezetett térfogat. Dolan cikkének esetében ez megegyezik a szokásos geometriai térfogattal, amely az objektum sugarának harmadik hatványával arányos, mint az (53) egyenletben, abból kifolyólag, hogy a kozmológiai konstans a nyomással arányosított mennyiség. A termodinamikai változók közti összefüggést megadó általánosított Smarr-reláció

$$\frac{H}{2} + pV - ST - J\Omega - \frac{Q\phi}{2} = 0. \quad (88)$$

Dolan cikkének esetében is, ahogyan azt az (54) egyenletben már láthattuk,

$$S = \pi R_s^2, \quad \text{illetve} \quad p = -\frac{\Lambda}{8\pi} \quad (89)$$

a kiinduló összefüggések. Spallucci és Smailagic [5] gondolatmenetéhez hasonlóan a tömeget az entalpiával azonosítja, nem pedig a belső energiával. Egyváltozós eset a térfogat nyomásfüggetlenségéből kifolyólag egyáltalán nem kerül tárgyalásra, a cikk feltételezése, hogy csak forgó vagy töltött fekete lyuk esetén beszélhetünk (ilyen formában) térfogatról. Ezért Dolan egy forgó, töltött fekete lyuk esetét vizsgálja, ekkor az entalpia



18. ábra. A Dolan által is számolt teljes $J - S$ paramétertér és a bonyolult fázisszerkezet. Feketével a $c_P \rightarrow \infty$, világosszürkével a $T = 0$ görbék. (The total $J - S$ parameter space and the complex phase structure calculated by Dolan. The $c_P \rightarrow \infty$ case marked by darker, while the $T = 0$ region marked by lighter curves.)

$$H(S, P, J, Q) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(S + \pi Q^2 + \frac{8PS^2}{3})^2 + 4\pi^2(1 + \frac{8PS}{3})J^2}{\pi S}} \quad (90)$$

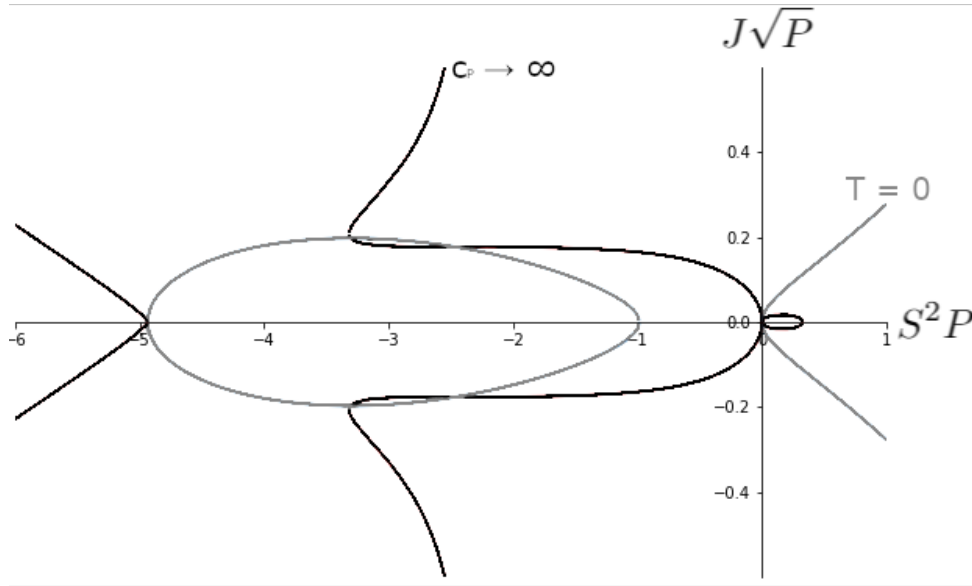
alakban írható fel. Ezt a kifejezést a nyomás szerint deriválva kapjuk meg a termodinamikai térfogatot, amely így $V(S, P, J, Q)$ függvénye. Azonban a $J = 0$ esetben, vagyis, ha a fekete lyuknak nem lenne impulzusmomentuma, a térfogat tisztán az entrópia, illetve, az entrópiával (54) egyenletben azonosított sugár függvénye lenne.

A stabilitásvizsgálat során Dolan [4] cikke nyomán a töltetlen, $Q = 0$ esetről, vagyis az AdS–Kerr fekete lyuk fázisszerkezetéről készített 18. ábrán világosszürke görbe jelöli azt a régiót, ahol az izobár hőkapacitás eltűnik, fekete görbe pedig azt, ahol divergál a $J - S$ paramétertér. A 2.4. és a 4.6. fejezetekben láthattuk, hogy ez a kritérium mutatja meg a termodinamikailag stabil régiókat. A kritikus pont a 18. ábrán látható fázistér első síknegyedében a fekete, $c_P \rightarrow \infty$ görbe lokális maximumában van. Koordinátái [4]:

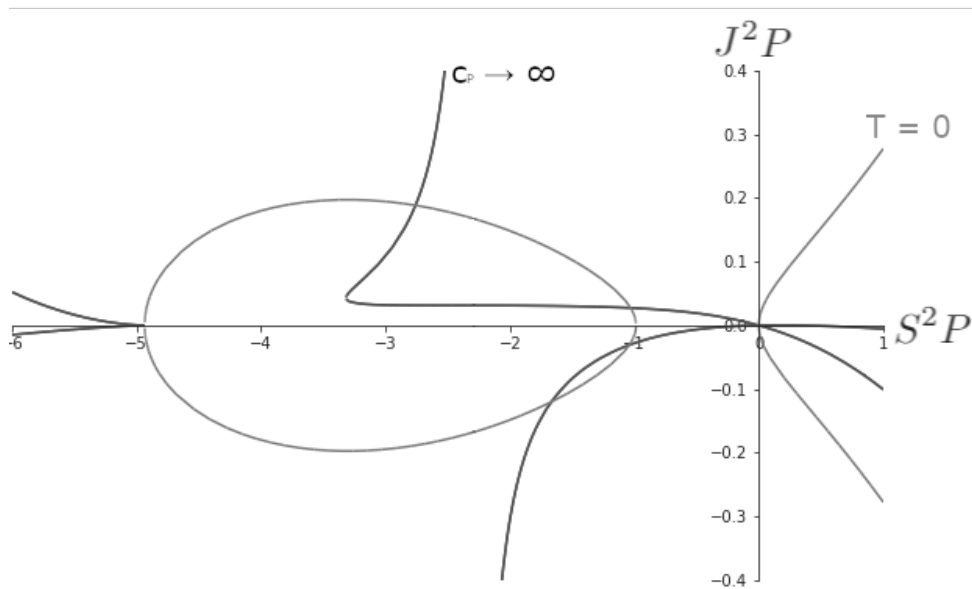
$$(SP)_{krit} \approx 0.08204, \quad \text{illetve} \quad (JP)_{krit} \approx 0.002857, \quad (91)$$

analitikus számítások segítségével.

4.8 A kritikus pont Christodoulou–Rovelli-térfogattal



19. ábra. A teljes $J - S$ paraméterter és a bonyolult fázisszerkezet Christodoulou–Rovelli-térfogatot bevezetve. Feltüntetve a $c_P \rightarrow \infty$, valamint a $T = 0$ görbék. (The total reduced $J - S - P$ parameter space with the coordinates $J\sqrt{P}$ and S^2P , and the complex phase structure when using the Christodoulou–Rovelli volume. The $c_P \rightarrow \infty$ case marked by darker, while the $T = 0$ region marked by lighter curves.)



20. ábra. A teljes $J - S$ paraméterter és a bonyolult fázisszerkezet Christodoulou–Rovelli-térfogatot bevezetve. Feltüntetve a $c_P \rightarrow \infty$, valamint a $T = 0$ görbék. (The total reduced $J - S - P$ parameter space with the coordinates J^2P and S^2P , and the complex phase structure when using the Christodoulou–Rovelli volume. The $c_P \rightarrow \infty$ case marked by darker, while the $T = 0$ region marked by lighter curves.)

Dolan [4]-beli (26)-os egyenlete nem elégíti ki az elsőrendű Euler-homogenitást, emiatt nem is a megszokott extenzivitás teljesül az esetben, ahogyan azt a (88) Smarr-reláció mutatja. Ezért módosított

térfogatot bevezetve, vagyis $\Lambda = -8\pi P$ helyett a

$$\Lambda = -\frac{6pS}{\pi} \quad (92)$$

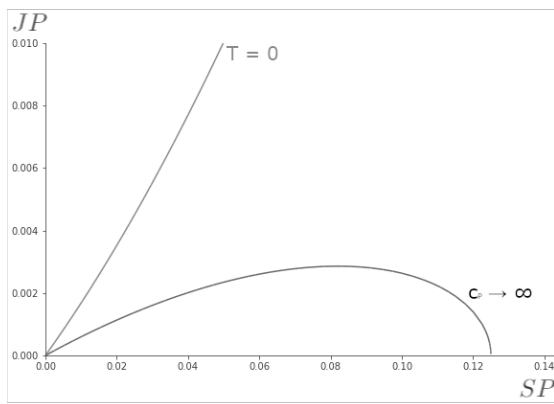
ansatz-t bevezetve az entalpia a $Q = 0$ esetben, vagyis egy forgó, töltetlen, AdS–Kerr-típusú fekete lyukra

$$H(S, P, J, Q = 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi S}} \sqrt{\left(S + \frac{2pS^3}{\pi^2}\right)^2 + 4\pi^2 J^2 \left(1 + \frac{2pS^2}{\pi^2}\right)}. \quad (93)$$

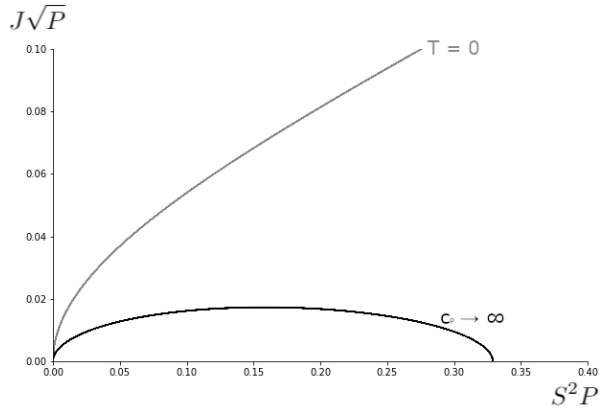
Ebből

$$T = \frac{\partial H}{\partial S} \Big|_{P,J}, \quad \text{illetve} \quad c_P = \frac{T}{\frac{\partial T}{\partial S} \Big|_{P,J}}. \quad (94)$$

Tudjuk, hogy a kritikus pont létezésének a feltétele, hogy a c_P állandó nyomású fajhő divergáljon, vagyis $(\partial T / \partial S)|_{P,J} = 0$ legyen.



(a) Hagyományos térfogattal [4]



(b) Christodoulou–Rovelli-térfogattal

21. ábra. $c_P \rightarrow \infty$, és $T = 0$ görbék a $J - S$ paraméterter első síknegyedén. A kritikus pont mindkét esetben a fizikai régióban ($T > 0$) helyezkedik el. (*The curves $c_P \rightarrow \infty$ in red and the curves $T = 0$ in blue in the first plane quarter of the reduced $J - S - P$ parameter space. In both cases, the critical point is in the physical region ($T > 0$). (a) With classical volume (b) With Christodoulou–Rovelli volume*)

A 19. és a 20. ábrák mindegyikén az első síknegyedben, a $T = 0$ és a $c_P \rightarrow \infty$ görbék között helyezkedik el a stabil, fizikai régió. A két ábra között a különbség, hogy a paraméterteret különbözőképpen redukált változók koordinátázzák. Míg 19. ábrán a fázisszerkezet szimmetrikus, a 20. ábrán maga a paraméterter, hiszen a vízszintes tengely S^2P koordinájához a J^2P "illik", még ha a fázisszerkezet szimmetriája ettől fel is bomlik. Azt, hogy melyik a "helyes" vagy "hasznos" koordinátázás illetve skálázás, további kutatások szükségesek, hogy el tudjuk dönteni. Az ábrákon feltüntetett $T = 0$ görbék a fizikai régió határai: felettük $T < 0$, vagyis itt nem valósulhatnak meg fizikai állapotok.

A 21. ábrán szemléltettem a lokális stabilitást. A két grafikon a 18. ábra, illetve, a 19. ábra első síknegyedét mutatja részleteiben. Mindkét esetben sötétebb görbe jelöli azt a régiót, ahol a fajhő divergál, világosabb a $T = 0$ -t, ami felett a hőmérséklet negatív, vagyis fizikai állapotok nem valósulhatnak meg. Balra, a 21a. ábrán az eredeti, módosítatlan térfogat, jobbra, a 21b. ábrán a Christodoulou–Rovelli-térfogat beépítve az entalpiába. Érdekes megfigyelni, hogy a 3 változós függvények mindkét esetben hasonló módon voltak 2 változósra redukálhatóak. Az új térfogat bevezetésével a S^2P és $J\sqrt{P}$ verziót használtam fel az új változók közül, ahogyan ez a 21b. ábrán is látszik. Azért választottam ezt a kétféle új koordinátázás közül, mert így Dolan ábrájával szerkezetileg és nagyságrendileg is összehasonlítható grafikon született a 21. ábrán.

A lokális, másodrendű fázisátalakulás kritikus pontja mindkét esetben a divergenciát jelző görbék lokális maximumánál található. Ez a Christodoulou–Rovelli-, tehát a 21b. ábrán látható esetben

$$(S^2P)_{krit} \approx 0.1584 \quad \text{és} \quad (J\sqrt{P})_{krit} \approx 0.01729. \quad (95)$$

Dolan szerint ott található a globális Hawking–Page-fázisátalakulás, ahol az aszimptotikusan AdS-téridőbe ágyazott fekete lyuk szabadenergiája kisebb, mint a tiszta AdS-esetben. Ennek a fázisátalakulásnak a megtalálásához nem elég ebből a szemszögből megvizsgálni a kérdést. A Hawking–Page kritikus pont helyének megtalálásához, ha létezik, úgyszintén további kutatás szükséges.

5 KONKLÚZIÓ

Bekenstein, Hawking és még sokan mások vállalkoztak arra, hogy megmutassák, ez a tárgyalásmód nem csak érdekes, de hasznos is. Viszont ezekben a leírásokban a térfogat problematikusán értelmezhető, ezért nincs teljes egyetértés abban, hogy a különféle termodinamikai feltételekkel bevezetett többféle térfogatfogalom közül melyiknek a segítségével írhatjuk le ténylegesen ezeknek az objektumoknak a viselkedését. Három hozzáállást tekintettem át a térfogathoz, annak bevezetési módjaihoz. Hawking és Page [29] térfogat bevezetése nélkül vontak le következtetéseket jutottak egy kritikus viselkedéshez, Spallucci és Smailagic [5] a szokásos, háromdimenziós geometriai gömbtérfigatot vezették be számításaikba, hasonlóan Dolan-hez [4], akinek a munkáját részletesen vizsgáltam. A Biró és társai [31] által bemutatott térfogatfogalom teljes mértékben termodinamikai megalapozású, de szorosan hozzákapcsolódik az általános relativitáselmélettel is kompatibilis invariáns térfogatfogalomhoz. A Hawking–Page-fázisátalakulást mindezen különböző elképzelések mentén lehet jobban megérteni, a dolgozat tehát ezt a három utat tekinti át. Én az AdS-Kerr metrikán vizsgáltam őket, és eredményül azt kaptam, hogy, ugyan más paraméterekkel és más skálázási tulajdonságokkal jelenik meg az invariáns térfogatfogalomra alapuló fáziskép, de mégis megőrződik a Dolan által prezentált fázistér lényeges szerkezete. A Hawking–Page-fázishatár egyértelműen a sugárzási térrel való egyensúlyból vezethető le, a feltételek indikációja alapján.

A dolgozatban beláttam, hogy habár a látszólagos geometriai térfogatnak ($V = 4\pi R^3/3$) igen nagy hátránya, hogy fizikailag egy koordináta-függő fogalom, már ezzel is ki tudjuk küszöbölni a fekete lyuk-termodinamika egyik legfontosabb problémáját: a negatív hőkapacitás-paradoxont. Az extenzivitáson keresztül bevezetett térfogatfogalom abszolút előnye, hogy az invariáns térfogatot adja eredményül, és általa termodinamikailag konzisztens módon küszöbölődik ki a negatív hőkapacitás problémája, illetve a Hawking–Page-fázishatárok, tehát a fekete lyukak párolgásáról való eddigi ismereteink nem változnak meg ezzel a számítási móddal sem. Ezen kívül megvizsgáltam, hogy a Christodoulou–Rovelli-féle [3], geometriailag kitüntetett térfogatfogalom termodinamikailag is beilleszthető a számításokba, bár ekkor a Hawking–Page-fázishatárok, illetve a fázisátalakuláshoz tartozó kritikus pont módosulnak. Ez akár az elsődleges (primordiális) fekete lyuk-méreteloszlásra is befolyással lehet, ami a későbbiekben megfigyelésekkel való összevetésre is adhat alapot.

HIVATKOZÁSOK

- [1] J.D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8):2333, 1973.
- [2] E. Verlinde. On the origin of gravity and the laws of Newton. *Journal of High Energy Physics*, 2011(4):1–27, 2011.
- [3] M. Christodoulou and C. Rovelli. How big is a black hole? *Physical Review D*, 91(6):064046, 2015.
- [4] B.P. Dolan. Where is the PdV in the first law of black hole thermodynamics? *Open Questions in Cosmology*, 2012.
- [5] E. Spallucci and A. Smailagic. Maxwell’s equal area law and the Hawking-Page phase transition. *Journal of Gravity*, 2013, 2013.
- [6] T. Matolcsi. *Ordinary thermodynamics*. Akadémiai Kiadó Budapest, 2004.
- [7] Z. Rant. Exergie. *Ein neues Wort fur technische Arbeits-fahigkeit*, *Forsch. Ing.-Wes*, 22:36–37, 1956.
- [8] R.C. Tolman and P.C. Fine. On the irreversible production of entropy. *Reviews of Modern Physics*, 20(1):51, 1948.
- [9] H. Quevedo, M.N. Quevedo, and A. Sánchez. Homogeneity and thermodynamic identities in geometrothermodynamics. *The European Physical Journal C*, 77(3):1–4, 2017.
- [10] L. Smarr. Mass formula for kerr black holes. *Physical Review Letters*, 30(2):71, 1973.
- [11] Ván Péter. Bevezetés a nem-egyensúlyi termodinamikába jegyzet. 2005.
- [12] JD van der Waals. Over de continuïteit van den gasen vloeistoestand (on the continuity of the gas and liquid state) PhD thesis (1873), Leiden, Netherlands; JC Maxwell. *Nature*, 10(259):477, 1874.
- [13] Biró Tamás Sándor. *Is there a temperature?: conceptual challenges at high energy, acceleration and complexity*, volume 171. Springer Science & Business Media, 2011.
- [14] S.J. Crothers. A brief history of black holes. *Progress in Physics*, 2:54, 2006.
- [15] M.D. Kruskal. Maximal extension of Schwarzschild metric. *Physical review*, 119(5):1743, 1960.
- [16] Szekeres György. On the singularities of a Riemannian manifold. *Publicationes Mathematicae Debrecen* 7, 7:285, 1960.
- [17] R.M. Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [18] Szabados László. Két (hosszabb) megjegyzés a 2020. évi fizikai Nobel-díj kapcsán. *Fizinfo*, 2021. február 16.
- [19] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The large scale structure of space-time*, volume 1. Cambridge university press, 1973.
- [20] T.S. Biró, V.G. Czinner, H. Iguchi, and P. Ván. Volume dependent extension of Kerr-Newman black hole thermodynamics. *Physics Letters B*, 803:135344, 2020.
- [21] Brandon S DiNunno and Richard A Matzner. The volume inside a black hole. *General Relativity*

- and Gravitation*, 42(1):63, 2010.
- [22] W. De Sitter. On the curvature of space. In *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet*, volume 20, pages 229–243, 1917.
 - [23] B. Carter. Hamilton-Jacobi and Schrödinger separable solutions of Einstein’s equations. *Communications in Mathematical Physics*, 10(4):280–310, 1968.
 - [24] M. Henneaux and C. Teitelboim. Asymptotically Anti-de Sitter spaces. *Communications in Mathematical Physics*, 98(3):391–424, 1985.
 - [25] M.M. Caldarelli, G. Cognola, and D. Klemm. Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS black holes and conformal field theories. *Classical and Quantum Gravity*, 17(2):399, 2000.
 - [26] X. Wang and W. Liu. The interior volume calculation for an axially symmetric black hole. *Physics Letters B*, 788:464–467, 2019.
 - [27] Baocheng Zhang. Entropy in the interior of a black hole and thermodynamics. *Physical Review D*, 92(8):081501, 2015.
 - [28] S.W. Hawking. Black hole explosions? *Nature*, 248(5443):30–31, 1974.
 - [29] S.W. Hawking and D.N. Page. Thermodynamics of black holes in Anti-de Sitter space. *Communications in Mathematical Physics*, 87(4):577–588, 1983.
 - [30] Patkós András. Entrópia, Planck, Univerzum. *Fizikai Szemle*, 12(9), 2008.
 - [31] T.S. Biró, V.G. Czinner, H. Iguchi, and P. Ván. Black hole horizons can hide positive heat capacity. *Physics Letters B*, 782:228–231, 2018.
 - [32] GE Volovik. Effect of the inner horizon on the black hole thermodynamics: Reissner–nordström black hole and kerr black hole. *Modern Physics Letters A*, 36(24):2150177, 2021.

Kluitenberg–Verhás-modell, hőtágulás és reológiai energia

Kluitenberg–Verhás model, thermal expansion, and rheological energy

Fülöp Tamás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék; Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, fulop.tamas@gpk.bme.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: Jelen fejezet belső változós módszertannal, az energia eltolásával származtatja a Kluitenberg–Verhás viszkoelasztikus modell hőtágulással kiterjesztett változatát. Feltárja az extra, reológiai energiatag tulajdonságait és megadja a belső változó interpretációját.

Kulcsszavak: viszkoelasztikusság, belső változó, kontinuumelmélet, időbeli termodinamika

ABSTRACT: This chapter derives the Kluitenberg–Verhás viscoelastic model extended to incorporate thermal expansion, via the internal variable methodology, using the extension of energy. Properties of the extra rheological energy term are explored and the interpretation of the internal variable is provided.

Keywords: viscoelasticity, internal variable, continuum theory, temporal thermodynamics

1 BEVEZETÉS

Az [1] cikk az entrópia eltolásával származtatja a Kluitenberg–Verhás-reológiát a belső változós módszertannal. Így a belső változó kiküszöbölése csak izoterm közelítésben valósítható meg. Jelen írás egyik célja az izoterm közelítés elkerülése és konstans együtthatók megengedése¹, az entrópia helyett az energia eltolásával. Másik cél a hőtágulás megengedése, mely a gyakorlati alkalmazásokban sokszor merült fel fontos igényként. További cél a valódi szabad paraméterek feltárása, a belső változó interpretálása, és a reológiai energiajárulék elemzése. A kapott eredmények nagyban segítik numerikus szimulációk megvalósítását is, mint azt kutatócsoportunk ilyen irányú eddigi eredményei mutatják.

Jelen tárgyalásban nincs figyelembe véve a hővezetés, mely vektori (ld. hőáramsűrűség) jelenséggör, nem tenzori, így izotrop közeg esetén csatolódásmentesen, könnyen hozzáadható a modellhez. Mind ehhez, mind az itt közölt eredmények alkalmazásaihoz jelen kötet Takács–Fülöp fejezete nyújt példát és további irodalmat.

2 A KIINDULÓPONT

Az elinduláshoz szükséges kontinuumelméleti háttér a következő (ld. pl. [2]).

Az $\mathbf{L}$ sebességgradiens tenzor a $\mathbf{v}$ sebességmező deriváltja,

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \otimes \bar{\nabla} \quad (\text{Descartes-koordinátákban: } L_{ij} = \partial_j v_i), \quad (1)$$

a belső energia mérlege az e fajlagos belső energia, a $\mathbf{j}_E$ hőáramsűrűség vektor, a $\boldsymbol{\sigma}$ feszültségtenzor és a sebességgradiens szimmetrikus része közötti

$$\rho \dot{e} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_E + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_E + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^S) \quad (2)$$

összefüggés. Az entrópiamérleg az s fajlagos entrópia, a $\mathbf{j}_S$ entrópiaáram-sűrűség vektor és a π_S entrópiatermelődési ráta-sűrűség közötti

$$\rho \dot{s} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_S + \pi_S \quad (3)$$

¹Ez gyakorlati alkalmazások számára is, oktatási célokra is fontos.

kapcsolat. A szokásos nemegyensúlyi termodinamikai kapcsolatot tekintjük az entrópiaáram-sűrűség és a hőáramsűrűség között:

$$\mathbf{j}_S = \frac{1}{T} \mathbf{j}_E, \quad (4)$$

ahol $T > 0$ az abszolút hőmérséklet.

Reverzibilis modell esetén minden megengedett folyamat mentén

$$\pi_S = 0, \quad (5)$$

irreverzibilis modell esetén pedig a 2. főtétele szerinti

$$\pi_S \geq 0 \quad (6)$$

követelményt fogjuk vizsgálni.

Jelen tárgyalásban, mint fentebb említésre került, a hővezetéstől eltekintünk:

$$\mathbf{j}_E = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j}_S = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Ekkor reverzibilis modell esetén

$$T\pi_S = 0, \quad (8)$$

irreverzibilis modell esetén pedig a

$$T\pi_S = \varrho T\dot{s} \geq 0 \quad (9)$$

egyenlőtlenséget fogjuk megkövetelni.

A mechanikai teljesítménysűrűség $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L})$ alakja lehetővé fogja tenni nekünk, hogy nemcsak kontinuum-, hanem helyfüggetlen időbeli [10, 9, 2], koncentrált paraméterű, homogén termodinamikai modellekre is vonatkozhassanak az alábbiak. Térderiváltak ugyanis ettől a ponttól kezdve nem fognak fellépni, $\mathbf{L}^S$ -re nem mint térderiváltra, hanem mint önálló jogú szabadsági fokra tekintünk. Más kinematikai mennyiségekkel való kapcsolatát nemcsak kontinuummodellből származtathatjuk [6, 4, 5, 7, 8, 3], hanem posztulálhatjuk is (természetesen a kontinuummodell által motiváltan). Így helyfüggetlen, tehát véges szabadsági fokú, időbeli dinamikai (sőt, termodinamikai) modellünk lehet rugalmas, viszkoelasztikus és hőtágulási jelenségek leírására. Ez számos kísérleti elrendezés modellezéséhez megfelelő, és egyszerű, praktikus eszköztár.

A mérnöki gyakorlathoz közelebb vagyunk, ha T a termikus változónk, nem e vagy s . Indulásként csak termikus változásokat engedjük meg:

$$e = e_{\text{th}}(T), \quad s = s_{\text{th}}(T), \quad (10)$$

melyek között a

$$de = T ds \quad (11)$$

Gibbs-relációt (mint konstitúciós konzisztenciafeltételt) a

$$\frac{de_{\text{th}}}{dT} = T \frac{ds_{\text{th}}}{dT} \quad (12)$$

kapcsolat kiadásával biztosítjuk.² Például

$$e_{\text{th}}(T) = cT, \quad s_{\text{th}}(T) = c \ln \frac{T}{T_{\text{aux}}} + s_{\text{aux}} \quad (13)$$

állandó c fajhőjű modellt testesít meg (itt T_{aux} , s_{aux} segédmennyiségek³).

² $s(e)$ konkávitását a T változó nyelvén $de_{\text{th}}/dT > 0$, vagy ekvivalens módon $ds_{\text{th}}/dT > 0$ biztosítja.

³Dimenziós mennyiségnek nincs logaritmus, ezért van szükség egy T_{aux} -ra.

A termikus változások mellé fokozatosan fogjuk majd megengedni a rugalmas, a viszkoelasztikus és a hőtágulási jelenségeket.

Izotrop közeg kis alakváltozásaira fogunk szorítkozni. E közelítésben a ϱ tömegsűrűség állandó.

Rugalmas és hőtágulási alakváltozás fog előfordulni, a rugalmas kitérést lokálisan, tenzorilag mérő $\mathbf{D}$ rugalmas deformáltság tenzorral, a sebességgradiens tenzorral (és a szokásosan használt ε alakváltozási tenzorral) való kapcsolatának részleteit a [6, 4, 5, 7, 8, 3, 2] művek tartalmazzák.

Az áttekinthetőség kedvéért eleinte „egy térdimenziós”, helyesebben szólva: 1 kinematikai szabadsági fokú esetet tekintünk, a háromdimenziós tenzori tárgyalás ezután lesz bemutatva. Az 1D tárgyalás nem annyira egytengelyű folyamat modellezéseként használandó / fogandó fel: reológia jelenléte esetén ez már önbecsapás (a keresztirányú mozgások számottevő „önálló életre kelnek”, ld. pl. [2]), hanem egy izotrop anyagú tenzori modell deviatorikus és gömbi része bizonyul ilyen, effektíve skalár szerkezetűnek. Közülük a gömbi részben lesz hőtágulás izotrop közeg esetén.

3 A HOOKE-MODELL

A rugalmasság tulajdonképpen a fenti, csupán termikus szabadsági fokú (10)–(12) modell belső változós, reverzibilis kiterjesztéseként interpretálható.

Tekintünk egy extra D szabadsági fokot. Kinematikai szerepet fog játszani, ezt az L -lél való

$$\dot{D} = L \quad (14)$$

kapcsolata fejezi ki. A feszültség ennek az állapotjelzőnek a

$$\sigma = ED \quad (15)$$

lineáris függvénye, a pozitív E együtthatóval (mely egytengelyű értelmezés esetén a Young-modulusz). E feszültség σL mechanikai teljesítménysűrűségének reverzibilis, nemdisszipatív voltát a fajlagos belső energia következő kvadrátikus, konvex eltolásával⁴ kapjuk:

$$e(T, D) = e_{\text{th}}(T) + \frac{E}{2\varrho} D^2. \quad (16)$$

Eközben a fajlagos entrópiát nem toljuk el, D -függetlennek tartjuk:

$$s = s_{\text{th}}(T). \quad (17)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} T\pi_S = \varrho T \dot{s} &= \varrho T \frac{ds_{\text{th}}}{dT} \dot{T} = \varrho \frac{de_{\text{th}}}{dT} \dot{T} = \varrho \dot{e}_{\text{th}} = \varrho \left(e - \frac{E}{2\varrho} D^2 \right)' = \varrho \dot{e} - E D \dot{D} = \sigma L - E D \dot{D} = \\ &= \sigma \dot{D} - E D \dot{D} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

ennél fogva a modell reverzibilis, nemdisszipatív.

A hőmérséklet pedig állandónak bizonyul: (18) szerint bármely megengedett folyamat mentén

$$\dot{e}_{\text{th}} = 0, \quad (19)$$

így

$$0 = \dot{e}_{\text{th}} = \frac{de_{\text{th}}}{dT} \dot{T}, \quad (20)$$

mely $\frac{de_{\text{th}}}{dT} > 0$ (lásd a 2. lábjegyzetet) alapján arra vezet, hogy

$$\dot{T} = 0. \quad (21)$$

⁴Ezáltal $s(e, D)$ konkávnak bizonyul.

4 A KELVIN–VOIGT-MODELL

Az iménti, rugalmas modellhez képest e és s maradjon változatlan, a feszültségben viszont legyen jelen egy extra, viszkozitás-jellegű tag:

$$\sigma = ED + \hat{E}L = ED + \hat{E}\dot{D}. \quad (22)$$

Ez a Kelvin–Voigt-modell. A

$$\hat{\sigma} = \sigma - ED \quad (23)$$

irreverzibilis feszültségjárulékkel, mely most

$$\hat{\sigma} = \hat{E}\dot{D}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} T\pi_S = \varrho T\dot{s} &= \varrho T \frac{ds_{th}}{dT} \dot{T} = \varrho \frac{de_{th}}{dT} \dot{T} = \varrho \dot{e}_{th} = \varrho \left(e - \frac{E}{2\varrho} D^2 \right)' = \varrho \dot{e} - E D \dot{D} = \sigma L - E D \dot{D} = \\ &= \sigma \dot{D} - E D \dot{D} = \hat{\sigma} \dot{D} + E D \dot{D} - E D \dot{D} = \hat{E} \dot{D}^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (25)$$

a modell irreverzibilis. A hőmérséklet pedig monoton nő (nemcsökken):

$$\varrho \frac{de_{th}}{dT} \dot{T} = \varrho \dot{e}_{th} = \hat{E} \dot{D}^2 \geq 0. \quad (26)$$

Vegyük észre a

$$T\pi_S = \hat{\sigma} \dot{D} = \hat{\sigma} L \quad (27)$$

alakot is: alább hasonló képletekkel találkozunk majd.

5 A POYNTING–THOMSON–ZENER-MODELL

A

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = ED + \hat{E}L \quad \text{avagy} \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = ED + \hat{E}\dot{D} \quad (28)$$

Poynting–Thomson–Zener (PTZ)-modellhez egy irreverzibilitást hozó új szabadsági fokra van szükség. A [1] cikk a Kluitenberg–Verhás-reológia származtatásához a fajlagos entrópiát tolja el egy, a ξ új szabadsági fok négyzetével arányos taggal: kis időre átváltva [1]-közelibb jelölésekre,

$$s(e, D, \xi) = s_{\text{eddigi}}(e, D) - \frac{1}{2}\xi^2, \quad (29)$$

e -t pedig nem változtatja; ez azonban közelítőleg olyan, mintha a fajlagos entrópiát hagynánk érintetlenül, és a fajlagos belső energiát tolnánk el:

$$e(s, D) = e\left(s_{\text{eddigi}} + \frac{1}{2}\xi^2, D\right) \approx e(s_{\text{eddigi}}, D) + \left.\frac{\partial e}{\partial s}\right|_D \cdot \frac{1}{2}\xi^2 = e_{\text{eddigi}} + T \cdot \frac{1}{2}\xi^2. \quad (30)$$

Mi most toljuk el a fajlagos belső energiát.

A PTZ-modell esetén „kézzel”, közvetlenül is megkereshető, hogy milyen extra taggal toljuk el a fajlagos belső energiát. Indulásként írjuk át (28)-at (a második változatát) (24) segítségével:

$$(\hat{\sigma} + ED) + \tau(\hat{\sigma} + ED)' = ED + \hat{E}\dot{D} \quad (31)$$

$$\hat{\sigma} + \tau \dot{\hat{\sigma}} = (\hat{E} - \tau E) \dot{D} = \hat{I} \dot{D}, \quad (32)$$

ahol

$$\hat{I} := \hat{E} - \tau E \quad (33)$$

($\hat{I}$ elnevezése: csillapítási index). Ezután tekintsük a belsőenergia-mérleget:

$$\varrho \dot{e} = \sigma L = \sigma \dot{D} = E D \dot{D} + \hat{\sigma} \dot{D} = \left(\frac{E}{2} D^2 \right)' + \hat{\sigma} \left[\frac{1}{\hat{I}} (\hat{\sigma} + \tau \dot{\hat{\sigma}}) \right] = \left(\frac{E}{2} D^2 + \frac{\tau}{2\hat{I}} \hat{\sigma}^2 \right)' + \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{I}}. \quad (34)$$

Ez azt mutatja, hogy ha

$$e = e_{\text{th}} + \frac{E}{2\varrho} D^2 + \frac{\tau}{2\varrho\hat{I}} \hat{\sigma}^2 \quad (35)$$

a fajlagos belső energia, akkor az előbb látottakhoz hasonlóan

$$\begin{aligned} T\pi_S = \dots = \varrho \dot{e}_{\text{th}} = \varrho \left[\dot{e} - \left(\frac{E}{2\varrho} D^2 + \frac{\tau}{2\varrho\hat{I}} \hat{\sigma}^2 \right)' \right] = \\ = \left(\frac{E}{2} D^2 + \frac{\tau}{2\hat{I}} \hat{\sigma}^2 \right)' + \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{I}} - \varrho \left(\frac{E}{2} D^2 + \frac{\tau}{2\hat{I}} \hat{\sigma}^2 \right)' = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{I}} \geq 0, \end{aligned} \quad (36)$$

pozitív definit entrópiatermelődési rátasűrűségű, a második főtéttel konzisztens modellt nyertünk.

Emellett, szintén az előzőekhez hasonlóan, a hőmérséklet időbeli alakulására

$$\varrho \frac{de_{\text{th}}}{dT} \dot{T} = \varrho \dot{e}_{\text{th}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{I}} \geq 0 \quad (37)$$

adódik.

Itt tehát közvetlenül meg is kaptuk az extra belső változót: közvetlenül a $\hat{\sigma}$ Hooke-on túli feszültségjárulék játssza ezt a szerepet.

6 A TEHETETLENSÉGI HOOKE-MODELL

Szintén még rávezető mozzanatként, próbáljuk meg most a

$$\sigma = ED + \hat{E} \ddot{D} \quad (38)$$

alakú hiányos Kluitenberg–Verhás-modell esetén is kézzel keresni meg a fajlagos belső energia alkalmas eltolását: ezúttal

$$\hat{\sigma} = \hat{E} \ddot{D} \quad (39)$$

a Hooke-on túli feszültségjárulék, és

$$\varrho \dot{e} = \sigma \dot{D} = E D \dot{D} + \hat{E} \dot{D} = \left(\frac{E}{2} D^2 + \frac{\hat{E}}{2} \dot{D}^2 \right)' \quad (40)$$

alapján

$$e = e_{\text{th}} + \frac{E}{2\varrho} D^2 + \frac{\hat{E}}{2\varrho} \dot{D}^2 \quad (41)$$

esetén

$$T\pi_S = \dots = \varrho \dot{e}_{\text{th}} = \varrho \left[\dot{e} - \left(\frac{E}{2\varrho} D^2 + \frac{\hat{E}}{2\varrho} \dot{D}^2 \right)' \right] = 0, \quad (42)$$

a modell reverzibilis, a hőmérséklet pedig állandó.

A továbbiak érdekében érdemes az itt kapott fajlagos belső energiát az

$$e = e_{\text{th}} + \frac{E}{2\varrho} D^2 + \frac{1}{2\varrho\hat{E}} \left(\hat{E} L \right)^2 \quad (43)$$

alakba is átírni – majd később látjuk meg, miért.

Észrevehetjük azt is, hogy ez alkalommal nem a $\hat{\sigma}$, hanem L mennyiség játssza az extra szabadsági fok szerepét. Nem látszik „közös nevező” a két eset között. Ez elgondolkodtató.⁵

⁵A következő szakaszban mindazonáltal el fogunk jutni a szintézishez.

7 A RELAXÁCIÓSTAG-MENTES KLUITENBERG–VERHÁS-MODELL

Az előbbi modellt kiegészítve a Kelvin–Voigt-modellben látott viszkózus taggal, azaz a

$$\sigma = ED + \hat{E}\dot{D} + \hat{\hat{E}}\ddot{D} \quad (44)$$

esetben ugyanez az

$$e = e_{\text{th}} + \frac{E}{2\varrho}D^2 + \frac{\hat{E}}{2\varrho}\dot{D}^2, \quad \text{avagy} \quad e_{\text{th}} + \frac{E}{2\varrho}D^2 + \frac{1}{2\varrho\hat{\hat{E}}}(\hat{\hat{E}}L)^2 \quad (45)$$

fajlagos belső energia, az eddigiekkel analóg módon, a

$$T\pi_S = \dots = \varrho\dot{e}_{\text{th}} = \dots = \hat{E}\dot{D}^2 \geq 0 \quad (46)$$

eredményre vezet, azaz az irreverzibilitás is, a hőmérséklet alakulása is a Kelvin–Voigt-modellnél látottal egyezik.

8 A TELJES KLUITENBERG–VERHÁS-MODELL

Eddigi sikereink után meglepő lehet, de a teljes Kluitenberg–Verhás-modell, tehát a csupa nemnulla együtthatókat tartalmazó

$$\sigma + \tau\dot{\sigma} = ED + \hat{E}\dot{D} + \hat{\hat{E}}\ddot{D} \quad (47)$$

esetén nem adódik lehetőség az eddigiekhez hasonló, közvetlen konstrukcióra. A végeredmény ismeretében ez nem is meglepő: a teljes Kluitenberg–Verhás-modell esetén egy olyan extra gazdagság lép fel, mely a speciálisabb esetekben nincs jelen. Nincs kizárva, hogy a végeredményt látva visszanézhetne az ember, és – utólagos bölcsességgént – kiügyeskedhetne egy kézi származtatást. Ekkor sem nyilvánvaló azonban, hogy az ilyen közvetlen „vegyük észre” hozzáállás révén Az Egyetlen Lehetséges Megoldást találjuk-e meg, vagy csak Egy Lehetséges Megoldást. Ezért a következőkben implementáljuk inkább a [1]-ben látott általános módszert, amely nem virtuozitást igényel, hanem egy receptszerű módszertan alkalmazását.

Most fordítva haladjunk: (47) nem bemenet, hanem kimenet lenne majd; egyelőre annyit várunk, hogy

$$\hat{\sigma} \equiv \sigma - ED \quad (48)$$

nemnulla lesz.

A Hooke-szinten látott fajlagos belső energiát most is egyetlen taggal toljuk el, de most általánosan egy – egyelőre ismeretlen interpretációjú – η belső szabadsági fokkal. A konvexitás (így s konkávitása) érdekében, továbbá az egyszerűséget szem előtt tartva, az

$$e(T, D, \eta) = e_{\text{th}}(T) + \frac{E}{2\varrho}D^2 + \frac{\kappa}{2\varrho}\eta^2 \quad (49)$$

alakot válasszuk, ahol κ egy nemnegatív együttható, mely általánosan nyugodtan lehetne az állapotjelzők függvénye, a gyakorlat érdekeit szem előtt tartva azonban most konstansnak szeretnénk tekinteni.

A fajlagos entrópiát ezúttal sem toljuk el. L pedig továbbra is legyen egyenlő $\dot{D}$ -tal (hőtágulást most még nem engedünk meg). Ezért az eddigiekhez hasonló lépésekkel indulhatunk:

$$\begin{aligned} T\pi_S = \dots = \varrho\dot{e}_{\text{th}} &= \varrho \left[\dot{e} - \left(\frac{E}{2\varrho}D^2 + \frac{\kappa}{2\varrho}\eta^2 \right) \right] = \sigma L - ED\dot{D} - \kappa\eta\dot{\eta} = \\ &= \hat{\sigma}L + EDL - ED\dot{D} - \kappa\eta\dot{\eta} = \hat{\sigma}L - \kappa\eta\dot{\eta}. \end{aligned} \quad (50)$$

A kialakult kifejezés nem ab ovo pozitív definit, ennek biztosítására onsageri egyenleteket válasszunk modellünkbe, a következő formában:

$$\hat{\sigma} = \mu_{11}L + \mu_{12}\kappa\dot{\eta}, \quad (51)$$

$$-\eta = \mu_{21}L + \mu_{22}\kappa\dot{\eta}, \quad (52)$$

és a μ_{11} , μ_{12} , μ_{21} , μ_{22} onsageri együtthatókban is szorítkozzunk a konstans együtthatók esetére. Hogy (50) legjobboldala pozitív definit legyen, ennek szükséges és elégséges feltétele az onsageri együtthatók 2×2 -es μ mátrixa szimmetrikus részének (μ^S -nek) pozitív definit volta, mely a

$$\mu_{11} \geq 0, \quad \mu_{22} \geq 0, \quad \mu_{11}\mu_{22} - \left(\frac{\mu_{12} + \mu_{21}}{2}\right)^2 \geq 0 \quad (53)$$

feltételrendszerrel ekvivalens.

Küszöböljük ki az η belső változót: (52)-t írjuk át a

$$-(1 + \mu_{22}\kappa\partial_t)\eta = \mu_{21}L \quad (54)$$

alakra, az itt felismert $1 + \mu_{22}\kappa\partial_t$ deriváltoperátorral hassunk (51)-re:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} + \underbrace{\mu_{22}\kappa}_{=:\tau} \hat{\sigma} &= \underbrace{\mu_{11}}_{=:\hat{I}} L + \mu_{11}\mu_{22}\kappa\dot{L} + (1 + \mu_{22}\kappa\partial_t)\mu_{12}\kappa\partial_t\eta = \\ &= \hat{I}L + \kappa\mu_{11}\mu_{22}\dot{L} + \mu_{12}\kappa\partial_t(1 + \mu_{22}\kappa\partial_t)\eta = \hat{I}L + \kappa\mu_{11}\mu_{22}\dot{L} + \mu_{12}\kappa\partial_t[-\mu_{21}L] = \\ &= \hat{I}L + \underbrace{\kappa\det\mu}_{=:\hat{E}}\dot{L}, \end{aligned} \quad (55)$$

ebbe (48)-at behelyettesítve pedig (itt két tag összevonásához és egy tag átírásához $L = \dot{D}$ -t is felhasználva) a (47) alakú eredményre jutunk:

$$\sigma - ED + \tau(\hat{\sigma} - E\dot{D}) = \hat{I}\dot{D} + \hat{E}\ddot{D}, \quad (56)$$

$$\sigma + \tau\hat{\sigma} = ED + \underbrace{(\hat{I} + \tau E)}_{=:\hat{E}}\dot{D} + \hat{E}\ddot{D}. \quad (57)$$

Az itt fellépő együtthatókra (53) alapján

$$\hat{I} \geq 0, \quad \tau \geq 0, \quad \hat{E} \geq \tau E, \quad (58)$$

továbbá

$$0 \leq \mu_{11}\mu_{22} - \left(\frac{\mu_{12} + \mu_{21}}{2}\right)^2 = \mu_{11}\mu_{22} - \frac{\mu_{12}^2}{4} - \frac{\mu_{12}\mu_{21}}{2} - \frac{\mu_{21}^2}{4} = \det\mu - \left(\frac{\mu_{12} - \mu_{21}}{2}\right)^2 \leq \det\mu \quad (59)$$

következményeként

$$\hat{E} \geq 0 \quad (60)$$

adódik.

Az (51)–(52) egyenletrendszerre tekintve láthatjuk, hogy $\mu_{12} = 0$ esetén (51) $\hat{\sigma}$ és L közötti, Kelvin–Voigt-kapcsolatot ad, η pedig lecsatolódik. A Kelvin–Voigt-esetben azt is láttuk, hogy nincs szükség extra energiagra.⁶ Minket most a feszültség Hooke-on túli járulékaiknak termodinamikailag konzisztens háttere érdekel, ezért nézzük most meg, $\mu_{12} \neq 0$ esetén (és persze $\kappa \neq 0$ esetén) mit mondhatunk az extra energiagról. (52) révén indulhatunk, majd behelyettesíthetjük (51)-et:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2\varrho}\eta^2 &= \frac{\kappa}{2\varrho} \left[-(\mu_{21}L + \mu_{22}\kappa\hat{\eta}) \right]^2 = \frac{\kappa}{2\varrho} \left[\mu_{21}L + \mu_{22}\kappa \frac{\hat{\sigma} - \mu_{11}L}{\mu_{12}\kappa} \right]^2 = \\ &= \frac{\kappa}{2\varrho\mu_{12}^2\kappa^2} [\mu_{21}\mu_{12}\kappa L + \mu_{22}\kappa\hat{\sigma} - \mu_{11}\mu_{22}\kappa L]^2 = \frac{1}{2\varrho\mu_{12}^2\kappa} [\tau\hat{\sigma} - \hat{E}L]^2 = \\ &= \frac{\chi}{2\varrho}\Lambda^2, \quad \text{ahol} \quad \chi = \frac{1}{\kappa\mu_{12}^2}, \quad \Lambda = \tau\hat{\sigma} - \hat{E}L. \end{aligned} \quad (61)$$

⁶Ha van is extra energiata, azt a Kelvin–Voigt-mechanika nem változtatja, „szunnyadó” energiatípus.

A belső változó tehát átskálázással (melyhez teljes jogunk van, hiszen κ is szabad paraméter volt, és η -ra se volt semmi kikötés) a kinematikailag jól interpretálható L , a mechanikailag jól interpretálható $\hat{\sigma}$ és a Kluitenberg–Verhás-modell (pl. kísérletileg fittelhető) τ , $\hat{E}$ együttthatói kombinációjaként interpretálható. Az átskálázást írjuk is fel konkrétan: (51)-ből kifejezve η -ot, és (52)-be helyettesítve,

$$\eta = \frac{-1}{\kappa\mu_{12}}\Lambda. \quad (62)$$

Vizsgáljuk meg, milyen termodinamikai megszorítás adódik χ -re: az

$$\hat{I} := \hat{E} - \tau\hat{I} = \kappa \det \mu - \kappa\mu_{22}\mu_{11} = -\kappa\mu_{12}\mu_{21} \quad (63)$$

tehetetlenségi index bevezetésével

$$0 \leq \kappa \det \mu^S = \kappa\mu_{11}\mu_{22} - \kappa \left(\frac{\mu_{12} + \mu_{21}}{2} \right)^2 = \tau\hat{I} - \kappa \frac{\mu_{12}\mu_{21}}{2} - \frac{\kappa}{4} (\mu_{12}^2 + \mu_{21}^2), \quad (64)$$

$$\frac{\kappa}{4} (\mu_{12}^2 + \mu_{21}^2) \leq \tau\hat{I} + \frac{\hat{I}}{2}, \quad \frac{\kappa}{4} \left(\mu_{12}^2 + \frac{\hat{I}^2}{\kappa^2\mu_{12}^2} \right) \leq \tau\hat{I} + \frac{\hat{I}}{2}, \quad \kappa^2\mu_{12}^4 + \hat{I}^2 \leq 2(2\tau\hat{I} + \hat{I})\kappa\mu_{12}^2, \quad (65)$$

$$(\kappa\mu_{12}^2)^2 - 2(2\tau\hat{I} + \hat{I})(\kappa\mu_{12}^2) + \hat{I} \leq 0. \quad (66)$$

Ez $\kappa\mu_{12}^2$ -re másodfokú egyenlőtlenség, a megoldása:

$$(2\tau\hat{I} + \hat{I}) - \sqrt{(2\tau\hat{I} + \hat{I})^2 - \hat{I}^2} \leq \kappa\mu_{12}^2 \leq (2\tau\hat{I} + \hat{I}) + \sqrt{(2\tau\hat{I} + \hat{I})^2 - \hat{I}^2}. \quad (67)$$

Ez, $\hat{I}$ helyére $\hat{E} - \tau\hat{I}$ -t helyettesítve, egyszerű algebrai észrevételek révén a következő beszédesebb alakra írható át:

$$\left(\sqrt{\tau\hat{I}} - \sqrt{\hat{E}} \right)^2 \leq \kappa\mu_{12}^2 \leq \left(\sqrt{\tau\hat{I}} + \sqrt{\hat{E}} \right)^2. \quad (68)$$

Ha κ vagy μ_{12} nulla, e feltételek érdektelenségbe fulladnak. Amikor egyikük sem nulla, akkor viszont

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\tau\hat{I}} + \sqrt{\hat{E}} \right)^2} \leq \chi \leq \frac{1}{\left(\sqrt{\tau\hat{I}} - \sqrt{\hat{E}} \right)^2} \quad (69)$$

adódik a termodinamikai második főtételek szabta egyenlőtlenségekből. [τ , $\hat{I}$, $\hat{E}$ nemnegatívok, így ez az alsó korlát mindig jóldefiniált; $\hat{E} = \tau\hat{I}$ esetén ($\hat{I} = 0$ esetén) a felső korlát ∞ lesz, és előtte $\leq$ helyett $<$ írandó.]

Ha τ , $\hat{I}$ vagy $\hat{E}$ nulla, akkor az alsó és a felső korlát egybeesik, χ egyértelműen meghatározódik. Könnyű ellenőrizni, hogy épp a 6–7. ill. 5. szakaszban közvetlenül beazonosított extra energiatagot kapjuk vissza. A teljes Kluitenberg–Verhás-modell esetén azonban egy intervallumban szabadon mozog χ . Kísérletből csak kalorikus információ, legkönnyebben a hőmérséklet mérése révén illeszthető az értéke: a hőmérséklet időderiváltját a korábbiakhoz hasonlóan, (50) felhasználásával, a (62)-ben kifejezett η és a (61) során kifejezett $\dot{\eta}$ behelyettesítésével

$$\varrho \frac{de_{th}}{dT} \dot{T} = \varrho \dot{e}_{th} = \hat{\sigma}L - \kappa\eta\dot{\eta} = \hat{\sigma}L + \chi(\hat{\sigma} - \hat{I}L)\Lambda \quad (70)$$

alapján jósolja a modell, melyben a kinematikailag és mechanikailag hozzáférhető mennyiségeken túl χ is szerepel, így kísérletből kimérhető.

9 HŐTÁGULÁS: A KIINDULÓ MODELL

Hőtágulás esetén L már nem egyezik $\dot{D}$ -tal: a kinematikai változások már nemcsak rugalmaskitérés-jellegűek, hanem hőtágulás-jellegűek is. Közelebbi (és tenzori) megfogalmazást a [6, 4, 5, 7, 8, 3, 2] írások közölnek, itt most csak a kis alakváltozásos (és először csak „egydimenziós” – egy kinematikai szabadsági fokú)

$$L = \dot{D} + \alpha \dot{T} \quad (71)$$

képletre lesz szükségünk, melyben az α lineáris hőtágulási együttható a gyakorlatorientáltság és áttekinthetőség kedvéért állandónak lesz tekintve. Az imént idézett írások a rugalmas + hőtágulási jelenségkör konzisztens termomechanikai hátterét is közlik. Ez a – hőtágulással kiterjesztett Hooke- – modell lesz a kiindulópont a Kluitenberg–Verhás-modell hőtágulást is megengedő kiterjesztéséhez: a feszültség továbbra is⁷

$$\sigma = ED, \quad (72)$$

a fajlagos belső energia és a fajlagos entrópia azonban általánosodik:

$$e(T, D) = e_{\text{th}}(T) + \frac{\alpha E}{\varrho} TD + \frac{E}{2\varrho} D^2, \quad (73)$$

$$s(T, D) = s_{\text{th}}(T) + \frac{\alpha E}{\varrho} D. \quad (74)$$

Ez a kiinduló modell reverzibilis, nemdisszipatív:

$$\begin{aligned} T\pi_S &= \varrho T \dot{s} = \varrho T \frac{ds_{\text{th}}}{dT} \dot{T} + \varrho T \frac{\alpha E}{\varrho} \dot{D} = \varrho \frac{de_{\text{th}}}{dT} \dot{T} + \varrho T \frac{\alpha E}{\varrho} \dot{D} = \varrho \dot{e}_{\text{th}} + T \cdot \alpha E \dot{D} = \\ &= \varrho \left(e - \frac{\alpha E}{\varrho} TD - \frac{E}{2\varrho} D^2 \right) + \alpha ET \dot{D} = \sigma L - \alpha E (\dot{T} D + T \dot{D}) - ED \dot{D} + \alpha ET \dot{D} = \\ &= ED (\dot{D} + \alpha \dot{T}) - \alpha E \dot{T} D - \alpha ET \dot{D} - ED \dot{D} + \alpha ET \dot{D} = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

A hőmérséklet már változik:

$$0 = T\pi_S = \dots = \varrho \frac{de_{\text{th}}}{dT} \dot{T} + \varrho T \frac{\alpha E}{\varrho} \dot{D} \implies \frac{de_{\text{th}}}{dT} \dot{T} = -T \frac{\alpha E}{\varrho} \dot{D}. \quad (76)$$

10 A KLUITENBERG–VERHÁS-MODELL HŐTÁGULÁSOS KITERJESZTÉSE

Ismét feltételezünk egy

$$\hat{\sigma} = \sigma - ED \quad (77)$$

extra feszültségjárulékot, és a fajlagos belső energiát toljuk el egy belső változó négyzetével arányos taggal:

$$e(T, D, \eta) = e_{\text{th}}(T) + \frac{\alpha E}{\varrho} TD + \frac{E}{2\varrho} D^2 + \frac{\kappa}{2\varrho} \eta^2, \quad (78)$$

a fajlagos entrópiát pedig nem módosítjuk. (75) a $\hat{\sigma}L$ teljesítménysűrűség-járulékkal és az extra fajlagosbelsőenergia-tag időderiváltja révén bővül:

$$T\pi_S = \dots = \hat{\sigma}L - \kappa\eta\dot{\eta}. \quad (79)$$

Innentől az (51)–(55) és (58)–(69) képletek mind érvényben maradnak.⁸ (56)–(57)-ben használtunk $L = \dot{D}$ kapcsolatot, ezek általánosítása hőtágulás jelenléte esetén:

$$\sigma - ED + \tau (\hat{\sigma} - E\dot{D}) = \hat{I}L + \hat{E}\dot{L}, \quad (80)$$

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = ED + \tau E\dot{D} + \hat{I} (\dot{D} + \alpha \dot{T}) + \hat{E} (\dot{D} + \alpha \dot{T}), \quad (81)$$

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = ED + \hat{E}\dot{D} + \hat{E}\dot{D} + \hat{I}\alpha\dot{T} + \hat{E}\alpha\dot{T}. \quad (82)$$

⁷Mint az idézett művekben részletesen is közölve van, ha D -ről áttérünk egy olyan referencia-időponttól tekintett alakváltozásra, mely referencia-időpontban D nulla, akkor a feszültség hagyományos, Duhamel–Neumann-képletét kapjuk.

⁸Nem véletlenül: elővigyázatosságból úgy lettek felírva, hogy a hőtágulás megjelenése ne befolyásolja őket.

Ezenfelül a hőmérséklet időderiváltjának kifejezéséhez (70) általánosítandó: (76) olyan mértékig érvényben marad, hogy

$$T\pi_S = \dots = \varrho \frac{de_{th}}{dT} \dot{T} + \varrho T \frac{\alpha E}{\varrho} \dot{D}, \quad (83)$$

másrészt (79) most is átírható (70) mintájára:

$$T\pi_S = \hat{\sigma} L - \kappa \eta \dot{\eta} = \hat{\sigma} L + \chi (\hat{\sigma} - \hat{I} L) \Lambda, \quad (84)$$

így

$$\varrho \frac{de_{th}}{dT} \dot{T} = -\varrho T \frac{\alpha E}{\varrho} \dot{D} + \hat{\sigma} L + \chi (\hat{\sigma} - \hat{I} L) \Lambda. \quad (85)$$

11 A HÁROMDIMENZIÓS, TENZORI VÁLTOZAT

A háromdimenziós tárgyalásban izotrop közeget tételezünk fel. Mivel σ és $\mathbf{D}$ szimmetrikus, a mechanikai szerepet játszó η belső változót is szimmetrikus tenzornak választjuk. A szimmetrikus tenzorok deviatorikus (^{dev}) és gömbi (^{sph}) részre szétbontása, és a kapcsolódó alaptulajdonságok (pl. hogy deviatorikus és gömbi tenzor szorzatának nyoma 0) ismertnek lesznek feltételezve (ld. pl. [2], a jelen kontextusra való alkalmazásáról pedig [1] is hasznos forrás). A szétcsatlódás miatt a deviatorikus rész is effektíve egy 1 kinematikai szabadsági fokú („1D”) modellként kezelhető (mégpedig hőtágulásmentesként, mert a hőtágulás is izotrop), és a gömbi is (viszont a gömbi rész hőtágulással).

A hőtágulással kiterjesztett Kluitenberg–Verhás-modell a következő. Kinematikailag

$$\mathbf{L}^S = \dot{\mathbf{D}} + \alpha \dot{T} \mathbf{1} \quad (86)$$

köti össze az érintett kinematikai mennyiségeket [6, 4, 5, 7, 8, 3, 2]. A feszültségnek a Hooke–Duhamel–Neumann-rugalmastól való eltérése $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma}^{dev} = \sigma^{dev} - E^{dev} \mathbf{D}^{dev}, \quad \hat{\sigma}^{sph} = \sigma^{sph} - E^{sph} \mathbf{D}^{sph}. \quad (87)$$

A fajlagos belső energia

$$\begin{aligned} e(T, \mathbf{D}, \eta) = e_{th}(T) + \frac{\alpha E^{sph}}{\varrho} T \operatorname{tr} \mathbf{D} + \frac{E^{dev}}{2\varrho} \operatorname{tr} (\mathbf{D}^{dev} \mathbf{D}^{dev}) + \frac{E^{sph}}{2\varrho} \operatorname{tr} (\mathbf{D}^{sph} \mathbf{D}^{sph}) + \\ + \frac{\kappa^{dev}}{2\varrho} \operatorname{tr} (\eta^{dev} \eta^{dev}) + \frac{\kappa^{sph}}{2\varrho} \operatorname{tr} (\eta^{sph} \eta^{sph}), \end{aligned} \quad (88)$$

a fajlagos entrópia

$$s(T, \mathbf{D}, \eta) = s_{th}(T) + \frac{\alpha E^{sph}}{\varrho} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad (89)$$

ahol továbbra is érvényes a (12) összefüggés. (75) mintájára

$$T\pi_S = \dots = \operatorname{tr} (\hat{\sigma}^{dev} \mathbf{L}^{Sdev}) - \kappa^{dev} \operatorname{tr} (\eta^{dev} \dot{\eta}^{dev}) + \operatorname{tr} (\hat{\sigma}^{sph} \mathbf{L}^{Ssph}) - \kappa^{sph} \operatorname{tr} (\eta^{sph} \dot{\eta}^{sph}), \quad (90)$$

a deviatorikus és gömbi részek onsagerileg szétcsatlódnak, a következő egyenletrendszerrel biztosítjuk $T\pi_S \geq 0$ -t, konstans μ_{ij}^{dev} , μ_{ij}^{sph} együtthatókkal:

$$\hat{\sigma}^{dev} = \mu_{11}^{dev} \mathbf{L}^{Sdev} + \mu_{12}^{dev} \kappa^{dev} \dot{\eta}^{dev}, \quad \hat{\sigma}^{sph} = \mu_{11}^{sph} \mathbf{L}^{Ssph} + \mu_{12}^{sph} \kappa^{sph} \dot{\eta}^{sph}, \quad (91)$$

$$-\eta^{dev} = \mu_{21}^{dev} \mathbf{L}^{Sdev} + \mu_{22}^{dev} \kappa^{dev} \dot{\eta}^{dev}, \quad -\eta^{sph} = \mu_{21}^{sph} \mathbf{L}^{Ssph} + \mu_{22}^{sph} \kappa^{sph} \dot{\eta}^{sph}, \quad (92)$$

ahol az együtthatók a következő egyenlőtlenségeket kell kielégítsék:

$$\mu_{11}^{dev} \geq 0, \quad \mu_{22}^{dev} \geq 0, \quad \mu_{11}^{dev} \mu_{22}^{dev} - \left(\frac{\mu_{12}^{dev} + \mu_{21}^{dev}}{2} \right)^2 \geq 0, \quad (93)$$

$$\mu_{11}^{sph} \geq 0, \quad \mu_{22}^{sph} \geq 0, \quad \mu_{11}^{sph} \mu_{22}^{sph} - \left(\frac{\mu_{12}^{sph} + \mu_{21}^{sph}}{2} \right)^2 \geq 0, \quad (94)$$

Eme onsageri együtthatókból az

$$\tau^{\text{dev}} := \kappa^{\text{dev}} \mu_{22}^{\text{dev}} \geq 0, \quad \hat{I}^{\text{dev}} := \mu_{11}^{\text{dev}} \geq 0, \quad \hat{E}^{\text{dev}} := \hat{I}^{\text{dev}} + \tau^{\text{dev}} E^{\text{dev}} \geq \tau^{\text{dev}} E^{\text{dev}}, \quad (95)$$

$$\tau^{\text{sph}} := \kappa^{\text{sph}} \mu_{22}^{\text{sph}} \geq 0, \quad \hat{I}^{\text{sph}} := \mu_{11}^{\text{sph}} \geq 0, \quad \hat{E}^{\text{sph}} := \hat{I}^{\text{sph}} + \tau^{\text{sph}} E^{\text{sph}} \geq \tau^{\text{sph}} E^{\text{sph}}, \quad (96)$$

$$\hat{\hat{E}}^{\text{dev}} := \kappa^{\text{dev}} \det \mu^{\text{dev}} \geq 0, \quad \hat{\hat{I}}^{\text{dev}} := \hat{\hat{E}}^{\text{dev}} - \tau^{\text{dev}} \hat{I}^{\text{dev}}, \quad (97)$$

$$\hat{\hat{E}}^{\text{sph}} := \kappa^{\text{sph}} \det \mu^{\text{sph}} \geq 0, \quad \hat{\hat{I}}^{\text{sph}} := \hat{\hat{E}}^{\text{sph}} - \tau^{\text{sph}} \hat{I}^{\text{sph}}, \quad (98)$$

származtatott együtthatókat definiáljuk. Ezek az együtthatók játszanak szerepet, amikor a belső változót kiküszöböljük, kapva, hogy

$$\sigma^{\text{dev}} + \tau^{\text{dev}} \dot{\sigma}^{\text{dev}} = E^{\text{dev}} \mathbf{D}^{\text{dev}} + \hat{E}^{\text{dev}} \dot{\mathbf{D}}^{\text{dev}} + \hat{\hat{E}}^{\text{dev}} \ddot{\mathbf{D}}^{\text{dev}}, \quad (99)$$

$$\sigma^{\text{sph}} + \tau^{\text{sph}} \dot{\sigma}^{\text{sph}} = E^{\text{sph}} \mathbf{D}^{\text{sph}} + \hat{E}^{\text{sph}} \dot{\mathbf{D}}^{\text{sph}} + \hat{\hat{E}}^{\text{sph}} \ddot{\mathbf{D}}^{\text{sph}} + \hat{I}^{\text{sph}} \alpha \dot{\mathbf{T}} \mathbf{1} + \hat{\hat{E}}^{\text{sph}} \alpha \ddot{\mathbf{T}} \mathbf{1}. \quad (100)$$

A

$$\Lambda^{\text{dev}} = \tau^{\text{dev}} \dot{\sigma}^{\text{dev}} - \hat{\hat{E}}^{\text{dev}} \mathbf{L}^{\text{Sdev}}, \quad \Lambda^{\text{sph}} = \tau^{\text{sph}} \dot{\sigma}^{\text{sph}} - \hat{\hat{E}}^{\text{sph}} \mathbf{L}^{\text{Ssph}} \quad (101)$$

kombinációkkal az extra belsőenergia-tagok nemnullák, ha $\tau^{\text{dev}}, \hat{I}^{\text{dev}}, \hat{\hat{E}}^{\text{dev}}$ közül legalább egy nemnulla, illetve ha $\tau^{\text{sph}}, \hat{I}^{\text{sph}}, \hat{\hat{E}}^{\text{sph}}$ közül legalább egy nemnulla, és ekkor az extra belsőenergia-tagok

$$\frac{\chi^{\text{dev}}}{2\varrho} \text{tr} \left(\Lambda^{\text{dev}} \Lambda^{\text{dev}} \right) \quad \text{ill.} \quad \frac{\chi^{\text{sph}}}{2\varrho} \text{tr} \left(\Lambda^{\text{sph}} \Lambda^{\text{sph}} \right), \quad (102)$$

ahol

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\tau^{\text{dev}} \hat{I}^{\text{dev}}} + \sqrt{\hat{\hat{E}}^{\text{dev}}} \right)^2} \leq \chi^{\text{dev}} \leq \frac{1}{\left(\sqrt{\tau^{\text{dev}} \hat{I}^{\text{dev}}} - \sqrt{\hat{\hat{E}}^{\text{dev}}} \right)^2}, \quad (103)$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\tau^{\text{sph}} \hat{I}^{\text{sph}}} + \sqrt{\hat{\hat{E}}^{\text{sph}}} \right)^2} \leq \chi^{\text{sph}} \leq \frac{1}{\left(\sqrt{\tau^{\text{sph}} \hat{I}^{\text{sph}}} - \sqrt{\hat{\hat{E}}^{\text{sph}}} \right)^2}. \quad (104)$$

A hőmérséklet alakulását megszabó egyenlet:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{de_{\text{th}}}{dT} \dot{T} = & -\varrho T \frac{\alpha E^{\text{sph}}}{\varrho} \text{tr} \dot{\mathbf{D}} + \text{tr} \left(\dot{\sigma}^{\text{dev}} \mathbf{L}^{\text{Sdev}} \right) + \chi^{\text{dev}} \text{tr} \left[\left(\dot{\sigma}^{\text{dev}} - \hat{I}^{\text{dev}} \mathbf{L}^{\text{Sdev}} \right) \Lambda^{\text{dev}} \right] + \\ & + \text{tr} \left(\dot{\sigma}^{\text{sph}} \mathbf{L}^{\text{Ssph}} \right) + \chi^{\text{sph}} \text{tr} \left[\left(\dot{\sigma}^{\text{sph}} - \hat{I}^{\text{sph}} \mathbf{L}^{\text{Ssph}} \right) \Lambda^{\text{sph}} \right]. \end{aligned} \quad (105)$$

KÖSZÖNETMONDÁS

Asszonyi Csaba, Matolcsi Tamás, Verhás József, Ván Péter és Szücs Mátyás rengeteg hasznos diszkusszióban segítette elő az itt leírtak megszületését.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Asszonyi, C., Fülöp, T. és Ván, P. „Distinguished rheological models for solids in the framework of a thermodynamical internal variable theory”. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 27.6 (2015), 971–986. old. doi: 10.1007/s00161-014-0392-3.
- [2] Fülöp, T. *Chapters in thermodynamics*. 2023. URL: http://energia.bme.hu/~fulop/Fulop_Chapters_in_Thermodynamics_2023-02-28.pdf.
- [3] Fülöp, T. *Objective thermomechanics*. arXiv:1510.08038. 2015.

- [4] Fülöp, T. „Thermal expansion, elastic stress and finite deformation kinematics”. *Proceedings of the 10th HEEP International Conference, 23–25 May 2011, Balatonfüred, Hungary*. Budapest: Department of Energy Engineering, Budapest University of Technology és Economics, 2011, 227–232. old.
- [5] Fülöp, T. és Ván, P. „Kinematic quantities of finite elastic and plastic deformation”. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 35.15 (2012). E-print version: arXiv:1007.2892, 1825–1841. old. DOI: 10.1002/mma.2558.
- [6] Fülöp, T. és Ván, P. „Véges rugalmas és képlékeny deformációk leírása [Description of finite elastic and plastic deformations]”. *Idő- és térderiváltak anyagtörvényekben [Time and space derivatives in material laws]*. Szerk. T. Fülöp. Mérnökgeológia–Kőzetmechanika Kiskönyvtár [Book Series on Engineering Geology and Rock Mechanics] 10. (In Hungarian.) Budapest: Műegyetemi Kiadó, 2010. 6. fejj., 99–151. old. ISBN: 978-963-420-992-8.
- [7] Fülöp, T., Ván, P. és Csátár, A. „Elasticity, plasticity, rheology and thermal stress – an irreversible thermodynamical theory”. *Proceedings of the 12th Joint European Thermodynamics Conference, JETC 2013, Brescia, Italy, July 1–5, 2013*. Szerk. M. Pilotelli és G. P. Beretta. Brescia: Snoopy, 2013, 525–530. old.
- [8] Fülöp, T., Ván, P. és Csátár, A. „Thermodynamical description of plastic processes”. *Proceedings of the 11th HEEP International Conference, June 3–5, 2013, Balatonfüred, Hungary*. Budapest: Department of Energy Engineering, Budapest University of Technology és Economics, 2013, 147–152. old.
- [9] Matolcsi, T. *Közönséges termodinamika [Ordinary thermodynamics]*. Budapest: Scholar, 2012. ISBN: 9789632443218.
- [10] Matolcsi, T. *Ordinary thermodynamics : Nonequilibrium homogeneous processes*. Budapest: Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), 2004. ISBN: 9789630581707. URL: http://montavid.hu/materials/Matolcsi%5C_Ordinary%5C_Thermodynamics%5C_2017-04-26.pdf.

A sziklarézsűk állékonyságának valószínűség elvű vizsgálata

Probabilistic Rock Slope Stability Analysis

Füzesi Ferdinánd

BME, Építőmérnöki Kar, Geotechnika és Mérnökgeológia Tanszék, ferencferdinandfuzesi@edu.bme.hu

Bögöly Gyula

BME, Építőmérnöki Kar, Geotechnika és Mérnökgeológia Tanszék, bogoly.gyula@emk.bme.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: Jelen tanulmány célja az, hogy egy átfogó áttekintést adjon, egy gyakori mérnökgeológiai feladat, a sziklarézsűk állékonyságvizsgálatnak „újszerű” valószínűség elvű megközelítéséről. A téma kiterjedt szakirodalommal rendelkezik, a nyírószilárdság anyagmodelleitől indulva, a bemenő paraméterek eloszlásain keresztül, a hétköznapi mérnöki gyakorlatban való adaptálásig. Jelen cikk a szakirodalom segítségével, ezen kutatási területeket szeretné összefoglalni, az aktuális vonatkozásokat is figyelembe véve. Az értekezés bemutatja a tönkremeneteli valószínűség fogalmát, a megbízhatóság koncepcióját, illetve az ehhez szükséges fizikai és geológiai paraméterek bizonytalanságából és szórásából adódó eloszlását. Emellett a módszer gyakorlati jelentőségét is kihangsúlyozva, bemutatjuk a tönkremeneteli valószínűség elfogadási kritérium rendszereit és a kockázatelemzés alapjait is.

Kulcsszavak: sziklarézsű, állékonyság, valószínűség elvű vizsgálat, tönkremeneteli valószínűség

ABSTRACT: The purpose of the paper is to give an overall view of a highly developing approach to a common engineering geological task, the rock slope stability analysis with a probabilistic design method. This topic has extensive and diverse literature, from the failure criteria models of the shear strength, through the distributions of the input parameters, to the convenient usage in civil engineering practice. The aim of this study is to provide an up-to-date and comprehensive overview of the literature background of these research areas. The paper presents the assessment of the probability of failure and the reliability of the slope concepts. The variety and distributions of the required physical and geometrical parameters and conditions will also be discussed. Furthermore, to demonstrate the practical benefits of the probabilistic method, the paper introduces different acceptance criteria and concerns the topic of risk management.

keywords: rock slope, stability, probabilistic analysis, probability of failure

1 BEVEZETÉS

A mérnökgeológiai feladatok estén a mérnökök a környezetben található természetes anyagokkal (kőzet, talaj, víz) dolgoznak. Ezen természetes anyagok fizikai jellemzői térben és időben változnak, amely változásokat nehéz előre meghatározni, ezért a paraméterek konstansként való leírása szintén nehézkes. A mérnökök és kutatók, különböző módszerek segítségével szeretnék ezen adatok bizonytalanságát és szóródását limitálni és minősíteni megfelelő, reprezentatív értékek használatával (Bárdossy és Fodor, 2011). A változók és bizonytalanságok leküzdése érdekében a sziklarézsűk stabilitását a gyakorlatban, főként valószínűségi és determinisztikus módszerekkel vizsgálják (Park et al., 2001). A sziklarézsűk egyensúlyi vizsgálataként a valószínűség elvű (Call, 1972; McMahon, 1971) és a determinisztikus (Jaeger 1971; Kutter 1974) módszerek szinte egyidőben jelentek meg. Az elmúlt évtizedekben számos jelentős rézsű állékonyságot vizsgáló módszer született meg, mint például a numerikus (Hoek és Bray 1981; Goodman 1995; Wang et al. 2003; Hatzor et al. 2004; Stead et al. 2006; Kveldsvik et al. 2009), analitikus vizsgálatok (Hoek és Bray 1981; Lam és Fredlund 1993; Nawari et al. 1997; Bye és Bell 2001; Liu et al. 2008; Saada et al. 2012) és empirikus módszerek (Hoek és Bray 1981; Bieniawski 1979; Goodman 1989; Romana et al. 2003; Potro és Hürlimann 2008; Pantelidis 2009). A fentebb sorolt példák alapján látható, hogy a determinisztikus módszer használata a könnyebb adaptálás miatt, elterjedtebb a mérnöki gyakorlatban. Habár az elmúlt időszak számítási kapacitás növekedésével párhuzamosan, a valószínűségi módszerek is szélesebb körben elkezdtek terjedni, főként egyedi mérnöki feladatok pl. nagy külszíni fejtésű bányák esetén.

A következő fejezetekben a sziklarézsűk stabilitásának valószínűség elvű módszerének irodalmi áttekintését részletezzük. Az első részben bemutatjuk a sztochasztikus vizsgálatokat (tönkremeneteli és megbízhatósági analízisek), illetve ezen vizsgálatok elvégzéséhez szükséges módszereket (Monte-Carlo-módszer, FOSM - First-order second-moment eljárás, PEM – Point Estimate eljárás). Majd a számítások bemenő paramétereinek szakirodalom szerinti várható eloszlásait és az eloszlások jellemzőit. Az áttekintés második felében pedig a valószínűség elvű rézsűstabilitás vizsgálatok gyakorlati használatát mutatjuk be, különböző elfogadási kritérium rendszereken keresztül (Priest és Brown 1983; Sjöberg 1999; Schellman et al. 2006; Pothitos és Li 2007; Wesseloo és Read 2009; Adams 2015).

2 A VALÓSZÍNŰSÉGI ELEMZÉS ÉS MEGBÍZHATÓSÁGI INDEX

A sziklarézsű stabilitás valószínűségi elvű módszerénél, ellentétben a determinisztikus módszerrel a bemenő paramétereket a teljes valószínűségi-eloszlásukkal vesszük figyelembe. A rézsű állékonyságának mérőszáma a tönkremeneteli valószínűség (P_f – Probability of Failure) és a számítás megbízhatósági indexe (β). A P_f tönkremeneteli valószínűség, amely azt mutatja meg, hogy az adott valószínűségi stabilitás vizsgálatnál hány esetben lett a biztonsági tényező kisebb az adott normálnál, százalékosan, az összes esetszámhoz képest (Abdulai and Sharifzadeh 2021). A β megbízhatósági index pedig azt, hogy az eredmények átlaga a szórásának viszonyában milyen messze van az adott normától, határértéktől. A számítások eredményeképpen kapott β és P_f értékek, és ezek kapcsolata, meghatározzák a rézsű stabilitását (Gibson 2011). Egyes elfogadási kritérium rendszerek (ld. 4. fejezet) ezen értékeket kategorizálják megfelelő, illetve nem megfelelő csoportokba. Ilyen példa az 1. táblázatban bemutatott, U.S.A. Műszaki Hadteste által javasolt elfogadási kritérium rendszer (U.S. Army Corps of Engineers 1997).

1. táblázat. Elfogadási kritérium rendszer (U.S.A. Műszaki Hadtestének javaslata alapján, 1997)

Elvart teljesítmény foka	Megbízhatósági index, β	Tönkremeneteli valószínűség [-]
Magas	5.0	3×10^{-7}
Jó	4.0	3×10^{-5}
Átlag feletti	3.0	0.001
Átlag alatti	2.5	0.006
Rossz	2.0	0.023
Nem megfelelő	1.5	0.07
Veszélyes	1.0	0.16

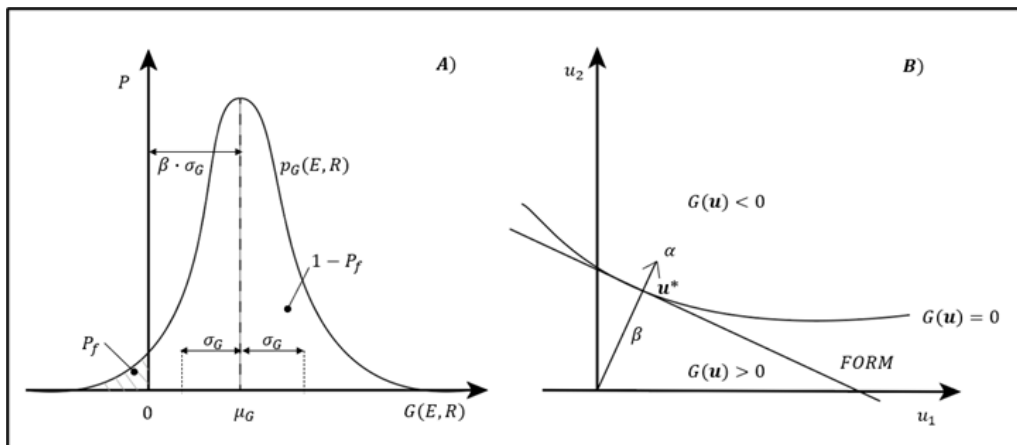
2.1 Megbízhatósági analízis

A tönkremeneteli valószínűség meghatározása a megbízhatósági analízis egyik fő eredménye. A tönkremenetel jelentheti a szerkezet, műtárgy teherbírásának vagy adott határállapotának elérését. Az adott határállapotot egy $g(X)$ határállapot függvénnyel tudjuk leírni, a műtárgy ellenállásának $R(X)$ és rá ható, rézsűk esetében, csúsztató erők $S(X)$ különbségeként (1).

$$g(X)=R(X)-S(X) \quad (1)$$

ahol az X reprezentálja a számításokban figyelembe vett véletlenszerű bemenő paramétereket. Ezen definíció szerint a tönkremenetel $g(x) < 0$ esetén következik be, a stabil állapot pedig $g(x) > 0$ egyenlőségénél áll fent (1.b ábra). A $G(X)=0$ függvény által létrehozott felület a kritikus határt írja le ez a két állapot között. A határállapotfüggvényt a rézsűk stabilitás vizsgálatánál, általában a rézsű adott tönkremeneteli módja (sík, ékes, kör csúszólapos stb.) szerint helyettesítjük be. Komplexebb mérnökgeológiai feladatok során, mint alagutak deformációi vagy rézsűk földrengés terhei esetén, az ellenállás és a hatás oldalt nehéz expliciten definiálni (Langford and Diederichs 2011).

Hogy a megbízhatósági indexet megállapítsuk, meg kell vizsgálni az adott műtárgy határállapot függvény átlagának és a kritikus határállapot függvény átlagának $G(X)=0$ távolságát. A két pont távolsága és a határállapot görbe átlagának aránya adja a számítás, és műtárgy megbízhatósági indexét β (1.b ábra)



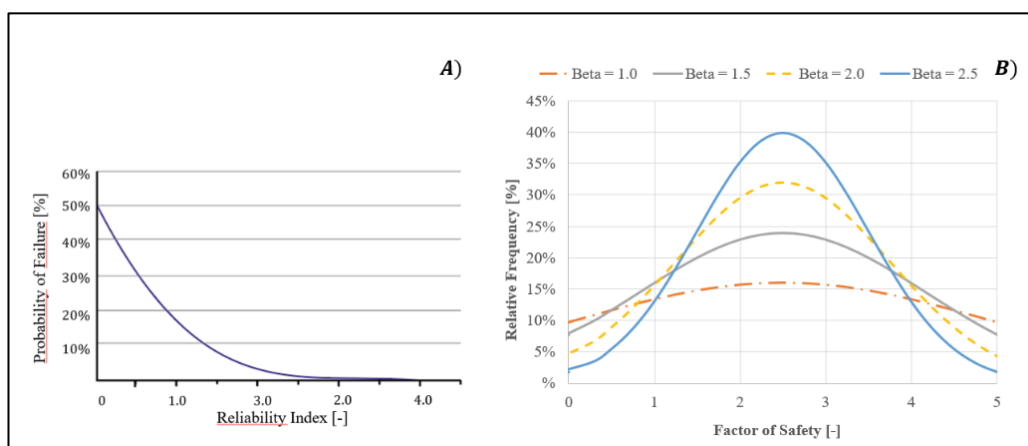
1.a ábra. Valószínűségi-eloszlás függvény és megbízhatósági index β (Langford és Diederichs, 2011 alapján). **1.b ábra** Határállapotfüggvények biztonságos és tönkrement régiói a FORM – First Order Second Moment eljárás (lineáris) és a SORM – Second Order megbízhatósági módszer alapján (Jimenez-Rodriguez et al. alapján, 2006).

$$\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (2)$$

Ahol a μ_G a határállapot sűrűségfüggvényének átlaga és a σ_G a szórása. Ebből az egyenletből (2) tisztán látszik, hogy konstans átlagos kihasználtság mellett, a megbízhatósági index növelésével a függvény szórása csökken. Így látszik, hogy a keskenyebb valószínűségi függvény esetén, magasabb a megbízhatósági index és kisebb a tönkremeneteli valószínűség lásd 2.a-b ábra (Langford és Diederichs 2011).

A bevezetésben már említettük, de hangsúlyozni szeretnénk, hogy egyes bonyolultabb esetekben a műtárgy, rézsű határállapotgörbét nem lehet egyszerűen egzaktul meghatározni. A megbízhatósági analíziseket általában véges elemes módszerekkel szokták vegyíteni, hogy meghatározzuk a pontos határállapot függvényt. Azonban számos más statisztikai módszer is létezik a határállapotgörbe momentumainak meghatározására. Például az First Order Second Moment-eljárás (FOSM) módszer a határállapotfüggvény várható értékének és szórásának Taylor-sor közelítésén alapul; a Point Estimate Method eljárás (PEM) pedig egy numerikus eljárás, amely a függvény pillanatait egy sor előre meghatározott diszkrét pontban értékeli ki; a Monte Carlo szimuláció pedig olyan módszer, amely nagy számú véletlenszerűen választott bemeneti értékeket generál az eloszlásfüggvények szerint, majd ezeket az értékeket az analitikus modellben használják fel a rendszer viselkedésének meghatározásához.

Számos kutató (Carter és Lajtai 1992; Muralha és Trunk 1993; Trunk 1993; Leung és Quek 1995; Liu és mtsai 2014; Shamekhi és Tannant 2015) különböző valószínűségi módszert fejlesztett ki a sziklarézsűk stabilitásának vizsgálatára. Ezekben az megközelítésekben különböző megbízhatósági analízis módszereket alkalmaztak, például Monte Carlo szimulációt és FOSM módszert, de ezek hasonló törési határgörbékén alapulnak.

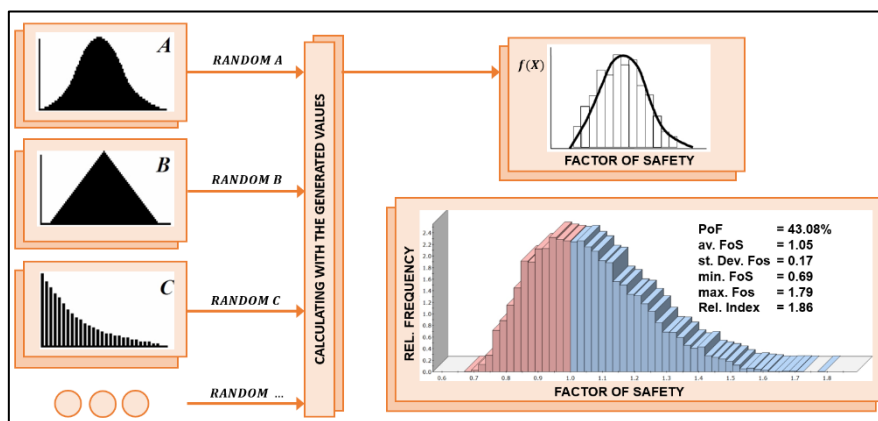


2.a ábra A megbízhatósági index és a tönkremeneteli valószínűség kapcsolata, feltételezve, hogy a biztonsági tényező sűrűségfüggvénye normális eloszlású **2.b ábra** A megbízhatósági index változásának hatása a rendszer bizonytalanságára, a biztonsági tényező 2,5 átlaga mellett, feltételezve, hogy annak szórása normális eloszlású (Langford és Diederichs alapján, 2011).

Ezekben az eljárásokban a törési határgörbék általában determinisztikus modelleken alapulnak (Barton és Choubey 1977; Hoek és Bray 1981; Hoek és Brown 2018), és csak néhány bemeneti paramétert kezelnek véletlen változóként. Teljes körű valószínűségi analízishez az összes bemeneti paramétert változóként kellene kezelni, és a törési határgörbét is sztochasztikus alapokra kellene helyezni.

2.2 Valószínűség elvű vizsgálat

A valószínűség elvű modellezés egy eszköz, amely a bemenő paraméterek bizonytalanságát, azok statisztikai jellemzőivel veszi számításba a stabilitás vizsgálat során. Eredményeképpen a biztonsági tényező sűrűségfüggvényét kapjuk, ellenben a determinisztikus módszerrel, ahol csak egy egzakt biztonsági tényezőt (FS- - Factor of Safety). A biztonsági tényező sűrűségfüggvényének azon halmazát, ahol a rézsű tönkrement, azaz nem érte el a meghatározott minimális értéket, azt tönkremeneteli valószínűségnek P_f -nek nevezzük (3. ábra). Az elmúlt évtizedekben ez a módszer széleskörben elterjedt a sziklarézsűk stabilitásának vizsgálatához, főként külszíni fejtésű bányák esetén (Hammah et al. 2009; Chiwaye és Stacey 2010; Gibson 2011).



3. ábra. A valószínűségi elvű stabilitás vizsgálat folyamatábrája.

A tönkremeneteli valószínűség alapkonceptiója az, hogy a bemenő paraméterek a valószínűségi-eloszlásukat hordozva szerepelnek az állékonyság vizsgálatban. A P_f értelmezése (általában százalékos eredmény) azt jelenti, hogy 100 „próbából” hány esetben ment tönkre a rézsű, műtárgy.

Bár a valószínűségi módszer egyértelműnek és könnyen adaptálható módszernek tűnik, azonban a mérnöki gyakorlati használata előtt mérlegelni kell néhány szempontot. A bizonytalanságok elkerülése miatt bevezetett számítás, magával hordoz eddig nem vizsgált problémákat is, mint például a bemenő paraméterek eloszlásainak pontos meghatározása, ezen eloszlások egymásra hatása, korrelációja (vagy annak hiánya) a modellekben, a kritikus csúszólap meghatározása, amely eltérhet a minimum biztonsági tényezőnél és a maximum P_f -nél (Oka és Wu 1990), az időlegesség figyelembevételének a hiánya (Adams 2015) és a megfelelő modellszám megválasztása (Jakab 2017).

A megbízhatósági analízisben, a határállapot függvény kiszámításához használt főbb módszerek, az alábbiakban lesznek röviden összefoglalva:

Monte Carlo Szimuláció

A Monte Carlo szimuláció egy statisztikai szimulációs módszer, amelyben véletlenszerűen generált adatokat használnak egy probléma modellezésére, elemzésére vagy szimulálására. Az alapötlet az, hogy az eredményeket többször ismételve, véletlenszerűen választott adatokkal való többszöri kiszámításával becsléseket kaphatunk a várható értékekről, szórásról és más statisztikai jellemzőkről. Az elégséges számú szimuláció során a FS valószínűségi-eloszlásfüggvénye meghatározható. A Monte Carlo szimulációk száma független tervezéshez szükséges iterációk számától. Ezért az alkalmazandó szimulációs számot megfelelően kell kiválasztani (Koch 2018).

First Order Second Moment - eljárás (FOSM)

Az FOSM az elsőrendű Taylor-sor első két momentumát használja a határellenállási függvény körüli pontban, hogy megbecsülje a valószínűségi változók hatását a rendszer megbízhatóságára. A módszer az N bemeneti változók adott értékeire alapozva becsüli meg a határellenállási függvény pillanatnyi momentumait (átlag és szórás). Az FOSM módszer egyik jelentős előnye, hogy világos és könnyen táblázható módon mutatja be az egyes változók relatív hozzájárulását a törési határgörbe értékeihez (Baecher és Christian 2005).

Point Estimate módszer (PEM)

A PEM olyan módszer, amely a határállapot függvényt pontról pontra értékeli a véletlen bemeneti változók kiválasztott értékeinél (súlypontok). Ez a módszer széles körben használt a geotechnikai közösségben (Rosenblueth 1981; Rosenblueth 1975). Bár a PEM nem nyújt teljes eloszlást a kimeneti változóról, ahogy azt a Monte Carlo módszer teszi, mégis egyszerűen használható olyan problémák esetén, amelyek viszonylag kevés véletlen változót tartalmaz, és hasznos, amikor az általános tendenciákat vizsgálunk (Chiwaye és Stacey 2010).

Response Surface Methodology - eljárás (RSM)

Az RSM-et először brit statisztikusok mutatták be 1951-ben (Box and Wilson 1951).

Ez a módszer egyre nagyobb figyelmet kap a geotechnikai kutatók körében is. Három önálló lépésből áll annak érdekében, hogy meghatározzuk az FS valószínűségi-eloszlásfüggvényét. Az első lépésben a stabilitási modell szoftver segítségével kiszámítjuk az FS értékét különböző bemenő változók kombinációival. Majd regressziós technikák segítségével felépítünk egy felületet vagy görbét a 2D térben, ami a válaszfelületet adja az FS reakcióját az bemenő paraméterek változásaira. A harmadik lépés az FS értékek eloszlásának statisztikai elemzését jelenti, amit a Monte Carlo szimuláció során a második lépésben generált FS értékek alapján végzünk. A P_f ebből az eloszlásból számítható ki, mint azon próbák száma, amelyeknél az FS kevesebb, mint 1, osztva az összes próba számával (Shamekhi és Tannant, 2015).

3 A SZILÁRDSÁGI PARAMÉTEREK JELLEMZŐ ELOSZLÁSAI

Ahogy korábban többször is említettük, a valószínűségi elvű sziklarézsű stabilitási vizsgálat egyik kritikus kérdése a bemenő paraméterek megfelelő eloszlásfüggvényeinek meghatározása. Mint ahogy arra más kutatók is (Kulatilake et al., 1985) rámutattak, az eltérő eloszlásfüggvény választása jelentősen befolyásolhatja a sziklarézsű tönkremenetelének valószínűségét (2. táblázat).

2. táblázat. A sziklarézsű tönkremeneteli valószínűségének eltérése a bemenő paraméterek eloszlás függvényének változása esetén, ékes tönkremenetel esetén (Kulatilake et al. alapján 1985)

A számításban figyelembe vett valószínűségi-eloszlások				Legjobban illeszthető eloszlás az FS-re (Átlag és c.o.v.)	Tönkremeneteli valószínűség
„A” csúszólap iránya	„B” csúszólap iránya	φ_A	φ_B		
Átlag	Átlag	Átlag	Átlag	FS = 0.86	-
Átlag	Átlag	Egyenletes	Egyenletes	Normál, Lognormál (0.86, 0.10)	0.96
Átlag	Átlag	Normál	Normál	Normál (0.86, 0.10)	0.96
Átlag	Átlag	Lognormál	Lognormál	Normál, Lognormál (0.86, 0.10)	0.95
Kétváltozós normál	Kétváltozós normál	Átlag	Átlag	Lognormál (0.88, 0.33)	0.72
Kétváltozós normál	Kétváltozós normál	Egyenletes	Egyenletes	Gamma, Lognormál (0.88, 0.35)	0.70
Kétváltozós normál	Kétváltozós normál	Normál	Normál	Normál, gamma (0.89, 0.33)	0.68
Kétváltozós normál	Kétváltozós normál	Lognormál	Lognormál	Normál, gamma (0.89, 0.33)	0.68
Fisher	Fisher	Átlag	Átlag	Lognormál (0.94, 0.53)	0.67
Fisher	Fisher	Egyenletes	Egyenletes	Lognormál (0.94, 0.54)	0.64
Fisher	Fisher	Normál	Normál	Lognormál, gamma (0.89, 0.33)	0.62
Fisher	Fisher	Lognormál	Lognormál	Lognormál (0.94, 0.53)	0.62

A bemenő paraméterek valószínűségi-eloszlása a mért vagy vélt adatokra illeszthető legjobb eloszlás alapján történik. Egyes esetekben az elvégzett mérések száma nem elegendő a megfelelő statisztikai számítások elvégzésére. Ezért mindig szükséges ezen eloszlásokat megfelelő műszaki ismeretek alapján revizionálni (Muralha és Trunk 1993).

A szakirodalom alapján (Ang et al. 1975; Coates 1981; Hoek and Bray 1981; Priest 1993; Mostyn and Li 1993; Park 1999; Nilsen 2000; Duzgun et al. 2003; Pathak and Nilsen 2004) az egyes paraméterek javasolt valószínűség-eloszlás függvényeinek típusait a 3. táblázatban mutatjuk be.

3. táblázat. A bemenő paraméterek szakirodalom által javasolt valószínűség eloszlásai

Bemenő paraméterek	Eloszlás típusa
Tömeg	Normál
* φ_r	Normál
*UCS	Lognormál
Kohézió	Lognormál
Dőlés szög	Normál, Fisher
Dőlés irány	Normál, Fisher
*JRC	Háromszög

*: JRC- joint roughness coefficient – tagoltsági érdesség mérőszáma; φ_r – Reziduális súrlódási szög; UCS – Egyirányú nyomószilárdság

Ezen bemenő paraméterek szakirodalmi javaslatok. Akkor igazak, ha a laboratóriumi vizsgálatok és helyszíni mérések eredményei korrelálnak hozzájuk. Javasolt a mért és kapott eredményeken egy illeszkedés vizsgálatot elvégezni, hogy megállapítsuk, hogy hasonló statisztikai paraméterekkel rendelkezik, mint a szakirodalomban feltételezettek.

4 RÉZSŰ TERVEZÉSI KRITÉRIUM RENDSZEREK

A stabilitás vizsgálat fő célja a rézsű geometriájának meghatározása. A valószínűségi számítások végeredményeként meghatároztuk a rézsű tönkremeneteli valószínűségét (P_f) és a megbízhatósági indexét (β). Ezen eredményeket különböző kategóriákba tudjuk sorolni, amely kategória rendszereket a sziklarézsű állékonyságának értékelésben, a sziklafal geometriáját és fizikai kondícióját figyelembe véve, elfogadási kritérium rendszereknek hívunk (Priest és Brown, 1983; Kirsten, 1983; U.S. Army Corps of Engineers, 1997; Sjöberg, 1999; Schellman et al., 2006; Pothitos és Li, 2007; Wesseloo és Read, 2009; Adams, 2015). A kritérium rendszerek általában specifikus bányákra, jellemzően helyi felhasználásra készültek. Így ezek használata általános szikla rézsűkre nem ajánlott, azonban vannak olyanok is melyek standart tervezési elv megalkotására jöttek létre.

Ami az összes elfogadási kritériumban közös tényező, hogy meghatározzák az adott mérnöki feladathoz megfelelő P_f értékét. Az elsődleges szempont ezekben az általános esetekben a rézsű meredeksége, geometriája és élettartama. Azonban egyedi esetekben figyelembe vehető a tönkremenetelben érintett tömeg mérete vagy gazdasági és munkavédelmi szempontok is. Például, a Wesseloo és Read (2009) munkája szintén figyelembe vette a tönkremenetel következményeit és foglalkozik a rézsű kialakításával (4. táblázat).

Az elfogadási kritérium rendszerek főbb feltételeit az alábbiakban, táblázatosan, foglaljuk össze. Az Ok Tedi nyíltzsinű ércbánya (Pápua Új-Guinea) rézsűire vonatkozó kritikus tönkremeneteli valószínűségeket Pothitos és Li (2007) kategorizálta (5. táblázat). A Schellman és társai-féle (2006) elfogadási kritérium rendszert hasonlóan egy egyedi bányára fejlesztették ki, a chilei Mantroverdében található rézérc bányára, azonban ez a tönkremeneteli valószínűségen felül az ebben érintett tömeget is figyelembe veszi (6. táblázat). Priest és Brown (1983) hasonlóan az előző rendszerekhez figyelembe vette a tönkremeneteli valószínűséget és ezen felül a valószínűségi számítás megbízhatósági indexét és a tönkremenetel következményeit is (7. táblázat). Az előző kutatókkal szemben, Kristen (1983) nem vette figyelembe a rézsű méreteit és a tönkremenetel következményeit, azonban más technikai szempontokat igen, mint például a rézsű élettartamát, a köz által való megközelíthetőséget és a rézsű mozgásának monitoring rendszerét (8. táblázat). Végül de nem utolsósorban, Adams (2015) létrehozott egy komplex, kockázat elemző, elfogadási kritérium rendszert, amely a tönkremeneteli valószínűség és a hagyományos biztonsági tényező értékein és viszonyán felül, a tervezési élettartamot, a rézsű geometriáját és a kockázatkezelés módját is (9. táblázat) (Bögöly és Füzesi, 2021).

4. táblázat. Elfogadott tönkremeneteli valószínűség tipikus értékei bányarézsűkre (Wesseloo és Read, 2009 alapján)

Rézsű méret	Tönkremenetel következménye		
	Csekély	Közepes	Magas
Rézsűpadka	$FS \geq 1,1$ $P_f \leq 25-50 \%$		
Közbenső rézsű szakasz	$FS \geq 1,15-1,2$ $P_f \leq 25$	$FS \geq 1,2$ $P_f \leq 20 \%$	$FS \geq 1,2-1,3$ $P_f \leq 10 \%$
Teljes rézsű	$FS \geq 1,2-1,3$ $P_f \leq 15-20 \%$	$FS \geq 1,3$ $P_f \leq 5-10 \%$	$FS \geq 1,3-1,5$ $P_f \leq 5 \%$

5. táblázat. Elfogadott tönkremeneteli valószínűség az Ok Tedi bánya sziklarézsűinél (Pothitos és Li, 2007 alapján)

Tervezési helyzet			Elfogadott tönkremeneteli valószínűség	
Tervezendő elem	Alkalmazhatóság	Geotechnikai állapot	Tartomány (%)	Ajánlott érték
Rézsűpadka	Általános	-	10-50	-
	-	Folytonos hibák	0-10	10
	-	Nem-folytonos hibák	10-50	20-30
Teljes vagy közbenső rézsű szakasz	Általános	-	1-3	-
Teljes vagy közbenső rézsű szakasz üzemi úttal vagy egyéb infrastruktúrával	-	-	<1	-

6. táblázat. Elfogadott tönkremeneteli kritérium a Mantoverde bánya sziklarézsűinél (Schellman, 2006 alapján)

Tönkremenetelben érintett tömeg (t/m)	Biztonsági tényező (FS)	Tönkremeneteli valószínűség (P_f)
<15000	>1,20	<0,12
15000-30000	>1,25	<0,10
>30000	>1,30	<0,08

7. táblázat. Elfogadási kritérium rendszer (Priest és Brown, 1983 alapján)

Kategória és Tönkremenetel következménye	Példa	Megbízhatósági Index (β)	Tönkremeneteli valószínűség (P_f)
Nem súlyos	rézsűpadka	1,4	0,1
Közepesen súlyos	részben állandó rézsű	2,3	0,01-0,02
Nagyon súlyos	magas vagy állandó rézsű	3,2	0,003

8. táblázat. A tönkremeneteli valószínűség jelentősége (Kirsten, 1983 alapján)

Tönkre- meneteli va- lósínúség (%)	Tervezési kritérium			Megfigyelt természetes folyama- tok	
	Használati élettartam	Nyilvá- nosság	Legki- sebb szük- séges felü- gyelet	Látható részsű tönkremenetelek gyakorisága	Láthatóan ins- tabil mozgások aránya
50-100	Effektíven nulla	Nyilvános bejárás tiltva	Nincs	Általában láthatóak részsű- csúszások	Bőséges jel a lejtők mozgására
20-50	Nagyon rövid időtar- tam (ideigle- nesen nyitott külszíni bá- nyák, idősza- kos polgári munkálatok alatt tartha- tatlan kocká- zat)	Nyilvános bejárás erő- sen akadá- lyozva	Folyama- tos monitor- ing inten- zív, kifinomult eszközökkel	Nagyszámú instabil részsű	Egyértelmű je- lek a lejtők moz- gására
10-20	Nagyon rövid időtar- tam (kvázi- ideiglenesen nyitott kül- színi bányák, polgári mun- kálatok alatt nemkívánatos kockázat)	Nyilvános bejárás aktí- van akadá- lyozva	Folyama- tos monitor- ing kifino- mult eszközökkel	Néhány ins- tabil részsű látha- tató	Néhány jel a lejtők lassú moz- gására
5-10	Rövid idő- tartam (fél- ideiglenesen nyitott kül- színi bányák)	Nyilvános bejárás aka- dályozva	Folyama- tos monitor- ing egysze- rűbb eszközökkel	Egyes részsűk láthatóan insta- bilak	Néhány jel a lejtők nagyon las- sú mozgására
1,5-5	Közepes időtartam (fél-állandó részsűk)	Nyilvános bejárás el- lenjavalt	Tudatos felületi mo- nitoring	Nincs nyoma instabil részsűk- nek	Nagyon lassan mozgó lejtők, nyilvánvaló jelek nélkül
0,5-1,5	Hosszú időtartam (kvázi- állandó ré- zsűk)	Nyilvános bejárás enge- délyezett	Esetleges felületi mo- nitoring	Nincs látha- tóan instabil ré- zsű	Nincs jele lej- tőmozgásoknak
<0,5	Nagyon hosszú idő- tartam (ál- landó részsűk)	Nyilvános bejárás sza- bad	Nem szükséges	Állékony ré- zsűk	Nincs mozgás

9. táblázat. Elfogadási kritérium mátrix (Adams, 2015 alapján)

Következmény szint		Jelentéktelen - Kisebb			Közepes			Nagyobb - Katasztrófa-		
Tervezési megbízhatóság		Mag.	Köz.	Ala.	Mag.	Köz.	Ala.	Mag.	Köz.	Ala.
Állandó bevágás, töltés vagy természetes rézsű (élettartam > 10 év)	Min FS	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	1,5	1,4	1,5	1,6
	Max P _f	20%	20%	20%	20%	10%	5%	10%	5%	2%
	Kockázat kezelés szintje	Nincs monitoring vagy bejárás korlátozás			Nincs monitoring vagy bejárás korlátozás			Minimum monitoring meghatározott időközönként és/vagy bejárás korlátozás		
Időközi bevágás (élettartam 0,5-10 év)	Min FS	1,2	1,25	1,3	1,2	1,3	1,4	1,3	1,4	1,5
	Max P _f	30%	25%	20%	30%	20%	10%	20%	10%	5%
	Kockázat kezelés szintje	Alapvető GCMP tartalmaz időszakos monitoringot, A bejárás a biztonsági kockázat függvénye,			Részletes GCMP tartalmaz monitoringot és TARP-ot, A bejárás a biztonsági kockázat függvénye,			Részletes GCMP tartalmaz monitoringot és TARP-ot, A bejárás a biztonsági kockázat függvénye,		
Ideiglenes bevágás, töltés (élettartam < 6 hónap)	Min FS	1,2	1,25	1,3	1,25	1,3	1,4	1,25	1,35	1,4
	Max P _f	30%	25%	20%	25%	20%	15%	25%	15%	10%
	Kockázat kezelés szintje	Alapvető GCMP tartalmaz időszakos monitoringot, A bejárás a biztonsági kockázat függvénye,			Részletes GCMP tartalmaz monitoringot és TARP-ot, A bejárás a biztonsági kockázat függvénye,			Részletes GCMP tartalmaz monitoringot és TARP-ot, Nincs bejárás		
Fejtés azonnali tömedékeléssel (élettartam < néhány nap)	Min FS	1,05	1,1	1,15	1,1	1,15	1,2	1,15	1,2	1,25
	Max P _f	45%	40%	35%	40%	35%	30%	35%	30%	25%
	Kockázat kezelés szintje	Részletes kockázat értékelés és műveleti irányítás, folyamatos monitoringgal és TARP-al, Nincs bejárás a rézsűkhöz								

5 DISZKUSSZIÓ

Habár a sziklarézsű stabilitásának valószínűség elvű módszere egy új megközelítési módot ad a fizikai bemenő adatok szórásának kezelésére, ezáltal új problémákat is felvet, mint a bemenő paraméterek eloszlásának meghatározása (Ang et al. 1975; Coates 1981; Hoek és Bray 1981; Priest 1993; Mostyn és Li 1993; Park 1999; Nilsen 2000; Duzgun et al. 2003; Pathak és Nilsen 2004), az elfogadható P_f kiválasztása (Priest és Brown, 1983; Kirsten, 1983; U.S. Army Corps of Engineers, 1997; Sjöberg, 1999; Schellman et al., 2006; Pothitos és Li, 2007; Wesseloo és Read, 2009; Adams, 2015), és a megfelelő valószínűségi módszer megválasztását is (Carter és Lajtai 1992; Muralha és Trunk 1993; Trunk 1993; Leung és Quek 1995; Liu et al. 2014; Shamekhi és Tannant 2015). Ezeket a szempontokat figyelembe kell venni a gyakorlati mérnöki alkalmazásban.

A bemenő paraméterek eloszlásainak megválasztása (normál, log-normál vagy más típusú eloszlás) jelentősen befolyásolhatja az eredményként kapott P_f értéket (Gibson 2011).

Az eredmények értékelése során figyelembe kell venni az bemenő paraméterek egymásra hatását pl. JCS esetében; a számítások eredményeként kapott biztonsági tényező eloszlásának típusát is meg kell határozni, hiszen ez is befolyásolja annak átlagát, megbízhatósági indexét stb.; a számításaink során a modellezett esetszámot, illetve annak módszerét (pl. Monte Carlo, Point Estimate Method - PEM, First Order Second Moment - FOSM) is megfelelően ki kell választani.

Steffen et al. (2008) kutatásai alapján a rézsű stabilitásának meghatározását, inkább az annak tönkremenetelének kockázatához kötné, mint a biztonsági tényezőhöz, vagy tönkremeneteli valószínűséghez. Adams (2015) az 4. fejezetben bemutatott komplex kockázati mátrixsal egyidejűleg, egy besorolási módszert is ajánlott, amely általános szempontok mentén jut el az elfogadási kritérium rendszer megalkotásához. Úgy mint a rézsű prioritásának és a tönkremenetel következményének besorolása; a kőzet környezet és geológiai adottságok-bizonytalanságok felmérése; lehetséges tönkremeneteli módok megállapítása.

6 ÖSSZEFOGLALÁS ÉS KONKLÚZIÓ

Az értekezésben a sziklarézsűk stabilitásának valószínűségi elvű vizsgálatát mutattuk be a jelenlegi szakirodalom alapján, amely számítást a rézsűk geometriai és geológiai paramétereinek bizonytalanságainak számításba vétele miatt vezettek be. A valószínűség elvű módszert gyakran használják a bányarézsűinek maximális dőlésszögének megállapítására. A módszer segítségével a számítások bemenő adatait könnyebben lehet paraméterezni, hiszen a helyszíni felmérések alapján a várható eloszlások meghatározható. Az eljárás segít jobban modellezni a valóságot ezzel pontosabb mérnöki megközelítést ad. Egyúttal az eredmények kiértékelése komplexebbé válik és nem feltétlen általánosítható más kőzetű, vagy föld-rajzi elhelyezkedésű bányákban. Viszont az eredmények kockázat elemzési célú felhasználása lehetőséget ad más aspektusok figyelembevételére, mint például munkavédelmi, környezeti és gazdasági szempontok.

Összegzésként a sziklarézsűk stabilitásának valószínűség elvű vizsgálatáról elmondható, hogy hasznos eszköz a mérnökök kezében a valóság közelítésére, azonban a módszer további fejlesztésekre szorul, mind számítás terén mind kiértékelés szempontjából. Fontos megjegyezni, hogy az előírt szabványok vagy általános gyakorlat hiányában a tervezőknek gondosan mérlegelniük kell a fenti problémákat, amikor valószínűségi módszereket alkalmaznak a rézsűk tervezési folyamatában.

7 IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- Abdulai, M., Sharifzadeh, M. 2021. Probability Methods for Stability Design of Open Pit Rock Slopes: An Overview. *Geosciences*. Vol. 11, 319-331.
- Adams, B.M. 2015. Slope stability acceptance criteria for opencast mine design. In: 12th Australia New Zealand Conference on Geomechanics, Wellington, New Zealand, 1-8.
- Ang, A.H.-S., Tang, W.H. 1975. Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Basic Principles. Wiley, 1-591.
- Baecher, G.B., Christian, J.T. 2005. Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering. John Wiley & Sons 1-691.
- Bárdossy, G., Fodor, J. 2011. Evaluation of risks in environmental and Earth sciences using up-to-date mathematical methods. *Central European Geology*. Vol. 54, 381-390.
- Barton, N., Choubey, N. 1977. The shear strength of rock joint in theory and practice. *Rock Mechanics*. Vol. 10, 1-54
- Bieniawski, Z.T. 1979. The Geomechanics Classification In Rock Engineering Applications. Presented at the 4th ISRM Congress, Montreux, 41-48.
- Bögöly, Gy., Füzesi, F.F. 2021. Comparison of the probabilistic and deterministic slope stability analysis of a dolomite quarry in Hungary. In: The Evolution of Geotech - 25 Years of Innovation, online 180-186
- Box, G., Wilson, K. 1951. On the experimental attainment of optimum conditions, *JR Statist. Soc.*, Vol. B. 13-21
- Bye, A.R., Bell, F.G. 2001. Stability assessment and slope design at Sandsloot open pit, South Africa. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. Vol. 38, 449-466.
- Call, R.D. 1972. Analysis of geologic structure for open pit slope design, *Doktori Tézis*, 1-218.
- Call, R.D., Nicolas, D.E. 1979. Prediction of step path failure geometry for slope stability analysis. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*. Vol. 16, 1-8.

- Carter, B.J., Lajtai, E.Z. 1992. Rock slope stability and distributed joint systems. *Canadian Geotechnical Engineering Journal*. 53–60.
- Chiwaye, H., Stacey, T.R. 2010. A comparison of limit equilibrium and numerical modelling approaches to risk analysis for open pit mining. *Journal- South African Institute of Mining and Metallurgy*. 110, 571–580.
- Coates, D.F. 1981. *Rock mechanics principles*. Energy, Mines, and Resources Canada, Ottawa, 1-410.
- Duzgun, H.S.B., Yucemen, M.S., Karpuz, C. 2003. A Methodology for Reliability-Based Design of Rock Slopes. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. Vol. 36, 95–120.
- Gibson, W. 2011. Probabilistic methods for slope analysis and design. *Australian Geomechanics Journal*. Vol. 46, 1–12.
- Glynn, E.F. 1978. A Probabilistic Approach to the Stability of Rock Slopes, *Doktori Tézis*, 1-461.
- Goodman, R. E. 1995. Block theory and its application. *Géotechnique*. Vol. 45, 383–423.
- Goodman, R.E. 1989. *Introduction to Rock Mechanics*. Wiley, 1-562.
- Hammah, R., Yacoub, T., Curran, J.H. 2009. Probabilistic Slope Analysis with the Finite Element Method. In: *Proc. 43rd US Symp. on Rock Mechanics & 4th US-Canada Rock Mechanics Symp.*
- Hatzor, Y.H., Arzi, A.A., Zaslavsky, Y., Shapira, A. 2004. Dynamic stability analysis of jointed rock slopes using the DDA method: King Herod's Palace, Masada, Israel. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. Vol. 41, 813–832.
- Hoek, E., Bray, J.D. 1981. *Rock Slope Engineering: Third Edition*. Institute of Mining and Metallurgy, London, 341-351.
- Hoek, E., Brown, E.T. 2018. The Hoek–Brown failure criterion and GSI – 2018 edition. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 11, 445–463.
- Jaeger, J.C. 1971. Friction of Rocks and Stability of Rock Slopes. *Géotechnique*. 21, 97–134.
- Jakab, N. 2017. Stochastic modeling in geology: Determining the sufficient number of models. *Central European Geology*. 60, 135–151.
- Jimenez-Rodriguez, R., Sitar, N., Chacón, J. 2006: System reliability approach to rock slope stability. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 43, 847–859.
- Kirsten, H.A.D. 1983. Significance of the probability of failure in slope engineering. *The Civil Engineer in South Africa*. 25, 17–27.
- Koch, K.-R. 2018. Monte Carlo methods. *Int J Geomath*. Vol. 9, 117–143.
- Kulatilake, P.H.S.W., Finley, R.E., Ghosh, A. 1985. Effect of variability of joint orientation and strength on factor of safety of wedge stability. In: *Proceedings of International Symposium on Fundamentals of Rock Joints*. Norvégia, 25–33.
- Kutter, H.K. 1974. Analytical and Graphical Methods for the Analysis of Slopes in Rock Masses. *Rock Mechanics*. 198–211.
- Kveldsvik, V., Einstein, H.H., Nilsen, B., Blikra, L.H. 2009. Numerical Analysis of the 650,000 m² Åknes Rock Slope based on Measured Displacements and Geotechnical Data. *Rock Mech Rock Eng*. 42, 689–728.
- Lam, L., Fredlund, D.G. 1993. A general limit equilibrium model for three-dimensional slope stability analysis. *Can. Geotech. J*. 30, 905–919.
- Langford, J.C., Diederichs, M.S. 2011. Application of reliability methods in geological engineering design, *Pan-Am CGS Ceotechnikai Konfeencia*, Ontario, 8.
- Leung, C.F., Quek, S.T. 1995. Probabilistic stability analysis of excavations in jointed rock. *Canadian Geotechnical Journal*. Vol. 32.
- Liu, C.H., Jaksa, M.B., Meyers, A.G. 2008. Improved analytical solution for toppling stability analysis of rock slopes. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 45, 1361–1372.
- Liu, Z., Shao, J., Xu, W., Xu, F. 2014. Comprehensive Stability Evaluation of Rock Slope Using the Cloud Model-Based Approach. *Rock Mech Rock Eng*. 47, 2239–2252.
- McMahon, B.K. 1971. A statistical method for the design of rock slopes. In: *Proceedings of First Australia-New Zealand Conference on Geomechanics*. Melbourne, 314–321.
- Mostyn, G.R., Li, K.S. 1992. Probabilistic slope analysis — State-of-play. In: *Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*. CRC Press, 1-21.
- Muralha, J., Trunk, U. 1993: Stability of rock blocks - Evaluation of failure probabilities by the Monte Carlo and first order reliability methods. *International Symposium on Assessment and Prevention of Failure Phenomena in Rock Engineering*. 759–765.
- Nawari, O., Hartmann, R., Lackner, R. 1997. Stability analysis of rock slopes with the direct sliding blocks method. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. Vol. 34, 220.e1-220.e8

- Nilsen, B. 2000. New trends in rock slope stability analyses. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*. Vol. 58, 173–178.
- Oka, Y., Wu, T.H. 1990. System Reliability of Slope Stability. *Journal of Geotechnical Engineering*. Vol. 116, 1185–1189.
- Pantelidis, L. 2009. Rock slope stability assessment through rock mass classification systems. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. Vol. 46, 315–325.
- Park, H. 1999. Risk analysis of rock slope stability and stochastic properties of discontinuity parameters in western North Carolina.
- Park, H., West, T.R. 2001. Development of a probabilistic approach for rock wedge failure. *Engineering Geology*. Vol. 59, 233–251.
- Pathak, S., Nilsen, B. 2004: Probabilistic rock slope stability analysis for Himalayan conditions. *Bull Eng Geol Environ*. Vol. 63, 25–32.
- Pothitos, F., Li, T. 2007. Slope Design Criteria for Large Open Pits - Case Study. In: *Proceedings of the 2007 International Symposium on Rock Slope Stability in Open Pit Mining and Civil Engineering*, Australian Centre for Geomechanics, Perth, 341–352.
- Potro, R. del, Hürlimann, M. 2008. Geotechnical classification and characterisation of materials for stability analyses of large volcanic slopes. *Engineering Geology*. Vol. 98, 1-17.
- Priest, S.D. 1993. *Discontinuity Analysis for Rock Engineering*. Chapman & Hall, London
- Priest, S.D., Brown, E.T. 1983. Probabilistic stability analysis of variable rock slopes. *Transactions of the Institute of Mining and Metallurgy*. Vol. 92, 1–12.
- Romana, M., Serón, J., Montalar, E. 2003. SMR Geomechanics classification: Application, experience and validation. 981–984.
- Rosenblueth, E. 1975. Point estimates for probability moments. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* Vol.72, 3812–3814.
- Rosenblueth, E. 1981. Two-point estimates in probabilities. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 5, 329–335.
- Saada, Z., Maghous, S., Garnier, D. 2012. Stability analysis of rock slopes subjected to seepage forces using the modified Hoek–Brown criterion. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. Vol. 55, 45–54.
- Schellman, M., Sepulveda, R., Karzulovic, A. 2006. Slope design for the east wall of Mantoverde Mine, Chañaral, Chile. In: *Proc. Int. Symp. on Stability of rock slopes in open pit mining and civil engineering situations*, The South African Institute of Mining and Metallurgy, Cape Town, 451–470.
- Shamekhi, E., Tannant, D.D. 2015. Probabilistic assessment of rock slope stability using response surfaces determined from finite element models of geometric realizations. *Computers and Geotechnics*. Vol. 69, 70–81.
- Sjöberg, J. 1999. Analysis of large scale rock slopes, *Doktori Tézis*, 1-790.
- Stead, D., Eberhardt, E., Coggan, J.S. 2006. Developments in the characterization of complex rock slope deformation and failure using numerical modelling techniques. *Engineering Geology*. Vol. 83, 217–235.
- Trunk, U. 1993. Probabilistic stability analysis of rock wedges. *Proceedings of Safety and Environmental Issues on Rock Engineering*. 227–232.
- U.S. Army Corps of Engineers 1997. *Engineering and Design: Introduction to Probability and Reliability Methods for Use in Geotechnical Engineering*. DEPARTMENT OF THE ARMY, Washington, DC
- Wang, C., Tannant, D.D., Lilly, P.A. 2003. Numerical analysis of the stability of heavily jointed rock slopes using PFC2D. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. Vol. 40, 415–424.
- Wesseloo, J., Read, J. 2009. Acceptance Criteria. In: *Guidelines for open pit slope design*. CSIRO Publishing, Collingwood, Ausztrália, 83–139.

Az M85 alagút kivitelezése során harántolt szarmata korú konglomerátum és homokkő rétegek mérnökgeológiai vizsgálata

Engineering geology of Sarmatian-age conglomerate and sandstone layers excavated during the construction of the M85 tunnel

Somodi Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Építőmérnöki Kar, Geotechnikai és Mérnökgeológiai Tsz., somodi.gabor@edu.bme.hu

Borsody János

HidroDuna Kft., borsody.janos@sddk.hu

Kerekgyártó Attila

SDD Konzorcium., kerekgyarto.attila@sddk.hu

Krupa Ágnes

Mecsekérc Zrt., krupaagnes@mecsekerc.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: A soproni bécsi dombot harántoló két párhuzamos alagút (M85) által harántolt kőzetek megjelenésében és fejthetőségében igen jelentős változások mutatkoznak meg. Ez a jelenség leginkább a vágathajtás során harántolt kavicsos és konglomerátum kőzettestek megfigyelése során volt szembeötlő. A homoktól a durva kavicsig terjedő mérettartományt tartalmazó, különböző vastagságú rétegekből álló ciklikusan ismétlődő, változatos megjelenésű rétegsor egymáshoz közeli helyeken, akár méteres távolságon belül is nagyfokú változatosságot mutatott, ami a cementációval és a szemcseméret változásával is szoros kapcsolatban volt. Ennek a változékonyságnak a kezelése fejtés technikai szempontból komoly kihívás elé állította a kivitelezőt, hiszen emiatt egészen eltérő fejtési módszereket és biztosítási módokat kellett igen rövid időn belül váltogatni. Az igen nagyfokú cementáltság- és szemcseméretbeli különbségek együttes következménye, hogy kis léptékben is extrém állékonyság és keménységbeli különbségek alakultak ki rétegen belül, ami erősen lelassította és emiatt a vártnál költségesebbé tette a vágathajtás ezen szakaszait. A konglomerátum rétegeket a fejtés során tapasztalt kiemelkedő ellenállásuk okán részletesebb vizsgálatok alá vetettük.

Kulcsszavak: konglomerátum, szarmata, Sopron, mészcementált üledék, változékonyság, alagútépítés

ABSTRACT: In the parallel tunnels near Sopron, the related lateral and vertical heterogeneity of the highly variable layer sequence was higher than expected. Some of the variability was connected to the sedimentological features and some to the degree of cementation during diagenesis; these characteristics varied from meter to meter. Uniquely challenging part was the crossing of the irregular shaped conglomerate layers, which appeared at the south tunnel in thick loose gravel body, and sometimes as a 10 m thick, massive hard rock in the north tunnel. Also, an additional significant problem was to cross a wide tectonic zone which, direction and dimension differed from the prediction. Even though these phenomena were affecting the rate of the excavation, the building time of the primary support and sometimes caused local stability problems, there was no significant effect on the calibration of the planned support and the global stability of the tunnels. The combined consequence of the high irregularity of the rock boundaries and the extreme differences in cementation was that the additional support had to be applied at larger quantities as planned and had a huge impact on the time and costs of the construction

keywords: conglomerate, sarmatian, calciferous sediment, variability, tunneling

1 BEVEZETÉS

Az M85-ös főútvonal Sopront északról kerülve a Bécsi dombi alagút párral kapcsolódik a város és a határ között húzódó régióban a régi 84-es számú főúthoz. Az alagutak az M85 2*2 sávós gyorsforgalmi út Fertőrákos csomópont – Sopron országhatár közötti 3,95 km hosszú szakaszán kerülnek kivitelezésre. A Az M85 ezen szakaszát és a 8647. jelű ~4 km hosszú 2*1 sávós Sopron ÉNy-i elkerülő út építéséhez szükséges kiviteli tervek készítését, valamint a kivitelezés megvalósítását az SDD Konzorcium végezi. Az alagutak vágathajtási munkálatai 2023.02.18-ig elkészültek és megkezdődött a végleges szerkezet építése. Az építkezés során az alagutak fejtése kiváló lehetőséget biztosított a Bécsi domb belső szerkezetének jobb megismeréséhez.

Az alagúthajtás során feltárt kőzetek az előzetes várakozásokhoz képest tektonikailag és belső szerkezetüket tekintve is változatosabb felépítésűeknek bizonyultak. Különösen sok nehézséget okozott a rétegsorban megjelenő karbonátos kötőanyagú éretlen kavics és homokos kavics, illetve a jobban cementált részeken az ebből képződött nagy szilárdságú konglomerátum, melyeket összefoglaló tervezési nevén K3/2-es rétegnek nevezett a Kiviteli terv (SDD Konzorcium, 2020a) és a kivitelezési munkát végzők (Somodi et al, 2021).

A K3/2 réteg változatos rétegrendjébe az alagutanként nagyjából 150 m hosszú egybefüggő harántolási szakaszokon a következők tartoznak: nagy keménységű mészhomokkő és konglomerátum kőzetrétegek, laza kavics, homokos kavics, kavicsos homok rétegek (lásd 1. ábra) , melyeket néhol 0,1-0,8 m vastag, kemény rétegek szakítanak meg, gyakran nem teljes szélességében a fejtési homloknak (lásd 2. ábra). A kemény és laza rétegek váltakozása a fejtés során problémát okozott, mivel a különböző keménységű rétegzettség eltérő fejtési módot igényelt. A kemény rétegek fejtése közben a kevésbé cementált, laza rétegek folyamatosan kiperegtek, felszakadtak a verőzés vagy tárcsás kőzetmaró használata során. A Déli alagútban a főtében ez a gyakran 2-3 m vastag homokos kavicsréteg nagyobb kiszakadásokra is hajlamos volt, ami homlokhorgonyok és sűrű előtűzős pallós kiegészítő biztosítás beépítését és a fogásmélység csökkentését tette szükségessé. Ez az előrehaladási sebességben is negatív hatásként jelentkezett, lelassította a vágathajtás ütemét. A kipergő kavics miatt túlfejtéssel is kellett számolni. A laza, kavicsos rétegek az Északi alagútban sokkal cementáltabbak voltak, ennek köszönhetően előtűző palló beépítése nélkül, csak előtűzéssel kellett biztosítani a főtét, ahol megjelentek a kavicsrétegek.

A felmerülő eltérésekről szélesebb körű geológiai vizsgálatok igyekeztek a kivitelezés számára értelmezést és javaslatokat biztosítani. Az elvégzett geológiai és geotechnikai munkák közül jelen cikkben a térképezés és a kőzetmechanikai vizsgálatok kerülnek bemutatásra.



1. ábra: A K3/2 homokos kavicsanyag a Déli alagútban a rétegek stabilizálására beépített pátrialemezekkel és homlokhorgonyokkal



2. ábra: A konglomerátum és kavicsrétegek váltakozása egy fejtési homlokon belül az Északi alagútban.

2 GEOLÓGIAI KÖRNYEZET

A terület a Soproni-hegység szomszédjában helyezkedik, ami a keleti Alpok kristályos övének legkeletibb egysége, ópaleozoós, takarós szerkezetű. Fő tömegében átalakult, kristályos kőzetekből – gneisz, csillámpala, fillit, kvarcit – épül fel. A hegység a vizsgált Bécsi-dombi területtől DNy-ra helyezkedik el, a kristályos kőzetek a Bécsi-domb környezetében egy ÉNy – DK-i irányú törés mentén több száz méter mélységbe süllyedtek. A Soproni hegység és környezete területén a földtörténeti középkor – triász, jura, kréta – és az újkor paleogén szakasza – paleocén, eocén, oligocén – földtani képződményei hiányoznak. A neogén képződmények közvetlenül a kristályos képződményekre települnek. A miocén időszak üledékei a Belső Alpi Bécsi-medence kifejlődésével egyezők, a Kisalföld felé átvezető, átmeneti részeként tekinthetők (Papp, 1974, Rosta, 1993, Harzhauser & Piller, 2004). Az alsó-miocén szintén hiányzik és az ottangyi, kárpáti (helvét) szárazföldi – folyóvízi – édesvízi üledékek a kristályos alaphegység egyenetlen térszínére települnek. A bádeni korban többféle üledék képződött. Egyik legismertebb kőzet a közönségesen bádeni agyagnak nevezett agyag, agyagmárga (Bádeni Agyag Formáció), amelyet a Sopron város DK-i részén lévő jelentős elterjedésű téglagyárak hasznosítottak. (SDD Konzorcium, 2020b)

Jelen ismereteink szerint rétegtanilag a Tinnyei és Kozárdi Formációhoz sorolhatók a Bécsi-dombot felépítő és az alagútban harántolt üledékes rétegek. Jellemzőjük, hogy Keletről Nyugat felé idősödnek az alagútban, keleties 5-15°-os rétegdőléssel települnek - megfigyelések szerint a szomszédos Dudlesz erdő területén is - és így a miocén időszak szarmata emeletéből a bádeni emelet felé haladó üledékes sorozat tárult fel az építkezés során. A rétegsor földtani jellegét tekintve bádeni nyíltvízi üledékekből transzgresszív jelleggel települő sekélytengeri sziliciklasztos üledékek, melyben delta környezetet, partközeli üledékképződést és újabb nyíltvízi üledékképződési környezeteket lehetett leírni. Az ehhez kapcsolódó laterális és vertikális heterogenitás miatt az egymással párhuzamos alagutakban a harántolt rétegsorok nagyon hasonlóak, de gyakran eltérő vastagságú elemekből épülnek fel. A változékonyság nemcsak a szedimentológiai jellegekből, hanem a diagenezis során kialakult cementáltsági fok változásából is adódik (lásd 2. ábra). Ezek a jellegek az előrehaladás során méterről méterre, fejtésenként változtak. További problémát jelentett, hogy az előre jelzett vetők helyett jellegében azoktól teljesen eltérő vetőzónák harántolására került sor, amelyek viszont jól egyeztek Spahic & Rundic (2017) eredményeivel (Somodi et al, 2021).

3 VIZSGÁLATI MÓDSZEREK

3.1 Mintavétel

Mind a Déli, mind az Északi alagútban a K3/2 tervezési réteg a várttól eltérő módon jelent meg. Ennek megfelelően a kőzetek mechanikai állapotát jellemző vizsgálatok, ásvány-, valamint kőzettani vizsgálatok is készültek. A kivitelezés során a Kiviteli terv mintavételi előírásait kiegészítő anyagvizsgálatokhoz rendszeres mintavételezés történt mindkét alagútból, így a K3/2 tervezési réteg konglomerátum, kavicsos homokkő, mészhomokkő rétegeiből is.

3.2 Alagút-térképezés módszertana

Az alagút építése közben feltárt talaj- és kőzet-viszonyok fejtési naplóban kerültek rögzítésre, a mérnökgeológiai osztály és az ahhoz tartozó elsődleges biztosítás elemeinek meghatározása mellett. Az alagút fejtésének előrehaladásával adott távolságonként, általában 10 százalékos átfedéssel teljes szelvényű fúrások mélyültek a vágattengellyel közel párhuzamosan a talaj és kőzet viszonyok meghatározására, illetve a talajvíz előrejelzésére. Az alagutak fejtésének előrehaladása során tapasztalt kőzettani jelenségek, stabilitást érintő események és azok tervezéshez viszonyított eltérései dokumentálásra kerültek a heti kockázattertelő jegyzőkönyvekben. A térképezést a Hidro-Duna Kft. munkatársai végezték.

3.3 Kőzetmechanikai vizsgálatok

A kiviteli terv alapjául szolgáló *Talajvizsgálati jelentés* (SDD Konzorcium, 2020b) kőzetmechanikai vizsgálatai az előzetes felszíni fúrások maganyagaiból készültek a BME Geotechnika és Mérnökgeológia Tanszék Geotechnikai és Mérnökgeológiai Laboratóriumában. A kiegészítő kőzetmechanikai vizsgálatokat három, egymástól független laboratórium végezte: a BME Geotechnika és Mérnökgeológia Tanszék Geotechnikai és Mérnökgeológiai Laboratóriuma, az Innovia Minőségellenőrzési Technológiai és Innovációs Kft. Laboratóriuma, valamint a Kőmérő Kft. Kőzetmechanikai Laboratóriuma. A mérések számát és típusát a következő, 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat: A kőzetmechanikai vizsgálatok típusa és száma laboratóriumonként

Laboratórium	Vizsgálat típusa	Vizsgálat száma (db)
BME Geotechnika és Mérnökgeológia Tanszék	Egytengelyű nyomószilárdság deformáció-méréssel	21
Innovia Kft.	Egytengelyű nyomószilárdság	26
Kőmérő Kft.	Egytengelyű nyomószilárdság deformáció-méréssel	8
	MFS vizsgálat	4

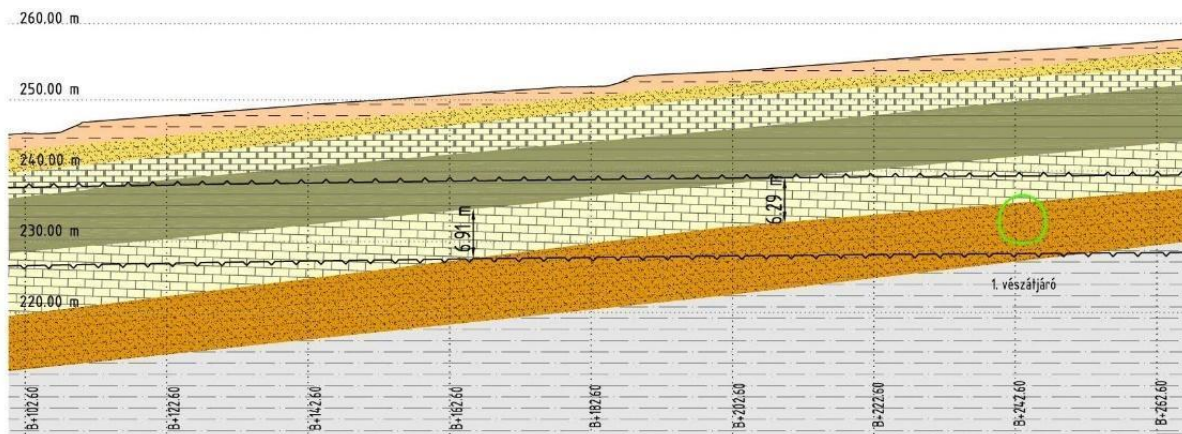
A kialakított mintatestek, a rendelkezésre álló kőzettömbök a laboratóriumok lehetőségeihez igazodva eltérő méretűek voltak, ahogyan a felszíni fúrások eredeti mintatestjei is, ezért a szakirodalmi kőzetmechanikai ajánlások alapján (Gálos M. és Vásárhelyi B., 2006.) az egységes átmérőhöz számított nyomószilárdsági értékek kerültek feldolgozásra.

4 EREDMÉNYEK

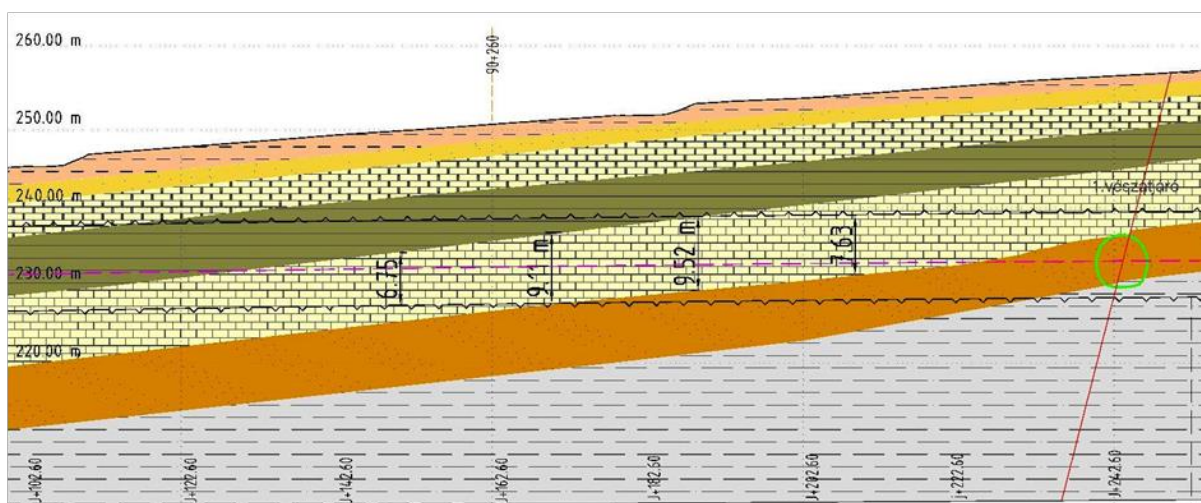
4.1 Alagút térképezés eredményei

A K3/2 réteg a Déli alagútban ~ 100 m környékén lép be a vágattalpon a szelvénybe és ~ 265 m körül hagyja el azt a főte irányában, míg az Északi alagútban szintén 100 m körül lép be alulról a szelvénybe és ~ 255 m körül hagyja el azt a főte irányában (3. ábra).

Elsőként a két alagútban megjelenő eltérő rétegvastagságok mutatják, hogy amíg a 3. ábrán ábrázolt Déli alagútban 6-7 méter közötti vastagságot lehetett mérni a K3/2 rétegre, addig a 4. ábrán az látható, hogy az Északi alagútban ez 9-10 méter között alakult. Ez igen jelentős különbség ahhoz képest, hogy a két alagút tengelytávolsága 24 m. A terepi megfigyelések során néhány esetben látható volt 5-50 cm nagyságrendű tektonikus elmozdulás a rétegsorban. Ezek részletes térképezésére - az elvetés nagyságrendje miatt - nem került sor, ugyanakkor az egyes alagutakon belüli vastagság változásában szerepet játszhattak.



3. ábra: A Bal (Déli) alagút megvalósult földtani szelvénye B+102,60 m és B+262,60 m között, a K3/2 tervezési réteg vastagságának feltüntetésével.



4. ábra: A Jobb (Északi) alagút megvalósult földtani szelvénye J+102,60 m és J+242,60 m között, a K3/2 réteg valós vastagságának feltüntetésével.

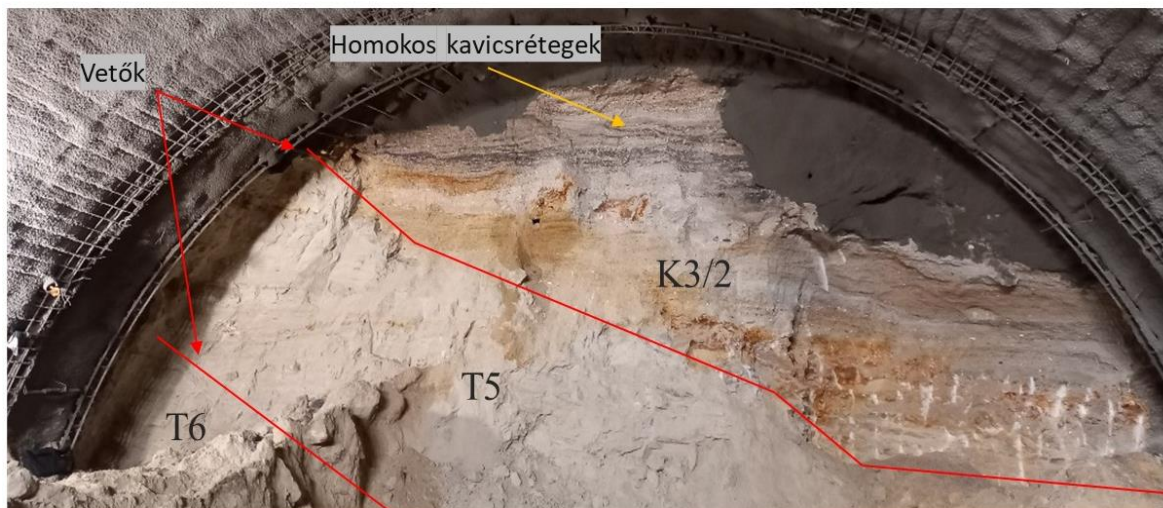
Az Északi és Déli alagút közötti különbséget az is jól mutatja, hogy adott szakaszon a Déli alagútban a tervezettnak megfeleltethető vastagságban és minőségben jelentek meg a tervezési rétegek, de a K3/2 esetében a várttól eltérő minőségben – a kőzet részek keményebbek, a kavicsrétegek vastagok és cementálatlanok voltak. Az Északi alagútban a K3/2 a kiviteli tervnél és a Déli alagútban tapasztaltnál is nagyobb mennyiségben, nagyobb vastagságban és eltérő minőségben jelent meg, ennek megfelelően a fejtűjében települő homokos- homokkőves rétegek vékonyabbak voltak.

Az 1-4. ábrák alapján megállapítható, hogy a K3/2 réteg megjelenése a Déli és az Északi alagútban nemcsak a kiviteli tervtől, de egymástól is jelentősen eltért. Az 1. ábra és a 2. ábra mutat példát a két alagútban megjelenő rétegekről. A kiviteli termben meghatározott értékektől mindkét alagútban nagyobb szilárdságú konglomerátum rétegek jelentek meg. A Déli alagútban a K3/2 tervezési rétegben a nagy keménységű kőzetrétegek között sokszor több méter vastagságú cementálatlan kavicsrétegek voltak jellemzők. Ez a fejtés során is problémát okozott, mivel az eltérő keménységű rétegzettség eltérő fejtési módot igényelt. Ez az előrehaladási sebességben is negatív hatásként jelentkezett. A kipergő kavics gyakran okozta a fejtési profil bővülését, akár 0,5 m nagyságrendben. A K3/2 rétegek az Északi alagútban sokkal cementáltabbak voltak, ami miatt elmondható, hogy csak minimális mennyiségű pártialemzett kellett beépíteni, a főte biztosításához az előtűzés is megfelelőnek bizonyult ott, ahol esetleg megjelentek a kavicsrétegek. Ugyanakkor a kavicsrétegek ugyan cementáltak voltak, és nem volt szükség pártiázásra, de 9-10 méter vastagságban jelentek meg a K3/2 réteg kemény kőzetei, melyek megfelelő fejtési profil kialakítása több időt igényelt.

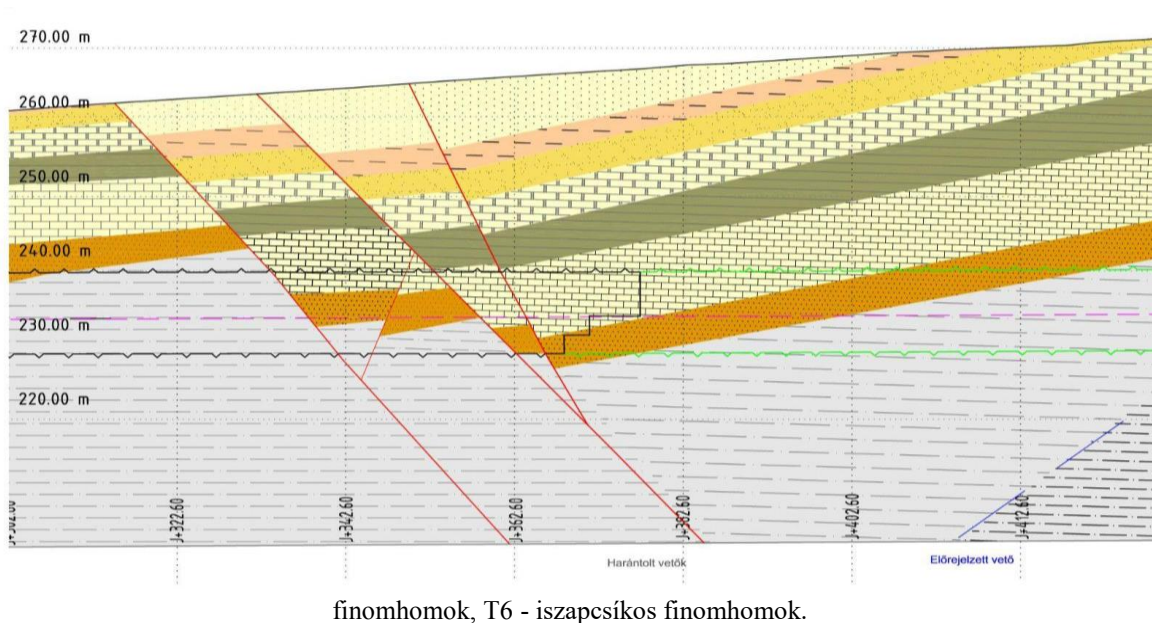
A kivitelezés során egy törészóna harántolásánál a K3/2 rétegek újra megjelentek az alagutak szelvényén belül (5-6. ábra). A vető fő dőlésiránya 310-330°, a vetőágak meredeksége a homlokon 60-80° között váltakozott. A vetőágak 1-5 cm vastag, iszapos-homokos repedéskitöltéssel jellemezhetők. A homlokon szeletes csúszások és 0.5-1 m³ tömbök kifordulása is jelentkezett a vetőzónán belüli

töredezettség miatt. Az alagút harántolása alapján a vetőzóna csapása ÉÉK-DDNy, dőlésiránya 295-300° és meredeksége 45-55° közötti.

A vetőharántolás után a Déli alagútban a korábbiakhoz hasonlóan újra kavics rétegek és közöttük kemény konglomerátum és kavicsos homokkő rétegek jelentek meg, ezzel ellentétben az Északi alagútban ismét hiányoztak a kavicsrétegek, csak jól cementált kőzetek fordultak elő. A kavicsrétegek főtepozícióban történő megjelenése újabb pártialemmez beépítést és sűrűbb előtűzést, nagyobb mértékű beton felhasználást követelt meg a Déli alagút biztosításának kiépítése közben, amíg az Északi alagútban ismét verőfejezés és tárcsás marózás következett, ami ismét lassulást eredményezett a kiviteli munkákban.



5. ábra: A vető megjelenése a bal (Déli) alagútban, K3/2 - konglomerátum és kavics, T5 - homokkő lemezes



finomhomok, T6 - iszapcsíkos finomhomok.

6. ábra: A K3/2 rétegek megjelenése egy törészóna hatására az Északi alagút hossz-szelvényén bemutatva.

4.2 Kőzetmechanikai vizsgálatok eredményei

A felszíni kutatás során az alagútépítés földtani környezetének megismerésére 8 darab felszíni függőleges előfúrás lett lemélyítve folyamatos magmintavétellel. Az ezekből készített minták vizsgálatának eredményei a vágathajtás során vett minták vizsgálati eredményeivel kerültek összehasonlításra (2. táblázat). A felszíni fúrásokból és a vágathajtásból származó minták változatos méretű és anyagú kavics nagyságú szemcsékből felépülő homokkő és konglomerátum típusú kőzetek voltak. Osztályozottságukat tekintve a "rossz", illetve "nagyon rossz" kategóriába lehet őket sorolni, attól függően, hogy mennyi volt a kavicsanyag aránya a mátrixot felépítő homokszemcsékhez képest.

A kavicsok anyaga főként kvarc volt, amely fokozta a mintatestek szilárdságát. (Kovács et al., Thethys Delta Bt., 2021)

A testsűrűség és a nyomószilárdság eredmények populációját mutatja be a 7. ábra, valamint a 2. táblázat. Jól látható, hogy a testsűrűség értékekben az eltérés kisebb a nyomószilárdsági értékek nagyfokú változásához képest. Az alagút fejtésből származó minták nyomószilárdság értékeinek mind az átlaga, mind a medián értéke jóval magasabb, ugyanakkor a szórásértékekben nincs nagy különbség.

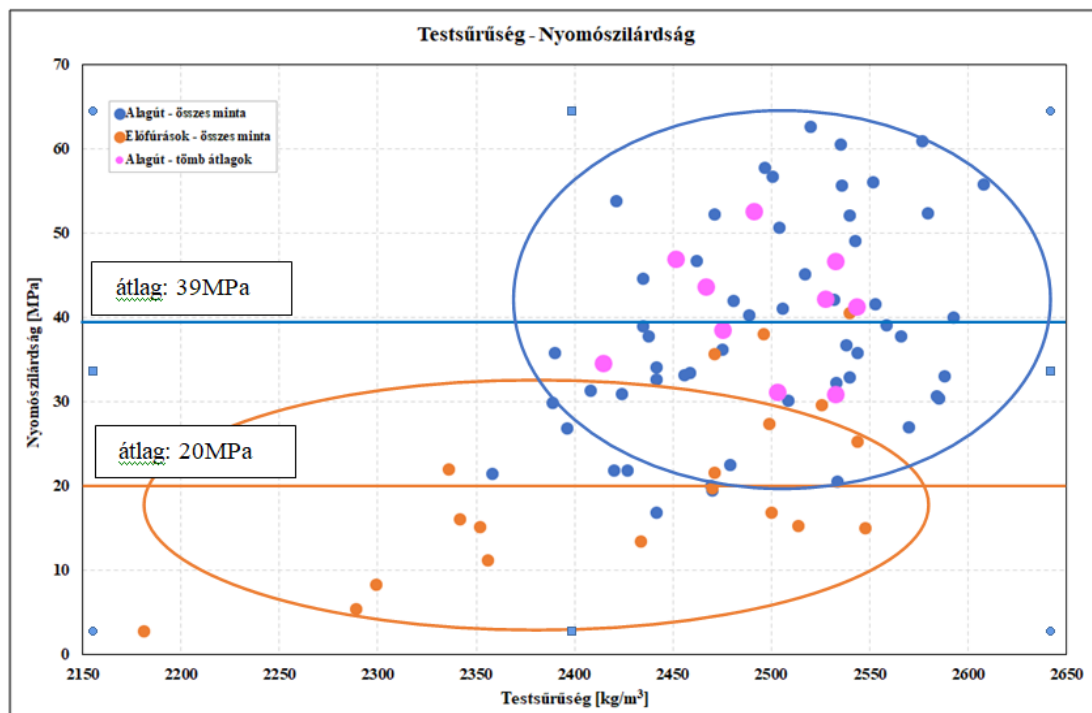
2. táblázat: Testsűrűség és nyomószilárdság eredmények populációja az előfúrások és a vágatbeli minták esetében

Paraméterek		Felszíni (elő) fúrások mintái	Alagúthajtás során vett minták	Eltérés	Eltérés (%)
Testsűrűség [kg/m ³]	Átlag	2430	2497	67	+3
	Minimum	2181	2358	177	+8
	Maximum	2548	2608	60	+2
	Szórás	106	62	-44	-41
	Medián	2471	2504	33	+1
	Darabszám	19	55	36	-
Nyomószilárdság [MPa]	Átlag	19,97	38,57	19	+93
	Minimum	2,87	16,91	14	+490
	Maximum	40,46	62,54	22	+55
	Szórás	10,61	12,12	2	+14
	Medián	16,91	36,67	20	+117
	Darabszám	19	55	36	-

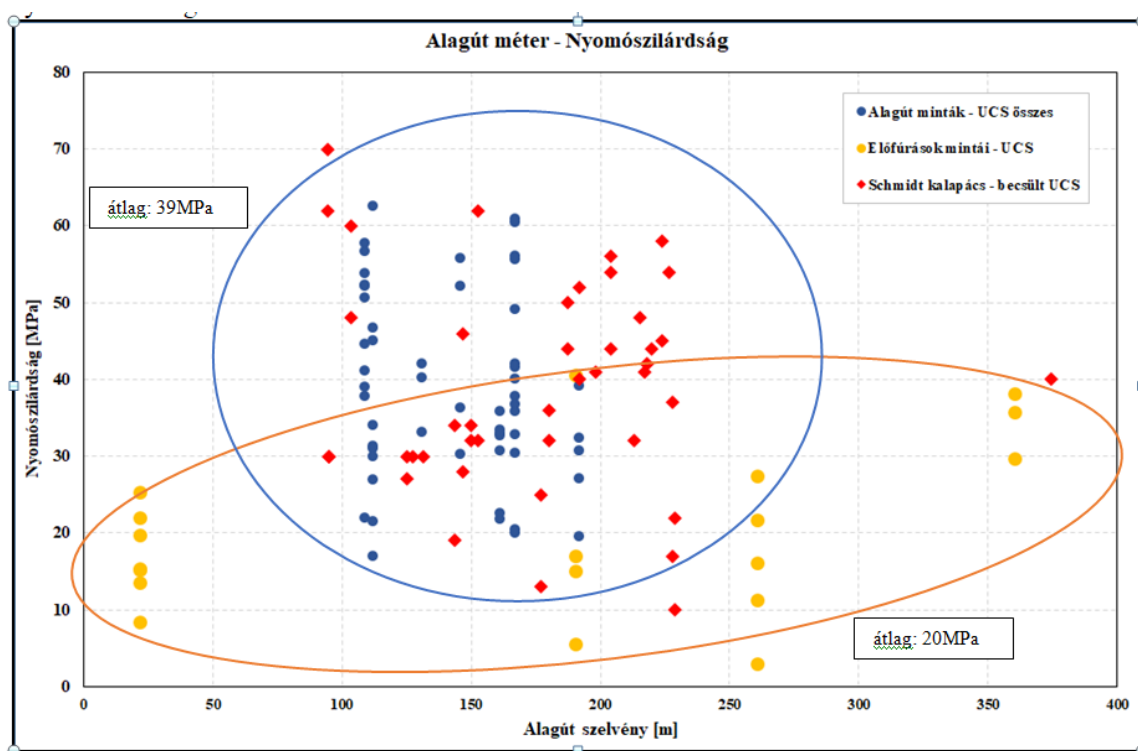
7. ábra: Testsűrűség és nyomószilárdság eredmények populációja az előfúrások és a vágatbeli minták esetében.

A testsűrűség függvényében történő nyomószilárdság változását mutatja a **8. ábra**. Az ábrán külön fel vannak tüntetve az alagút fejtése közben mintázott tömbök átlagos vizsgálati eredményei. Ezek alapján elmondható, hogy hasonló állapotú tömbök kerültek részletes vizsgálatra a K3/2 rétegből. Az előfúrások során készült vizsgálatok alacsonyabb értékekkel jellemezhetők, 20-40 MPa közötti nyomószilárdsági tartományban van metszete a két mintacsoportnak.

A vágathajtás során a fogásokban helyszíni Schmidt kalapácsos tesztek készültek, a homokkő és a konglomerátum rétegeken, melyek összesítve a 9. ábrán láthatók. A Schmidt kalapács teszt során a betonokkal egyező módon, a kalapács visszapattanási értékéből a nyomószilárdság becsülhető (Gálos M. és Vásárhelyi B., 2006, Vásárhelyi 2016). Az elvégzett helyszíni vizsgálatok alapján elmondható, hogy ezek az értékek a laboratóriumi vizsgálatok eredményeivel jól korrelálnak. Érdekes módon a Schmidt kalapács tesztek eredményei inkább az alagutas minták eredményeihez hasonlítanak, azokhoz jobban közelítenek. A tesztek alapján átlagosan 30-50 MPa a becsült nyomószilárdság, de 10-70 MPa közötti tartományban mozog.



8. ábra: Testsűrűség függvényében ábrázolt nyomószilárdsági értékek az előfúrások és a vágatbeli minták esetében.



9. ábra: Az előfúrások mintái és a vágatbeli minták nyomószilárdsága, valamint a Schmidt kalapács tesztek becsült nyomószilárdsága az alagutak nyomvonal mentén ábrázolva.

A Kőmérő Kft. közetmechanikai vizsgálatai során 8 db mérőbélyeges UCS, továbbá 4 db többlépcsős tönkremeneteli állapot meghatározására szolgáló teszt (továbbiakban MFS, Multiple Failure State teszt) készült a K3/2 kavicsos homokkő és konglomerátum mintáin. A 4 db tömbminta mindegyike ugyanazon szelvényből származott. Ugyanazon mintavételi helyről ásványtani vizsgálatok is készültek (Thethys Delta Bt., 2021). Az MFS tesztekre minden tömbből 1-1 db került kialakításra. A minta-előkészítés és a vizsgálatok kivitelezése az ISRM vonatkozó ajánlásai szerint történt. Kiemelendő, hogy az összes mintát probléma nélkül sikerült a tömbökből kifűzni és kialakítani (nem volt szükség javításra vagy ragasztásra), tehát a tesztek eredményeként kapott paraméterek valóban a kőzetek intakt állapotát jellemzik. (Kovács et al., 2021) A deformáció-méréssel végzett UCS-vizsgálatokból kapott eredmények szerint a mintatestek - a konglomerátum kőzettípusokhoz

viszonyítva - meglehetősen magas szilárdsági és rugalmassági paraméterekkel jellemezhetők. Az egytengelyű nyomószilárdsági (UCS) értékek a 20 és 60 MPa tartományban mozognak, de ami ennél is kiemelkedőbb, hogy a rugalmasságra 22 és 62 GPa közötti Young-modulus értékek (41,64 GPa átlaggal) adódtak. Megfigyelhető volt az is, hogy a testsűrűség növekedésével várható a magasabb szilárdsági és rugalmassági értékek, de a paraméterek közötti korreláció meglehetősen alacsony.

Az összesen 4 db MFS-vizsgálatból 3 esetben a Mohr-Coulomb-elmélet szerint meghatározott paraméterek egyrészt viszonylag közel esnek egymáshoz, másrészt ezek meglehetősen magas értékek (Kohézió: 16-22 MPa; Belső súrlódási szög: 42-48 fok). Az is megjegyzésre érdemes, hogy a törés utáni (reziduális) belső súrlódási szögek igen magasak, két minta esetében meghaladják az intakt értéket is (Kovács et al., 2021).

5 VIZSGÁLATOK ALAPJÁN LEVONHATÓ KÖVETKEZTETÉSEK A KONGLOMERÁTUM KEMÉNYSÉGÉRŐL ÉS HETEROGÉN MEGJELENÉSÉRŐL

A térképezési és közetmechanikai eredmények alapján kijelenthető, hogy a K3/2 tervezési rétegre jellemző konglomerátum és kavicsos homokkő minták megjelenése, települése és közetmechanikai viselkedése a várttól eltérő volt. A 7-9. ábrán és a 2. táblázatban bemutatott eredmények mind azt bizonyítják, hogy a megjelenő közetek szilárdsága magasabb, mint azt a kiviteli tervben (SDD Konzorcium, 2020a) leírtak mutatták. A magas szilárdsági és rugalmassági értékek mellett az is kiemelendő, hogy a magas reziduális mechanikai paraméterek mellett a tönkremenetel utáni állapotban is nagyon ellenálló viselkedést mutatnak. Összességében ezek az eredmények egy rendkívül szívós, nehezen jöveszthető közetre utalnak, amely a két vágatban eltérő vastagságban és cementációs fokkal jelenik meg, de ezen túlmenően gyakran méterről méterre, vagy egyetlen fejtési homlokon belül is változik. A vastag kavicsrétegek döntően a Déli alagútban jelentek meg.

Az elvégzett vizsgálatokból levonható következtetések, hogy a konglomerátum és homokkő réteg keménységét a következő tényezők befolyásolják:

- a fiatal üledékes közet nem tartalmaz nagy mennyiségű meghatározó törést, így a közetszövet felépítése a meghatározó a tönkremenetel során,
- a gyengén osztályozott, vagy osztályozatlan szövetben nehezen alakulnak ki tönkremeneteli síkok az első lépésben, így a mállott karbonát szemcsék és a cementáló kalcit megy tönkre.

A kivitelezés közben tapasztalt földtani-geotechnikai változékonyság vertikálisan és laterálisan is nagyobb, mint várható volt a kiviteli tervezés során. Ez a heterogenitás jelentkezik a K3/2 tervezési réteg szöveti és mechanikai tulajdonságainak nagy szélső értékek között mozgó változékonyságában, a tervhez viszonyított eltérésben és a két alagútban tapasztalt különböző megjelenésben. Az alagutakban harántolt vetők és vetőzónák nem azonosíthatók az előrejelzett vetőkkel: nemcsak a harántolás helye, de a megjelent vetők iránya, dőlése és jellege is eltér. Az alagút fejtése során jelentkező nagyfokú inhomogenitásból adódó problémák (pl.: kipergés, gyenge, nem állékony homlok) lokálisan kezelhető stabilitási gondot okoztak, a tervezett biztosítás méretezését azonban nem befolyásolták. A vártnál nagyobb szilárdságú és szabálytalan kiterjedésű konglomerátum rétegek, illetve kőzettestek az előrehaladás sebességének jelentős csökkenését okozták és nagyobb teljesítményű munkagépek beszerzését indokolták. A lokális problémák következménye volt, hogy a kiegészítő biztosítási módokat széles körben, a kihajtott alagút szakaszok túlnyomó részén alkalmazni kellett.

6 KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatások és a cikk nem jöhetett volna létre a Hidro-Duna Kft. és Innovia Kft. kollégáinak munkája és segítsége nélkül. Külön köszönetet szeretnénk kifejezni Bodri Tamásnak, a Hidro-Duna Kft. vezető tervezőjének.

IRODALOMJEGYZÉK:

- Gálos M.; Vásárhelyi B., 2006: Kőzettest osztályozások az építőmérnöki gyakorlatban Műegyetemi kiadó. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika kiskönyvtár 1
- Fodor, L., 1992. Tectonic Setting of the Eisenstadt Area. In: Sauer, R., Seifert, P. and Wessely, G., Eds., Guidebook to Excursions in the Vienna Basin and the Adjacent Alpine-Carpathian Thrustbelt in Austria. Mitteilungen der Geologischen Gesellschaft Wien 85: 124-126.

- Harzhauser, M., Piller E. W., 2004: Integrated stratigraphy of the Sarmatian (Upper Middle Miocene) in the western Central Paratethys. *Stratigraphy*, vol. 1, no. 1, 2004
- Kovács L., Gál V., Gelencsér K., Horváth T., Zipfné Mázik K. (Kőmérő Kft.), 2021: Adatszolgáltatás kőzetmechanikai laboratóriumi mérések eredményeiről. Pécs, 2021.11.02
- Mádai F., Balassa Cs. (Miskolci Egyetem), 2021: J-105 megnevezésű kavicsminta (homokos kavics) ásvány-kőzettani vizsgálata. Vizsgálati jegyzőkönyv.
- Papp, A., 1974. Faziostratotypus: Wiesen D II. Burgenland, Wiener Becken. In: Papp, A., Marinescu, F., and Senes, J., Eds., *M5.Sarmatian.Chronostratigraphie und Neostratotypen*, 4: 176-182
- Rosta, É., 1993. Gilbert-típusú delta a Sopron-környéki szarmata-pannóniai üledékekben. *Földtani Közlöny*, 123: 167-193
- Somodi G., Krupa Á., Borsody J., Bodri T., 2021: Alagútépítés változatos geológiai és geotechnikai környezetben. Alagút és Mélyépítő Szakmai Napok, Budapest, 2021.11.11-12.
- Spahić D & Rundić L., 2015: Multi-phased normal faulting of the Eisenstadt-Sopron basin margins as a controlling factor over spatially confined coal mini-hydrocarbon play (East Austria). *Carpathian journal of earth and environmental sciences*. 10. 45-58.
- SDD Konzorcium, 2020a: Zárt Alagútszakasz Ideiglenes Megtámasztásának Kiviteli Tervei - Tervezési Beszámoló
- SDD Konzorcium, 2020b: Zárt Alagútszakasz Ideiglenes Megtámasztásának Kiviteli Tervei - Talajvizsgálati jelentés
- Thetys Delta Bt., 2021: A B-221 és J089_3 jelű homokkő, valamint J089_1 és J089_2 jelű konglomerátum minták petrográfiai, katódlumineszcens és pásztázó elektronmikroszkópos vizsgálata. Jegyzőkönyv.
- Vásárhelyi B., 2016: Az alkalmazott kőzetmechanika alapjai. Hantken Kiadó Mérnökgeológia-Kőzetmechanika kiskönyvtár 21.

A kőzettestek töredezettségének minősítése az RQD mérőszám újraértelmezésével

Fracture density rating of rock mass through reinterpreting the determination of RQD (Rock Quality Designation) value

Vásárhelyi Balázs

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Építőmérnöki kar, Geotechnikai és Mérnökgeológiai Tanszék, vasarhelyi.balazs@emk.bme.hu

Somodi Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Építőmérnöki kar, Geotechnikai és Mérnökgeológiai Tanszék, somodi.gabor@edu.bme.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: A fúrómagok minősítésének legelterjedtebb módja az ún. RQD érték meghatározása, mely a 10 cm-nél hosszabb maganyagok %-os arányát mutatja be egy meghatározott hosszúságú fúrómag-szakaszon. Ez a minősítési eljárás alap-paraméter a legfontosabb kőzettest osztályozási eljárásban (RMR, Q), de segítségével a mind inkább teret nyerő Geológiai Szilárdsági Index (GSI) is pontosan megadhatóvá válik. Régóta ismert hiányossága az RQD tényezőnek, hogy nem tesz különbséget a 10 cm-nél hosszabb maganyagok között (100 % jön ki 1 méteres és 10 db 10 cm-es magok esetén is), valamint a rövidebb egységek esetén is egységes eredményt kapunk. Jelen cikkben bevezetésre kerül az ún. Integrált RQD (IntRQD) tényező, mely ezen hibákat kiküszöböli, valamint lehetőség nyílik a fúrómag töredezettségi rendszerének jobb leírására is.

Kulcsszavak: RQD, fúrómag leírás, töredezettség, kőzettest, GSI

ABSTRACT: The most common method of classifying drill cores is to determine the RQD value (Deere, 1964), which indicates the percentage of core material longer than 10 cm in a given core length. This core logging procedure is the basic parameter in the most used rock mass classification methods like RMR and Q. It is also used to determine the Geological Strength Index (GSI), which has become popular in the last 20 years. One of the basic problems of the RQD factor is that it does not distinguish between core materials longer than 10 cm (100 % is obtained for one piece of 1 m length and 10 pieces of 10 cm length cores) and a uniform result is obtained for shorter units. In the present paper, the so-called Integrated RQD (IntRQD) factor is introduced to eliminate these errors and to allow a better description of the fracture density in core logging procedure.

keywords: RQD, core logging, fractures, rock mass, GSI

1. BEVEZETÉS

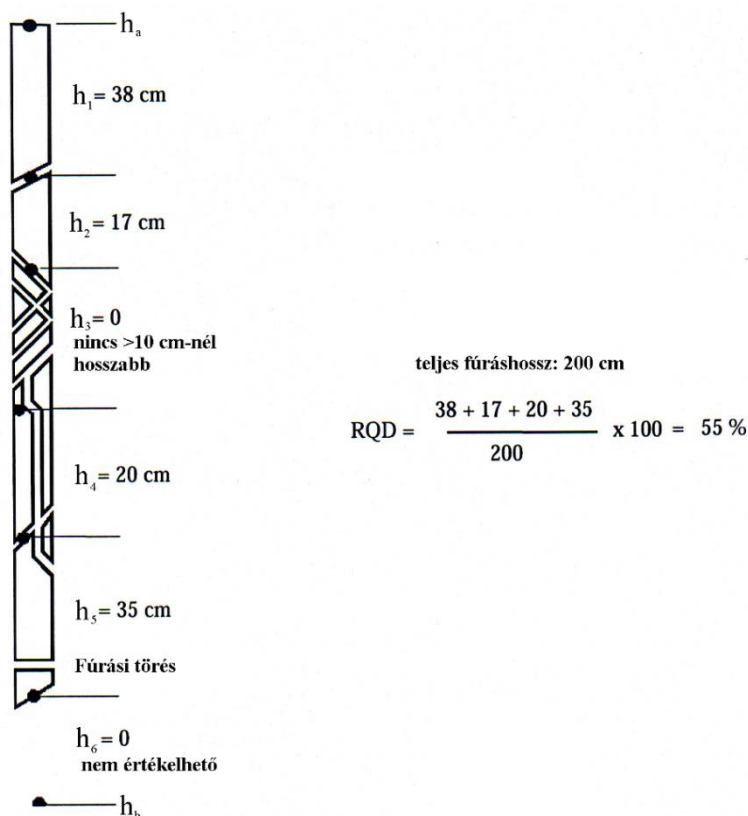
A fúrómagok elemzésénél, vizsgálatánál, minősítésénél és annak számszerűsítésére az RQD-módszer (RQD = Rock Quality Designation) terjedt el, és vált napjainkra szinte egyeduralmúvá (Deere, 1964). Ezt a legtöbbet használt kőzettest osztályozási módszerek (Bieniawski féle RMR és a Barton által bevezetett Q-módszer) mint alapadatot is felhasználja (Gálos és Vásárhelyi, 2006; Vásárhelyi, 2016). Az RQD értéket előbb fúrómagra határozták meg, később sziklafalak elemzésére is kiterjesztették – de jelen cikkben kizárólag fúrómag-elemzéssel foglalkozunk. Fontos azért megjegyezni, hogy kisebbfajta szakmai vita alakult ki az RQD tényező homlokfalon való használhatóságáról, melynek következtében egyesek már ezen tényezőt „temették” is (vagy legalábbis temetni szerették volna) (lásd. Pells et al, 2017).

Az RQD érték meghatározásánál a fúrómagból, (melynek átmérője minimálisan 55 mm) és a kihozott magmintadarabok hosszának méréséből indultak ki. Maga a mérőszám százalékban adja meg azon daraboknak az össz-hosszát, melyek hosszabbak, mint 100 mm, azaz az RQD érték:

$$RQD_n = \frac{\sum h_{10}}{h_b - h_a} 100[\%] \quad (1)$$

ahol $\sum h_{10}$ a 10 cm-nél hosszabb darabok összhossza, h_b és h_a pedig a vizsgált mélységköz felső és alsó mélysége.

Deere (1989) szerint azon fúrások is épnek tekintendők, amelyen a tagoló felület a fúrástengellyel megegyezően helyezkedik el. Javaslat alapján a kiszámítás lehetőségét egy példán keresztül mutatjuk be a 1. ábra segítségével.



1. ábra. Példa az RQD meghatározásának módszeréhez (Deere, 1989)

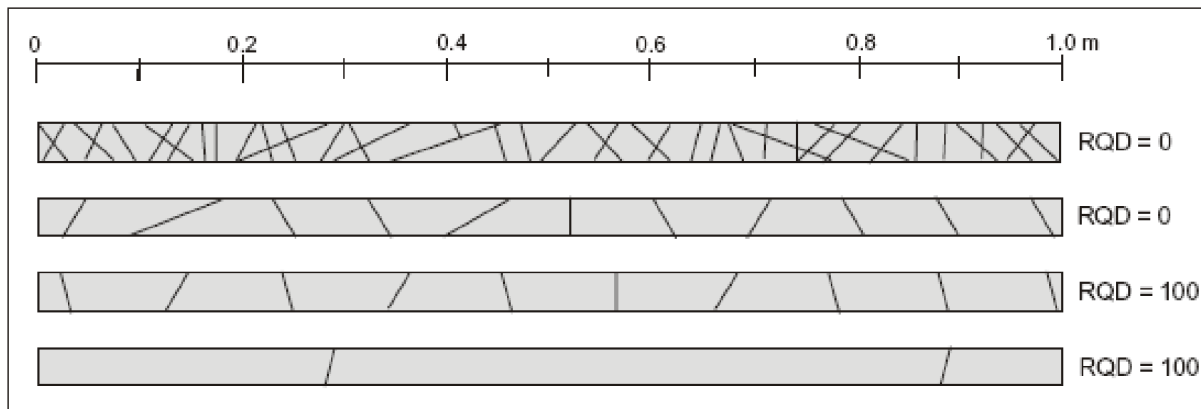
Az 1. táblázat a gyakorlati megfigyelések alapján megállapított RQD érték és a kőzettest osztályok közötti kapcsolatot adja meg. Ez a táblázat megegyezik az EUROCODE 7-1-ben megadott osztályozással.

1. táblázat. Kőzettestek osztályozása az EUROCODE 7 -1 szerint a kőzetmechanikai megnevezésekkel

RQD %	Kőzettest minősítése EUROCODE 7-1 alapján	Kőzettest kőzetmechanikai minősítő megnevezése
> 25	Nagyon gyenge	Gyakorlatilag talajként kezelhető
25 – 50	Gyenge	Nagyon töredezett
50 – 75	Megfelelő	Töredezett
75 – 90	Jó	Kisé töredezett
90 – 100	Kiváló	Ép

Az RQD tényező hiányossága már annak megalkotása idején is érezhető volt. Egyik próbálkozás az elemzés pontosítására Hansági nevéhez fűződik, aki a kirunai bányák maganyagjainak vizsgálatát végezte el (Hansági 1965, 1974; 1986). Vásárhelyi et al (2007) a bátaapáti fúrómagok statisztikai elemzésével mutatta ki, hogy szoros statisztikai kapcsolat adható meg a Hansági féle számolási módszer és az RQD tényező között. Kijelenthető, hogy bár sok tekintetben a kiruna módszer pontosabb eredményt ad, az RQD tényezőnél felvetett problémákat nem oldja meg.

Palmström (2001) és Palmström (2005) részletesen elemezte az RQD tényező hiányosságait, rámutatva annak irányfüggőségére, valamint a meghatározásában rejlő ellentmondásokra is. A 2. ábra Palmström (2001) mérési eredményét mutatja, rámutatva ezen érték használatának buktatóira: amint az ábrán jól látszik, lényeges eltérés is lehet mind az RQD = 0 %, mind az RQD = 100 %-os értékkel jellemezhető fúrásszakasz valós repedezettségi képe között. Amint az ábra jól szemlélteti, RQD = 0 %-ot kaphatunk abban az esetben is, ha teljesen töredezett a fúrómag, és akkor is, ha a kihozott ép magok hossza éppen nem éri el a 10 cm-t. Ugyanez igaz az RQD = 100 %-ra.



2. ábra. Példa a minimális (0 %) és maximális (100 %) RQD tényezőkre (Palmström, 2001)

Felvetődik a kérdés: hogyan lehetséges a Palmström által felvetett problémát orvosolni. Erre teszünk javaslatot az integrált RQD érték bevezetésével, melyet egy bátaapáti feltáró fúrás vizsgálatán keresztül mutatunk be. Az alábbi ábrán a fúrásra jellemző repedezettségi állapotokat mutató magládafotók láthatók a döntően monzogranitban mélyült fúrómaganyagon.



2. ábra. Változatos repedezettségi állapotokat mutató magládafotók

2. HOSSZFÜGGŐ RQD

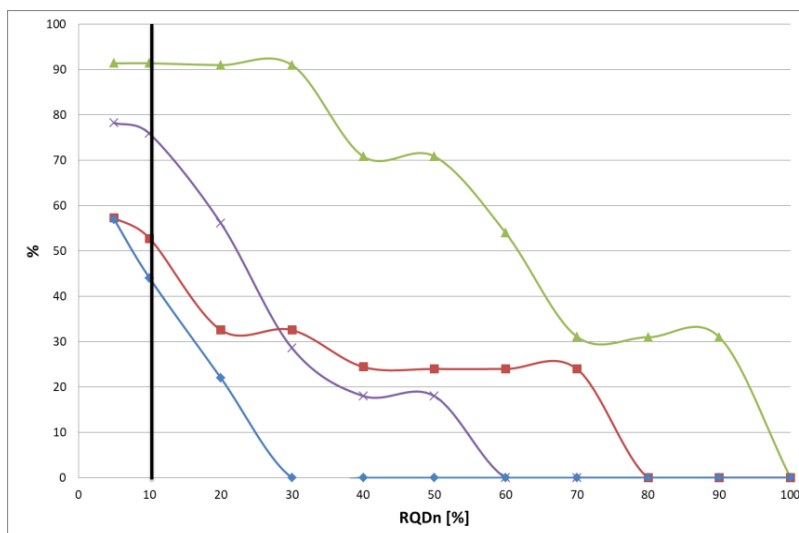
Az (1) egyenlet felírható olyan módon is, hogy egy tetszőlegesen választott hosszúságú magdarabok össz-hosszát nézzük az adott szakaszon, azaz:

$$RQD_n = \frac{\sum h_n}{h_b - h_a} 100[\%] \quad (2)$$

ahol $\sum h_n$ az n cm-nél hosszabb darabok összhossza, h_b és h_a pedig a vizsgált mélységköz felső és alsó mélysége.

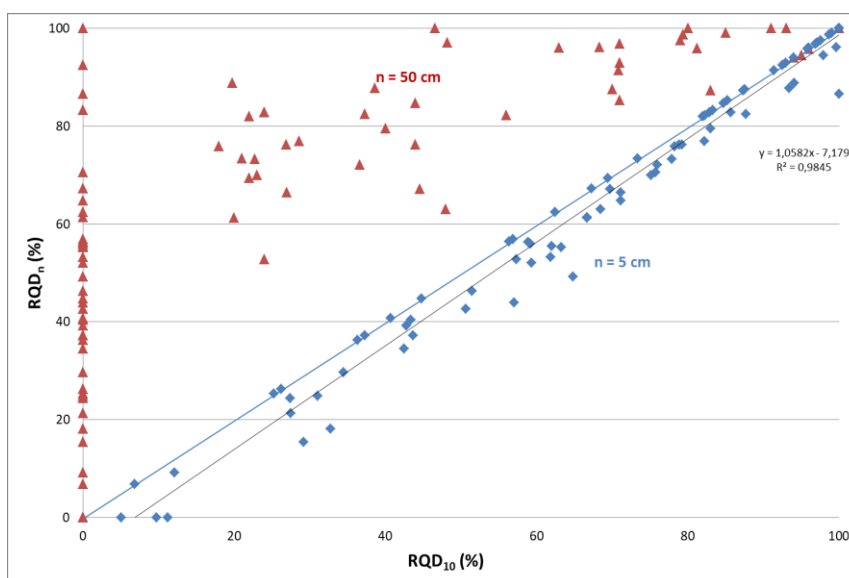
Ezen egyenletnél n értéke tetszőleges lehet, de mérnöki megfontolásból 5 cm után a 10, 20, 30.... 100 cm-es magdarabok összhosszát vizsgáltuk meg. Fontos felhívni a figyelmet: a vizsgált hossz az akár 3 méter is lehetett, mivel az azonos töredezettségi rendszer alapján egy egységnek tekinthetővé vettük. Azaz az adott RQD tényező nem 1 méteres szakasznak tekinthető érték, így lehetséges az, hogy az 1 m-es teljes magkihozatal az az adott RQD szakaszon csak 30 %-os eredményt adott.

A képletből egyértelműen látszik, hogy jól elkülöníthetővé válik a pl. 1 méter hosszon 3 db 10 cm darab ($RQD_{10} = 30\%$; $RQD_{20} = 0\%$; $RQD_{30} = 0\%$) és 1 db 30 cm-es magkihozatal eredménye ($RQD_{10} = 30\%$; $RQD_{20} = 30\%$; $RQD_{30} = 30\%$). A 3. ábra néhány ilyen eseteket mutat be. Az adatok a Bataapátiban épült radioaktív hulladéktároló kutatófúrásainak maganyagán elvégzett geotechnikai értékelésből származnak. A görbék jól mutatják, hogy az adott RQD értékhez hosszabb, vagy több rövidebb magdarab tartozik-e, valamint hogy a szakaszok töredezettség sorrendje is változik a különböző RQDn értékeknél



3. ábra: Vizsgált 3 m hosszú repedezettségi szakaszok különböző RQDn % értékeinek alakulása.

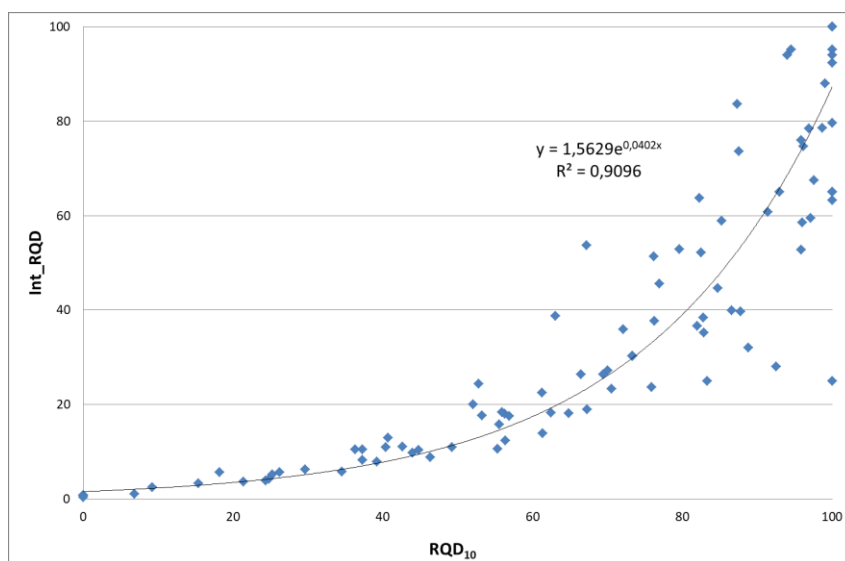
A 4. ábrán az látható, hogy ha az eredeti 10 cm-es hosszra értelmezett RQD értékeket vizsgáljuk az új szemlélet alapján értékelt magdarab-hosszokkal, akkor azok hogyan viszonyulnak egymáshoz. Az ábrán az 5 cm-es legkisebb maghosszú darabok és az eredeti RQD értékek nagyon szoros kapcsolatot mutatnak. Az 50 cm-es maghosszra értelmezett RQD és az eredeti definíció szerinti RQD értékek már sokkal inkább eltérnek, a kapcsolat szorossága megkérdőjelezhető. Egy ilyen ábra a telephely kutatási szempontú értékeléseknél anyagfüggő tulajdonságokat is jellemezhet.



4. ábra: Az RQD_5 és RQD_{50} repedezettségi értékek és a hagyományos RQD meghatározás közötti kapcsolat.

3. INTEGRÁLT RQD BEVEZETÉSE

A hosszfüggő RQD bevezetésével előálló függvények (lásd 3. ábra) lehetőséget teremtenek egy egyedi értékelési módszer kialakítására. Amennyiben minden szakaszra előállítjuk a hosszfüggő RQD értékeket a függvény alatti terület nagysága egyedileg változik és szélesebb minősítési lehetőséget biztosít számunkra az adott kőzettest töredezettségének jellemzésére az így előállított Integrált RQD (Int_RQD) érték. A függvény és így az Integrált RQD előállításához nem szükséges a pontos fúrás menti pozíciók meghatározása, ugyanakkor a későbbi értékelések és újraértékelések szempontjából ajánlott. Az 5. ábra megmutatja az új értelmezés és a régi RQD számolás közötti kapcsolat szorosságát, de az is jól megfigyelhető, hogy sok esetben a 100 %-os RQD érték esetén jelentősen eltérő Int_RQD értéket kaptunk. Az ábrán jól látható, hogy jelentős eltérések adódhatnak az $RQD_{10} > 50\%$ feletti tartományban és ez nem szisztematikusan egy irányban következik be. Ezen eltérések a cikkben felvetett kérdésre adnak választ: a bevezetett Int_RQD tényező segítségével lehetőség nyílik a minden esetben 10 cm-t meghaladó maganyagból álló (azaz 100 %-os) RQD értékek további minősítésére is.



5. ábra: Az Integrált RQD és a hagyományos RQD közötti függvénykapcsolat.

4. ÖSSZEFOGLALÁS, TOVÁBBI LEHETŐSÉGEK

A bemutatott integrált RQD érték kiküszöböli az RQD meghatározásának egyik legnagyobb hátrányát, vagyis a 10 cm-hez tartozó mérettel járó korlátokat. A Hansági-féle Kiruna értéknél is jobb megközelítésben ad a töredezettségi mérőszámot. Az értékeléseket bármilyen hosszú szakaszon el lehet végezni, attól függően, hogy gyors adatok kellenek a fúrásokról és kiépítésenként szeretnénk őket megkapni, vagy részletes töredezettségi felmérést készítünk műszaki létesítmények tervezéséhez. Ha rendelkezésre állnak korábbi kutatási projektekből részletesen felmért RQD értékelések, azok újraértékelése is lehetséges. Lehetőséget ad továbbá arra is, hogy a geológiai alapú szakaszolásokhoz is adjon egy a földtanhoz illeszkedő, pontosabb töredezettségi eloszlást.

A megközelítéssel az RQD összes hátránya nem kezelhető, de Pells et al (2017) által képviselt állásponttól eltérően megoldást kínál nemcsak az RQD további használatához és értelmezéséhez, hanem a múltbeli részletes adatbázisok újraértelmezésére is lehetőséget kínál.

A repedezett kőzettestek minősítésére alkalmazott Geológiai Szilárdsági Index (GSI) Hoek et al.(2013) által javasolt meghatározásánál az RQD érték közvetlenül bekerült a számítási képletbe. Mivel az Integrált RQD pontosabb képet ad a töredezettség állapotáról, így lehetőség van a GSI érték pontosabb meghatározásához is, ahol a kőzettömbök/blokkok méreteit lehet ezzel parametrizálni.

FELHASZNÁLT IRODALOM:

- Eurocode 1997-1: Geotechnikai tervezés, 1: Általános szabályok.
- Deere D.U. 1964: Technical description of rock cores for engineering purposes. *Rock Mech. & Engng. Geol.* **1**: 17-22
- Deere D.U. 1989: Rock quality designation (RQD) after 20 years. US Army Corps. Engrs Rep. GL-89-1.
- Gálos M.; Vásárhelyi B. 2006: Kőzettest osztályozások az építőmérnöki gyakorlatban Műegyetemi kiadó. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika kiskönyvtár 1
- Hansági I. 1965: Numerical determination of mechanical properties of rock and of rock masses. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **2**: 219-223.
- Hansági I. 1974: A method of determining the degree of fissuration of rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abst.*, **11**: 379–388.
- Hansági I. 1986: *Gyakorlati kőzetmechanika az ércbányászatban*. Műszaki Kk. p. 172.
- Hoek, E., Carter, T.G., Diederichs M.S., 2013. Quantification of the Geological Strength Index Chart. 47th US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium.
- Palmström A. 2001: *Measurement and characterization of rock mass jointing*. In: In situ characterization of rocks (Eds: Sharma, V.M.; Saxena, K.R.) 49-97.
- Palmström A. 2005: Measurements of and correlations between block size and rock quality designation (RQD) *Tunnelling & Underground Space Techn.* **20**: 362-377.
- Pells, P.J.; Bieniawski, Z.T.; Hencher, S.R.; Pells, S.E. 2017: Rock quality designation (RQD): time to rest in peace. *Canadian Geotechnical Journal*. 54(6): 825-834.
- Vásárhelyi B.; Váró Á.; Kovács L. 2007: Analyzing the fissuration of the boreholes and comparing the different methods. *Cent. Eur. Geol.* **50**(4): 343–351.
- Vásárhelyi B. 2016: Az alkalmazott kőzetmechanika alapjai. Hantken Kiadó Mérnökgeológia-Kőzetmechanika kiskönyvtár 21

Water vapor permeability of the dolomite from the Crac des Chevaliers Castle in Syria

Ola Bilal

Pázmány Péter Catholic University, Faculty of Humanities and Social Sciences, olabilal11@gmail.com

ABSTRACT: This study was dedicated to evaluate the permeability of the dolomitic stones of building stone lithotypes of the Crac des Chevaliers castle. Crac des Chevaliers was recognized in 2006 by UNESCO as a world heritage. It is located in Syria and is considered one of the most important crusader castles built in the 12th century. The castle was built from carbonate sedimentary stones (dolomite and limestones). Weathering crusts with different thicknesses have formed on stone surfaces over the centuries. Water vapor permeability is an important water transport value in addition of the capillary water uptake in porous materials. The aim of the experiment was to compare the water vapor permeability of the different lithotypes and to compare the non-weathered stones with crust-covered stones to evaluate the effect of the formation of crusts. Specimens of 8 carbonatic stone lithotypes with different porosity and stone structures were examined: four microcrystalline dolomite, two dolomitized micro bioclastic wackestone, one laminated dolomite, and one dolomitic limestone. The bulk density ranged between 1.9 and 2.4 g/cm³, and the open porosity between 11 and 32 v/v%. The results revealed that the open porosity of the non-weathered samples influenced the water vapor permeability, but the lithotypes with the same high porosity resulted in different permeability depending on the pore structure. The dolomite lithotypes with bimodal pore structure showed the highest water vapor permeabilities. The water vapor permeability rates of all samples with crust were lower than their non-weathered counterpart, but the crust thickness did not correlate with the water vapor permeability rate.

keywords: permeability, dolomite, weathering crust, water vapor, porosity

1 INTRODUCTION

Water vapor permeability determines the amount of water vapor passing through the stone under a defined pressure. Water vapor flows in the direction from high pressure to low pressure. (Mukhopadhyaya et al., 2011). It is the amount of transmitted water vapor through the stone of an unit area of flat material and unit thickness, determined by the pressure difference between two surfaces at a particular temperature and relative humidity. (Mukhopadhyaya et al., 2007). In practice, the water vapor diffusion resistance factor is commonly used to describe the measurement of water vapor diffusion. It is the ratio of the water vapor diffusion coefficient of the air and building material (Künzel, 1995).

Ruedrich et al. (2011) described water vapor permeability as the second most significant water transport value after capillary water uptake in porous materials. The capacity to transport and store water vapor impacts the durability of building materials (Keppert et al., 2016). Therefore it is an important property in choosing appropriate building materials by replacing stones (Graue et al., 2011); or applying a coating material to create hydrophobic surfaces (Pia et al., 2017) (Xie et al., 2021) (Vasanelli et al., 2019). Hydrophobic materials were developed to prevent liquid water (rain) from entering the stone and enable water vapor to leave the stone to avoid moisture (condensation) buildup inside the structure (Drchalová et al., 2001). (Price & Doehne, 2011). The formation of condensation zones reduces the durability of the stone in case of freeze-thaw temperature changes. The water volume increase by freezing causes significant stresses, cracks, and fissures in the stone structure (Narloch et al., 2021). The formation of water saturated zones in a carbonatic stone can cause strength decrease (Rozgonyi et al. 2021, Vászárhelyi 2005).

Water vapor permeability is related to environmental conditions (relative humidity, temperature, porosity etc.). It increases by increasing the relative humidity gradient (Mukhopadhyaya et al., 2007, Couturier & Boucher, 2011). The effect of temperature is not clear. Measurements of Mukhopadhyaya et al. (2005) showed no relationship between the temperature increase and the water vapor permeability. Doty et al. (1946) found that temperature influences water vapor permeability based on relative humidity. However, the impact of temperature on relative humidity does not apply to all porous materials (Galbraith et al. 2000). According to Nenadálová et al. (2016), determining the main factor affecting vapor permeability (whether the relative humidity or the temperature) is complicated and varies depending on the composition. The effect of porosity on water vapor permeability also

interests many researchers. Togkalidou et al. (2013) found that vapor permeability has a poor correlation with total porosity and mean pore radii, but a good correlation with pore size distribution. Vázquez et al. (2013) realized that open porosity and pore size influence water vapor permeability. However, according to the findings of another study, water vapor diffusion resistance is primarily related to total porosity (Keppert et al., 2016). At the same time, Stück et al. (2011) emphasized that the pore size distribution influences water vapor diffusion resistance factor.

Crac des Chevaliers Castle is one of the most important and well-preserved crusader castles. On this historical building, a lot of kinds of weathering crusts have been formed on the stone surfaces, such as biological colonisations and salt crusts (Bilal & Rozgonyi-Boissinot, 2022). Those crusts modify stone properties like water absorption (Török & Rozgonyi, 2004; Bilal & Rozgonyi-Boissinot, 2020), water vapor permeability, drying characterization, and wettability. The investigation of the effect of weathering crust on the water vapor permeability is important because it could work as a coating material, and its removal could lead to the loss of stone material, especially in valuable historic buildings like Crac des Chevaliers Castle. In this study, the effect of the weathering crusts on water vapor permeability was investigated on fresh and weathered specimens taken from the walls of the Crac des Chevaliers Castle.

2 MATERIAL AND METHODS

2.1 Investigated stones from the castle

Crac des Chevaliers Castle is a powerful military fortress built during the medieval period in the 11th century (King, 1949). It is located in the northwest of Syria (between latitude 34.76° north and 36.29° longitude east) near Homs city and around 35 km from the Syrian coast (Figure 1). The castle is a formidable Gothic fortress with a small Romanesque chapel, numerous residences, and military facilities, with the presence of various motifs and decorations carved on the stones. However, in the 13th century, the Mamluks built new towers around the crusader castle, demonstrating the ingenuity of Islamic military architecture craftsmen (Mesqui, 2018, Zimmer et al., 2011).



Figure 1 The location of Crac des Chevaliers on the Syrian map, with an overview of the southwest corner of the castle

The castle walls were built basically from the late cretaceous (Cenomanian-Turonian age) dolomite and dolomitic limestone on a basaltic and clay foundation. Weathering crusts with different thicknesses have formed on the carbonate stone blocks over the centuries on the walls. The sample material was taken with core drilling (diameter 5 cm). The depth of a core was at least 25 cm (Figure 2). 8 carbonatic stone lithotypes with different porosity and stone structures were examined (S1-S4 and S7-S10): four microcrystalline dolomite, two dolomitized micro bioclastic wackestone, one laminated dolomite, and one dolomitic limestone. The bulk density ranged between 1.9 and 2.4 g/cm³, while the open porosity between 11 and 32 v/v% (Bilal & Rozgonyi-Boissinot, 2023).

S1 was a slightly dolomitized and silicified micro bioclastic wackestone with no distinct decay on its surface and thin crust (Figure 3a, Table 1). The open porosity amounted to 18v/v%. The size of open pores ranged from 0.05 mm to 0.45 mm.

S2 was a microcrystalline dolomite with fine dolomicritic crystals and green algae crust. It contained ooids of about 0.25 mm. The texture was not uniform: partly micritic, and partly microcrystalline with a crystals size of 0.01 mm. The pore structure was bimodal, containing both large and very tiny pores. The open porosity was 29 v/v%. The thickness of the crust was about 3 mm (Figure 3c, Table 1).



Figure 2. Drilled core S9 (left, the outside of the core with crust; right, the core)

Another microcrystalline dolomite stone with very fine dolomitic crystals and orange-red algae on the surface was lithotype S3 (Figure 3e). It had the highest porosity of 32 v/v%. This lithotype contained a lot of very tiny intercrystalline pores and a few large pores with a size of 0.1 mm. The crust on its surface developed with 1.5 mm thickness and contained organic material (Table 1).

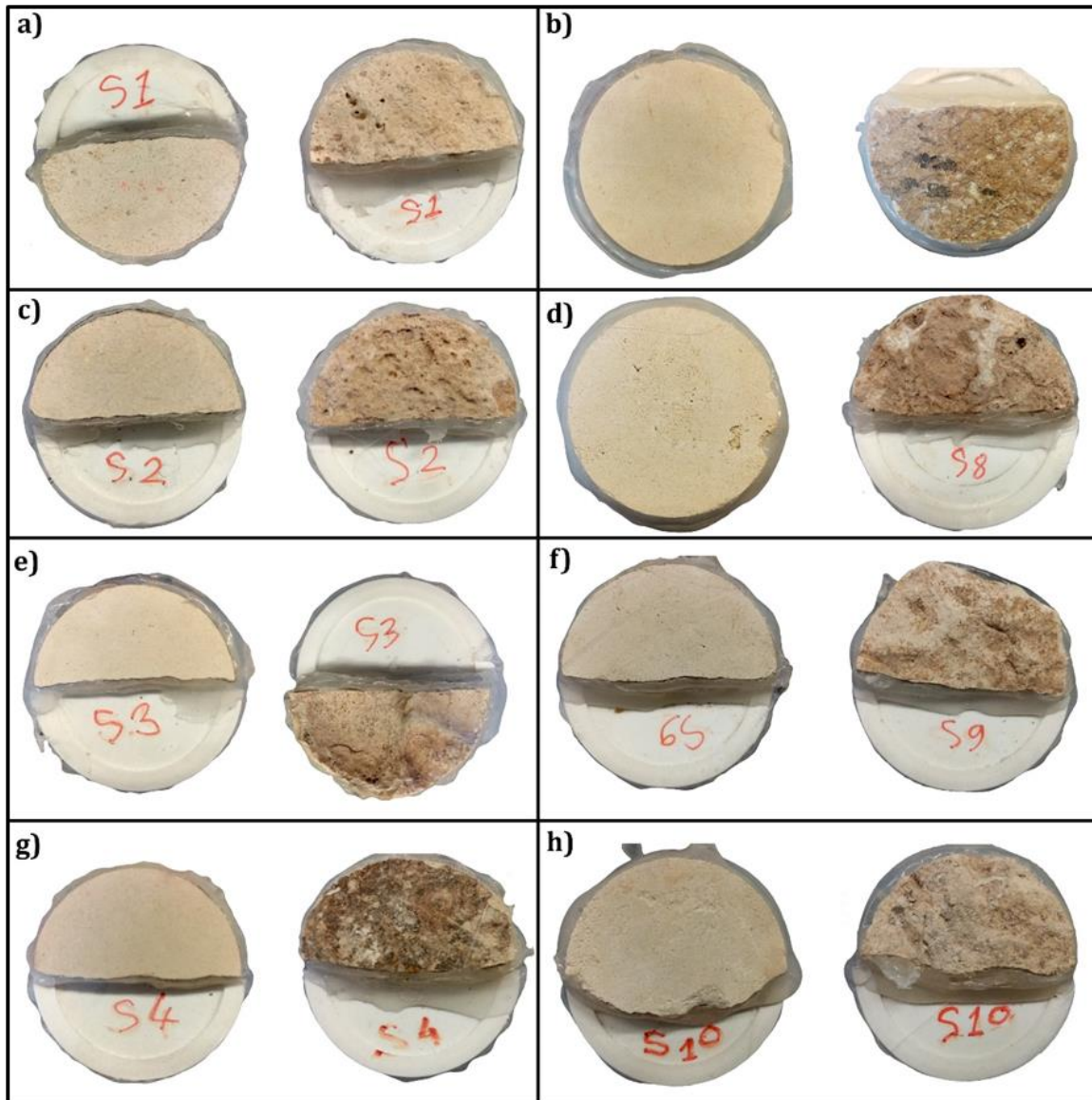


Figure 3. Specimens prepared for water vapor permeability measurement (the left specimen is not weathered, the right one is prepared from the weathering crust) a) S1; b) S7; c) S2; d) S8; e) S3; f) S9; g) S4; h) S10

S4 was a microcrystalline dolomite stone structure with equiangular crystals (0.03-0.07 mm). It had a bimodal pore system with an open porosity of 28 v/v%. The weathering crust (Figure 3g) was less porous than the original stone and created a porous zone of about 1.5-2 mm under the crust (Table 1). The size of dolomite crystals was 0.02-0.06 mm in the crust.

Table 1. Thin sections of the crusts and their descriptions for the samples S1-S4

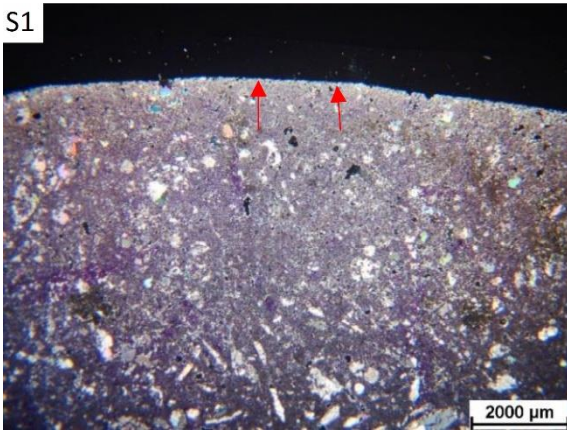
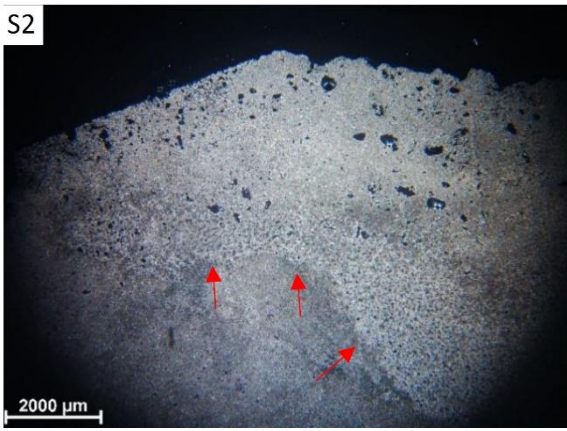
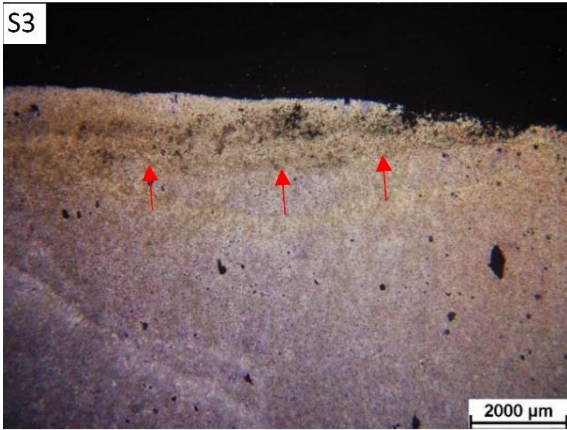
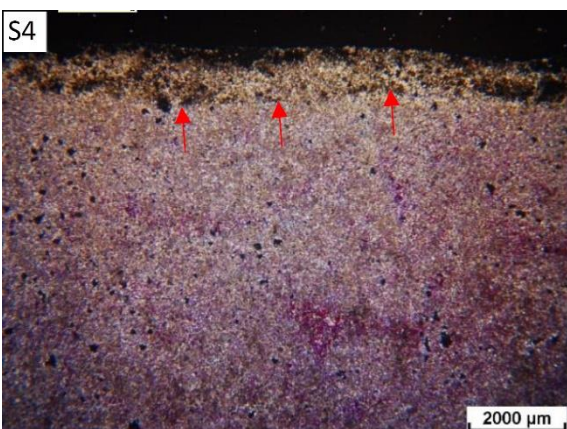
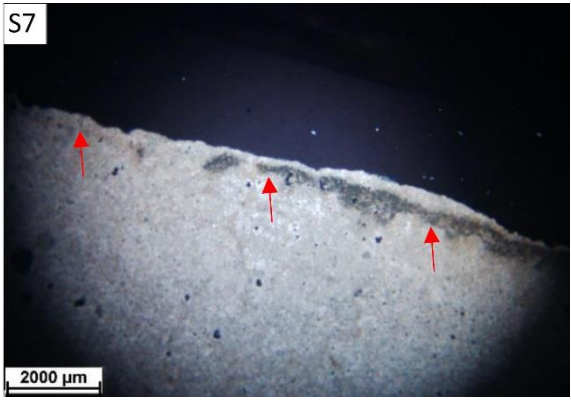
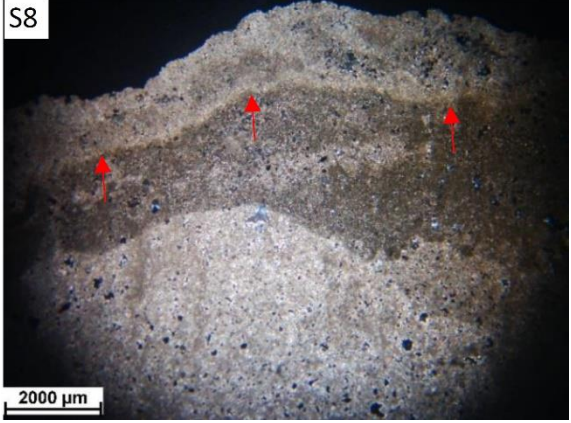
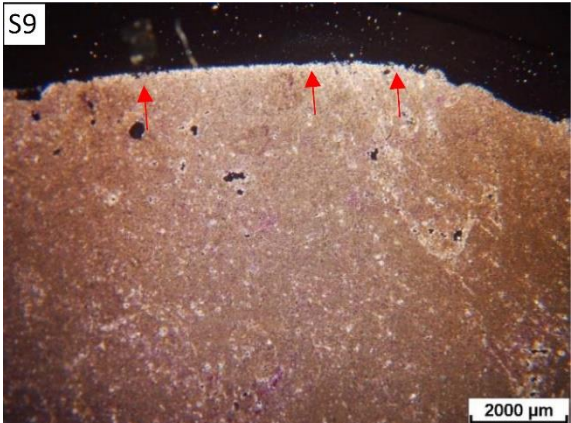
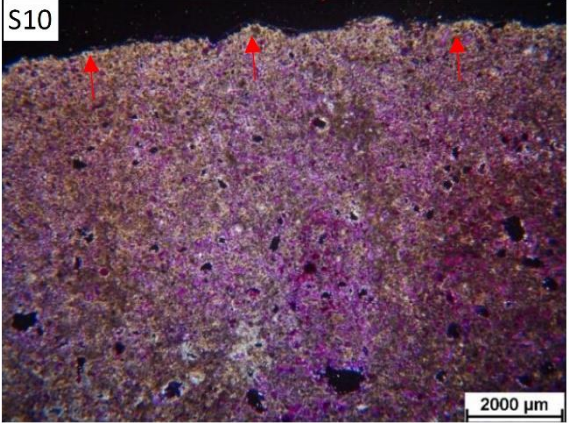
Thin section of the lithotype	Description
S1 	No distinct decay was recognized macroscopically on the stone surface. The thin section showed a dissolution and recrystallization of dolomite with tiny crystals on the surface. The thickness of the crust was 0.1mm.
S2 	Green algae flourished on the surface. The thickness of the crust was about 3 mm, and it was more porous than the original stone. Recrystallized dolomite crystals caused the disappearance of the micro fabric of the original rock.
S3 	Orange-red algae flourished on the surface. The crust was 1.5mm thick, slightly micritic, and contains organic material.
S4 	The weathering crust was lower porous than the original stone by about 25%. Biological activity was associated with pores under the surface. Under the crust built a porous zone of about 1.5-2 mm.

Table 2. Thin sections of the crusts and their descriptions for the samples S7-S10

Thin section of the lithotype	Description
S7 	The orange crust could had four layers from outside to inside: i) Outermost layer, 0.01-0.04 mm thick, was not continuous. It was brownish with biological activity. ii) Very dense layer with very thin microcrystalline dolomite crystals. The thickness of this layer was around 0.1-0.3 mm. iii) A layer with a dark grey micritic matrix with a size of 0.005 mm. The thickness was around 1.5 mm. iv) Lighter grey micritic layer with much fewer oval micritic forms. The thickness of this layer was 0.2-0.4 mm.
S8 	The thickness of the crust was about 1.25-2 mm. On the crust were wind-blown sand grains observable. The topmost of the brownish crust had iron staining. Under the crust was a biological activity observable. Many pores in the crust had a coating with a maximum thickness of 0.03 mm.
S9 	Green algae flourished on the dissolute surface. The dolomite crystals in the crust were clear without inclusions; however, inclusion-rich dolomite was under the crust. The thickness of the crust was 0.08-0.12mm.
S10 	No distinct decay type was visually recognized on the surface. The crust was micritic with very fine crystals and did not form a uniform crust. The thickness was 0.02-0.1 mm.

However, S7 and S8 had the same open porosity (29 v/v%), their stone structure was very different. S7 was characterized as a microcrystalline dolomite with a high recrystallization rate and about 0.005 mm crystal size. Its texture was homogenous, with a pore size of around 0.2 mm. An orange-colored four-layer crust was built on its surface (Figure 3b, Table 2). S8 was laminated dolomite with peloids, small intraclasts, and 1.2-2.9 mm lamination thickness. It contained some micritic layers, and its open porosity was 28.8 v/v%. The thickness of the crust amounted to about 1.25-2 mm. Under the crust was observable biological activity (Figure 3d, Table 2).

The most dense stone lithotype among the investigated stones was S9. It had 11 v/v% open porosity and was a micro bioclastic wackestone with green algae on its surface (Figure 3f). The stone structure contained an algal mat, fenestral pores, and bimodal pore size (large pores range between 0.4-0.6 mm, and tiny ones are about 0.01 mm). The thickness of its crust was 0.08-0.12 mm (Table 2).

S10 was a dolomitic limestone with high open porosity (28 v/v%) and no distinct decay on its surface (Figure 3h). The crust was micritic with very fine crystals and was formed in a thickness of 0.02-0.1 mm (Table 2). The stone was a micritic peloidal wackestone/ packstone with a few foraminifera fragments.

2.2 Water vapor permeability measurement

The water vapor permeability was measured with the „wet cup test”. Two, with about 1cm thick, specimens were prepared separately from 8 dolomite lithotypes, one with a crust (outside of the core, later referred to C) and the other without a crust (backside of the core, later referred to R). The half-cylindrical specimens (dried at 70°C) were collected in the box roof of a transparent plastic cup and covered with silicon glue on the side, carefully not to cover any effective evaporation surfaces (Figure 4)

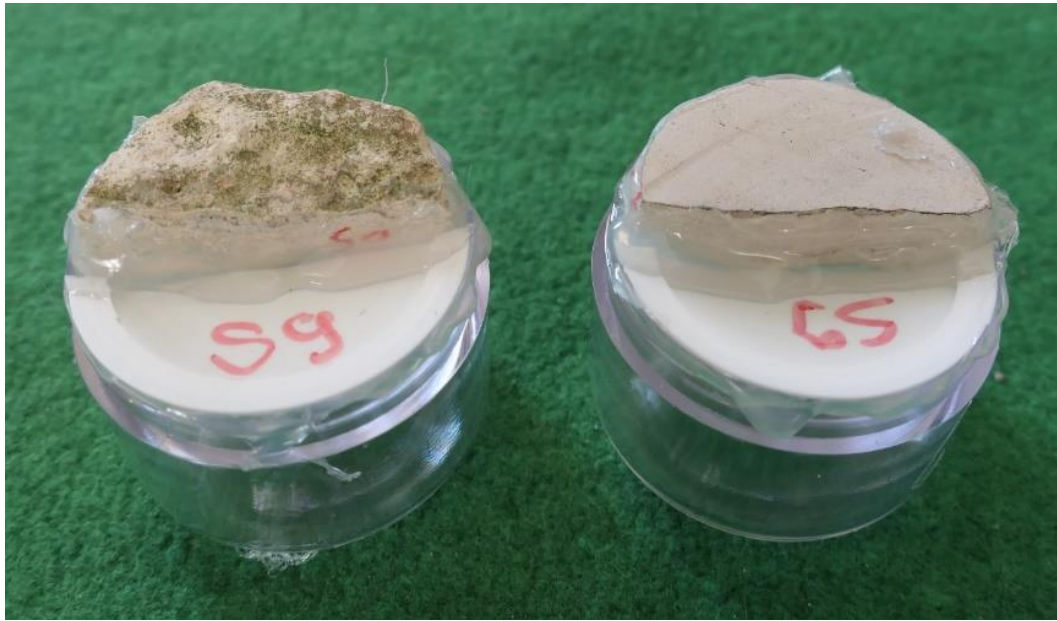


Figure 4. Specimens prepared for water vapor permeability measurement

15 ml distilled water was injected through a 1 mm diameter hole into the cup, with a 1.5 cm distance between the specimen and the water level, before closing it. The experiment was performed in a climate room with a temperature of 19°C and relative humidity of 60%, and it lasted 50 days. The water vapor transferred through the specimens due to the relative humidity difference between inside the cup (RH 100%) and the room (RH 60%). The water vapor permeability rate (D) was calculated from the regularly determined weight loss, as shown in equation 1 (Mukhopadhyaya et al. 2007).

$$D = \frac{G \cdot d}{t \cdot A \cdot S \cdot (R_1 - R_2)} \quad [\text{Kg/s.m.Pa}], \quad (1)$$

Where D is the water vapor permeability rate [Kg/(s.m.Pa)],

G is the weight change [kg],

d is the thickness of the specimen [m],

t is the time [s],

A is the effective area of the specimen [m²],

S is the partial pressure of the saturated air at 19 °C [Pa],

R1 is the relative humidity inside the jar (100%),

and R2 is the relative humidity in the climate room (60%).

The water vapor diffusion resistance factor (μ) was calculated as follows (Siegesmund and Dürst 2011):

$$\mu = \delta l \cdot \frac{1}{D} \quad [-], \quad (2)$$

Where δl is the water vapor diffusion coefficient of the air at 19 °C (kg/Pa. m. s) and can be calculated from equation 3 (Künzel 1995).

$$\delta l = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot T^{0.81}}{Pl} \quad [\text{kg/Pa.m.s}], \quad (3)$$

Where T is the test temperature [K], and Pl is the atmospheric pressure [Pa].

3 RESULTS

For the graphical representation of the results were determined the vapor amount diffused through the stone material over an unit area (g/cm^2) at the different measurement times and illustrated as a function of time (Figure 5) for both the non-weathered and weathered samples. The calculated water vapor permeability rates and the water vapor resistance factors are collected in Table 3.

The results showed that the various open porosity and stone structures of the examined stone lithotypes (between 11 and 32 v/v%) caused a wide range of water vapor permeability rates between $7.60 \cdot 10^{-12}$ and $3.8 \cdot 10^{-11}$ Kg/(s.m.Pa) and water vapor diffusion resistance factors between 5.2 and 25.8 of the non-weathered (R) specimens (Table 3). The lithotypes with the lowest open porosity (S1-R and S9-R) had the lowest water vapor permeability rate of $7.6 \cdot 10^{-12}$ - $1.1 \cdot 10^{-11}$ Kg/(s.m.Pa) and the highest water vapor diffusion resistance factor of 18.4 and 25.8, respectively. The amount of transmitted water vapor per area was for these two samples low (Figure 5).

The other six dolomite lithotypes had almost the same open porosity between 27.70 and 31.7v/v%. Their water vapor permeabilities were, even so, different. The highest water vapor permeability rates showed the non-weathered specimen of the lithotypes S2 and S4 (Table 3), $3.8 \cdot 10^{-11}$ and $2.6 \cdot 10^{-11}$ Kg/(s.m.Pa). Accordingly their water vapor diffusion resistance factors were the lowest. Their curves in the Figure 5a are located at the top, over the curves of the other lithotypes. This phenomenon can be explained by their particular bimodal pore system: in addition to very tiny pores, they also contained a lot of large pores, which were connected in a capillary system, which facilitated the passage of water vapor within the stone structure.

The third highest water vapor permeability rate and the third lowest water vapor diffusion factor was for the non-weathered specimen of the lithotype S10 with a value of $2.3 \cdot 10^{-11}$ Kg/(s.m.Pa) and 8.3, respectively. The distinguished feature of this type was the 0.2-1 mm large pores that were clearly visible even on the thin section photo (Table 2).

The two microcrystalline dolomites (S3, S7) and the laminated dolomite (S8) with 28.8-31.7v/v% open porosities had almost the same water vapor permeability rates between $1.3 \cdot 10^{-11}$ - $2.0 \cdot 10^{-11}$ Kg/(s.m.Pa) and water vapor diffusion factors between 10 and 15.

The water vapor permeability rates of all samples with crust (C) were lower than their non-weathered (R) counterparts (Table 3 and Figure 5b). There was no correlation between the thickness of the crust and the effect on the water vapor permeability rate. On the two lithotypes with low porosities (S1 and S9) the crust formation did not have a large effect on the permeability (Table 3). This phenomenon can also be explained by the fact that crust formation on these samples was very small with a thickness of about 0.1 mm. On the other hand, the very thin crust on the S10 sample significantly affected the permeability, which showed an 80% lower value of $1.3 \cdot 10^{-11}$ Kg/(s.m.Pa) than on the non-weathered specimen (Table 3).

Although its thickness was significant in comparison to the former lithotypes, the 3 mm thick weathering crust of the S2-C sample did not affect the permeability to a great extent either. The permeability of this non-weathered sample was already high, and the accumulating of weathering crust reduced it a little (Table 3). The big difference between S2-C and the other weathered samples in water vapor transmission amount is well-marked in Figure 5b.

The four-layer weathering crust on lithotype S7 caused a very significant decrease (less than halved) in the water vapor permeability value (Table 3 and Figure 5b). This crust was 2-2.2 mm thick and contained a very dense layer with micritic crystals, preventing water vapor passage through the stone. The other such marked decrease could be seen on the S4-R sample. It contained a 1.5-2 mm thick crust on its surface. And even though a porous zone has formed under the crust, the porosity of the crust was 25% smaller than thus of the original stone, which blocked the transport of water vapor.

Table 3. Water vapor permeability rate and water vapor diffusion factor result of the non-weathered specimens and the crust

Nr	Water vapor diffusion resistance factor (μ) [-]		Water vapor permeability rate (D) [Kg/(s.m.Pa)]	
	Non-weathered (R)	Crust (C)	Non-weathered (R)	Crust (C)
S1	18.4	19.0	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$1.0 \cdot 10^{-11}$
S2	5.2	6.1	$3.8 \cdot 10^{-11}$	$3.2 \cdot 10^{-11}$
S3	10.0	11.3	$2.0 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-11}$
S4	7.6	12.4	$2.6 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$
S7	13.1	22.1	$1.5 \cdot 10^{-11}$	$8.9 \cdot 10^{-11}$
S8	15.0	16.1	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$1.2 \cdot 10^{-11}$
S9	25.8	30.6	$7.6 \cdot 10^{-11}$	$6.4 \cdot 10^{-11}$
S10	8.3	15.4	$2.4 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-11}$

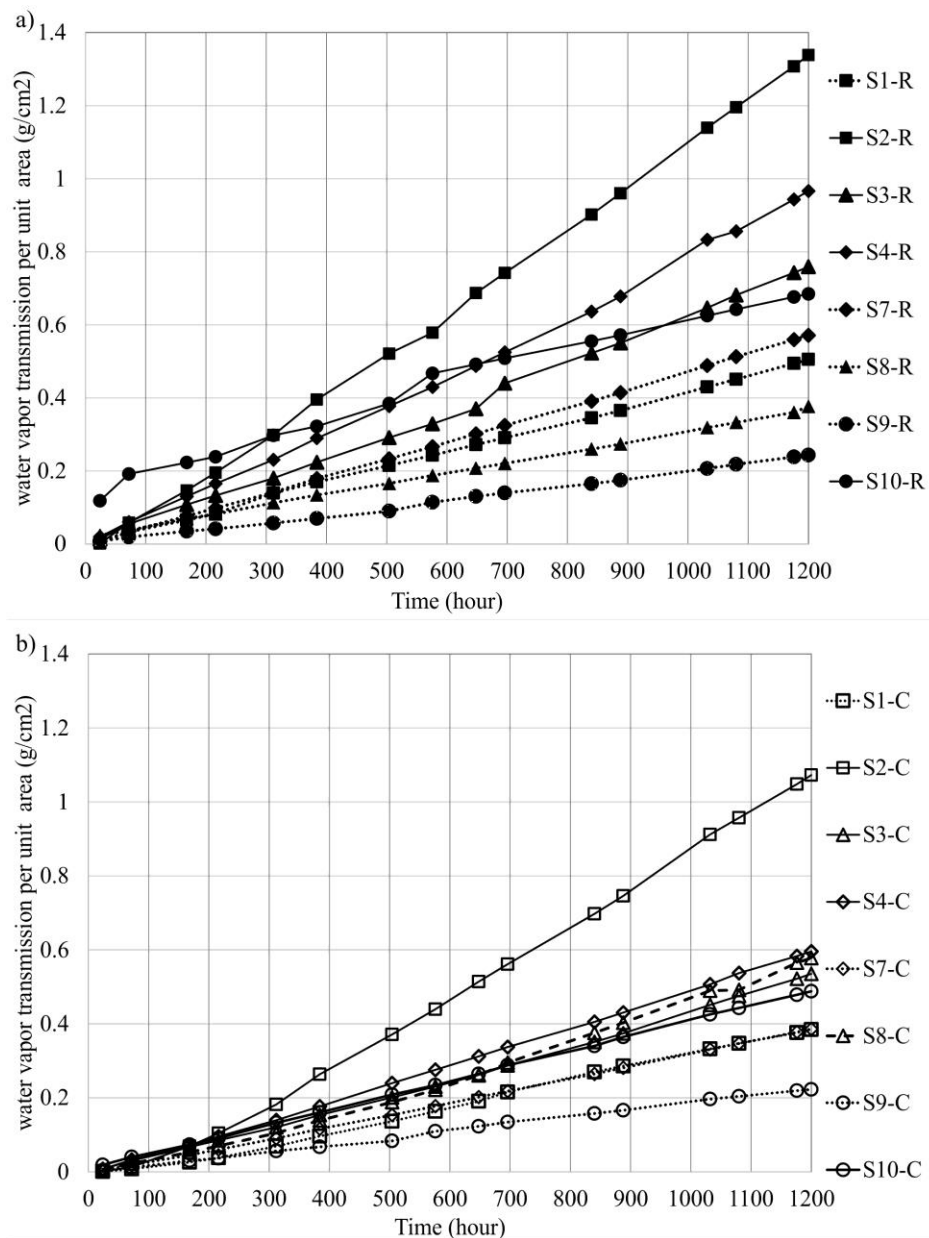


Figure 5. Water vapor transmission in dolomite lithotypes; a, non-weathered specimens; b, specimens with crust

4 CONCLUSIONS

The results showed that water vapor permeability values ranged widely, not only even for samples from different lithotypes but also from the same stone type. It was difficult to predict the permeability based on the open porosity, but the low open porosity caused a low water vapor transport. The amount of transmitted water vapor was different in the case of the highly porous lithotypes. The results agreed with the observations of Vázquez et al. (2013), because the pore size distribution affected the water vapor transport through the stone structure. The lithotypes with bimodal pore system showed much higher water vapor permeability than those with the same open porosity.

The building of crusts on the stone surfaces changed the water vapor permeability rates of the stones. There was no correlation between the transportation of the vapor and the thickness of the crust. The density and structure of the crust influenced the vapor transport much more. The formation of a multi-layered, fine crystalline crust or a dense crust with low porosity caused a significant decrease in the water vapor permeability values compared with the non-weathered stone.

REFERENCES

- Bilal O., Rozgonyi-Boissinot, N. 2020. Diagnosis of Stone Deterioration in Crac Des Chevaliers, in *Monument Future: Decay and Conservation of Stone. Proceedings of the 14th International Congress on the Deterioration and Conservation of Stone* (eds. Siegesmund S., & Middendorf, B.), Miteldeutscher Verlag, Halle. 765–770.
- Bilal, O., Rozgonyi-Boissinot, N. 2022. The Evaluation of Stone Deterioration State by Using the Non-Destructive Techniques on a Medieval Fortress in Syria, in *International Symposium Stone Consolidation in Cultural Heritage* (eds. Delgado, R. J. & Marluci, M.), Lisbon, 105–117.
- Bilal, O., Rozgonyi-Boissinot, N. 2023. Assessment of the Resistance of Dolomite Stone from Crac des Chevaliers Against Salt Crystallization, *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, <https://doi.org/10.3311/PPci.21606>, 1-10. online first
- Couturier, M., & Boucher, C. 2011. Dynamic water vapour permeance of building materials and the benefits to buildings. *Proceedings of the 26th RCI International Convention and Trades Show, Reno*, 29.
- Doty, P. M., Aiken, W. H., Mark, H. 1946. Temperature dependence of water vapour permeability. *Industrial & Engineering Chemistry*, 38(8), 788–791.
- Drchalová, J., Poděbradská, J., Maděra, J., Černý, R. 2001. Evaluation of Water Resistance and Diffusion Properties of Paint Materials. *Acta Polytechnica*, 41(1). 1-4.
- Galbraith, G. H., Guo, J. S., McLean, R. C. 2000. The effect of temperature on the moisture permeability of building materials. *Building Research & Information*, 28(4), 245–259.
- Graue, B., Siegesmund, S., Middendorf, B. 2011. Quality assessment of replacement stones for the Cologne Cathedral: mineralogical and petrophysical requirements. *Environmental Earth Sciences*, 63(7), 1799–1822.
- Keppert, M., Žumár, J., Čáchová, M., Koňáková, D., Svora, P., Pavlík, Z., Vejmelkova, E., Černý, R. 2016. Water vapour diffusion and adsorption of sandstones: influence of rock texture and composition. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2016, 1-7.
- King, D. J. C. 1949. The taking of Le Krak des Chevaliers in 1271. *Antiquity*, 23(90), 83–92.
- Künzel, H. M. 1995. Simultaneous heat and moisture transport in building components. *One-and Two-Dimensional Calculation Using Simple Parameters*. IRB-Verlag, Stuttgart, 1-65.
- Mesqui, J. 2018. L'architecture d'une forteresse hors du commun. In J. Hofman & E. Pénicaut (Eds.), *Le Crac des Chevaliers : Chroniques d'un rêve de pierre*. pp. 19–32.
- Editions Hermann. Mukhopadhyaya, P., Kumaran, M. K., Lackey, J. 2005. Use of the modified cup method to determine temperature dependency of water vapour transmission properties of building materials. *Journal of Testing and Evaluation*, 33(5), 316. 2-21.
- Mukhopadhyaya, P., Kumaran, K., Lackey, J., van Reenen, D. 2007. Water Vapour Transmission Measurement and Significance of Corrections. *Heat-Air-Moisture Transport: Measurements on Building Materials*, 4(1495), 21.
- Mukhopadhyaya, P., Batcheller, D., Kumaran, M. K., Lackey, J. C., Van Reenen, D., Normandin, N. 2011. Correlation between water vapour and air permeability of building materials: experimental observations. *Journal of ASTM International*, 8(3), 1–14.
- Narloch, P., Piątkiewicz, W., Pietruszka, B. 2021. The Effect of Cement Addition on Water Vapour Resistance Factor of Rammed Earth. *Materials*, 14(9), 2249. 1-14.
- Nenadállová, Š., Balík, L., Rydval, M., Bittner, T. 2016. Laboratory verification of water vapour permeability of plaster compositions. *Procedia Engineering*, 151, 50–57.

- Pia, G., Corcione, C. E., Striani, R., Casnedi, L., Sanna, U. 2017. Coating's influence on water vapour permeability of porous stones typically used in cultural heritage of Mediterranean area: Experimental tests and model controlling procedure. *Progress in Organic Coatings*, 102, 239–246.
- Price, C. A., Doehne, E. 2011. *Stone conservation: an overview of current research*. Getty Publications, Los Angeles, 1-159.
- Rozgonyi-Boissinot, N., Pápay Z., Török, Á. 2021. Correlation between various mechanical properties of porous limestones from Hungary, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 833 012072. 1-8.
- Siegesmund, S., & Dürrast, H. 2011. Physical and Mechanical Properties of Rocks. In. *Stone in architecture: properties, durability*. (eds. Siegesmund, S., & Snethlage, R.), Springer. 97-225.
- Stück, H., Siegesmund, S., Rüdric, J. 2011. Weathering behaviour and construction suitability of dimension stones from the Drei Gleichen area (Thuringia, Germany). *Environmental Earth Sciences*, 63(7), 1763–1786.
- Togkalidou, T., Karoglou, M., Bakolas, A., Giakoumaki, A., Moropoulou, A. 2013. Correlation of water vapour permeability with microstructure characteristics of building materials using robust chemometrics. *Transport in Porous Media*, 99(2), 273–295.
- Török, Á.; Rozgonyi, N. 2004. Morphology and Mineralogy of Weathering Crusts on Highly Porous Oolitic Limestones, a Case Study from Budapest, *Environmental Geology*, 46. 333–49.
- Vasanelli, E., Calia, A., Masieri, M., Baldi, G. 2019. Stone consolidation with SiO₂ nanoparticles: Effects on a high porosity limestone. *Construction and Building Materials*, 219, 154–163.
- Vásárhelyi, B. 2005. Statistical analysis of the influence of water content on the strength of the miocene limestone, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 38 (1), 69–76
- Vázquez, P., Alonso, F. J., Carrizo, L., Molina, E., Cultrone, G., Blanco, M., Zamora, I. 2013. Evaluation of the petrophysical properties of sedimentary building stones in order to establish quality criteria. *Construction and Building Materials*, 41, 868–878.
- Xie, Z., Duan, Z., Zhao, Z., Li, R., Zhou, B., Yang, D., Hu, Y. 2021. Nano-materials enhanced protectants for natural stone surfaces. *Heritage Science*, 9(1), 1–13.
- Zimmer, J., Meyer, W., Boscardin, M.-L., Bandelli, A. 2011. *Krak des Chevaliers in Syrien: Archäologie und Bauforschung 2003 bis 2007*. Dt. Burgenvereinigung. 1-400.

Geotechnical Implications of Landfill Leachate on Soil Properties: A Comprehensive Review

Feten CHIH

Budapest University of Technology and Economics, Fac. Civil Engng. Dept. Engng, Geol & Geotechn.,
chihi.feten@emk.bme.hu

Gabriella VARGA

Budapest University of Technology and Economics, Fac. Civil Engng. Dept. Engng, Geol & Geotechn.,
varga.gabriella@emk.bme.hu

ABSTRACT: Landfill leachate can cause significant changes in the geotechnical properties of soils due to physical and chemical interactions between soil particles and leachate components. The extent of these changes depends on various factors such as the properties of both soil and leachate. Both granular and fine-grained soils can be affected by the physical and physicochemical interactions caused by leachate contamination. The shear strength of the soil can be significantly impacted, which can affect the overall stability of the landfill structure and its potential for future site exploitation. Additionally, the porosity of the soil can be altered due to the migration of fine contaminant fragments and the dissolution of soil minerals. The Atterberg consistency limits of the soil may also change as a result of the physicochemical interactions with pollutants. Some contaminants may even decrease the thickness of the Diffuse Double Layer (DDL), leading to soil shrinkage and a decrease in repulsive forces, which can encourage particle flocculation. While previous studies have investigated these parameters, it is still crucial to further our understanding of the mechanisms that occur in soil during leachate contamination. This paper aims to provide a comprehensive review of earlier investigations and summarize the key findings to clarify the conditions and processes of leachate-soil contamination.

Keywords : Leachate, geotechnical properties, contamination

1 INTRODUCTION

1.1 Decimal numbering in all cases

Soil contamination is a critical environmental concern, with pollutants originating from various waste disposal sources, including landfill leachate (Khan et al. 2008). Leachate typically contains a complex mix of biodegradable and non-biodegradable organic matter, heavy metals, inorganic salts, chlorinated compounds, and ammonia (Ozcoban et al. 2006; Renou et al. 2008). Previous research has shown that the composition of leachate can significantly alter the properties of affected soils (Nayak, Sunil, and Shrihari 2007), leading to changes in geotechnical properties and posing potential hazards for landfill structures and future site exploitation (Cyrus et al. 2010; Vij 2012).

Understanding the interactions between landfill leachate and soil is crucial to prevent structural damage and potential environmental catastrophes (Abd El-Salam and Abu-Zuid 2015; Sinha et al. 2003). These interactions are driven by physical and chemical exchanges between pollutants and soil particles, with factors such as pollutant density, viscosity, and surface tension playing critical roles (Ratnaweera and Meegoda 2006b; Singh, Srivastava, and John 2009). Moreover, contaminant concentration and exposure duration significantly impact the alteration of geotechnical properties in soils (Al-Tabbaa and Walsh 1994; Cuevas et al. 2009; Deng et al. 2017; Du et al. 2015; Fan et al. 2017; Gnanapragasam, Lewis, and Finno 1995; X. Liu et al. 2016; Singh, Srivastava, and John 2009; Souli et al. 2008; Trzcinski, Williams, and Zbik 2015).

A considerable body of research has been devoted to understanding the effects of landfill leachate on soil properties (Harun et al. 2013; Jo, Benson, and Edil 2004; S. M. Khodary et al. 2020, 2021; Roque and Didier 2006; Shariatmadari, Askari, et al. 2018; P.V Sivapullaiah and Savitha 1997; Sunil, Nayak, and Shrihari 2006). These studies have focused on various aspects, such as the impacts of inorganic salts, organic matter, and chemical contamination on soil compressibility, consistency limits, shear strength, permeability, compaction, Atterberg limits, and consolidation (Arasan 2010; Ayininuola et al., 2009; Burns et al. 2006; Chu et al. 2017; Francisca and Glatstein 2010; Gajo and Maines 2007; Karkush and Abdul n.d.; J. Li et al. 2013; Nayak et al. 2010; Nayak, Sunil, and Shrihari 2007; Ören and Akar 2017; Ratnaweera and Meegoda 2006a; Shackelford et al. 2000; Shariatmadari,

Askari, et al. 2018; Shariatmadari, Askari Lasaki, et al. 2018; Sunil, Shrihari, and Nayak 2008; Valencia-González, Quintero-Ramírez, and Lara-Valencia 2022).

This paper gives an overview of studies that focused on the effect of soil contamination with landfill leachate on the geotechnical properties of the soil. It provides a tool to review and summarize earlier research by facilitating the explanations of geotechnical characteristic change mechanisms to better predict soil behavior and prevent environmental risk.

2 EFFECT OF CONTAMINATION ON SHEAR PARAMETERS OF SOIL

Leachate contact with soil can induce chemical and physical interactions that affect geotechnical properties, including shear strength. The effects of leachate contamination on shear strength depend on soil and leachate characteristics (George and Beena 2011; Borude 2016; Alhassan 2012; Oztoprak and Pisirici 2011; Cassagrande 1997; Shariatmadari 2018; Valencia-González 2022; Harun et al. 2013; Li et al. 2013; Chen, Anandarajah, and Inyang 2000; Mitchell and Mitchell 1991; Sunil et al. 2008; X. . Li, Yao, and Cao 2004; J. . Liu et al. 2008; Pillai et al. 2014; Sujatha 2013).

Studies have shown increases in cohesion and decreases in friction angle for contaminated lateritic soil and clay liners due to interactions with leachate, which can lead to increases in clay content and subsequent structural changes (George and Beena 2011; Shrihari 2009; Borude 2016; Oztoprak 2011). However, other researchers reported that leachate contamination decreases both angles of friction (ϕ) and cohesion (C), leading to ductile behavior in the soil due to chemical and acidic substances in leachate (Shariatmadari 2018; Valencia-González 2022). In addition, leachate ionic charge can react with soil minerals and dissolved cement, resulting in novel mineral compositions and affecting strength metrics (X. . Li, Yao, and Cao 2004; J. . Liu et al. 2008).

Changes in the shear characteristics of the compacted clay layer in landfills can impact the overall stability of the landfill (Chen, Anandarajah, and Inyang 2000; Mitchell and Mitchell 1991). In some cases, leachate contamination has decreased the cohesion of sandy clay and silty sand, affecting their shear strength and plasticity (Harun et al. 2013; Pillai et al. 2014; Sujatha 2013). Figure 1 illustrates the variation of shear strength parameters found in the literature.

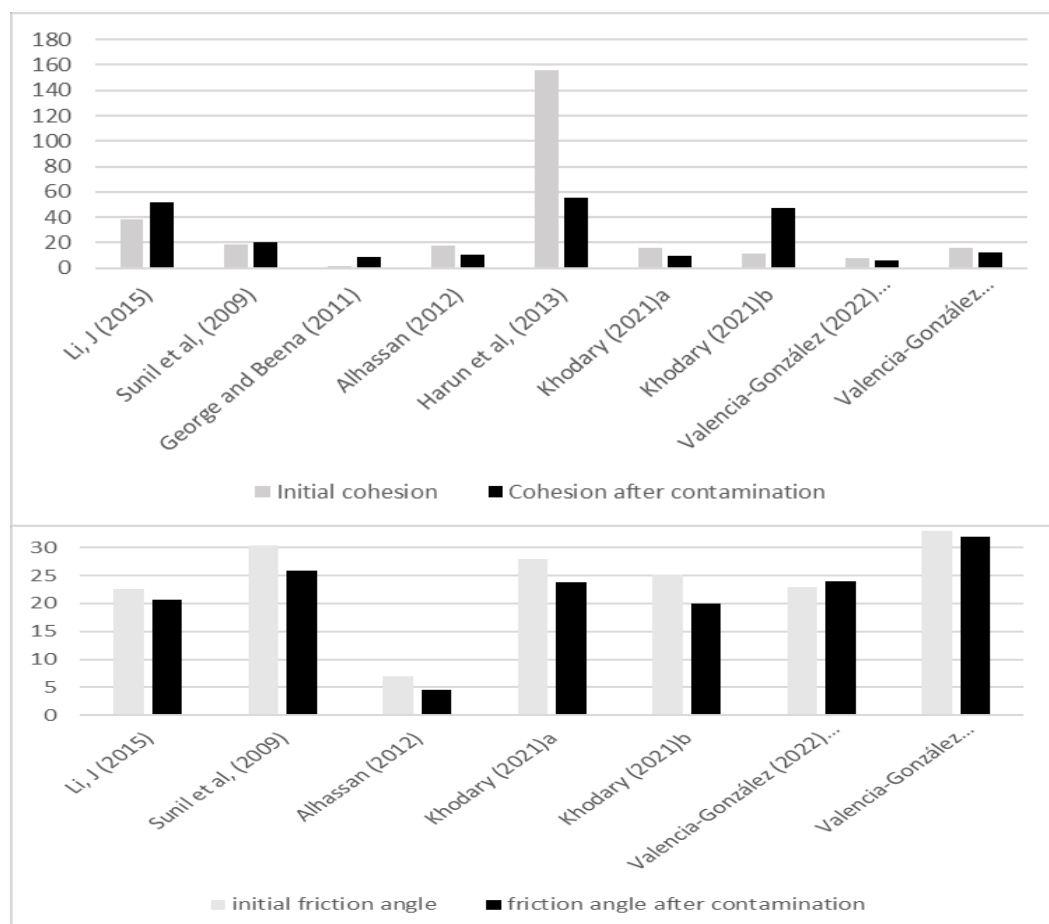


Figure 1 : Shear strength variation with leachate contamination (A: cohesion; B Friction angle)

3 EFFECT OF CONTAMINATION ON THE PERMEABILITY OF THE SOIL.

Upon initial contact with leachate, soil permeability tends to decrease due to leachate particle fragments blocking soil pores. However, permeability may increase over time as acids in leachate dissolve soil particles (Francisca and Glatstein 2010; Kanmani, Gandhimathi, and Muthukkumaran 2014; S. M. Khodary et al. 2021). Permeability is mainly determined by leachate properties and can be influenced by organic acids and weak organic bases (Jayasekera and Mohajerani 2001; Kalkan and Akbulut 2004).

Numerous laboratory studies have shown increased hydraulic conductivity in clay due to concentrated organic or inorganic compounds (Acar, Y.B. 1985; Anderson 1982; Brown, Thomas, and Green 1984; Fernandez and Quigley 1985; Foreman and Daniel 1986; Green, Lee, and Jones 1981). Mitchell and Madsen (1987) reported that permeability is highly affected by inorganic chemicals, while Rowe (1987) stated that flocculation could increase permeability by 1000 times. Similar results were found by Batchelder et al. (1998), Joseph et al. (2001), and Oztoprak and Sadik (2011), who attributed these changes to mineralogical transformations in clay.

Ozcoban et al. (2006) found that the chemical interaction of soil with leachate could deform clay structures and increase permeability. Similar results were observed in lateritic soil (Nayak, Sunil, and Shrihari 2007). Alhassan (2012) reported an increase in dumpsite permeability, while George and Beena (2011) observed a rise in permeability in leachate-contaminated lateritic soil. Widomski et al. (2015) found that clay permeability increased in landfill liners, and Valencia-González (2022) reported increased permeability in both laboratory and field results, which were attributed to the interaction of leachate positive ions with clay's negative charge.

4 EFFECT OF CONTAMINATION ON THE COMPACTION OF SOIL

Leachate pollutants can significantly alter the compaction characteristics of natural soil in terms of maximum dry density (MDD) and optimum moisture content (OMC) (Nayak et al., 2007). Sunil, B. M. (2008) found that the MDD of silty sand decreased while the OMC increased with rising leachate concentrations. Similar findings were reported by Nayak et al. (2007) and Alhassan (2012). Harun et al. (2013) observed a decrease in MDD for sandy clay soil, which can be explained by the chemical interaction between soil and leachate causing an increase in the voids ratio.

However, Shivaraju et al. (2011) observed a decrease in OMC and a rise in MDD with the addition of leachate, suggesting the aggregation of finer particles at higher leachate concentrations. Khodary et al. (2021) reported a significant reduction in OMC and a slight increase in MDD due to the presence of salts and hydrocarbon chemicals affecting soil water properties as contamination increased (S. M. Khodary et al. 2020). Karthika (2022) explained that the alteration of compaction properties is due to an increase in soil-influencing chemicals, with leachate in the soil being responsible for the changes in OMC and MDD. The decrease in OMC demonstrates the lubrication effects of samples, while the presence of leachate regulates the necessary water content to achieve maximum density. Drawings, graphs, photographs (Figure 2)

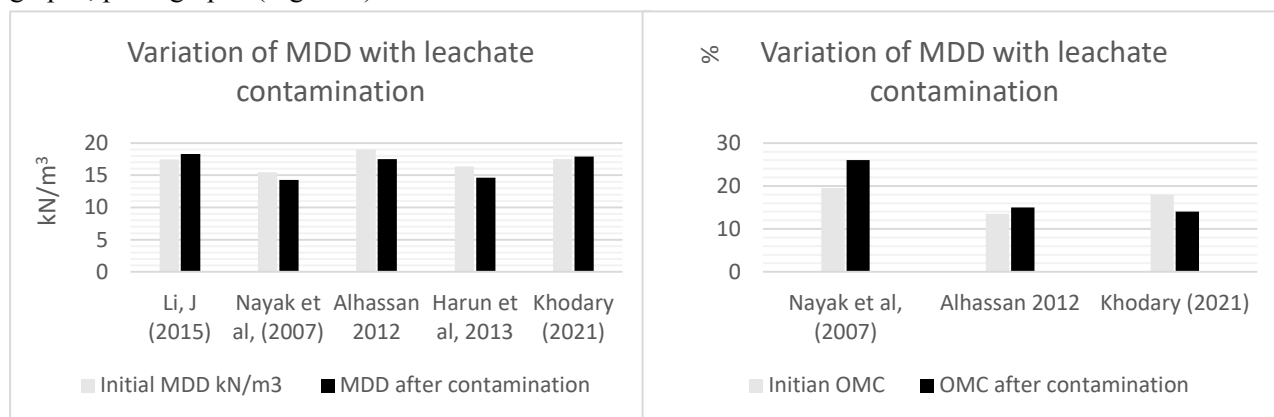


Figure 2 : Effect of contamination on soil compaction

5 EFFECT OF CONTAMINATION ON CONSISTENCY LIMITS

The Atterberg limits serve as crucial indicators of clay behavior (Jefferson and Rogers 1998). However, no consensus exists regarding the impact of chemicals on clay consistency. Arasan (2010) found that increasing salt solution content in CL clay raised both liquid and plastic limits. Park et al. (2006) investigated the influence of surfactants and electrolyte solutions on soil consistency, with CaCl_2 reducing the plasticity index but having an insignificant effect on the liquid limit. Similar findings were reported by Sivapullaiah and Manju (2005) using NaOH solution, attributing their results to the formation of new swelling chemicals. Rao and Mathew (1995) observed that clay particle dispersion in contact with salt solutions could be responsible for the increase in consistency limits.

Conversely, some researchers report that the liquid limit of CH clays decreases with increasing salt concentration (Edil et al. 1991; Gleason et al. 1997; Lin and Benson 2000; Petrov and Rowe 1997; Schmitz et al. 2004; Shackelford et al. 2000). Gleason et al. (1997) observed minimal change in liquid limit and plasticity index when mixing calcium and sodium bentonite with CaCl_2 solution. However, Petrov and Rowe (1997) demonstrated a significant decrease in the liquid limit of bentonite when exposed to NaCl. Several studies (Van Paassen 2004; Schmitz et al. 2004; Lee et al. 2005; Sridharan et al. 2010) found that liquid limit decreases with increasing concentrations of NaCl, KCl, and CaCl_2 . Arasan (2010) explained that salt solutions reduce repulsive forces and thin the diffuse double layer (DDL) of clay, causing flocculation and imparting a granular aspect to the clay.

Some researchers found that low-concentration leachate has a more significant impact on clay soils (Alawaji 1999; Gleason et al. 1997; Jo et al. 2004). Shackelford et al. (2000), Jo et al. (2004), and Kolstad et al. (2004) examined the varied effects of monovalent, divalent, and trivalent cations on soil consistency. Shackelford et al. (2000) reported that trivalent cations produced the thinnest double layer and the least swelling, while no significant results were found for monovalent cations. Similarly, Mishra et al. (2005) observed that divalent cations have a more significant impact on permeability and compressibility.

Leachate and temperature fluctuations greatly influence the geotechnical properties of clay liners (Romero 2001; Schmitz et al. 2004). Landfill organic material decomposition generates heat, potentially reaching 70°C in waste mass, producing high-temperature leachate (Koerner 2001; Yoshida and R.K 2003). The increased temperature affects clay liner and geotextile properties, particularly consistency, warranting further investigation. Nevertheless, only a few studies have assessed temperature's influence on clay's geotechnical aspects (M.V et al. 2005; Romero 2001). Hamutcu et al. (2008) found that increasing temperature with distilled water raised the liquid limit of CH clay, while increasing salt concentration and temperature had minimal impact on CL clay liquid limit but reduced it for CH clay. Jefferson and Rogers (1998) also noted that temperature increased the liquid limit of high-plasticity smectite clay. These findings suggest that salt solutions and temperature reduce DDL.

6 SUMMARY

Waste can have direct and indirect effects on soil properties. Interactions between soil and leachate can impact soil particle effective grain size, liquid limit, plastic limit, compaction characteristics, and strength properties. These alterations in soil properties can lead to various geotechnical problems, such as landslides, subsidence, and erosion, affecting the subsurface's structural integrity. This section provides an overview of the geotechnical modification mechanisms of leachate on soil (Figure 3).

The influence of leachate on soil is primarily determined by leachate's chemical composition, soil exposure duration, and soil type. Leachate typically exhibits acidic or basic pH levels, with high ionic and organic content that interacts chemically with soil particles. In the initial stage of the leachate-soil reaction, soil particle cementation degrades, leading to the separation of these elements. As contact time increases, soil minerals erode, resulting in an increase in fine particles. This degradation can even cause eroded fragments to transform into new components with different repulsive forces and diffuse double layers than the original soil. These microscopic changes in contaminated soil have significant physical implications for soil structure, such as changes in void ratio, flocculated structure, and capillary cracks, resulting in ductile behavior, structural deformation, and breakdown, ultimately compromising soil integrity. Furthermore, the formation of new swelling chemicals and components greatly alters the initial soil behavior.

Depending on the soil type and leachate characteristics, shear parameters are considerably affected by contamination. The increase in fine-grained elements following soil degradation reduces the friction angle, while the presence of organic material and fine solid suspensions in leachate

significantly increases soil cohesion. However, cementation corrosion and the decrease in repulsive forces can reduce cohesion, whereas friction angle can increase with the formation of new soil constituents.

Permeability is a crucial factor in leachate contamination that must be carefully studied for clay liners. These liners isolate the landfill from the surrounding environment and subsoil, preventing the spread of potential contamination. Upon initial contact with soil, leachate carries fine waste and soil particles, organic matter, and microbiological bacteria, causing blockages in soil pores and reducing permeability. Over time, chemical reactions, facilitated by high temperatures resulting from waste's biological degradation, significantly increase permeability through capillary cracks and soil degradation.

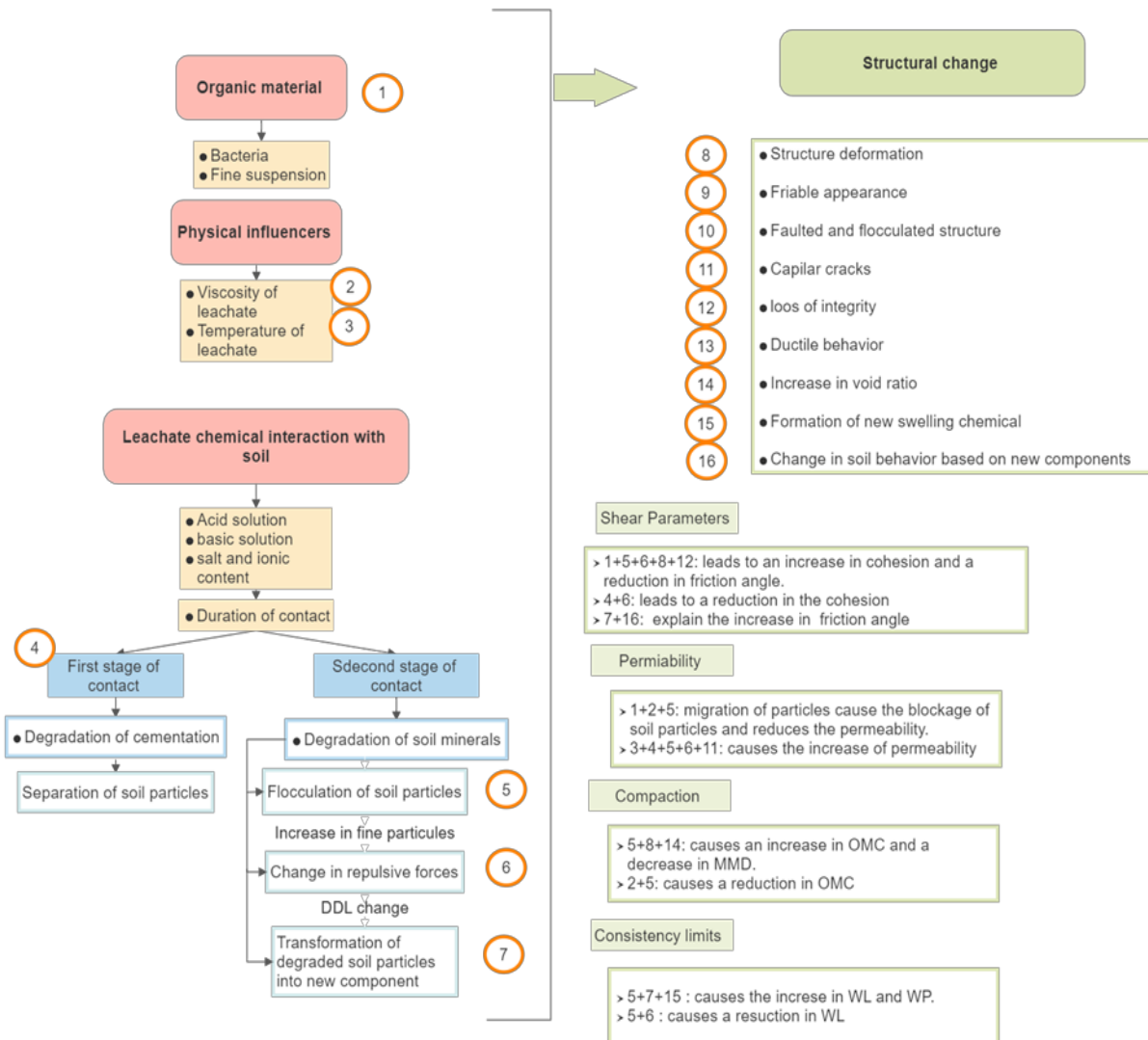


Figure 3 : Geotechnical modification mechanism of leachate on soil

Regarding the compaction of contaminated soil, fine element aggregation increases soil MDD. However, MDD decreases as the void ratio increases. Simultaneously, the evolution of the void ratio increases OMC. Leachate lubrication of samples, reducing the area of contaminated soil, lowers OMC.

Leachate's chemical reaction affects the consistency of contaminated soil. Soil particle dispersion, particularly in the presence of salt and influenced by leachate temperature, leads to the formation of new swelling chemicals, substantially increasing soil liquid and plastic limits. In contrast, in clay soils, dissolved salt in leachate reacts with the clay's chemical composition, reducing repulsive forces and resulting in a decreased liquid limit.

7 REFERENCES

- Abd El-Salam, Magda M., and Gaber I. Abu-Zuid. 2015. "Impact of Landfill Leachate on the Groundwater Quality: A Case Study in Egypt." *Journal of Advanced Research* 6(4): 579–86. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jare.2014.02.003>.
- Acar, Y.B., et al. 1985. "The Effects of Organic Fluids on Hydraulic Conductivity of Compacted Kaolinite." *ASTM STP 874*: 171–187.
- Al-Tabbaa, A, and S Walsh. 1994. "Al-Tabbaa A, Walsh S Geotechnical Properties Ofa Clay Contaminated with an Organic Chemical." In *1st International Congress on Environmental Geotechnics.*, Edmonton, 599–604.
- Alawaji, Hussain A. 1999. "Swell and Compressibility Characteristics of Sand-Bentonite Mixtures Inundated with Liquids." *Applied Clay Science* 15(3–4): 411–30.
- Alhassan, Musa. 2012. "Effect of Municipal Solid Waste on Geotechnical Properties of Soils." *International Journal of Environmental Science, Management and Engineering Research* 1(5): 204–10. <http://www.ijesmer.com>.
- Anderson, D. 1982. "Does Landfill Leachate Make Clay Liners More Permeable?" *iv. Engrg.* 52(9): 66–69.
- Arasan, Seracettin. 2010. "Effect of Chemicals on Geotechnical Properties of Clay Liners: A Review." *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology* 2(8): 765–75.
- Ayininuola, GM, OA Agbede, and SO Franklin. 2009. "Influence of Calcium Sulphate on Subsoil Cohesion and Angle of Friction." *J Appl Sci Res* 5(3): 297–304.
- Batchelder, M, J.D Mather, and J.B Joseph. 1998. "Mineralogical and Chemical Changes in Mineral Liners Incontact with Landfill Leachate." *Waste Management and Research* 16(5): 411–420.
- Brown, K.W, J.C Thomas, and J.W. Green. 1984. "Permeability of Compacted Soils to Solvents, Mixtures, and Petroleum Products." In *Proceedings of 10th Annual Res. Symp.*, , 179–190.
- Burns, S. E., S. L. Bartelt-Hunt, J. A. Smith, and A. Z. Redding. 2006. "Coupled Mechanical and Chemical Behavior of Bentonite Engineered with a Controlled Organic Phase." *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 132(11): 1404–12.
- Chen, J, A Anandarajah, and H Inyang. 2000. "PORE FLUID PROPERTIES AND COMPRESSIBILITY OF KAOLINITE." *Engineering, Geoenvironmental* (September): 798–807.
- Chu, Ya et al. 2017. "Estimation of Heavy Metal-Contaminated Soils' Mechanical Characteristics Using Electrical Resistivity." *Environmental Science and Pollution Research* 24(15): 13561–75.
- Cuevas, Jaime et al. 2009. "Behavior of Kaolinite and Illite-Based Clays as Landfill Barriers." *Applied Clay Science* 42(3–4): 497–509. <http://dx.doi.org/10.1016/j.clay.2008.06.017>.
- Cyrus, S et al. 2010. "Effect of Industrial Wastes on the Physical and Engineering Properties of Soils." In *Indian Geotechnical Conference GEOTrendz, Indian*, 357–360.
- Deng, Liangliang et al. 2017. "Effects of Microstructure of Clay Minerals, Montmorillonite, Kaolinite and Halloysite, on Their Benzene Adsorption Behaviors." *Applied Clay Science* 143(January): 184–91. <http://dx.doi.org/10.1016/j.clay.2017.03.035>.
- Du, YJ et al. 2015. "Impacts of Presence of Lead Contamination in Clayey Soil-Calcium Bentonite Cutoff Wall Backfills." *Appl Clay Sci* 108: 111–122.
- Edil, T. B. et al. 1991. "Effects of Volatile Organic Compounds On Clay Landfill Liner Performance." *Waste Management & Research* 9(3): 171–87.
- Fan, R. D. et al. 2017. "Impacts of Presence of Lead Contamination on Settling Behavior and Microstructure of Clayey Soil - Calcium Bentonite Blends." *Applied Clay Science* 142: 109–19.
- Fernandez, Federico, and Robert M. Quigley. 1985. "Hydraulic Conductivity of Natural Clays Permeated With Simple Liquid Hydrocarbons." *Canadian geotechnical journal* 22(2): 205–14.
- Foreman, D.E, and D.E Daniel. 1986. "Permeation of Compacted Clay with Organic Chemicals." *Journal of Geotechnical Engineering* 112(7): 669–681.
- Francisca, F. M., and D. A. Glatstein. 2010. "Long Term Hydraulic Conductivity of Compacted Soils Permeated with Landfill Leachate." *Applied Clay Science* 49(3): 187–93. <http://dx.doi.org/10.1016/j.clay.2010.05.003>.
- Gajo, A., and M. Maines. 2007. "Mechanical Effects of Aqueous Solutions of Inorganic Acids and Bases on a Natural Active Clay." *Geotechnique* 57(8): 687–99.
- George, Meril. 2011. "Geotechnical Characteristics of Leachate-Contaminated Lateratic." (L).
- Gleason, Mark H., David E. Daniel, and Gerald R. Eykholt. 1997. "Calcium and Sodium Bentonite for Hydraulic Containment Applications." *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 123(5): 438–45.

- Gnanapragasam, Nirmala, Barbara Ann G. Lewis, and Richard J. Finno. 1995. "Microstructural Changes in Sand-Bentonite Soils When Exposed to Aniline." *Journal of Geotechnical Engineering* 121(2): 119–25.
- Green, W.S, G.F Lee, and R.A Jones. 1981. "Clay-Soils Permeability and Hazardous Waste Storage." *J. Water Pollution Control* 53(8): 1347–1354.
- Hamutcu, U, S Arasan, R.K Akbulut, and Z.N Kurt. 2008. "Effect of Salt Solution Temperature on the Liquid Limit of Clay Liners in Solid Waste Disposal Landfills. .," In 8th International Congress on Advances in Civil Engineering, Eastern Mediterranean University, Famagusta, North Cyprus, 65–73.
- Harun, S. N. et al. 2013. "Effects of Leachate on Geotechnical Characteristics of Sandy Clay Soil." *AIP Conference Proceedings* 1571(December 2013): 530–36.
- Jayasekera, Samudra, and A. Mohajerani. 2001. "An Investigation of Long Term Effects of Leachate on Landfill Clay Liners." *Proceedings of 2nd ANZ conference on environmental geotechnics, GeoEnvironment C*(December): 359–64.
- Jefferson, I, and C.D.F. Rogers. 1998. "Liquid Limit and the Temperature Sensitivity of Clays." *Eng. Geol.* 49: 95–109.
- Jo, Ho Young, Craig H. Benson, and Tuncer B. Edil. 2004. "Hydraulic Conductivity and Cation Exchange in Non-Prehydrated and Prehydrated Bentonite Permeated with Weak Inorganic Salt Solutions." *Clays and Clay Minerals* 52(6): 661–79.
- Joseph, J B, J R Styles, S T Yuen, and G Cressey. 2001. "Variations in Clay Mineral Performance in the Presence of Leachates." *Proceeding of the Eighth International Landfill Symposium, Sardinia, Italy.*
- Kalkan, Ekrem, and Suat Akbulut. 2004. "The Positive Effects of Silica Fume on the Permeability, Swelling Pressure and Compressive Strength of Natural Clay Liners." *Engineering Geology* 73(1–2): 145–56.
- Kanmani, Subramaniam, Rajan Gandhimathi, and Kasinathan Muthukkumaran. 2014. "Bioclogging in Porous Media: Influence in Reduction of Hydraulic Conductivity and Organic Contaminants during Synthetic Leachate Permeation." *Journal of Environmental Health Science and Engineering* 12(1): 1–11.
- Karkush, Mahdi O, and Zaineb Abdul. "Investigation the Impacts of Fuel Oil on the Geotechnical Properties of Cohesive Soil." 21(4): 127–37.
- Karthika, T., K. Arumugam, R.K. Sangeetha, and A. Rajesh Kumar. 2022. "Effects on Geotechnical Properties of Soil by Leachate in Landfill Vicinity: Cauvery River, Pallipalayam, India." *Materials Today: Proceedings* (xxxx). <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.12.577>.
- Khan, S. et al. 2008. "Health Risks of Heavy Metals in Contaminated Soils and Food Crops Irrigated with Wastewater in Beijing, China." *Environmental Pollution* 152(3): 686–92.
- Khodary, Safia, Hassan Fath, Abdelazim Negm, and Ahmed Tawfik. 2021. *Environmental Science and Engineering Measuring the Engineering Properties of Landfill Leachate-Contaminated Soil*. Springer International Publishing. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-51210-1_203.
- Khodary, Safia M., Amr Z. Elwakil, Manabu Fujii, and Ahmed Tawfik. 2020. "Effect of Hazardous Industrial Solid Waste Landfill Leachate on the Geotechnical Properties of Clay." *Arabian Journal of Geosciences* 13(15).
- Khodary, Safia M., Hassan Fath, Abdelazim Negm, and Ahmed Tawfik. 2021. "Measuring the Engineering Properties of Landfill Leachate-Contaminated Soil in Egypt." *Euro-Mediterranean Journal for Environmental Integration* 6(1): 1–12. <https://doi.org/10.1007/s41207-020-00232-5>.
- Koerner, G. 2001. "In Situ Temperature Monitoring of Geosynthetics Used in a Landfill. Geotechnical Fabrics Report, May, Pp: 12-13. In: Southen, J.M. and R.K. Rowe, 2005. Modelling of Thermally Induced Desiccation of Geosynthetic Clay Liners." *Geotext. Geomem* 23: 425-442.
- Kolstad, D. C., C. H. Benson, T. B. Edil, and H. Y. Jo. 2004. "Hydraulic Conductivity of a Dense Prehydrated GCL Permeated with Aggressive Inorganic Solutions." *Geosynthetics International* 11(3): 233–41.
- Kurt, Z.N., S. Arasan, U. Hamutcu, and R.K. Akbulut. 2007. "Effect of Salt Solution Temperature on the Liquid Limit of Clay Liners in Solid Waste Disposal Landfills." In *Geotechnical Symposium, Adana, Turkey*, 383–90.
- Lee, Jae-Myung, and Charles D. Shackelford. 2005. "Impact of Bentonite Quality on Hydraulic Conductivity of Geosynthetic Clay Liners." *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 131(1): 64–77.

- Li, Jiang-shan, Qiang Xue, Ping Wang, and Lei Liu. 2013. "Influence of Leachate Pollution on Mechanical Properties of Compacted Clay: A Case Study on Behaviors and Mechanisms." *Engineering Geology* 167: 128–33. <http://dx.doi.org/10.1016/j.enggeo.2013.10.013>.
- Li, X.R, Z.X Yao, and Z.B Cao. 2004. "Study on Physical and Mechanical Property Variation of Polluted Erosive Foundation Soils in Typical District of Jinan." *Rock Soil Mech* 25(8): 1229–1235.
- Li, Yu Chao et al. 2013. "Influences of Operational Practices on Municipal Solid Waste Landfill Storage Capacity." *Waste Management and Research* 31(3): 273–82.
- Lin, Ling-Chu, and Craig H. Benson. 2000. "Effect of Wet-Dry Cycling on Swelling and Hydraulic Conductivity of GCLs." *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 126(1): 40–49.
- Liu, J.Y et al. 2008. "Liu, J.Y., Xu, D.M., Xiong, L., Hills, C., Carey, P., Gardner, K Comparison Ofproperties of Traditional and Accelerated Carbonated Solidified Stabilizedcontaminatedsoils." *J. Environ. Sci.-China* 20(5): 593–598.
- Liu, Xianfeng et al. 2016. "Heavy Metal Retention Properties of Kaolin and Bentonite in a Wide Range of Concentration and Different PH Conditions." *Applied Clay Science* 119: 365–74. <http://dx.doi.org/10.1016/j.clay.2015.09.021>.
- M.V, Villar, Martín P.L, and J M Barcala. 2005. "Modification of Physical , Mechanical and Hydraulic Properties of Bentonite by Thermo-Hydraulic Gradients." *Engineering Geology* 81: 284–97.
- Mishra, Anil Kumar, Masami Ohtsubo, Loretta Li, and Takahiro Higashi. 2005. "Effect of Salt Concentrations on the Permeability and Compressibility of Soil-Bentonite Mixtures." *Journal of the Faculty of Agriculture, Kyushu University* 50(2): 837–49.
- Mitchell, J.K, and F.T Madsen. 1987. "Chemical Effects on Clay Hydraulic Conductivity. *Geotech. Practice for Waste Disposal*." ASCE. *Geotech. Spec. Pub.* 13: 87–116.
- Mitchell, J.K, and R.A Mitchell. 1991. "Stability of LandfillsItaly. Oweis,." In *Proceedings of the Conferenze Di Geotecnica Di Torino*, Polytechnic of Turin, Italy.
- Narasimha Rao, S., and Paul K. Mathew. 1995. "Effects of Exchangeable Cations on Hydraulic Conductivity of a Marine Clay." *Clays and Clay Minerals* 43(4): 433–37.
- Nayak, Sitaram, B. M. Sunil, and S. Shrihari. 2007. "Hydraulic and Compaction Characteristics of Leachate-Contaminated Lateritic Soil." *Engineering Geology* 94(3–4): 137–44.
- Nayak, Sitaram, B. M. Sunil, S. Shrihari, and P. V. Sivapullaiah. 2010. "Interactions Between Soils and Laboratory Simulated Electrolyte Solution." *Geotechnical and Geological Engineering* 28(6): 899–906.
- Ören, Ali Hakan, and R. Çağrı Akar. 2017. "Swelling and Hydraulic Conductivity of Bentonites Permeated with Landfill Leachates." *Applied Clay Science* 142: 81–89.
- Ozcoban, M. S. et al. 2006. "Leachate Removal Rate and the Effect of Leachate on the Hydraulic Conductivity of Natural (Undisturbed) Clay." *Journal of Scientific and Industrial Research* 65(3): 264–69.
- Oztoprak, Sadik, and Berna Pisirici. 2011. "Effects of Micro Structure Changes on the Macro Behaviour of Istanbul (Turkey) Clays Exposed to Landfill Leachate." *Engineering Geology* 121(3–4): 110–22. <http://dx.doi.org/10.1016/j.enggeo.2011.05.005>.
- Paassen, Leon A., and Laurent F. Gareau. 2004. "Effect of Pore Fluid Salinity on Compressibility and Shear Strength Development of Clayey Soils." (April 2004): 327–40.
- Park, Junbom, Cumaraswamy Vipulanandan, Jee Woong Kim, and Myoung Hak Oh. 2006. "Effects of Surfactants and Electrolyte Solutions on the Properties of Soil." *Environmental Geology* 49(7): 977–89.
- Petrov, Robert J., and R. Kerry Rowe. 1997. "Geosynthetic Clay Liner (GCL) - Chemical Compatibility by Hydraulic Conductivity Testing and Factors Impacting Its Performance." *Canadian Geotechnical Journal* 34(6): 863–85.
- Pillai, Sruti, Anju Eizbath Peter, B M Sunil, and S Shrihari. 2014. "Soil Pollution near a Municipal Solid Waste Disposal Site in India." 148–52.
- Prof. B. G. Borude, and Prof. K. A. Patil. 2016. "Changes in Properties of Soil Due to Disposal of Waste." *International Journal of Engineering Research and V5(04)*: 92–94.
- Ratnaweera, Prasanna, and Jay N. Meegoda. 2006a. "Shear Strength and Stress-Strain Behavior of Contaminated Soils." *Geotechnical Testing Journal* 29(2): 133–40.
- Ratnaweera, Prasanna, and Jay N Meegoda. 2006b. "Shear Strength and Stress-Strain Behavior of Contaminated Soils Shear Strength and Stress-Strain Behavior of Contaminated Soils." (March).
- Renou, S. et al. 2008. "Landfill Leachate Treatment: Review and Opportunity." *Journal of Hazardous Materials* 150(3): 468–93.

- Romero, Enrique. 2001. "Temperature Effects on the Hydraulic Behaviour of an Unsaturated Clay." *Geotechnical and Geological Engineering*. https://dl.wqtxts1xzle7.cloudfront.net/50159399/a_3A101313380933320161107-3277-1p5ir4k-with-cover-page-v2.pdf?Expires=1653819629&Signature=DlgIIHam-SBaOdZfsAhjh1CERTjwz454uWqM8hMoz12A6OsTp~9nRMj892xow5KNdp6COtzX1un4689esAnri-tpXdRYg8ZCBjoL~6MrsWHPDHyl4i3Xv.
- Roque, António José, and Gérard Didier. 2006. "Calculating Hydraulic Conductivity of Fine-Grained Soils to Leachates Using Linear Expressions." *Engineering Geology* 85(1–2): 147–57.
- Rowe, R.K. 1987. "Pollutant Transport through Barriers. In: Woods, R.D. (Ed.)," *Proc of the Geotechnical Practice for Waste Disposal*, ASCE Special Publication 13: 159–184.
- Schmitz, Robrecht M., Christian Schroeder, and Robert Charlier. 2004. "Chemo-Mechanical Interactions in Clay: A Correlation between Clay Mineralogy and Atterberg Limits." *Applied Clay Science* 26(1–4 SPEC. ISS.): 351–58.
- Shackelford, Charles D. et al. 2000. "Evaluating the Hydraulic Conductivity of GCLs Permeated with Non-Standard Liquids." *Geotextiles and Geomembranes* 18(2–4): 133–61.
- Shariatmadari, Nader, Behnam Askari, Lasaki Hasan, and Eshghinezhad Pourya. 2018. "Effects of Landfill Leachate on Mechanical Behaviour of Adjacent Soil : A Case Study of Saravan Landfill , Rasht , Iran." *International Journal of Civil Engineering* 16(10): 1503–13. <http://dx.doi.org/10.1007/s40999-018-0311-2>.
- Shariatmadari, Nader, Behnam Askari Lasaki, Hasan Eshghinezhad, and Pourya Alidoust. 2018. "Effects of Landfill Leachate on Mechanical Behaviour of Adjacent Soil: A Case Study of Saravan Landfill, Rasht, Iran." *International Journal of Civil Engineering* 16(10): 1503–13.
- Shivaraju, R, BV Ravishankar, and HS Nanda. 2011. "Engineering Properties of Soil Contaminated with Dyeing Effluent." In *Proceedings of Indian Geotechnical Conference*, , 788–790.
- Shrihari, S., and Sitaram Nayak. 2009. "Shear Strength Characteristics and Chemical Characteristics of Leachate-Contaminated Lateritic Soil." *Engineering Geology* 106(1–2): 20–25. <http://dx.doi.org/10.1016/j.enggeo.2008.12.011>.
- Singh, S K, R K Srivastava, and Siby John. 2009. "Studies on Soil Contamination Due to Used Motor Oil and Its Remediation." 1083(Payatakes 1982): 1077–83.
- Sinha, UN et al. 2003. "Effect of Seepage of Caustic Soda on Foundation and Remedial Measure in Alumina Plant Indian Geotechnical Conference,," In Roorkee, India, Souli, 229–234.
- Sivapullaiah, P.V, and S Savitha. 1997. "Performance of Bentonite Clay Liner with Electrolytic Leachates." In *Proc. of Indian Geotechnical Conference*, Vododara, India, 363–366.
- Sivapullaiah, Puvvadi Venkata, and Manju. 2005. "Kaolinite - Alkali Interaction and Effects on Basic Properties." *Geotechnical and Geological Engineering* 23(5): 601–14.
- Souli, H., J. M. Fleureau, M. Trabelsi Ayadi, and M. Besnard. 2008. "Physicochemical Analysis of Permeability Changes in the Presence of Zinc." *Geoderma* 145(1–2): 1–7.
- Sujatha, Evangelin Ramani, R. Gurucharan, C. Ramprasad, and V. Sornakumar. 2013. "Impact of Municipal Solid Waste Dumping on the Geotechnical Properties of Soil and Ground Water in Ariyamangalam, Trichy, India." *Electronic Journal of Geotechnical Engineering* 18 K(August 2021): 2119–32.
- Sunil, B. M., Sitaram Nayak, and S. Shrihari. 2006. "Effect of PH on the Geotechnical Properties of Laterite." *Engineering Geology* 85(1–2): 197–203.
- Sunil, B. M., S. Shrihari, and Sitaram Nayak. 2008. "Soil-Leachate Interaction and Their Effects on Hydraulic Conductivity and Compaction Characteristics." *12th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics* 2008 3(June): 2380–86.
- Trzciński, Jerzy, David J. Williams, and Marek S. Zbik. 2015. "Can Hydrocarbon Contamination Influence Clay Soil Grain Size Composition?" *Applied Clay Science* 109–110: 49–54.
- Valencia-González, Yamile, Alejandro Quintero-Ramírez, and Luis Augusto Lara-Valencia. 2022. "A Laboratory Methodology for Predicting Variations in the Geotechnical Parameters of Soil Exposed to Solid Waste Leachates in the Field." *Results in Engineering* 14(March): 100398.
- Vij, Dimpal. 2012. "Urbanization and Solid Waste Management in India: Present Practices and Future Challenges." *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 37: 437–47. <http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.03.309>.
- Widomski, Marcin K. et al. 2015. "Shrink-Swell Potential, Hydraulic Conductivity and Geotechnical Properties of Clay Materials for Landfill Liner Construction." *International Agrophysics* 29(3): 365–75.
- Yoshida, H, and Rowe R.K. 2003. "Consideration of Landfill Liner Temperature. Cited in Arasan, S. (2010). Effect of Chemicals on Geotechnical Properties of Clay Liners: A Review. *Research Jour-*

nal of Applied Sciences, Engineering and Technology, 2(8), 765-775." In Proceedings of Eighth International Waste Management and Landfill Symposium, S. Margherita Di Pula, Cagliari, Sardinia, Italy, 9.

Yukselen-Aksoy, Yeliz, Abidin Kaya, and Ali Hakan Ören. 2008. "Seawater Effect on Consistency Limits and Compressibility Characteristics of Clays." *Engineering Geology* 102(1–2): 54–61. <http://dx.doi.org/10.1016/j.enggeo.2008.07.005>.

Szerzők

Béda Gyula	47
Béda Péter	47
Bilal, Ola	169
Borsody János	153
Bögöly Gyula	141
Chihi, Feten	179
Fehér Anna	3
Fülöp Tamás	17, 55, 129
Füzesi Ferdinánd	141
Kerékgyártó Attila	153
Kovács Róbert	3
Krupa Ágnes	153
Pszota Máté	67
Somodi Gábor	153, 163
Somogyfoki Réka	95
Szücs Mátyás	17
Takács Donát M.	55
Ván Péter	37
Varga Gabriella	179
Vásárhelyi Balázs	163